T.C.

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU HALKALARDA TEK, ÇİFT VE TEKRARLI OLUŞUM KODLARI

NİLSU KANDEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HESAPLAMALI BİLİMLER ANABİLİM DALI

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi MUSTAFA ÖZKAN

EDİRNE-2025

Nilsu KANDEMİR'in hazırladığı **"Sonlu Halkalarda Tek, Çift ve Tekrarlı Oluşum Kodları"** başlıklı bu tez, tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından **Hesaplamalı Bilimler** Anabilim Dalında bir **Yüksek lisans tezi** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Dr. Öğr. Üyesi Mustafa ÖZKAN	……
Prof. Dr. Figen ÖKE	……
Doç. Dr. Figen UYSAL	……

Tez Savunma Tarihi: 09/01/2025

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

İmza

Dr. Öğr. Üyesi Mustafa ÖZKAN

Tez Danışmanı ……

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

……

Doç. Dr. Filiz UMAROĞULLARI

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

T. Ü. FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HESAPLAMALI BİLİMLER ANABİLİM DALI YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

DOĞRULUK BEYANI

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında, tüm verilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini, kullanılan verilerde tahrifat yapılmadığını, tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını, kullanılan tüm literatür bilgilerinin bilimsel normlara uygun bir şekilde kaynak gösterilerek ilgili tezde yer aldığını ve bu tezin tamamı ya da herhangi bir bölümünün daha önceden Trakya Üniversitesi ya da farklı bir üniversitede tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

09/01/2025

Nilsu KANDEMİR

İmza

Yüksek Lisans Tezi

Sonlu Halkalarda Tek, Çift ve Tekrarlı Oluşum Kodları

T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü

Hesaplamalı Bilimler Anabilim Dalı

ÖZET

Günümüzde iletişim süreçlerinde temel amaç iletilmek istenen mesajın doğru, etkili ve güvenilir bir biçimde aktarılmasını sağlamaktır. Bu süreç yalnızca bilginin bir noktadan diğerine iletilmesini değil, aynı zamanda depolanan bilginin uygun bir zamanda alınmasını ve kullanılmasını da içerir. Gürültülü ve benzeri iletişim kanallarında, veri aktarımı sırasında oluşabilecek hataları azaltmak ve güvenilir bir iletim sağlamak büyük bir önem taşır. Bu aşamada bilim insanları tarafından geliştirilen kodlama teorisi devreye girer. Bu teori, iletişim hatalarında meydana gelen bozulmaları tespit etmek, düzeltmek ve verilerin doğruluğunu sağlamak gibi konularla ilgilenir.

Cebirsel tanımlar ve kodlama teorisi için temel bilgiler sunulmuştur. Lineer kod tanımı yapılmış ve bu kodların minimum uzaklık (minimum ağırlık) gibi özellikleri incelenmiştir. C bir kod kümesi olmak üzere, C koduna dayalı olarak kodlama yapısının matematiksel temellerine değinilmiş ve çeşitli örnekler gösterilmiştir. Ayrıca bu bölümde Hadamard kodlar ile ilgili bilgiler verilmiştir.

$F_2[v]/\langle v^2 - k \rangle$ halkasında $k = 1$ olması durumunda $v^2 = 1$ koşulu ele alınmıştır. Bu durumda halkaya izomorf olan $F_2 + vF_2$ halkası incelenmiştir. Bu halkada toplama ve çarpma işlemlerinin kapalılıkları tablo halinde sunulmuştur. Halkanın idealleri belirlenmiş ve aralarındaki ilişkiler açıklanmıştır. Ayrıca bu halkada tanımlanan kodların, Hadamard kodlar ve yarı-devirsel kodlar ile bağlantısı gösterilmiştir. $F_2 + vF_2$

halkası üzerinde birinci ve ikinci tekrarlı oluşum kod tanımı yapılmış ve örnekler verilmiştir. Tek ve çift kod tanımları verilmiş ve örnekler sunulmuştur.

$k = v$ olması durumunda $F_2[v]/\langle v^2 - k\rangle$ halkasında, $v^2 = v$ koşulu için $F_2 + vF_2$ halkasında çalışılmalar yapılmıştır. Bu durumda, devirsel kodlar ve yarı-devirsel kodlar arasındaki ilişki verilmiştir. Kod parametrelerini belirleyebilmek için $F_2 + vF_2$ halkasında ağırlık fonksiyonu (uzaklık) incelenmiş ve Lee ağırlığı tanımlanmıştır. Halka ile cisim arasında bağlantıyı veren Gray dönüşümü gösterilmiştir. Bu halka üzerinde birinci ve ikinci tekrarlı oluşum kod tanımı yapılmıştır ve örnekler verilmiştir. Ayrıca tek ve çift kod tanımı yapılmış ve örnekler gösterilmiştir. Bu kodların Gray dönüşümlerine bakılarak diğer kodlar ile ilişkisi incelenmiştir.

$v^3 = 0$ koşulu ile $\mathbb{Z}_2 + v\mathbb{Z}_2 + v^2\mathbb{Z}_2$ sekiz elemanlı halka için özel matrisler temel alınarak kodlar elde edilmiş ve bu kodların parametreleri hesaplanmıştır. Bu parametreler kullanılarak birinci tekrarlı oluşum kodu ve ikinci tekrarlı oluşum kodu tanımlanmış ayrıca bu kodların Gray görüntülerinin parametreleri bulunarak örnekler gösterilmiştir.

Yıl : 2025

Sayfa Sayısı : 86

Anahtar Kelimeler : Halkalar Üzerindeki Kodlar, Lineer Kodlar, Tekrarlı Oluşum Kodlar, Tek ve Çift Kodlar, Gray Dönüşüm, Kodların Parametreleri.

Master's Thesis

Odd, Even and Repetitive Occurrences Codes on Finite Rings

Trakya University Institute of Natural Sciences

Department of Computational Sciences

ABSTRACT

The main purpose of today's communication processes is to ensure that the message to be transmitted is transmitted accurately, effectively and reliably. This process includes not only the transmission of information from one point to another, but also the retrieval and use of stored information at an appropriate time. In noisy and similar communication channels, it is of great importance to reduce errors that may occur during data transmission and to ensure reliable transmission. At this stage, the coding theory developed by scientists comes into play. This theory deals with issues such as detecting and correcting distortions that occur in communication errors and ensuring the accuracy of data.

Algebraic definitions and basic information for coding theory are presented. The linear code definition is made and the properties of these codes such as minimum distance (minimum weight) are examined. Let C be code set, The mathematical foundations of the coding structure based on C the code are mentioned and various examples are shown. In addition, information about Hadamard codes is given in this section.

In the ring $F_2\,[v]\Big/\langle v^2 - k\rangle$, the case of $v^2 = 1$ is discussed in case $k = 1$. In this context, the $F_2 + vF_2$ ring was examined and the structure created by addition and multiplication operations in this ring was presented in a detailed table. Ideals of the ring were determined and the connections between them were explained. In addition, the

relationship of the codes defined in this ring with Hadamard codes and their connection with quasi-cyclic codes was shown. The first and second repetitive occurrences code definitions were made on the $F_2 + vF_2$ ring and examples were given. Odd and even codes are defined and examples were presented.

In the case of $k = v$, studies were made on the $F_2[v]/\langle v^2 - k \rangle$ ring, and for the case of $v^2 = v$, studies were made on the $F_2 + vF_2$ ring. In this case, the relationship between cyclic codes and quasi-cyclic codes was given. In order to determine the code parameters, the minimum distance function and the weight function (distance) in the $F_2 + vF_2$ ring were examined and the Hamming weight was defined. The general Gray transformation that gives the relationship between the ring and the object was shown. The first and second repetitive occurrences code definitions were made on this ring and examples were given. In addition, odd and even codes are defined and examples are shown. Gray transforms of these codes are taken and their relations with other codes are given.

In the case of $v^3 = 0$, codes are obtained based on special matrices for the eight-element ring $\mathbb{Z}_2 + v\mathbb{Z}_2 + v^2\mathbb{Z}_2$ and the parameters of these codes are calculated. Using these parameters, the first repetitive occurrences code and the second repetitive occurrences code are defined and the parameters of the Gray images of these codes are found and examples are shown.

Year : 2025

Number of Pages : 86

Keywords : Codes Over Rings, Linear Codes, Repetitive Occurrences Codes, Odd and Even Codes, Gray Map, Parameters of Codes.

.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma boyunca her türlü bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamda bana destek olan danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Mustafa ÖZKAN' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tüm eğitim hayatım boyunca benden maddi ve manevi her türlü desteklerini esirgemeyen ve her zaman yanımda olan canım aileme teşekkür ederim.

Nilsu KANDEMİR

İÇİNDEKİLER

ÖZET iv

ABSTRACT vi

TEŞEKKÜR viii

İÇİNDEKİLER ix

KISALTMALAR DİZİNİ xi

ŞEKİLLER DİZİNİ xiii

BÖLÜM 1 1

GİRİŞ 1

BÖLÜM 2 4

GENEL TANIMLAR 4

2.1. Cebirsel Tanımlar 4

2.2. Kodlama Teorisi Genel Bilgiler 8

2.3. Lineer Kodlar 11

2.4. Hadamard Kodların Yapısı 18

BÖLÜM 3 21

DÖRT ELEMANLI HALKALARDA TEKRARLI OLUŞUM KODLARI İLE TEK VE ÇİFT KODLAR 21

3.1. $F_2\,[v]/\langle v^2 - k\rangle$ Halkasında $k = 1$ Olması Durumunda $v^2 = 1$ Koşulu ile Üreteç Matrislerin Elde Edilmesi ve Kodların Yapısı 21

3.2. $F_2\,[v]\big/\langle v^2 - k\rangle$ Halkasında $k = v$ Olmasi Durumunda $v^2 = v$ Koşulu ile Üreteç Matrislerin Elde Edilmesi ve Kodların Yapısı 32

BÖLÜM 4 52

SEKİZ ELEMANLI HALKADA TEKRARLI OLUŞUM KODLARI 52

4.1. Sekiz Elemanlı Halka için Üreteç Matrislerin Elde Edilmesi ve Kodların Yapısı 52

4.2. Tekrarlı Oluşum Kodları 55

BÖLÜM 5 68

SONUÇLAR 68

KAYNAKLAR 70

ÖZGEÇMİŞ 73

KISALTMALAR DİZİNİ

(n, M, d) −kod	: Uzunluğu n, eleman sayısı M ve minimum uzaklık d olan bir kod
$[n, k, d]$ −kod	: Uzunluğu n, boyutu k ve minimum uzaklık d olan bir lineer kod
$C^{\perp}$	: C kodun duali
$\|C\|$	: C kodunun eleman sayısı
$d_L(C), (d_H(C))$	: C kodunun Lee uzaklığı (Hamming uzaklığı)
$w_L(C), (w_H(C))$	: C kodunun minimum Lee ağırlığı (Hamming ağırlığı)
G_1	: Grup
R	: Halka
G	: Üreteç matris
H	: Kontrol matris
R_1	: $v^2 = 1$ koşulunda $F_2 + vF_2$ halkası
R_v	: $v^2 = v$ koşulunda $F_2 + vF_2$ halkası
S	: $v^3 = 0$ koşulunda $\mathbb{Z}_2 + v\mathbb{Z}_2 + v^2\mathbb{Z}_2$ halkası
${M_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2}$	: R_1 halkası ile yazılan üreteç matrisleri
${C_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2}$	: ${M_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2}$ matrisleri ile üretilmiş kodlar
${M_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2}$	: R_v halkası ile yazılan üreteç matrisleri
${C_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2}$	: ${M_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2}$ matrisleri ile üretilmiş kodlar
${M_S}^{\alpha_1,\alpha_2}$	: S halkası ile yazılan üreteç matrisleri
${C_S}^{\alpha_1,\alpha_2}$	: ${M_S}^{\alpha_1,\alpha_2}$ matrisleri ile üretilmiş kodlar

Φ_1 : R_1 halkasında Gray dönüşüm

Φ_2 : R_v halkasında Gray dönüşüm

ϕ : S halkasında Gray dönüşüm

τ_1 : R_1 halkasında devirli dönüşüm

τ_2 : R_v halkasında devirli dönüşüm

${}_1C$: Birinci tekrarlı oluşum kodu

${}_2C$: İkinci tekrarlı oluşum kodu

$even(C)$: Çift kod

$odd(C)$: Tek kod

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Kodlama Şeması 10

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Kodlama teorisi, bilgi kuramının bir dalı olup, bilgiyi hatalara karşı korumak ve daha verimli bir şekilde iletilmesini sağlamak için matematiksel yöntemler kullanmaktadır. Halkalar üzerindeki kodlar, modüller ile oluşturulan bir kodlama yöntemidir ve bu kodlar bir lineer kod belirtir. Bu yöntem, kodlama teorisindeki klasik yaklaşımların genişletilmesiyle ortaya çıkmıştır.

1948 yılında Claude Elwood Shannon, "A Mathematical Theory of Communication" adlı makalesini yayımlayarak kodlama teorisinin matematiksel temelini atmıştır (Shannon, 1948).

1950 yılında Richard Hamming, hata düzeltici doğrusal kodları (Hamming kodları) geliştirmiştir. Bu kodlar, sonlu alanlar üzerine tanımlı olup halkalar üzerindeki kodlama teorisinin temellerini atmıştır (Hamming, 1950).

1972 yılında Ian F. Blake, "Codes Over Certain Rings" başlıklı makalesinde halkalar üzerinde kodlama çalışmalarına başlamış ve sonraki yıllarda bu çalışmalar, farklı halkalar üzerinde kodlama yöntemleri geliştirilerek devam etmiştir. Bu süreçte kodlar ve bu kodların matematiksel yapılarla olan ilişkileri incelenmiştir (Blake, 1972).

1999 yılında Wolfmann, $\mathbb{Z}_4$ halkası üzerinde cyclic (devirli) ve negacyclic (negatif devirli) kod yapılarını ele almış, bu kodların Gray dönüşümleri üzerine kapsamlı çalışmalar yapılmıştır (Wolfmann, 1999).

2000 yılında D. S. Krotov, $\mathbb{Z}_4$ halkası üzerinde "Linear Perfect Codes" başlıklı çalışmasında, $\mathbb{Z}_4$ halkaların elemanları ile oluşturulan özel matrisler kullanarak $\mathbb{Z}_2$

mükemmel kod yapılarını analiz etmiştir ve 2001 yılında bu çalışmalarını genişletmiş ve $\mathbb{Z}_4$ üzerinde lineer Hadamard kodlarını tanımlamıştır. Bu çalışmaları, hata düzeltme kodlaması alanında önemli bir yere sahiptir. Bu kodlar, özellikle bilgi teorisi ve hata düzeltme kodlarının optimizasyonunda kullanılır. Tekrarlı oluşum kodları, yeni kodların türetilmesi veya var olanların genişletilmesi için kullanılan bir yöntemdir (Krotov, 2000; Krotov, 2001).

Bölüm 3 ve 4'te yukarıda belirtilen çalışmaların üzerine dört elemanlı halkanın yapısı incelenmiştir. Bu halkalar halkasında $k = 1$ ve $k = v$ olması durumunda $F_2\,[v]\Big/_{\langle v^2 - k\rangle}$ tipindedir. Tanımlanan toplama ve çarpma işlemleri ile $F_2 + vF_2 = \{0,1,v,1+v\}$ halkasına izomorf olduğundan bu 4 elemanlı kümenin elemaları ile çalışılmıştır. Çalışılan dört elemanlı halkalarda üreteç yardımı ile oluşturulan kodların parametreleri belirlenmiştir. Belirlenen kodların Gray dönüşümleri, birinci tekrarlı oluşum kodları, ikinci tekrarlı oluşum kodları, tek kodları ve çift kodların durumları incelenmiştir. Kodların Gray dönüşümlerin Hadamard kod olduğu ve bu Hadamard kodların 2. mertebeden yarı-devirli kod olduğu belirlenmiştir ve birçok örnek sunulmuştur. Birinci tekrarlı oluşum kodların, veri iletimi ve hata düzeltmede önemlidir. Bu kodlar, özellikle iletişimdeki hataların etkisini azaltmak ve veri güvenliğini artırmak için geliştirilmiştir. Bu tür kodlar, iletim sırasında oluşabilecek hatalara karşı sistemi daha dayanıklı hale getirir. Veri kaybı durumunda bile orijinal veriye yaklaşılabilir. Özellikle zayıf iletişim ortamlarında veya gürültülü ortamlarda veri iletiminde güvenliği artırır. İkinci tekrarlı oluşum kodları, karmaşık hata düzeltme algoritmaları ile daha verimli hale gelir ve birden fazla hata durumunda bile veriyi kurtarmaya olanak tanır. Hadamard ve tekrarlı oluşum kodları, hata düzeltme ve veri güvenliği sağlamak amacıyla farklı yöntem kullanır. Hadamard kodları, yüksek verimlilik ve karmaşık hata düzeltme teknikleri sunarken, tekrarlı kodlar basit ama etkili çözümler sunar. Her iki kod türü de veri iletimindeki güvenliği artırmak ve hataları en aza indirmek için önemlidir. Bu kodlar, özellikle telekomünikasyon, uzay iletişimi, bilişim güvenliği ve veri iletimi gibi alanlarda yaygın olarak kullanılır.

Daha sonra, $v^3 = 0$ koşulunda $\mathbb{Z}_2 + v\mathbb{Z}_2 + v^2\mathbb{Z}_2$ sekiz elemanlı halka için özel üreteçler daha önce çalışmalarda kullanılmıştır. Bu çalışmada ise tanımlanan özel matrisler temel alınarak kodlar elde edilmiş ve bu kodların parametreleri hesaplanmıştır.

Bu parametreler kullanılarak birinci tekrarlı oluşum kodu ve ikinci tekrarlı oluşum kodu tanımlanmış ayrıca bu kodların Gray görüntülerin parametreleri bulunarak örnekler gösterilmiştir.

BÖLÜM 2

GENEL TANIMLAR

Bu bölümde kodlama teorisi ile ilgili temel tanımlar, teoremler, önermeler ve genel bilgiler verilmiştir.

2.1. Cebirsel Tanımlar

Bu alt bölümde cebirsel temel bilgiler sunulmuştur.

2.1.1. Tanım: $A \neq \emptyset$ bir küme olsun. $A \times A$'dan A'ya tanımlı her fonksiyona A kümesi üzerinde bir ikili işlem denir (Çallıalp, 2011).

2.1.2. Tanım: $G_1 \neq \emptyset$ küme olmak üzere $*, G_1$üzerinde bir ikili işlem olsun.

Eğer $*$ işlemi aşağıdaki özellikleri sağlarsa $(G_1, *)$ cebirsel yapısına bir grup adı verilir.

i. Her $x_1, y_1, z_1 \in G_1$ için $x_1 * (y_1 * z_1) = (x_1 * y_1) * z_1$ sağlanırsa $*$ işleminin G_1 kümesi üzerinde birleşme özelliği vardır denir.

ii. Bir $e \in G_1$ elemanı vardır ki her $x_1 \in G_1$ için $x_1 * e = e * x_1 = x_1$ sağlanırsa G_1'in $*$ işlemine göre etkisiz elemanı vardır denir.

iii. Her $x_1 \in G_1$ için $x_1 * a = a * x_1 = e$ olacak şekilde bir $a \in G_1$sağlanırsa G_1'deki her elemanın $*$ işlemine göre tersi vardır denir (Çallıalp, 2011).

2.1.3. Teorem: $*, A$ kümesinde birleşme özelliğine sahip bir ikili işlem ve A bu işleme göre bir e etkisiz elemanına sahip olsun.

Bu takdirde,

i. A'da bir x_1 elemanının $*$ işlemine göre tersi varsa tektir.

ii. A'da bir x_1 elemanının $*$ işlemine göre tersi varsa ${x_1}^{-1}$ elemanının da tersi var ve $({x_1}^{-1})^{-1} = x_1$ olur.

iii. x_1 ve y_1 elemanlarının $*$ işlemine göre tersleri varsa $x_1 * y_1$ elemanının da $*$ işlemine göre tersi var ve $(x_1 * y_1)^{-1} = {y_1}^{-1} * {x_1}^{-1}$ olur (Hungerford, 1974).

2.1.4. Not: Yukarıdaki tanım ve teoremlerden grubun etkisiz elemanı ve her elemanın tersinin tek olduğu anlaşılmaktadır.

2.1.5. Tanım: $(G_1, *)$ bir grup olsun. Eğer her $x_1, y_1 \in G_1$ için $x_1 * y_1 = y_1 * x_1$ ise bu gruba bir değişmeli grup veya Abel grubu denir (Çallıalp, 2011).

2.1.6. Örnek: $\mathbb{Z}$ Tamsayılar Kümesi $+$ işlemine göre bir değişmeli gruptur. Değişmeli gruplara örnek olarak $(\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$ ve $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ cebirsel yapıları verilebilir.

2.1.7. Tanım: G_1 bir grup, $A \subseteq G_1$ ve $A \neq 0$ olsun. G_1'in A'yı kapsayan tüm alt gruplarının kesişimine A'nın ürettiği alt grup denir ve $< A >$ ile gösterilir. $< A >$ grubu, G_1'in A'yı kapsayan en küçük alt grubudur (Çallıalp, 2011).
$\mathcal{A} = \{H | A \subseteq H, H < G_1\}$ iken $< A >= \bigcap_{H \in \mathcal{A}} H$'dir.

2.1.8. Tanım: $R \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere, toplama ve çarpma ikili işlemleri ile tanımlı R kümesi aşağıdaki koşullar ile bir halka belirtir;

i. R, toplama işlemine göre değişmeli bir gruptur.

ii. R üzerinde çarpma işlemi birleşme özelliğine sahiptir.

Açıkça her $x_1, y_1, z_1 \in R$ için $(x_1 . y_1) . z_1 = x_1 . (y_1 . z_1)$ olur.

iii. R çarpma işlemi toplama işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliğine sahiptir.

Açıkça her $x_1, y_1, z_1 \in R$ için $x_1 . (y_1 + z_1) = x_1 . y_1 + x_1 . z_1$ ve $(x_1 + y_1) . z_1 = x_1 . z_1 + y_1 . z_1$ olur (Çallıalp, 2011).

2.1.9. Tanım: Bu özelliklere sahip R halkası;

her $x_1, y_1 \in R$ için $x_1 . y_1 = y_1 . x_1$ oluyorsa R'ye değişmeli halka,

her $x_1 \in R$ için $1_R . x_1 = x_1 . 1_R = x_1$ olması halinde $1_R \in R$ varsa R'ye birimli halka, 1_R'de halkanın birim elemanıdır denir (Çallıalp, 2011).

2.1.10. Tanım: 0_R, halkanın etkisiz elemanı ise R halkasında $0_R \neq x_1 \in R$ için $x_1.y_1 = 0_R$ (veya $y_1.x_1 = 0_R$) olmak üzere bir $0_R \neq y_1 \in R$ varsa x_1'e R halkasının sıfır böleni, böyle bir y_1 bulunamıyorsa sıfır böleni değildir denir (Çallıalp, 2011).

2.1.11. Tanım: Sıfır bölensiz bir halkaya tam halka denir. Birimli, değişmeli ve sıfır bölensiz (tam) halkaya da tamlık bölgesi denir (Çallıalp, 2011).

2.1.12. Tanım: R bir halka olsun. $\emptyset \neq S_1 \subseteq R$ olmak üzere S_1 kümesi R'deki işlemlere göre tek başına bir halka oluyorsa S_1'e R halkasının bir alt halkası denir (Hungerford, 1974).

2.1.13. Tanım: $\emptyset \neq A_1 \subset R$olsun. R'nin A_1'i kapsayan tüm alt halkalarının kesişimine A_1'in ürettiği alt halka denir ve $< A_1 >$ ile gösterilir. A_1'in elemanları da $< A_1 >$'nın üreteçleri olur (Çallıalp, 2011).

2.1.14. Tanım: R bir halka ve I, R'nin boştan farklı bir alt halkası olsun. O halde,

i. Her $x, y \in I$ için $x - y \in I$

ii. Her $r' \in R$ ve her $x \in I$ iken $r'.x \in I$ ise sol ideal,

Her $r' \in R$ ve her $x \in I$ iken $x.r' \in I$ ise sağ ideal

olarak isimlendirilmektedir. Hem sol hem de sağ ideal var ise I idealdir (Hungerford, 1974).

2.1.15. Tanım: R bir halka, $S_1 \subseteq R$ olsun. R'nin S_1 kümesini kapsayan tüm ideallerinin kesişimi S_1'in ürettiği idealdir ve (S_1) ile gösterilir. Eğer $S_1 = \{a\}$ tek elemanlı bir küme ise S_1'in ürettiği ideale esas ideal (temel ideal) denir ve (a) ile gösterilir (Hungerford, 1974).

2.1.16. Tanım: Her ideali esas (temel) ideal olan halkaya esas (temel) ideal halkası, her ideali esas (temel) ideal olan tamlık bölgesine ise esas (temel) ideal bölgesi denir (Hungerford, 1974).

2.1.17. Tanım: R bir halka ve I, R'nin bir ideali olsun. Her $a, b \in R$ için R halkasının bir I idealine göre denklik bağıntısı,

$$a \equiv b \ (mod\ I) \iff a - b \in I$$

biçiminde tanımlanır (Hungerford, 1974).

2.1.18. Önerme: R halkasının, bir I idealine göre tanımlanan denklik sınıfları arasında;

$$(a+I)\oplus(b+I)=(a+b)+I, \qquad (a+I)\odot(b+I)=(ab)+I$$

ile belirtilen $\oplus$ ve $\odot$ işlemlerine göre R/I bir halka olur. Bu halkaya R'nin I idealine göre bölüm halkası denir (Çallıalp, 2011).

2.1.19. Tanım: R bir halka ve R'nin bir öz ideali M_1 olsun. Eğer $M_1 \subseteq I \subseteq R$ koşulunu sağlayan her I ideali için $I = M_1$ ya da $I = R$ ise M_1'e R'nin bir maksimal ideali denir (Çallıalp, 2011).

2.1.20. Önerme: m, R'nin (1)'den farklı bir ideali olsun. m'nin maksimal olması için gerek ve yeter şart her $x \in R - m$ için $m + (x) = R$ olmasıdır (Çallıalp, 2011).

2.1.21. Tanım: Tek maksimal ideali olan birimli değişmeli bir halkaya lokal halkadır denir (Çallıalp, 2011).

2.1.22. Tanım: R bir Halka ve $(A,+)$ bir değişmeli grup olsun. Eğer;

$$\cdot : R \times A \longrightarrow A$$

$$(r,a) \mapsto r.a$$

işlemi her $r,s \in R$ ve her $a,b \in A$ için

i. $r.(a+b) = r.a + r.b$
ii. $(r+s).a = r.a + s.a$
iii. $r.(s.a) = (r.s).a$

koşullarını sağlıyorsa A'ya bir sol $R-$modül denir.

A bir sol $R-$modül, her $a \in A$ için birimi 1_R ise ve $1_R.a = a$ sağlanıyorsa A'ya birimsel sol $R-$modül denir.

R bir cisim ise birimsel her sol $R-$modülü bir vektör uzayıdır.

R bir Halka ve $(A,+)$ bir değişmeli grup olsun. Eğer;

$$\cdot : A \times R \longrightarrow A$$

$$(a,r) \mapsto a.r$$

işlemi her $r,s \in R$ ve her $a,b \in A$ için

i. $(a+b).r = a.r + b.r$

ii. $a.(r+s) = a.r + a.s$

iii. $a.(r.s) = (a.r).s$

koşullarını sağlıyorsa A'ya bir sağ R −modül denir.

A bir sağ R −modül, her $a \in A$ için birimi 1_R ise ve $a.1_R = a$ sağlanıyorsa A'ya birimsel sağ R −modül denir.

2.2.16. Tanım: A ve B sıralı iki küme olsun. Her $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$ için $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 < a_2$ veya $a_1 = a_2$ ve $b_1 \leq b_2$ şeklinde tanımlı $\leq$ sıralama bağıntısı lexicographically sıralama denir (Özkan, 2016).

2.2. Kodlama Teorisi Genel Bilgiler

Bu alt bölümde kodlama teorisi için belirli temel tanımlar ve örnekler verilmiştir.

2.2.1. Tanım: $F_q = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q\}$ şeklinde isimlendirilen ve alfabe olarak adlandırılan sonlu kümeden alınan elemanların meydana getirdiği sonlu dizi kümesi q-ary koddur. $(F_q)^n = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) | \alpha_i \in F_q, i = 1,2, \dots, n\}$ kümesinin elemanlarına sözcük denir. Bu kümenin herhangi bir C alt kümesine uzunluğu n olan bir q –ary kod ve C kodunun elemanları kod sözcüğü olarak isimlendirilir.

C kümesindeki kod sözcükleri sayısı, $|C| = M$ şeklinde gösterilir.

n uzunluğunda olan bir C kodunun iletim hızı $(log_q(|C|))/n$ sayısı ile tanımlanır (Ling & Xing, 2004).

2.2.2. Tanım: $(F_q)^n$, F_q sonlu cisiminde n uzunlukta vektör uzayı olmak üzere $(F_q)^n$'nin M elemanlı bir C alt kümesi (n, M) −koddur denir (Ling & Xing, 2004).

Bazı cisimler üzerindeki kodlar şu şekilde isimlendirilir:

$F_2 = \{0,1\}$ ikili (binary) kod, $F_3 = \{0,1,2\}$ üçlü (ternary) kod, ve $F_4 = \{0,1,2,3\}$ dörtlü (quaternary) koddur.

Bazı ikili (binary) kod örnekleri:

$C_1 = \{00,01,10,11\}$ kümesi bir $(2,4)$ kodudur.

İletim hızı $\frac{log_q(|C|)}{n} = \left(\frac{log_2 4}{2}\right) = 1$

$C_2 = \{0101,1100,0011,1010,0110,1001,1111,0000\}$ kümesi bir $(4,8)$ kodudur.

İletim hızı $\frac{log_q(|C|)}{n} = \left(\frac{log_2 8}{4}\right) = \frac{3}{4}$

$C_3 = \{000,111\}$ tekrar kodu $(3,2)$-koddur.

İletim hızı $\frac{log_q(|C|)}{n} = \left(\frac{log_2 2}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Bazı üçlü (ternary) kod örneği:

$C_3 = \{002,102,010,210,121\}$ kümesi bir $(3,5)$ kodudur.

İletim hızı $\frac{log_q(|C|)}{n} = \left(\frac{log_3 5}{3}\right) \cong 0{,}48832$

Bazı dörtlü (quaternary) kod örneği:

$C_4 = \{012301,113300,011020,001021,101330\}$ kümesi bir $(6,5)$ kodudur.

İletim hızı $\frac{log_q(|C|)}{n} = \left(\frac{log_4 5}{6}\right) \cong 0{,}19349$ olur.

2.2.3. Tanım: $u = (u_1, u_2, \dots, u_n), v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in (F_q)^n$ için u ve v arasındaki hamming uzaklığı $d(u,v) = |\{i | u_i \neq v_i\}|$ biçiminde tanımlanır ve

$$d: (F_q)^n \times (F_q)^n \to \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$(u,v) \mapsto d(u,v)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm:

i. Her $u, v \in (F_q)^n$ için $d(u,v) \geq 0, d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v$

ii. Her $u, v \in (F_q)^n$ için $d(u,v) = d(v,u)$

iii. Her $u, v, z \in (F_q)^n$ için $d(u,v) \leq d(u,z) + d(z,v)$ (Üçgen Eşitsizliği)

özelliklerini sağlayan bir metriktir (Ling & Xing, 2004).

2.2.4. Tanım: Bir C kodunun minimum (Hamming) uzaklığı

$d(C) = min\{d(x,y) | \ x \neq y \ ve \ \ x, y \in C\}$ şeklinde tanımlanır (Ling & Xing, 2004).

n uzunluğu, M eleman sayısı ve d minimum uzaklığı olan bir C kodu (n, M, d) −koddur. Burada n, M ve d, C kodunun parametreleridir. Bu parametreler arasında ilişkiler;

M değeri yeteri kadar arttıkça kod çok sayıda mesajı şifreler.

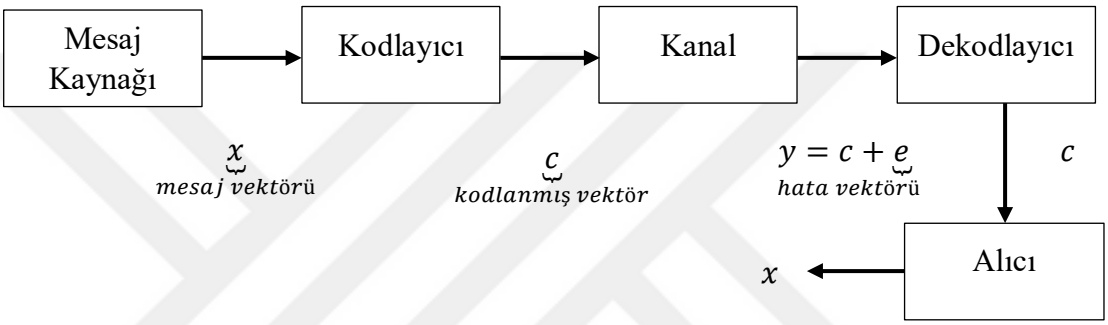
d büyükse kod daha fazla hata düzeltme kapasitesine sahiptir.

M değeri arttıkça d küçülür.

n uzunluğundaki kod sözcükleri azaldıkça iletim hızı artar.

Bu durum oluşturulan kodun kolayca kodlanıp dekodlanmasına olanak sağlar.

Aşağıda iletim kanalı boyunca mesajın alıcıya aktarıldığı Kodlama şeması gösterilmiştir.



Şekil 2.1. Kodlama Şeması

2.2.5. Önerme: C kodun minimum uzaklığı d olsun. O halde;

$d \geq k + 1$ ise C kodunun kod kelimelerinde oluşan k tane hatayı bulur.

$d \geq 2t + 1$ ise C kodunun kod kelimelerinde oluşan t tane hatayı düzeltir (Lin & Costello, 2004).

2.2.6. Sonuç: Minimum uzaklığı olan C kodunun herhangi bir kod sözcüğünde, $d - 1$ tane hata bulmakta ya da $\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$ tane hatayı düzeltmekte kullanılır.

2.2.7. Tanım: C_1 ve C_2 q-ary kodlar olsun.

i. C_2 kodunun her kod sözcüğünün aynı bileşenine permütasyon uygulanarak oluşturulsun.

ii. C_2 kodunun sözcüklerinde iki bileşenin konum değiştirilmesi ile oluşturulsun.

Bu koşullardan C_1 kodu bulunursa C_1 ve C_2 kodları birbirine denk olur (Macwilliams, 1977).

2.2.8. Örnek: $C = \{0101, 0203, 1302, 0022, 0103\}$ quaternary kodu için

$\sigma \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ permütasyonu için C kodunun 2. yerdeki sembollere uygulanırsa,

$C_1 = \{0201, 0330, 1002, 0122, 0203\}$ olur.

Daha sonra 1. yerdekiler ile 3. yerdeki semboller konum değiştirilirse

$C_2 = \{0201, 3300, 0012, 2102, 0203\}$ kodu elde edilir. Buradan C kodu C_2 koduna denktir.

2.2.9. Teorem: Bir q −ary $(n, m, 2t + 1)$ kodu

$$m.\left\{\binom{n}{0} + \binom{n}{1}.(q-1) + \cdots + \binom{n}{t}.(q-1)^t\right\} \leq q^n$$

eşitsizliğini sağlar (Macwilliams, 1977).

2.2.10. Tanım: Bir q −ary $(n, m, 2t + 1)$ kodu

$$m.\left\{\binom{n}{0} + \binom{n}{1}.(q-1) + \cdots + \binom{n}{t}.(q-1)^t\right\} = q^n$$

ise bu kod mükemmel koddur (Macwilliams, 1977).

2.2.11. Örnek: Bir q −ary $(n, 2, n)$ kodu mükemmel koddur.

2.3. Lineer Kodlar

Lineer kodlar, kodlama teorisinde hata düzeltme ve veri iletiminde kullanılan bir kod türüdür. Bu kodlar iletiyi hatalara karşı daha dayanıklı hale getirir. Bu alt bölümde lineer kodlar ile ilgili tanım ve örnekler verilmiştir.

2.3.1. Tanım: $V(n, q) = (F_q)^n$ vektör uzayı , n uzunluğunda ve q^n eleman sayısı olan sonlu bir cisimde tanımlansın ve $V(n, q)$'nun alt vektör uzayı lineer kod olsun. k, C kodunun boyutu ise C kodu bir $[n, k]$ −kod olur. Eğer d, C kodunun minimum uzaklığı ise bu kod bir $[n, k, d]$ −kod olarak adlandırılır (Roman, 1992).

2.3.2. Örnek: $C = \{000, 100, 110, 010, 011, 001, 101, 111\}$ kümesi ${F_2}^3$ cisminin bir alt uzayı olduğundan F_2 üzerinde 3 uzunluğunda bir lineer koddur.

2.3.3. Örnek: C_1 ve C_2 kodları aşağıdaki gibi olsun:

$C_1 = \{10110,11000, 00101, 01110\}$ olduğuna göre C_1 lineer kod olup olmadığını inceleyelim.

$$11000 + 10110 = 01110 \in C_1$$

$$01110 + 11000 = 10110 \in C_1$$

$$10110 + 01110 = 11000 \in C_1$$

$$01110 + 00101 = 01011 \notin C_1$$

$$10110 + 00101 = 10011 \notin C_1$$

$11000 + 00101 = 11101 \notin C_1$ olarak bulunur.

Böylece C_1'deki tüm kod sözlerin toplamına bakıldığında,

$$01110 + 00101 = 01011 \notin C_1$$

$$10110 + 00101 = 10011 \notin C_1$$

$$11000 + 00101 = 11101 \notin C_1$$

olduğundan C_1 lineer bir kod değildir.

Şimdi $C_2 = \{00000, 10001, 11101,01100\}$ kodunun lineer olup olmadığını inceleyelim.

C_2'deki tüm kod sözlerin bileşenlerine bakıldığında,

$$00000 + 01100 = 01100 \in C_2$$

$$10001 + 00000 = 10001 \in C_2$$

$$01100 + 10001 = 11101 \in C_2$$

$$01100 + 11101 = 10001 \in C_2$$

$$00000 + 11101 = 11101 \in C_2$$

$11101 + 10001 = 01100 \in C_2$ bulunur.

Buradan C_2 kodu lineer bir koddur.

2.3.4. Önerme: Her $x, y \in (F_q)^n$ vektör uzayının herhangi iki elemanı ise $d(x,y) = w(x-y)$'dir (Chapman, 1996).

2.3.5. Örnek: $C = \{00111,11010,00122\}$ F_3 cismi üzerinde bir kod ise bu C koduna göre $d(x,y) = w(x-y)$ olduğunu gösterelim.

$d(00111,00122) = 2,$ $w(00111 - 00122) = 2,$

$d(11010,00122) = 5,$ $w(11010 - 00122) = 5,$

$d(00111,11010) = 4$ ve $w(00111 - 11010) = 4$

C kodunun minimum uzaklığı $d(C) = 2$ ve C kodunun minimum ağırlığı $w(C) = 2$ olur. O halde $d(x,y) = w(x-y) = 2$'dir.

2.3.6. Tanım: C kodunun kod sözcükleri arasındaki elemanlarının en küçüğüne sahip olan ağırlığına C kodunun minimum ağırlığı denir ve $w(C)$ ile gösterilir. Buradan $w(C) = min\{w(x,y) | \, x, y \in C, x \neq y\}$ olur (Roman, 1992).

2.3.7. Tanım: C kodu lineer bir kod ise C kodunun minimum uzaklığı minimum ağırlığına eşittir ve $d(C) = w(C)$ ile gösterilir (Roman, 1992).

2.3.8. Örnek: $C = \{0000,\ 0010,0101,0111\}$ lineer kodunun uzaklığını iki şekilde bulabiliriz.

İlk olarak, kodun minimum uzaklığı bulunur ve kod sözcüklerin ikili biçimde birbirine olan d mesafeleri hesaplanır. Buradan,

$d_1(0000,0101) = 2,$ $d_4(0101,0010) = 3,$

$d_2(0000,0010) = 1,$ $d_5(0101,0111) = 1,$

$d_3(0000,0111) = 3$ ve $d_6(0010,0111) = 2$

O halde kodun minimum uzaklığı, $d(C) = \min\{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6\} = 1$'dir.

İkinci olarak, C lineer kod olduğundan dolayı kodun minimum ağırlığına bakılır ve kodun minimum uzaklığına eşit bulunur. Buradan;

$$w_1(0101) = 2$$

$$w_2(0010) = 1$$

$$w_3(0111) = 3$$

şeklindedir ve $w(C) = \min\{w_1, w_2, w_3\} = 1 = d(C)$ olur. Bu nedenle her iki koşul için de minimum uzaklıkları 1 olur.

2.3.9. Tanım: C kodunun üreteç matrisi, $[n, k]$ parametrelerine sahip bir lineer kod olan satırları C kodunun baz vektörlerinden meydana gelen kxn boyutundaki G matrisidir. Eğer G, C kodunun üreteç matrisi ise bu durumda C'ye ait kod sözcükleri, G matrisindeki satırlarının lineer toplamlarından oluşur. O halde, $C = \{x.G | x \in V(k, q)\}$ biçiminde ifade edilir. Elementer satır işlemleri uygulandığında, satırların lineer birleşimlerinden meydana gelen vektör uzayı aynı kalır (Roman, 1992).

2.3.10. Teorem: Üreteç matrisi G olan I_k , $k \times k$ mertebeli birim matris ve A, $k \times (n-k)$ mertebeli bir matris ise $(I_k|A)$ biçiminde ifade edilir. Bu şekli G'nin standart formudur (Çallıalp, 2011).

2.3.11. Örnek: F_2 üzerindeki $C = \{(0000), (1010), (0110), (1100)\}$ kodunun bir bazı $T = \{(0110), (1010)\}$ olduğundan $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{2x4}$ matrisi C'nin üreteç matrisi olur ve C kodu F_2 üzerinde $[4, 2, 2]$ −kod olur.

2.3.12. Tanım: C bir lineer kod ve $[n, k]$ parametrelerine sahip ise,

$C^{\perp} = \{y \in V(n, q) | \langle y, x \rangle = 0, \forall\, x \in C\}$ şeklinde tanımlanan $C^{\perp}$ lineer kodun duali denir.

2.3.13. Teorem: C lineer kod ise $(C^{\perp})^{\perp} = C$ olur. C bir lineer $[n, k]$ −kodu ise C lineer kodun duali de $[n, n-k]$ parametreli kod olur (Roman, 1992).

2.3.14. Tanım: C kodun üreteç matrisi $G = (I_k|A)$ olsun; $G.H^T = 0$ koşulunu oluşturan $H = (-A^T|I_{n-k})$ matrisi C kodunun kontrol matrisidir.

O halde, $G.H^T = (I_k|A).\begin{pmatrix} -A \\ I_{n-k} \end{pmatrix} = -A + A = 0$'dır.

Bu denklem de G üreteç matrisinin satırları ile H kontrol matrisinin satırlarının birbirine diktir. Ayrıca $rank(H) = n - k = rank(C^{\perp})$ olur. O halde H matrisi $C^{\perp}$ kodunun bir üreteç matrisi denir (Roman, 1992).

2.3.15. Örnek: F_2 cismide tanımlı $C = \{(0000), (1010), (0110), (1100)\}$ lineer kod ise bu kodun üreteç matrisi $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (I_2|A)$ şeklinde ve standart formdadır. Burada $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$'dır.

C kodun kontrol matrisi, $H = (-A^T|I_{n-k})$ şeklinde ve $H = (-A^T|I_2)$ olur.

Buradan $H = (-A^T|I_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ elde edilir.

$C^{\perp}$ kodun üreteç matrisi, H kontrol matrisi olduğundan dolayı H kontrol matrisinin satırlarının lineer bileşimi $C^{\perp}$ kodunun kod sözcüklerini verir. Buradan

$C^{\perp} = \{(0000), (1110), (0001), (1111)\}$ olur.

2.3.16. Örnek: $F_2 = \{0,1\}$ üzerinde tanımlı bir $C = [n, k, d] = [7,4,3]$ −kodunun üreteç matrisi $G = \begin{pmatrix} 1111111 \\ 1100010 \\ 1000101 \\ 0110001 \end{pmatrix}$ olduğuna göre $|C|$ kodun eleman sayısı, H kontrol matrisini ve $C^{\perp}$ kodun dualini bulalım.

Eleman sayısı $|C| = q^k = 2^4 = 16$'dır. O halde C kodunun elemanlarını bulalım.

$$C = \alpha_1(1111111) + \alpha_2(1100010) + \alpha_3(1000101) + \alpha_4(0110001)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 ve\ \alpha_4$ skalerleri F_2 cismi üzerinde;

$$c_1 = 0(1111111) + 0(1100010) + 0(1000101) + 0(0110001) = (0000000)$$

$$c_2 = 0(1111111) + 1(1100010) + 0(1000101) + 0(0110001) = (1100010)$$

$$c_3 = 0(1111111) + 0(1100010) + 1(1000101) + 0(0110001) = (1000101)$$

$$c_4 = 0(1111111) + 0(1100010) + 0(1000101) + 1(0110001) = (0110001)$$

$$c_5 = 0(1111111) + 1(1100010) + 1(1000101) + 0(0110001) = (0100111)$$

$$c_6 = 0(1111111) + 1(1100010) + 0(1000101) + 1(0110001) = (1010011)$$

$$c_7 = 0(1111111) + 1(1100010) + 1(1000101) + 1(0110001) = (0010110)$$

$$c_8 = 0(1111111) + 0(1100010) + 1(1000101) + 1(0110001) = (1110100)$$

$$c_9 = 1(1111111) + 1(1100010) + 1(1000101) + 1(0110001) = (1101001)$$

$$c_{10} = 1(1111111) + 1(1100010) + 0(1000101) + 0(0110001) = (0011101)$$

$$c_{11} = 1(1111111) + 0(1100010) + 1(1000101) + 0(0110001) = (0111010)$$

$$c_{12} = 1(1111111) + 0(1100010) + 0(1000101) + 1(0110001) = (1001110)$$

$$c_{13} = 1(1111111) + 1(1100010) + 1(1000101) + 0(0110001) = (0111000)$$

$$c_{14} = 1(1111111) + 1(1100010) + 0(1000101) + 1(0110001) = (1101110)$$

$$c_{15} = 1(1111111) + 0(1100010) + 0(1000101) + 0(0110001) = (1111111)$$

$$c_{16} = 1(1111111) + 0(1100010) + 1(1000101) + 1(0110001) = (0001110)$$

olduğundan C kodunun elemanları,

$C = (c_1, c_2, \dots, c_{16}) = \{(0000000), (1100010), (1000101), (0110001), (0100111), (1010011), (0010110), (1110100), (1101001), (0011101), (0111010), (1001110), (0111000), (1101110), (1111111), (0001110)\}$ olur.

Şimdi G üreteç matrisini elementer işlemler uygulayarak standart forma getirerek C kodunun kontrol matrisi;

$$G = \begin{pmatrix}1111111\\1100010\\1000101\\0110001\end{pmatrix} \xrightarrow{\varepsilon_1 = sat1+sat3 \to sat3} \begin{pmatrix}1111111\\1100010\\0111010\\0110001\end{pmatrix} \xrightarrow{\varepsilon_2 = sat1+sat2 \to sat2} \begin{pmatrix}1111111\\0011101\\0111010\\0110001\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\varepsilon_3 = sat3+sat4 \to sat4} \begin{pmatrix}1111111\\0011101\\0111010\\0001011\end{pmatrix} \xrightarrow{\varepsilon_4 = sat3+sat1 \to sat1} \begin{pmatrix}1000101\\0011101\\0111010\\0001011\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\varepsilon_5 = sat2+sat3 \to sat3} \begin{pmatrix}1000101\\0011101\\0100111\\0001011\end{pmatrix} \xrightarrow{\varepsilon_6 = sat4+sat2 \to sat2} \begin{pmatrix}1000101\\0010110\\0100111\\0001011\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\varepsilon_7 = sat3 \leftrightarrow sat2} \begin{pmatrix}1000101\\0100111\\0010110\\0001011\end{pmatrix}$$ biçimindedir.

O halde G üreteç matrisinin standart formu;

$G = (I_k | A_{k\times(n-k)})$ olduğundan $I_4 = \begin{pmatrix}1000\\0100\\0010\\0001\end{pmatrix}_{4\times4}$ ve $A_{4\times(7-4)} = \begin{pmatrix}101\\111\\110\\011\end{pmatrix}_{4\times3}$ olur.

Buradan C kodunun kontrol matrisi:

$H = (-A^T|I_{n-k}) = (-A^T|I_3) = \begin{pmatrix} 1110100 \\ 0111010 \\ 1101001 \end{pmatrix}$ matrisi olur. H kontrol matrisi, $C^\perp$ kodunun üreteç matrisidir ve H kontrol matrisinin satırlarının lineer bileşimleri de $C^\perp$ kodunun elemanları olan kod sözcüklerini oluşturur.

$|C^\perp| = q^k = 2^3 = 8$ elemanlıdır.

$$C^\perp = \beta_1(1111111) + \beta_2(1100010) + \beta_3(1000101) \text{ olur.}$$

Burada $\beta_1,\ \beta_2\ ve\ \beta_3$ skalerleri F_2 cismi üzerinde;

$$\gamma_1 = 0(1110100) + 0(0111010) + 0(1101001) = (0000000)$$

$$\gamma_2 = 1(1110100) + 0(0111010) + 0(1101001) = (1110100)$$

$$\gamma_3 = 0(1110100) + 1(0111010) + 0(1101001) = (0111010)$$

$$\gamma_4 = 0(1110100) + 0(0111010) + 1(1101001) = (1101001)$$

$$\gamma_5 = 1(1110100) + 1(0111010) + 0(1101001) = (1001110)$$

$$\gamma_6 = 1(1110100) + 0(0111010) + 1(1101001) = (0011101)$$

$$\gamma_7 = 0(1110100) + 1(0111010) + 1(1101001) = (1010011)$$

$$\gamma_8 = 1(1110100) + 1(0111010) + 1(1101001) = (0100111)$$

olduğundan,

$C^\perp(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_8) = \{(0000000), (1110100), (0111010), (1101001), (1001110),$

$(0011101), (1010011), (0100111)\}$ olur.

2.3.17. Tanım: R bir halka, olmak üzere $C \subseteq R^n$ bir lineer kod olmak üzere

$$\tau: R^n \to R^n$$

$$(c_1, c_2, \dots, c_{n-1}) \to \tau(c_1, c_2, \dots, c_{n-1}) = (c_{n-1}, c_1, \dots, c_{n-2})$$

Permütasyonu için $\tau(C) = C$ eşitliği sağlanıyorsa C koduna R üzerinde bir devirli koddur denir.

Bu tanım R halkası yerine F_q cismi üzerinde de verilebilir (Özkan, 2016).

2.3.18. Teorem: F_q üzerinde,

$$\rho: F_q \to {F_q[x]}/{\langle x^n - 1\rangle}$$

$$a = (a_0, a_1 \dots a_{n-1}) \mapsto \rho(a) = a_0, a_1 x \dots a_{n-1}x^{n-1} + \langle x^n - 1\rangle$$

lineer dönüşümünde $C \subseteq F_q^n$'in devirli kod olması için gerekli ve yeterli şart

$\rho(C) \subseteq {F_q[x]}/{\langle x^n - 1\rangle}$'in bir ideali olmasıdır.

Bu teorem F_q cismi yerine R halkasında da sağlanır (Roman, 1992).

2.4. Hadamard Kodların Yapısı

Bu alt bölümde Hadamard matrisleri ve Hadamard kodlarının oluşumu ile temel bilgiler verilmiştir.

2.4.1. Tanım: $M, n \times n$ dereceden bir matris ve M matrisinin transpozu M^t olsun. Eğer M matrisindeki her bir eleman yalnızca -1 ya da 1 değerlerinden meydana geliyor ve $M.M^t = n.I_n$, eşitliği sağlanıyorsa, bu durumda M matrisine Hadamard matrisi denir (Vermani, 2022).

2.4.2. Önerme: M, nxn'lik bir Hadamard matrisi ise M terslenebilir bir matris olur ve M^tmatrisi de bir Hadamard matrisidir (Vermani, 2022).

2.4.3. Önerme: M, nxn'lik bir Hadamard matrisi ise $K_1, K_2 \dots K_n$ matrisleri M'nin satırlarını temsil ediyorsa M matrisinin herhangi bir satırını -1 ile çarptığımızda elde edilen yeni matris de yine Hadamard matris olur (Vermani, 2022).

2.4.4. Önerme:

i. Bir Hadamard matrisi için ilk satır ve ilk sütundaki tüm elemanları 1 olacak şekilde düzenlendiğinde ortaya çıkan matris de yeniden bir Hadamard matrisi olur.
ii. Bir Hadamard matrisinde herhangi iki sütun ya da iki satır yer değiştirirse, bu değişiklikten sonra oluşan matris de bir Hadamard matrisi olur (Vermani, 2022).

2.4.5. Tanım: Hadamard matrisinde ilk satır ve ilk sütundaki bütün elemanları 1 ise bu Hadamard matrisine normalleştirilmiş Hadamard matrisi denir ve M_n ile gösterilir (Vermani, 2022).

2.4.4. Önermesinden; bir Hadamard matrisi varsa bu durumda normalleştirilmiş Hadamard matrisi de bulunmaktadır.

2.4.6. Önerme: $M\ nxn$'lik bir Hadamard matrisi ise $\begin{bmatrix} M & M \\ M & -M \end{bmatrix}$, $2n\ x\ 2n$'lik bir Hadamard matrisi olur (Vermani, 2022).

2.4.7. Teorem: nxn'lik bir Hadamard matrisi varsa $n = 1, 2$ ya da 4'ün bir katı olur (Vermani, 2022).

2.4.8. Tanım: İki Hadamard matrisi için birinin satırları ya da sütunları -1 ile çarpıldığında veya permütasyon uygulandığında diğeri elde edilebiliyorsa bu iki Hadamard matrisi denktir denir (Vermani, 2022).

2.4.9. Tanım: M, nxn'lik bir Hadamard matrisi ise M matrisinin tüm bileşenleri 1'ler yerine $0, -1$'ler yerine 1 verilerek yeniden oluşan nxn'lik matris ikili Hadamard matrisidir ve B_n ile gösterilir. nxn'lik bir M_n normalleştirilmiş Hadamard matrisi 1'ler yerine $0, -1$'ler yerine 1 verilerek yeniden oluşan nxn'lik matrise ikili normalleştirilmiş Hadamard matrisidir ve A_n ile gösterilir.

A_n matrisinin herhangi iki satırı ortagonal ise A_n'in herhangi iki satırı $\frac{n}{2}$ yerde aynıdır. A_n'in herhangi iki satırı $\frac{n}{2}$ yerde farklıdır. A_n'in herhangi iki satırları arasındaki Hamming uzaklığı $\frac{n}{2}$ olur ve A_n'in sıfırdan farklı herhangi bir satırının ağırlığı $\frac{n}{2}$ 'dir (Vermani, 2022).

2.4.10. Tanım: A_n, nxn mertebeden ikili normalleştirilmiş Hadamard matrisi olarak tanımlansın. Bu matrisin ilk sütunu ve ilk satırları çıkartılarak ∂_n kümesi oluşturulsun. ∂_n kümesinin elemanları; $n-1$ uzunluğunda, n tane elemana sahip ve iki eleman arasındaki minimum uzaklığı $\frac{n}{2}$ olan elemanlardır. ∂_n , kümesinin tüm elemanları ve her bir elemanın tümleyenleri bir β_n kümesine yazılsın. β_n kümesinin elemanları; $n-1$ uzunluğunda, $2n$ tane elemana sahip ve iki eleman arasındaki minimum uzaklığı $\frac{n}{2}-1$ ($n > 2$ için) olan elemanlardır. Ayrıca A_n matrisinin her bir satırı ve bunların tümleyenleri

bir $\mathfrak{I}_n$ kümesine yazılsın. $\mathfrak{I}_n$ kümesinin elemanları; n uzunluğunda, $2n$ tane elemana sahip ve iki eleman arasındaki minimum uzaklığı $\frac{n}{2}$ olan elemanlardır.

Yukarıda belirtilen ∂_n , β_n ve $\mathfrak{I}_n$ kümelerine Hadamard küme denir (Vermani, 2022).

2.4.11. Tanım: Bir nxn'lik β_n binary Hadamard matrisinde tüm satırları ve bu satır vektörlerinin tümleyenleri de eklenerek yeni bir küme elde edilsin. Bu kümedeki tüm vektörler kendileri, tümleyenleri ve tamamlayıcıları olarak düzenlendiğindeki kümeye $(2n, 4n, n)$ parametreli Hadamard kod denir (Vermani, 2022).

BÖLÜM 3

DÖRT ELEMANLI HALKALARDA TEKRARLI OLUŞUM KODLARI İLE TEK VE ÇİFT KODLAR

Bu bölümde dört elemanlı iki farklı halka üzerinde tekrarlı oluşum kodları çalışılmış ve tek kodalar ile çift kodların tanımları verilerek aralarındaki ilişkiler sunulmuştur.

3.1. $F_2[v]/\langle v^2 - k\rangle$ Halkasında $k = 1$ Olması Durumunda $v^2 = 1$ Koşulu ile Üreteç Matrislerin Elde Edilmesi ve Kodların Yapısı

$F_2[v]/\langle v^2 - k\rangle$ halkasında $k = 1$ olması durumunda $v^2 = 1$ koşulunda bu halka üzerinde çalışılmıştır. $F_2 + vF_2$ kümesinin belirtilen toplama ve çarpma işlemleri ile bir halka yapısı oluşturduğu tablo yardımıyla ifade edilmiştir. Halkanın idealleri tespit edilerek aralarındaki ilişki sunulmuş ayrıca bu halkada tanımlanan kodların Hadamard kodlar ve yarı-devirli kodlar ile bağlantısı verilmiştir.

$k = 1$ için $v^2 = 1$ durumunu aldığımızda, yani;

$$F_2[v]/\langle v^2 - k\rangle = F_2[v]/\langle v^2 - 1\rangle = \{a_0 + a_1 v + \langle v^2 - 1\rangle | a_0, a_1 \in F_2\}$$

halkasının elemanları;

$$a_0 = 0, a_1 = 0 \; için \; 0 + 0v = 0$$

$$a_0 = 1, a_1 = 0 \; için \; 1 + 0v = 1$$

$$a_0 = 0, a_1 = 1 \text{ için } 0 + 1v = v$$

$$a_0 = 1, a_1 = 1 \text{ için } 1 + 1v = 1 + v$$

şeklinde bulunur.

$F_2 + vF_2$ kümesi aşağıda belirtilen $+$ ve $\cdot$ işlemleri altında bir halka oluşturur.

$+$	0	1	v	$1+v$
0	0	1	v	$1+v$
1	1	0	$1+v$	v
v	v	$1+v$	0	1
$1+v$	$1+v$	v	1	0

$\cdot$	0	1	v	$1+v$
0	0	0	0	0
1	0	1	v	$1+v$
v	0	v	1	$1+v$
$1+v$	0	$1+v$	$1+v$	0

$F_2\,[v]\big/\langle v^2 - 1\rangle$ halkası 4 elemanlı küme oluşturur. Bu küme $F_2 + vF_2 = \{0,1, v, 1+v\}$ halkasına izomorftur.

$R_1 = F_2 + vF_2$ halkasının $v^2 = 1$ koşulundaki idealleri $\langle 0\rangle = \{0\}, \langle 1+v\rangle = \{0,1+v\}$ ve $\langle v\rangle = \langle 1\rangle = R_1$ şeklinde belirlenmiştir. Bu halkanın ideallerinde

$\langle 0\rangle \subseteq \langle 1+v\rangle \subseteq \langle v\rangle = \langle 1\rangle = R_1$ ilişkisi geçerlidir ve R_1 bir lokal halka olur.

Kodun tipini belirleyebilmek için parametresinde minimum uzaklık fonksiyonu önemlidir. Bu bölümde $R_1 = F_2 + vF_2$($v^2 = 1$) halkasında ağırlık fonksiyonu (uzaklık) ve Hamming ağırlığı (uzaklık) tanımlanmıştır. Ayrıca halka ile cisim arasında bağıntıyı veren uygun Gray dönüşümü gösterilmiştir.

3.1.1. Tanım: $R_1 = F_2 + vF_2$ halkası üzerinde;

Her $x \in R_1$ için $w_{L_{R_1}}(x) = \begin{cases} 0\ , & x = 0 \\ 1\ , & x = 1, v \\ 2\ , & x = 1 + v \end{cases}$

şeklinde belirtilen fonksiyona R_1 halkası üzerinde Lee ağırlık fonksiyonudur denir.

Bu durumda her $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in {R_1}^n$ için $w_{L_{R_1}}(x) = \sum_{i=1}^{n} w_{L_{R_1}}(x_i)$ eşitliği sağlanır (Özkan, 2016).

3.1.2. Tanım: F_2 cismi üzerinde;

her $c \in F_2$ için $w_H(0) = 0, w_H(1) = 1$ biçiminde belirtilen fonksiyona F_2 cismi üzerinde Hamming ağırlık fonksiyonudur denir.

O halde, her $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in {F_2}^n$ için $w_H(r) = \sum_{i=1}^{n} w_H(c_i)$ olur (Özkan, 2016).

3.1.3. Tanım: ${R_1}^n$ üzerinde iki eleman arası uzaklık

$u_1, u_2 \in {R_1}^n$ ve $u_1 \neq u_2$ elemanları arasındaki uzaklık $d_{L_{R_1}}(u_1, u_2) = w_{L_{R_1}}(u_1 - u_2)$ olmak üzere, bir C kodunun minimum Lee uzaklığı $d_{L_{R_1}}(C) = min\left\{d_{L_{R_1}}(u_1, u_2)\middle|\ u_1 \neq u_2\ ve\ u_1, u_2 \in C\right\}$ biçiminde tanımlanır.

${F_2}^n$'de Hamming ağırlığı da benzer olarak tanımlanır. ${F_2}^n$'de bir C kodunun minimum Hamming uzaklığı $d_H(C)$ ile gösterilir.

3.1.4. Tanım: $v^2 = 1$ koşulunda $R_1 = F_2 + vF_2$ olmak üzere;

$$\Phi_1 : {R_1}^n \to {F_2}^{2n}$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \to \Phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\Phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Phi_1(a_1 + vb_1, a_2 + vb_2, \dots, , a_n + vb_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n)$$

olarak verilir. Burada $1 \leq i \leq n$ ve $a_i, b_i \in F_2$ için $x_i = a_i + vb_i \in R_1$'dir. Bu tanıma R_1 halkası üzerinde bir Gray dönüşümü adı verilir.

Bu tanımla birlikte $v^2 = 1$ koşulunda $F_2 + vF_2$ halkası üzerinde tanımlanan n uzunluğundaki bir kodun, Φ_1 Gray dönüşümü altındaki görüntüsüne $2n$ uzunluğunda bir ikili kod denir. ${R_1}^n$'de tanımlanan $d_{L_{R_1}}$ Lee uzaklığı ve ${F_2}^{2n}$'de tanımlanan $d_{H_{R_1}}$ Hamming uzaklığı arasında her $a, b \in {R_1}^n$ için $d_{L_{R_1}}(a,b) = d_{H_{R_1}}(\Phi_1(a), \Phi_1(b))$ ilişkisi bulunmaktadır. Buradan Φ_1 Gray dönüşümünün birer izometri olduğu görülür (Özkan, 2016).

3.1.5. Tanım: $v^2 = 1$ koşulunda $R_1 = F_2 + vF_2$ halkasında;

$\alpha_1, \alpha_2 \in Z_+ \cup \{0\}$ için ilk satır elemanları $\{1\}$ kümesinden, diğer satır elemanları $\alpha_2 = 0$ durumunda $\{0,1,v,1+v\}$ kümesinden, $\alpha_1 = 0$ iken $\{0,1+v\}$ kümesinden seçilen ve sütun elemanları lexicographically sıralama yöntemi ile sıralanmıştır. Bu işlemler sonucunda satır sayısı $\alpha_1 + \alpha_2 + 1$ olan özel bir ${M_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2}$ matrisi oluşturulur. Bu matrise R_1 halkasının elemanları yardımı ile yazılan üreteç matrisi adı verilir (Özkan, 2016).

Aşağıda ${M_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2}$ matrislerinin nasıl oluşturulduğuna dair örnekler detaylı bir şekilde gösterilmiştir. Bu örnekler, matrislerin yapılarını ve bileşen seçim süreçlerini netleştirmek amacıyla sunulmuştur.

$${M_{R_1}}^{0,0} = [1]_{1x1}, \quad {M_{R_1}}^{0,1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+v \end{bmatrix}_{2x2}, \quad {M_{R_1}}^{0,2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1+v & 1+v \\ 0 & 1+v & 0 & 1+v \end{bmatrix}_{3x4},$$

$${M_{R_1}}^{0,3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+v & 1+v & 1+v & 1+v \\ 0 & 0 & 1+v & 1+v & 0 & 0 & 1+v & 1+v \\ 0 & 1+v & 0 & 1+v & 0 & 1+v & 0 & 1+v \end{bmatrix}_{4x8},$$

$${M_{R_1}}^{1,0} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & v & 1+v \end{bmatrix}_{2x4},$$

$${M_{R_1}}^{2,0} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & v & v & v & v & 1+v & 1+v & 1+v & 1+v \\ 0 & 1 & v & 1+v & 0 & 1 & v & 1+v & 0 & 1 & v & 1+v & 0 & 1 & v & 1+v \end{bmatrix}_{3x16},$$

$${M_{R_1}}^{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & v & v & 1+v & 1+v \\ 0 & 1+v & 0 & 1+v & 0 & 1+v & 0 & 1+v \end{bmatrix}_{3x8}.$$

$F_2 + vF_2$ halkasında özel matrisler yukarıda tanımlanmıştır ve bu tanımlanan özel matrisler ile kodlar belirlenip kod parametreleri bulunmuştur. Ayrıca dual kodun parametreleri ve dual kodun Gray görüntüsünün parametresi verilmiştir.

3.1.6. Tanım: $v^2 = 1$ koşulunda $R_1 = F_2 + vF_2$ halkasında; Her $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ tamsayıları için ${C_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2} = \{(c_1, c_2).{M_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2} \mid c_1 \in {R_1}^{\alpha_1+1}, c_2 \in {F_2}^{\alpha_2}\}$ şeklinde tanımlanan koda ${M_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2}$ üreteç matrisi ile elde edilmiş ve uzunluğu $n = 2^{2\alpha_1+\alpha_2}$ olan $(n, 4n, n)$ parametreli koddur denir (Özkan, 2016).

3.1.7. Teorem: $\Phi_1, {R_1}^n$ üzerinde Gray dönüşümü olsun. ${C_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2}, {M_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2}$ üreteç matrisli yazılan kod olmak üzere $\Phi_1\left({C_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2}\right)$ kodu, F_2 üzerinde $(2n, 4n, n)$ parametreli bir Hadamard kodu belirtir (Özkan, 2016).

3.1.8. Sonuç: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ durumu dışında; $\left({C_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2}\right)^{\perp}$ dual kodunun parametresi $\left(n, \frac{4^n}{4n}, 4\right)$ olur. Ayrıca $\Phi_1\left(\left({C_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2}\right)^{\perp}\right)$ kodu $\left(2n, \frac{4^n}{4n}, 4\right)$ parametreli bir kod olur (Özkan, 2016).

3.1.9. Tanım: $n = 2^{2\alpha_1,+\alpha_2}$ olmak üzere ${C_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2}$,

$R_1 = F_2 + vF_2$ $(v^2 = 1)$ halkası üzerinde n uzunluğunda bir lineer kod olsun.

$$\tau_1 : {R_1}^n \to {R_1}^n$$

$$(c_1, c_2, \dots, c_n) \to \tau_1(c_1, c_2, \dots, c_n) = (c_n, c_1, \dots, c_{n-1})$$

permütasyonu için $\tau_1\left({C_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2}\right) = {C_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2}$ eşitliği sağlandığında ${C_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2}, R_1$ üzerinde bir devirli koddur denir.

3.1.10. Tanım: $n = 2^{2\alpha_1,+\alpha_2}$ olmak üzere; $D^{\alpha_1,\alpha_2}, F_2$ üzerinde $2n$ uzunluğunda bir lineer kod ise

$$\sigma^{\otimes 2} : {F_2}^{2n} \to {F_2}^{2n}$$

$$(d_1, d_2, \dots, d_{2n}) \to \sigma^{\otimes 2}(d_1, d_2, \dots, d_{2n}) = (d_n, d_1, \dots, d_{n-1}, d_{2n}, d_{n+1}, \dots, d_{2n-1})$$

permütasyonu için $\sigma^{\otimes 2}(D^{\alpha_1,\alpha_2}) = D^{\alpha_1,\alpha_2}$ eşitliği sağlandığında $D^{\alpha_1,\alpha_2}, {F_2}^{2n}$ üzerinde 2.mertebeden bir yarı- devirli koddur denir (Özkan, 2016).

3.1.11. Önerme: τ_1 dönüşümü ${R_1}^n$ üzerinde bir permütasyon, $\sigma^{\otimes 2}$ dönüşümü ${F_2}^{2n}$ üzerinde bir permütasyon ve Φ_1, ${R_1}^n$ den ${F_2}^{2n}$ de tanımlanan Gray dönüşümü iken $\sigma^{\otimes 2} \circ \Phi_1 = \Phi_1 \circ \tau_1$ eşitliği sağlanır (Özkan, 2016).

3.1.12. Teorem: $\alpha_2 \neq 0$ olmak üzere, ${M_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2}$ üreteç matrisi ile belirlenen bir Hadamard kodu 2.mertebeden bir yarı- devirli kod belirtir (Özkan, 2016).

3.1.13. Örnek: ${C_{R_1}}^{0,1}$ kodu için ${M_{R_1}}^{0,1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+v \end{bmatrix}$ üreteç matrisini kullanılarak ${C_{R_1}}^{0,1} = \{(c_1, c_2).{M_{R_1}}^{0,1} |\ c_1 \in R_1,\ c_2 \in F_2\}$ yazılır.

Buradan, ${C_{R_1}}^{0,1}$ kodunu belirleyebilmek için $c_1 \in R_1 = \{0,1, v, 1+v\}$, $c_2 \in F_2 = \{0,1\}$ olmak üzere $(c_1, c_2).\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+v \end{bmatrix}$ ifadesinden $c_1, c_1 + (1+v).\ c_2$ olur. Buradan

${C_{R_1}}^{0,1} = \{00, 01+v, 11, 1v, vv, v1, 1+v1+v, 1+v0\} \subseteq {R_1}^2$ kodunun elemanları için $d_{L_{R_1}}\left({C_{R_1}}^{0,1}\right) = n = 2$ ve $\left|{C_{R_1}}^{0,1}\right| = 4n = 4.2 = 8$ olur. ${C_{R_1}}^{0,1}$ kodunun parametresi $(n, 4n, n) = (2,8,2)$ şeklindedir.

${C_{R_1}}^{0,1}$ kodunun Gray görüntüsü alınırsa;

Buradan $\Phi_1\left({C_{R_1}}^{0,1}\right) = \{0000, 0011, 1111, 1100, 0101, 0110, 1010, 1001\} \subseteq F_2^4$ kodu bulunur.

$\Phi_1\left({C_{R_1}}^{0,1}\right)$ kodu, $(2n, 4n, n) = (4,8,2)$ parametreli bir Hadamard kod olur.

Ayrıca $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ bir normalleştirilmiş Hadamard kodu ise M Hadamard matrisinde $1 \to 0$ ve $-1 \to 1$ yazılarak $M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi elde edilir. Bu matrisin satırlarından, 00 ve 10 vektörleri bulunur. Bu vektörlerin tamamlayıcıları eklenirse $00, 10, 11, 01$ vektörleri elde edilir. Bu vektörlerin tamamlayıcıları alınır ve tekrarlayıcıları ile yeniden düzenlenirse $0011, 1001, 1100, 0110, 0000, 1010, 1111, 0101$ vektörleri bulunur.

Bu vektörlerle meydana gelen küme bir ikili koddur. Bu kodun uzunluğu 4, eleman sayısı 8 ve Hamming ağırlığı 2 dir. Böylece M Hadamard matrisi ile bir Hadamard kodu elde edilir. Bulunan kod $(4,8,2)$ parametreli $\Phi_1\left({C_{R_1}}^{0,1}\right)$ koduna çıkar.

Ayrıca $\left({C_{R_1}}^{0,1}\right)^{\perp} = \{00, 1+v1+v\}$ ve $\Phi_1\left(\left({C_{R_1}}^{0,1}\right)^{\perp}\right) = \{0000,1111\}$ olur. Bunun haricinde ${C_{R_1}}^{0,1}$ kodu, $\tau_1\left({C_{R_1}}^{0,1}\right) = {C_{R_1}}^{0,1}$ şartını sağladığından bir yarı- devirli koddur. Benzer şekilde $\sigma^{\otimes 2}\left(\Phi_1\left({C_{R_1}}^{0,1}\right)\right) = \Phi_1\left({C_{R_1}}^{0,1}\right)$ sağladığından $\Phi_1\left({C_{R_1}}^{0,1}\right)$ kodu, 2. mertebeden bir yarı- devirli koddur (Özkan, 2016).

Aşağıda $R_1 = F_2 + vF_2$ halkası üzerinde birinci ve ikinci tekrarlı oluşum kodu tanımlanmıştır ve örnekler gösterilmiştir.

3.1.14. Tanım: $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ ve $n = 2^{2\alpha_1 + \alpha_2}$ olmak üzere,

${C_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2} = \left\{(c_1, c_2).{M_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2} |\ c_1 \in {R^{\alpha_1+1}}, c_2 \in {F_2}^{\alpha_2}\right\}$, $R_1 = F_2 + vF_2$ halkası üzerinde bir $(n, 4n, n)$ kod, ${S_{R_1}}' = \{00 \dots 0, 1+v1+v \dots 1+v\}$ kümesi, R_1 halkası üzerinde bir $(n, 2, 2n)-$kod ve ${S_{R_1}}'' = \{00 \dots 0, 11 \dots 1, vv \dots v, 1+v1+v \dots 1+v\}$ kümesi R_1 halkası üzerinde bir $(n, 4, n)-$kod olsun.

${S_{R_1}}'$ ve ${C_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2}$ kodları kullanılarak R_1 halkasında elde edilen ${}_1{C_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2} = \left\{(a, a+b) |\ a \in {C_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2},\ b \in {S_{R_1}}'\right\}$ koduna $(2n, 8n, 2n)$ parametreli birinci tekrarlı oluşum kodu denir. Benzer biçimde ${S_{R_1}}''$ ve ${C_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2}$ kodları kullanılarak R_1 halkasında elde edilen ${}_2{C_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2} = \left\{(a, a+b, a+v.b, a+(1+v).b) |\ a \in {C_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2},\ b \in {S_{R_1}}''\right\}$ koduna $(4n, 16n, 4n)$ parametreli ikinci tekrarlı oluşum kodu denir.

3.1.15. Önerme: $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ olmak üzere ${}_1{C_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2}$ kodu ${C_{R_1}}^{\alpha_1,1+\alpha_2}$ koduna ve ${}_2{C_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2}$ kodu ${C_{R_1}}^{\alpha_1+1,\alpha_2}$ koduna denktir. Özel olarak $\alpha_1 = 0$ olduğunda ${}_1{C_{R_1}}^{0,\alpha_2} = {C_{R_1}}^{0,1+\alpha_2}$ 'dir (Krotov, 2001).

3.1.16. Örnek: $(2,8,2)$ parametreli ${C_{R_1}}^{0,1} = \left\{(c_1, c_2).{M_{R_1}}^{0,1} |\ c_1 \in R_1,\ c_2 \in F_2\right\} = \{00,11, vv, 1+v1+v, 0v, 11+v, v0, 1+v1\} \subseteq {R_1}^2$ kodu alınsın.

${S_{R_1}}' = \{00, 1+v1+v\}$ olmak üzere,

${}_1{C_{R_1}}^{0,1} = \left\{(a, a+b) |\ a \in {C_{R_1}}^{0,1},\ b \in {S_{R_1}}'\right\}$

$= \{0000, 001+v1+v, 01+v01+v, 01+v1+v0, 1111, 11vv, 1v1v,$

$1vv1, vvvv, vv11, v1v1, v11v, 1+v1+v1+v1+v, 1+v1+v00, 1+v01+v0,$

$1+v001+v\} \subseteq {R_1}^4$

bir $(4,16,4)$ −koddur. Aynı zamanda bu ${}_1C_{R_1}{}^{0,1}$ kodu daha önce oluşturduğumuz $M_{R_1}{}^{0,2}$ matrisi ile elde edilen $C_{R_1}{}^{0,2}$ koduna denktir hatta özel olarak $\alpha_1 = 0$ durumu gerçekleştiğinden eşit çıkar.

3.1.17. Örnek: $(2,8,2)$ parametresine sahip $C_{R_1}{}^{0,1} = \{(c_1, c_2).M_{R_1}{}^{0,1} |\ c_1 \in R_1,\ c_2 \in F_2\} = \{00,11, vv, 1+v1+v, 0v, 11+v, v0, 1+v1\} \subseteq R_1{}^2$ kodu alınsın.

$S_{R_1}{}'' = \{00,11, vv, 1+v1+v\}$ olmak üzere,

${}_2C_{R_1}{}^{0,1} = \{(a, a+b, a+v.b, a+(1+v).b) |\ a \in C_{R_1}{}^{0,1},\ b \in S_{R_1}{}''\}$

$= \{00000000, 0011vv1+v1+v, 00vv111+v1+v, 001+v1+v1+v1+v00,$

$01+v01+v01+v01+v, 01+v1vv11+v0, 01+vv11v1+v0, 11111111,$

$11001+v1+vvv, 111+v1+v00vv, 11vvvv11, 1v1v1v1v, 1v01+v1+v0v1,$

$1v1+v001+vv1, 1vv1v11v, vvvvvvvv, vv1+v1+v0011, vv001+v1+v11,$

$vv1111vv, v1v1v1v1, v11+v001+v1v, v101+v1+v01v, v11v1vv1,$

$1+v1+v1+v1+v1+v1+v1+v1+v, 1+v1+vvv1100, 1+v1+v11vv00,$

$1+v1+v00001+v1+v, 1+v01+v01+v01+v0, 1+v0v11v01+v,$

$1+v01vv101+v, 1+v001+v01+v1+v0\} \subseteq R_1{}^8$

${}_2C_{R_1}{}^{0,1}$kodu da $M_{R_1}{}^{1,1}$ matrisi ile elde edilen $(8,32,8)$ parametreli $C_{R_1}{}^{1,1}$ koduna eşit bulunur.

3.1.18. Örnek: $M_{R_1}{}^{1,0} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & v & 1+v \end{bmatrix}$ üreteç matrisi ile oluşturulan

$C_{R_1}{}^{1,0} = \{c_1.M_{R_1}{}^{1,0} | c_1 \in R_1{}^2\} = \{0000, 1111, vvvv, 1+v1+v1+v1+v, 01v1+v,$

$101+vv, v1+v01, 1+vv10, 0v0v, 11+v11+v, v0v0, 1+v11+v1, 01+vv1,$

$1v1+v0, v101+v, 1+v01v\}$ kodunun parametresi $(4,16,4)$ −koddur. Buradan,

${}_1C_{R_1}{}^{1,0} = \{(a, a+b) |\ a \in C_{R_1}{}^{1,0},\ b \in S_{R_1}{}'\} = \{00000000, 0011vv1+v1+v,$

$00vv111+v1+v, 001+v1+v1+v1+v00, 01+v01+v01+v01+v,$

$01+v1vv11+v0, 01+vv11v1+v0, 11111111, 11001+v1+vvv,$

$111+v1+v00vv, 11vvvv11, 1v1v1v1v, 1v01+v1+v0v1,$

$1v1+v001+vv1, 1vv1v11v, vvvvvvvv, vv1+v1+v0011, vv001+v1+v11,$

$vv1111vv, v1v1v1v1, v11+v001+v1v, v101+v1+v01v, v11v1vv1,$

$1+v1+v1+v1+v1+v1+v1+v1+v, 1+v1+vvv1100, 1+v1+v11vv00,$

$1+v1+v00001+v1+v, 1+v01+v01+v01+v0, 1+v0v11v01+v,$

$1+v01vv101+v, 1+v001+v01+v1+v0\} \subseteq {R_1}^8$

$(8,32,8)-$koddur. Böylece uygun bileşenlerin yer değiştirmesi ve permütasyon ile ${C_{R_1}}^{1,1}$ kodu elde edilir. Dolayısıyla ${}_1{C_{R_1}}^{1,0}$ kodunun ${C_{R_1}}^{1,1}$ koduna, ayrıca ${}_2{C_{R_1}}^{1,0}$ kodunun ${C_{R_1}}^{2,0}$ koduna denk olduğu görülür.

$R_1 = F_2 + vF_2$ halkası üzerinde tek ve çift kod tanımı yapılmış ve örnekler gösterilmiştir. Bu kodların Gray dönüşümleri alınarak diğer kodlar ile ilişkisi verilmiştir.

3.1.19. Tanım: $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ ve $n = 2^{2\alpha_1 + \alpha_2}$ olmak üzere ${C_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2} \subseteq {R_1}^n$ bir kod olsun. R_1 halkası üzerinde,

$$even\left({C_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2}\right) = \left\{(c_0, c_2, \dots, c_{n-2}) \in {R_1}^{\frac{n}{2}} | (c_0, c_1, c_2 \dots, c_{n-1}) \in {C_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2}\right\}$$

biçimindeki koda ${C_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2}$ nin çift kodudur denir.

Benzer biçimde R_1 halkası üzerinde,

$$odd\left({C_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2}\right) = \left\{(c_1, c_3, \dots, c_{n-1}) \in {R_1}^{\frac{n}{2}} | (c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}) \in {C_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2}\right\}$$

olarak yazılan koda ${C_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2}$ nin tek kodudur denir. Çift ve tek kodların tanımları F_2 cismi üzerinde benzer biçimde verilir (Krotov, 2001).

3.1.20. Önerme: ${C_R}^{\alpha_1,\alpha_2} \subseteq R^n$ bir kod olmak üzere

i. $\alpha_1 \geq 1, \alpha_2 \geq 0$ için

$even\left({C_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2}\right) = odd\left({C_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2}\right) = {C_{R_1}}^{\alpha_1-1,\alpha_2+1}$, dir.

ii. $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 1$ için

$even\left({C_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2}\right) \approx odd\left({C_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2}\right) = {C_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2-1}$, dir (Krotov, 2001).

3.1.21. Önerme: ${C_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2} \subseteq {R_1}^n$ bir kod için, Φ_1, ${R_1}^n$ üzerinde Gray dönüşümü olsun. Bu durumda $even\left(\Phi_1\left({C_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2}\right)\right) = \Phi_1\left(even\left({C_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2}\right)\right)$ sağlanır (Krotov, 2001).

Bu önerme tek kodlar için de benzer biçimde sağlanır.

3.1.22. Örnek: ${}_1{C_{R_1}}^{0,1}$ kodu ${C_{R_1}}^{0,2}$ koduna eşittir ve kod aşağıdaki gibi bulunmuştur.

${C_{R_1}}^{0,2} = \{0000,01+v01+v,001+v1+v,01+v1+v0,1vv1,11vv,$

$1v1v,1111,vvvv,v1v1,vv11,v11v,1+v001+v,1+v1+v00,1+v01+v0,$

$1+v1+v1+v1+v\} \subseteq {R_1}^4$

bu kodun çift kodu $even\left({C_{R_1}}^{0,2}\right) = \{00,01+v,1v,11,vv,v1,1+v0,1+v1+v\}$ olur. Bu kodun Gray görüntüsü,

$\Phi_1\left(even\left({C_{R_1}}^{0,2}\right)\right) = \{0000,0101,1001,1100,0011,0110,1010,1111\}$ olarak bulunur. Bu kodun tek kodu $odd\left({C_{R_1}}^{0,2}\right) = \{00,1+v1+v,01+v,1+v0,1v,v1,vv,11\}$ olur. Bu kodun Gray görüntüsü,

$\Phi_1\left(odd\left({C_{R_1}}^{0,2}\right)\right) = \{0000,1111,0110,0101,1001,1100,0011,1010\}$ olarak bulunur.

${C_{R_1}}^{0,2}$ kodu için çift kod ve tek kod eşittir.

Ayrıca ${C_{R_1}}^{0,2}$ kodunun Gray görüntüsü,

$\Phi_1\left({C_{R_1}}^{0,2}\right) = \{00000000,01010101,00110011,01100110,10010110,11000011,$

$10100101,11110000,00001111,01011010,00111100,01101001,10011001,$

$11001100,10101010,11111111\} \subseteq {F_2}^8$

bu kodun çift kodu,

$even\left(\Phi_1\left({C_{R_1}}^{0,2}\right)\right) = \{0000,0101,0011,0110,1111,1010,1100,1001\}$ olur. O halde $even\left(\Phi_1\left({C_{R_1}}^{0,2}\right)\right) = \Phi_1\left(even\left({C_{R_1}}^{0,2}\right)\right)$ eşitliği gerçeklenir.

3.1.23. Örnek: ${C_{R_1}}^{1,0}$ kodunun çift kodu ve tek kodu eşittir. Ayrıca bu kodlar ${C_{R_1}}^{0,1}$ koduna eşit olur.

${C_{R_1}}^{1,0} = \{c_1.{M_{R_1}}^{1,0} | c_1 \in {R_1}^2\} = \{0000,1111, vvvv, 1+v1+v1+v1+v, 01v1+v,$

$101+vv, v1+v01, 1+vv10, 0v0v, 11+v11+v, v0v0, 1+v11+v1, 01+vv1,$

$1v1+v0, v101+v, 1+v01v\} \subseteq {R_1}^4$ olur.

Buradan, $even({C_{R_1}}^{1,0}) = \{00,11, vv, 1+v1+v, 0v, 11+v, v0, 1+v1\}$

$odd({C_{R_1}}^{1,0}) = \{00,11, vv, 1+v1+v, 0v, 11+v, v0, 1+v1\}$ bulunur.

Ayrıca ${C_{R_1}}^{0,1} = \{00,11, vv, 1+v1+v, 0v, 11+v, v0, 1+v1\}$ kodunun elemanları olarak ortaya çıkar.

O halde $even({C_{R_1}}^{1,0}) = odd({C_{R_1}}^{1,0}) = {C_{R_1}}^{0,1}$ olur.

3.1.24. Örnek: ${C_{R_1}}^{1,0}$ kodu ${C_{R_1}}^{1,1}$ kodunun çift koduna eşittir.

$\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ ve $n = 2^{2\alpha_1+\alpha_2}$ olmak üzere,

${C_{R_1}}^{1,1} = \{(c_1, c_2).{M_{R_1}}^{1,1} |\ c_1 \in {R_1}^2, c_2 \in {F_2}^2\}$ kodu $(8,32,8)$ parametrelidir.

Buradan ${C_{R_1}}^{1,1}$ kodunun çift kodu;

$even({C_{R_1}}^{1,1}) = \{0000,0v0v, 00vv, 0vv0, 1111, 11+v11+v, 111+v1+v,$

$11+v1+v1, 1+v1+v1+v1+v, 1+v11+v1, 1+v1+v11, 1+v111+v,$

$vvvv, v0v0, v101+v, v1+v01\} \subseteq {R_1}^4$ olur.

Bu kodun parametresi $(4,16,4)$'tür. Bu koda uygun permütasyon ve yer değiştirme yapıldığında,

${C_{R_1}}^{1,0} = \{0000,1111, vvvv, 1+v1+v1+v1+v, 01v1+v, 101+vv, v1+v01,$

$1+vv10, 0v0v, 11+v11+v, v0v0, 1+v11+v1, 01+vv1, 1v1+v0, v101+v,$

$1+v01v\} \subseteq {R_1}^4$ kodu elde edilir.

3.1.25. Örnek: ${C_{R_1}}^{0,2}$ kodu tanımlan üreteçle aşağıdaki gibi bulunmuştur.

${C_{R_1}}^{0,2} = \{0000,01+v01+v, 001+v1+v, 01+v1+v0, 1vv1, 11vv, 1v1v,$

$1111, vvvv, v1v1, vv11, v11v, 1+v001+v, 1+v1+v00, 1+v01+v0,$

$1+v1+v1+v1+v\} \subseteq {R_1}^4$ biçimindedir.

Bu kodun çift kodu $even\left({C_{R_1}}^{0,2}\right) = \{00, 01+v, 1v, 11, vv, v1, 1+v0, 1+v1+v\}$ olur. Buradan bu kodun Gray görüntüsü,

$\Phi_1\left(even\left({C_{R_1}}^{0,2}\right)\right) = \{0000,0101,1001,1100,0011,0110,1010,1111\}$ olarak bulunur.

Bu kodun tek kodu $odd\left({C_{R_1}}^{0,2}\right) = \{00, 1+v1+v, 01+v, 1+v0, 1v, v1, vv, 11\}$ olur ve bu kodun Gray görüntüsü,

$\Phi_1\left(odd\left({C_{R_1}}^{0,2}\right)\right) = \{0000,1111,0110,0101,1001,1100,0011,1010\}$ bulunur.

${C_{R_1}}^{0,2}$ kodu için çift ve tek kod eşittir.

Ayrıca ${C_{R_1}}^{0,2}$ kodunun Gray görüntüsü,

$\Phi_1\left({C_{R_1}}^{0,2}\right) = \{00000000,01010101,00110011,01100110,10010110,11000011,$

$10100101,11110000,00001111,01011010,00111100,01101001,10011001,11001100,$

$10101010,111111\} \subseteq {F_2}^8$ olur. Bu kodun çift kodu,

$even\left(\Phi_1\left({C_{R_1}}^{0,2}\right)\right) = \{0000,0101,0011,0110,1111,1010,1100,1001\}$ olur. O halde $even\left(\Phi_1\left({C_{R_1}}^{0,2}\right)\right) = \Phi_1\left(even\left({C_{R_1}}^{0,2}\right)\right)$ eşitliği gerçeklenir.

3.2. ${F_2}[v]/\langle v^2 - k\rangle$ Halkasında $k = v$ Olmasi Durumunda $v^2 = v$ Koşulu ile Üreteç Matrislerin Elde Edilmesi ve Kodların Yapısı

$k = v$ olması durumunda ${F_2[v]}/\langle v^2 - k\rangle$ halkasında, $v^2 = v$ koşulu ile $F_2 + vF_2$ kümesinde çalışılmıştır. $F_2 + vF_2$ kümesinde belirtilen toplama ve çarpma işlemleri ile bir halka yapısı oluşturduğu tablo yardımıyla ifade edilmiştir. Bu halka üzerinde belirtilen kodların devirli kodlar ve yarı-devirli kodlar ile ilişkisi verilmiştir. Ayrıca bu halka üzerinde tek ve çift kodların tanımlarına yer verilmiştir.

$k = v$ için $v^2 = v$ durumunu aldığımızda, yani;

${F_2[v]}/\langle v^2 - k\rangle = {F_2[v]}/\langle v^2 - v\rangle = \{a_0 + a_1 v + \langle v^2 - v\rangle | a_0, a_1 \in F_2\}$ olur.

Bu halkanın elemanları;

$$a_0 = 0, a_1 = 0 \; için \; 0 + 0v = 0$$

$$a_0 = 1, a_1 = 0 \; için \; 1 + 0v = 1$$

$$a_0 = 0, a_1 = 1 \text{ için } 0 + 1v = v$$

$$a_0 = 1, a_1 = 1 \text{ için } 1 + 1v = 1 + v$$

biçiminde bulunur.

$F_2 + vF_2$ kümesi aşağıda tanımlanan $+$ ve $\cdot$ işlemleri ile bir halkadır.

$+$	0	1	v	$1+v$
0	0	1	v	$1+v$
1	1	0	$1+v$	v
v	v	$1+v$	0	1
$1+v$	$1+v$	v	1	0

$\cdot$	0	1	v	$1+v$
0	0	0	0	0
1	0	1	v	$1+v$
v	0	v	v	0
$1+v$	0	$1+v$	0	$1+v$

$F_2\,[v]\Big/_{\langle v^2 - v\rangle}$ halkası, dört elemanlıdır. Bu küme $F_2 + vF_2 = \{0,1,v,1+v\}$ halkasına izomorftur.

Burada halkanın tipini belirlemek için idealleri yazılıp aralarındaki ilişki verilmiştir.

$v^2 = v$ koşulunda $R_v = F_2 + vF_2$ halkasının idealleri $\langle 0\rangle = \{0\}, \langle v\rangle = \{0, v\}, \langle 1+v\rangle = \{0,1+v\}$ ve $\langle 1\rangle = R_v$ dir. Bu halkanın idealleri arasında $\langle 0\rangle \subseteq \langle 1+v\rangle \subseteq \langle 1\rangle = R_v$ ve $\langle 0\rangle \subseteq \langle v\rangle \subseteq \langle 1\rangle = R_v$ ilişkisi geçerlidir ve R_v bir lokal halka değildir.

Kodun tipini belirleyebilmek için parametresinde minimum uzaklık fonksiyonu önemlidir. Bu bölümde $R_v = F_2 + vF_2$($v^2 = v$) halkasında ağırlık fonksiyonu (uzaklık) ve Hamming ağırlığı (uzaklık) tanımlanmıştır. Ayrıca halka ile cisim arasında bağıntıyı veren uygun Gray dönüşümü gösterilmiştir.

3.2.1. Tanım: $R_v = F_2 + vF_2$ halkası üzerinde;

Her $x \in R_v$ için $w_{L_{R_v}}(y) = \begin{cases} 0\ , & y = 0 \\ 1\ , & y = v, 1+v \\ 2\ , & y = 1 \end{cases}$

şeklinde tanımlanan fonksiyon R_v üzerinde Lee ağırlık fonksiyonudur denir.

Bu durumda her $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in {R_v}^n$ için $w_{L_{R_v}}(y) = \sum_{i=1}^{n} w_{L_{R_v}}(y_i)$ eşitliği sağlanır (Özkan, 2016).

F_2 cismi üzerinde Hamming ağırlığı 3.1.2. de verildiği gibidir.

3.2.2. Tanım: ${R_v}^n$ üzerinde iki eleman arası uzaklık;

$u_1, u_2 \in {R_v}^n$ ve $u_1 \neq u_2$ elemanları arasındaki uzaklık $d_{L_{R_v}}(u_1, u_2) = w_{L_{R_v}}(u_1 - u_2)$)olmak üzere, bir C kodunun minimum Lee uzaklığı $d_{L_{R_v}}(C) = min\{d_{L_{R_v}}(u_1, u_2) |\ u_1 \neq u_2\ ve\ u_1, u_2 \in C\}$) biçiminde tanımlanır.

3.2.3. Tanım: $v^2 = v$ koşulunda $R_v = F_2 + vF_2$ olmak üzere;

$$\Phi_2 : {R_v}^n \to {\mathbb{F}_2}^{2n}$$

$$(y_1, y_2, \dots, y_n) \to \Phi_2(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\Phi_2(y_1, y_2, \dots, y_n) = \Phi_2(c_1 + vd_1, c_2 + vd_2, \dots, c_n + vd_n)$$

$$= (c_1, c_2, \dots, c_n, c_1 + d_1, c_2 + d_2, \dots, c_n + d_n)$$

Burada $1 \leq i \leq n$ ve $c_i, d_i \in F_2$ için $y_i = c_i + vd_i \in R_v$ dir. Biçiminde tanımlanan R_v halkası üzerinde Φ_2'ye Gray dönüşümü denir.

Bu tanımla birlikte $v^2 = v$ koşulunda $F_2 + vF_2$ halkası üzerindeki n uzunluğundaki bir kodun, Φ_2 Gray dönüşümü altındaki görüntüsü $2n$ uzunluğunda bir ikili koddur. ${R_v}^n$ üzerinde tanımlanan $d_{L_{R_v}}$ Lee uzaklığı ve ${F_2}^{2n}$ üzerinde tanımlanan d_H Hamming uzaklığı arasında her $a', b' \in {R_v}^n$ için $d_{L_{R_v}}(a', b') = d_H(\Phi_2(a'), \Phi_2(b'))$ ilişkisi vardır. Buradan Φ_2 Gray dönüşümünün izometri olduğu görülür (Özkan, 2016).

3.2.4. Tanım: $v^2 = v$ koşulunda $R_v = F_2 + vF_2$ halkasında;

$\alpha_1, \alpha_2 \in Z_+ \cup \{0\}$ için ilk satır elemanları $\{1\}$ kümesinden, diğer satır elemanları

$\alpha_2 = 0$ durumunda $\{0,1, v, 1+v\}$ kümesinden ve $\alpha_1 = 0$ olduğunda $\{0,1\}$ kümesinden seçilen ve sütunları da lexicographically sıralama yöntemi ile sıralanmıştır. Bu işlemler sonucunda satır sayısı $\alpha_1 + \alpha_2 + 1$ olan özel bir ${M_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2}$ matrisi oluşturulmuştur. Bu matrise R_v halkasının elemanları yardımı ile yazılan üreteç matrisi adı verilir (Özkan, 2016).

Aşağıda ${M_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2}$ matrislerinin nasıl oluşturulduğuna dair örnekler detaylı bir şekilde gösterilmiştir. Bu örnekler, matrislerin yapılarını ve bileşen seçim süreçlerini netleştirmek amacıyla sunulmuştur.

$$ {M_{R_v}}^{0,0} = [1]_{1x1}, \quad {M_{R_v}}^{0,1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2x2}, \quad {M_{R_v}}^{0,2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3x4}, $$

$$ {M_{R_v}}^{0,3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4x8}, \; {M_{R_v}}^{1,0} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & v & 1+v \end{bmatrix}_{2x4}, $$

$$ {M_{R_v}}^{2,0} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & v & v & v & v & 1+v & 1+v & 1+v & 1+v \\ 0 & 1 & v & 1+v & 0 & 1 & v & 1+v & 0 & 1 & v & 1+v & 0 & 1 & v & 1+v \end{bmatrix}_{3x16}, $$

$$ {M_{R_v}}^{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & v & v & 1+v & 1+v \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3x8}. $$

$F_2 + vF_2$ halkasında özel matrisler yukarıda tanımlanmıştır ve bu tanımlanan özel matrisler ile kodlar belirlenip kod parametreleri bulunmuştur. Ayrıca dual kodun parametreleri ve dual kodun Gray görüntüsünün parametresi verilmiştir.

3.2.5. Tanım: $v^2 = v$ koşulunda $R_v = F_2 + vF_2$ halkasında;

Her $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ tamsayıları için ${C_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2} = \{(c_1, c_2).{M_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2} |\ c_1 \in {R_v}^{\alpha_1+1}, c_2 \in {F_2}^{\alpha_2}\}$ şeklinde elde edilen koda ${M_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2}$ üreteç matrisi ile üretilmiş ve uzunluğu $n = 2^{2\alpha_1+\alpha_2}$ olan $(n, 4n, n)$ parametreli koddur denir.

3.2.6. Teorem: Φ_2, ${R_v}^n$ üzerinde Gray dönüşümü olsun. ${C_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2}$, ${M_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2}$ üreteç matrisli yazılan kod olmak üzere $\Phi_2\left({C_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2}\right)$ kodu, F_2 üzerinde $(2n, 4n, n)$ parametreli bir Hadamard kodu belirtir.

3.2.7. Sonuç: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ durumu dışında; $\left({C_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2}\right)^{\perp}$ dual kodunun parametresi $\left(n, \frac{4^n}{4n}, 4\right)$ olur. Ayrıca $\Phi_2\left(\left({C_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2}\right)^{\perp}\right)$ kodu $\left(2n, \frac{4^n}{4n}, 4\right)$ parametreli bir kod olur (Özkan, 2016).

3.2.8. Tanım: $n = 2^{2\alpha_1,+\alpha_2}$ olmak üzere ${C_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2}$, $R_v = F_2 + vF_2$ ($v^2 = v$) halkası üzerinde n uzunluğunda bir lineer kod olsun.

$$\tau_2 \colon {R_v}^n \to {R_v}^n$$

$$(c_1, c_2, \dots, c_n) \to \tau_2(c_1, c_2, \dots, c_n) = (c_n, c_1, \dots, c_{n-1})$$

permütasyonu için $\tau_2\left({C_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2}\right) = {C_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2}$ eşitliği sağlandığında ${C_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2}, R_v$ üzerinde bir devirli kod denir.

3.2.9. Önerme: τ_2 dönüşümü ${R_v}^n$ üzerinde bir permütasyon, $\sigma^{\otimes 2}$ dönüşümü ${F_2}^{2n}$ üzerinde bir permütasyon (3.2.10. da tanımlanan) ve Φ_2, ${R_v}^n$ den ${F_2}^{2n}$ 'e tanımlanan Gray dönüşümü iken $\sigma^{\otimes 2} \circ \Phi_2 = \Phi_2 \circ \tau_2$ eşitliği sağlanır (Özkan, 2016).

3.2.10. Teorem: $\alpha_2 \neq 0$ olmak üzere, ${M_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2}$ üreteç matrisi ile belirlenen bir Hadamard kodu 2.mertebeden bir yarı-devirli kod belirtir (Özkan, 2016).

3.2.11. Örnek: ${C_{R_v}}^{0,1}$ kodunu belirlemek için ${M_{R_v}}^{0,1}$ üreteç matrisini yazalım.

${M_{R_v}}^{0,1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ üreteç matrisi ile üretilen

${C_{R_v}}^{0,1} = \{(c_1, c_2).{M_{R_v}}^{0,1} | c_1 \in R_v,\ c_2 \in F_2\} = \{00,01,11,10, vv, v1 + v, 1 + v1 + v, 1 + vv\} \subseteq {R_v}^2$

kodunun parametresi $(2,8,2)$ biçimindedir.

${C_{R_v}}^{0,1}$ kodunun Gray görüntüsü alındığında;

$\Phi_2\left({C_{R_v}}^{0,1}\right) = \{0000,0011,1111,1100,0101,0110,1010,1001\} \subseteq {F_2}^4$ bulunur.

$\Phi_2\left({C_{R_v}}^{0,1}\right)$ kodunun parametresi $(2n, 4n, n) = (4,8,2)$ olan Hadamard kodudur.

3.2.12. Örnek: ${C_{R_v}}^{0,3}$ kodunu belirlemek için ${M_{R_v}}^{0,3}$ üreteç matrisini yazalım.

${M_{R_v}}^{0,3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ biçimindeyken ${C_{R_v}}^{0,3} = \left\{(c_1, c_2).{M_{R_v}}^{0,3} \mid c_1 \in R_v, c_2 \in {F_2}^3\right\}$ şeklinde olur.

Buradan,

${C_{R_v}}^{0,3} = \{00000000,11111111, vvvvvvvv, 1+v1+v1+v1+v1+v1+v1+v1+v,$

$00001111,11110000, vvvv1+v1+v1+v1+v, 1+v1+v1+v1+v1111,$

$00110011,11001100, vv1+v1+vvv1+v1+v, 1+v1+vvv1+v1+vvv,$

$1010101,10101010, v1+vv1+vv1+vv1+v, 1+vv1+vv1+vv1+vv,$

$01010101,10101010, v1+vv1+vv1+vv1+v, 1+vv1+vv1+vv1+vv,$

$00111100,11000011, vv1+v1+v1+v1+vvv, 1+v1+vvvvv1+v1+v,$

$01010101,10101010, v1+vv1+v1+vv1+vv, 1+vv1+vvv1+vv1+v,$

$01100110,10011001, v1+v1+vvv1+v1+vv, 1+vvv1+v1+vvv1+v,$

$01101001,10010110, v1+v1+vv1+vvv1+v, 1+vvv1+vv1+v1+vv\}$

kodunun parametresi $(8,32,8)$ parametreli bir koddur.

Bu kodun Gray görüntüsü,

$\Phi_2\left({C_{R_v}}^{0,3}\right) = \{0000000000000000,1111111111111111,0000000011111111,1111111100000000,$

$0000111100001111,1111000011110000,0000111111110000,1111000000001111,$

$0011001100110011,1100110011001100,0011001111001100,1100110000110011,$

$0101010101010101,1010101010101010,0101010110101010,1010101001010101,$

$0011110000111100,1100001111000011,0011110011000011,1100001100111100,$

0101010101010101,1010101010101010,0101101010100101,1010010101011010,
0110011001100110,1001100110011001,0110011010011001,1001100101100110,
0110100101101001,1001011010010110,0110100110010110,1001011001101001}
olur. $\Phi_2\left({C_{R_v}}^{0,3}\right)$ kodunun parametresi $(16,32,8)$ olan Hadamard koddur.

3.2.13. Örnek: ${C_{R_v}}^{2,0}$ kodu için ${M_{R_v}}^{2,0}$ üreteç matrisini kullanarak elde edelim.

$$ {M_{R_v}}^{2,0} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & v & v & v & v & 1+v & 1+v & 1+v & 1+v \\ 0 & 1 & v & 1+v & 0 & 1 & v & 1+v & 0 & 1 & v & 1+v & 0 & 1 & v & 1+v \end{bmatrix} $$

için ${C_{R_v}}^{2,0} = \left\{(c_1, c_2, c_3).{M_{R_v}}^{2,0} \middle|\, c_1, c_2, c_3 \in R_v\right\}$ şeklindedir.

Buradan,

$${C_{R_v}}^{2,0} = \{0000000000000000, 01v1 + v01v1 + v01v1 + v01v1 + v,$$
$$0vv00vv00vv00vv0, 01 + v01 + v01 + v01 + v01 + v01 + v01 + v01 + v,$$
$$00001111vvvv1 + v1 + v1 + v1 + v, 01v1 + v101 + vvv1 + v011 + vv10,$$
$$0vv011 + v1 + v1v00v1 + v111 + v, 01 + v01 + v1v1vv1v11 + v01 + v0,$$
$$0000vvvvvvvv0000, 01v1 + vv1 + v01v1 + v0101v1 + v,$$
$$0vv0v00vv00v0vv0, 01 + v01 + vv1v1v1v101 + v01 + v,$$
$$00001 + v1 + v1 + v1 + v00001 + v1 + v1 + v1 + v, 01v1 + v1 + vv1001v1 + v1 + vv10,$$
$$0vv01 + v111 + v0vv01 + v111 + v, 01 + v01 + v1 + v01 + v001 + v01 + v1 + v01 + v0,$$
$$101 + vv01v1 + v1 + vv10v1 + v01, 111100001 + v1 + v1 + v1 + vvvvv,$$
$$11 + v1 + v10vv01 + v111 + vv00v, 1v1v01 + v01 + v1 + v01 + v0v1v1,$$
$$1111111111111111, 101 + vv101 + vv101 + vv101 + vv,$$
$$11 + v1 + v111 + v1 + v111 + v1 + v1, 1v1v1v1v1v1v,$$
$$11111 + v1 + v1 + v1 + v1 + v1 + v1 + v1 + v1111, 101 + vv1 + vv101 + vv10101 + vv,$$
$$11 + v1 + v11 + v111 + v1 + v111 + v11 + v1 + v1, 1v1v1 + v01 + v01 + v01 + v01v1v,$$
$$1111vvvv1111vvvv, 101 + vvv1 + v01101 + vvv1 + v01,$$
$$11 + v1 + v1v00v11 + v1 + v1v00v, 1v1vv1v11v1vv1v1,$$
$$vvvvvvvvvvvvvvvv, v1 + v01v1 + v01v1 + v01v1 + v01,$$

$$v00vv00vv00vv00v, v1v1v1v1v1v1v1v1,$$

$$vvvv1 + v1 + v1 + v1 + v00001111, v1 + v011 + vv1001v1 + v101 + vv,$$

$$v00v1 + v111 + v0vv011 + v1 + v1, v1v11 + v01 + v001 + v01 + v1v1v,$$

$$vvvv00000000vvvv, v1 + v0101v1 + v01v1 + vv1 + v01,$$

$$v00v0vv00vv0v00v, v1v101 + v01 + v01 + v01 + vv1v1,$$

$$vvvv1111vvvv1111, v1 + v01101 + vvv1 + v01101 + vv,$$

$$v00v11 + v1 + v1v00v11 + v1 + v1, v1v11v1vv1v11v1v,$$

$$1 + v1 + v1 + v1 + v1 + v1 + v1 + v1 + v, 1 + vv101 + vv101 + vv101 + vv10,$$

$$1 + v111 + v1 + v111 + v1 + v111 + v1 + v111 + v,$$

$$1 + v01 + v01 + v01 + v01 + v01 + v01 + v01 + v0,$$

$$1 + v1 + v1 + v1 + vvvvv11110000,1 + vv10v1 + v01101 + vv01v1 + v,$$

$$1 + v111 + vv00v11 + v1 + v10vv0,1 + v01 + v0v1v11v1v01 + v01 + v,$$

$$1 + v1 + v1 + v1 + v111111111 + v1 + v1 + v1 + v1 + vv10101 + vv101 + vv1 + vv10,$$

$$1 + v111 + v11 + v1 + v111 + v1 + v11 + v111 + v, 1 + v01 + v01v1v1v1v1 + v01 + v0,$$

$$1 + v1 + v1 + v1 + v00001 + v1 + v1 + v1 + v0000,1 + vv1001v1 + v1 + vv1001v1 + v,$$

$$1 + v111 + v0vv01 + v111 + v0vv0,1 + v01 + v001 + v01 + v1 + v01 + v001 + v01 + v\}$$

kodunun parametresi $(16,64,16)$ olur.

$\Phi_2\left(C_{R_v}{}^{2,0}\right) = \{$0000000000000000000000000000000,0101010101010101011001100110,

0000000000000000011001100110,0101010101010101000000000000000,

0000111100001111000011111110000,0101101001011010011010011001011 0,

0000111100001111011010011001011 0,0101101001011010000011111111 0000,

0000000000000000000011111111 0000,0101010101010101011010011001011 0,

0000000000000000011010011001011 0,0101010101010101000011111111 0000,

0000111100001111000000000000000,0101101001011010011001100110,

0000111100001111011001100110,0101101001011010011001100110,

1010010110100101100101100110 1001,1111000011110000111100000000 1111,

1111000011110000100101100110 1001,1010010110100101111100000000 1111,

11111111111111111111111111111111,10101010101010101001100110011001,
11111111111111111001100110011001,10101010101010101111111111111111,
11111111111111111111000000001111,10101010101010101001011001101001,
11111111111111111001011001101001,10101010101010101111000000001111,
11110000111100001111111111111111,10100101101001011001100110011001,
11110000111100001001100110011001,10100101101001011111111111111111,
00000000000000000111111111111111,01010101010101011001100110011001,
00000000000000001001100110011001,01010101010101011111111111111111,
00001111000011111111000000001111,01011010010110101001011001101001,
00001111000011111001011001101001,01011010010110101111000000001111,
00000000000000001111000000001111,01010101010101011001011001101001,
00000000000000001001011001101001,01010101010101011111000000001111,
00001111000011111111111111111111,01011010010110101001100110011001,
00001111000011111001100110011001,01011010010110101111111111111111,
11111111111111110000000000000000,10101010101010100110011001100110,
11111111111111101100110011001100110,10101010101010100000000000000000,
11110000111100000000111111110000,10100101101001010110100110010110,
11110000111100000110100110010110,10100101101001010000111111110000,
11111111111111110000111111110000,10101010101010100110100110010110,
11111111111111101101001100101110,10101010101010100000111111110000,
11110000111100000000000000000000,10100101101001010110011001100110,
11110000111100000110011001100110,10100101101001010000000000000000}

kodunun parametresi $(32,64,16)$ olan Hadamard koddur.

Aşağıda $R_v = F_2 + vF_2$ halkası üzerinde birinci ve ikinci tekrarlı oluşum kod tanımı yapılmıştır ve örnekler gösterilmiştir.

3.2.14.Tanım: $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ ve $n = 2^{2\alpha_1 + \alpha_2}$ olmak üzere

${C_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2} = \{(c_1, c_2).{M_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2} |\ c_1 \in {R_v}^{\alpha_1+1}, c_2 \in {F_2}^{\alpha_2}\}$, $R_v = F_2 + vF_2$ halkası üzerinde bir $(n, 4n, n)$ −kod olmak üzere ${S_{R_v}}' = \{00 \dots 0,11 \dots 1\}$ kümesi, R_v halkası üzerinde bir $(n, 2, 2n)$ −kod, ${S_{R_v}}'' = \{00 \dots 0,11 \dots 1, vv \dots v, 1 + v1 + v \dots 1 + v\}$ kümesi, R_v halkası üzerinde bir $(n, 4, n)$ −kod olsun.

${S_{R_v}}'$ ve ${C_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2}$ kodları kullanılarak R_v halkasında elde edilen ${}_1{C_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2} = \{(a, a + b) |\ a \in {C_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2},\ b \in {S_{R_v}}'\}$ koduna $(2n, 8n, 2n)$ parametreli birinci tekrarlı oluşum kodu denir.

Yine ${S_{R_v}}''$ ve ${C_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2}$ kodları kullanılarak S halkası üzerinde elde edilen ${}_2{C_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2} = \{(a, a + b, a + v.b, a + (1 + v).b) |\ a \in {C_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2},\ b \in {S_{R_v}}''\}$

koduna $(4n, 16n, 4n)$ parametreli ikinci tekrarlı oluşum kodudur denir.

3.2.15. Önerme: $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ olmak üzere ${}_1{C_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2}$ kodu ${C_{R_v}}^{\alpha_1,1+\alpha_2}$ koduna ve ${}_2{C_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2}$ kodu ${C_{R_v}}^{\alpha_1+1,\alpha_2}$ koduna denktir. Özel olarak $\alpha_1 = 0$ olduğunda ${}_1{C_{R_v}}^{0,\alpha_2} = {C_{R_v}}^{1,\alpha_2}$ dir (Krotov, 2001).

3.2.16. Örnek: $(2,8,2)$ parametreli ${C_{R_v}}^{0,1} = \{(c_1, c_2).{M_{R_v}}^{0,1} |\ c_1 \in R_v,\ c_2 \in F_2\} = \{00,01,11,10, vv, v1 + v, 1 + v1 + v, 1 + vv\} \subseteq {R_v}^2$ kodu alınsın.

${S_{R_v}}' = \{00,11\}$ olmak üzere,

${}_1{C_{R_v}}^{0,1} = \{(a, a + b) |\ a \in {C_{R_v}}^{0,1},\ b \in {S_{R_v}}'\}$

$= \{0000,0011,0101,0110,1111,1100,1010,1001, vvvv, vv1 + v1 + v,$

$v1 + v1 + vv, v1 + vv1 + v, 1 + v1 + v1 + v1 + v, 1 + v1 + vvv, 1 + vv1 + vv,$

$1 + vvv1 + v \subseteq {R_v}^4$

bir $(4,16,4)$ −koddur. Aynı zamanda bu ${}_1{C_{R_v}}^{0,1}$ kodu daha önce oluşturduğumuz ${M_{R_v}}^{0,2}$ matrisi ile elde edilen ${C_{R_v}}^{0,2}$ koduna eşittir.

3.2.17. Örnek: $(2,8,2)$ parametreli ${C_{R_v}}^{0,1} = \{(c_1, c_2).{M_{R_v}}^{0,1} |\ c_1 \in R_v,\ c_2 \in F_2\} = \{00,01,11,10, vv, v1 + v, 1 + v1 + v, 1 + vv\} \subseteq {R_v}^2$ kodu alınsın.

${S_{R_v}}'' = \{00,11, vv, 1 + v1 + v\}$ olmak üzere,

$${}_2C_{R_v}{}^{0,1} = \{(a, a+b, a+v.b, a+(1+v).b) |\ a \in C_{R_v}{}^{0,1},\ b \in S_{R_v}{}''\}$$

$$= \{00000000, 0011vv1+v1+v, 00vvvv00, 001+v1+v001+v1+v,$$

$$01010101, 0110v1+v1+vv, 01v1+vv1+v01, 011+vv011+vv,$$

$$11111111, 11001+v1+vvv, 111+v1+v1+v1+v11, 11vv11vv,$$

$$10101010, 10011+vvv1+v, 101+vv1+vv10, 10v1+v10v1+v,$$

$$vvvvvvvv, vv1+v1+v0011, vv0000vv, vv11vv11, 1+vv1+vv1+vv1+v,$$

$$v1+v1+vv0110, v1+v0101v1+v, 1+v1+v1+v1+v1+v1+v1+v1+v1+v,$$

$$1+vvv1100, 1+v1+v11111+v1+v, 1+v1+v001+v1+v00,$$

$$1+vv1+vv1+vv1+vv, 1+vvv1+v1001, 1+vv10101+vv,$$

$$1+vv011+vv01, 1+vv011+vv01\} \subseteq R_v{}^8$$

kodu da $M_{R_v}{}^{1,1}$ matrisi ile üretilen $(8,32,8)$ parametreli $C_{R_v}{}^{1,1}$ koduna denktir.

3.2.18. Örnek: $(8,16,8)$ parametresine sahip $C_{R_v}{}^{0,3} = \{(c_1, c_2).M_{R_v}{}^{0,3} |\ c_1 \in R_v, c_2 \in {F_2}^3\}$ kodu alınsın.

$S_{R_v}{}' = \{00000000, 11111111\}$ olmak üzere,

$${}_1C_{R_v}{}^{0,3} = \{(a, a+b) |\ a \in C_{R_v}{}^{0,3},\ b \in S_{R_v}{}'\}$$

$$= \{0000000000000000, 0000000011111111, 1111111111111111, 1111111100000000,$$

$$vvvvvvvvvvvvvvvv, vvvvvvvv1+v1+v1+v1+v1+v1+v1+v,$$

$$1+v1+v1+v1+v1+v1+v1+v1+v1+v1+v1+v1+v1+v1+v1+v,$$

$$1+v1+v1+v1+v1+v1+v1+v1+vvvvvvvvv, 0000111100001111,$$

$$0000111111110000, 1111000011110000, 1111000000001111,$$

$$vvvv1+v1+v1+v1+vvvvv1+v1+v1+v1+v,$$

$$vvvv1+v1+v1+v1+v1+v1+v1+v1+vvvvv,$$

$$1+v1+v1+v1+vvvvv1+v1+v1+v1+vvvvv,$$

$$1+v1+v1+v1+vvvvvvvvv1+v1+v1+v1+v,$$

$$0011001100110011, 0011001111001100, 1100110011001100, 1100110000110011,$$

$$vv1 + v1 + vvv1 + v1 + vvv1 + v1 + vvv1 + v1 + v,$$

$$vv1 + v1 + vvv1 + v1 + v1 + v1 + v001 + v1 + v00,$$

$$1 + v1 + vvv1 + v1 + vvv1 + v1 + vvv1 + v1 + vvv,$$

$$1 + v1 + vvv1 + v1 + vvvvv1 + v1 + vvv1 + v1 + v,$$

0101010101010101,0101010110101010,1010101010101010,1010101001010101,

$$v1 + vv1 + vv1 + vv1 + vv1 + vv1 + vv1 + vv1 + v,$$

$$v1 + vv1 + vv1 + vv1 + v1 + vv1 + vv1 + vv1 + vv,$$

$$1 + vv1 + vv1 + vv1 + vv1 + vv1 + vv1 + vv1 + vv,$$

$$1 + vv1 + vv1 + vv1 + vvv1 + vv1 + vv1 + vv1 + v,$$

0011110000111100,0011110011000011,1100001111000011,1100001100111100,

$$vv1 + v1 + v1 + v1 + vvvvv1 + v1 + v1 + v1 + vvv,$$

$$vv1 + v1 + v1 + v1 + vvv1 + v1 + vvvvv1 + v1 + v,$$

$$1 + v1 + vvvvv1 + v1 + v1 + v1 + vvvvv1 + v1 + v,$$

$$1 + v1 + vvvvv1 + v1 + vvv1 + v1 + v1 + v1 + vvv,$$

0101010101010101,0101010110101010,1010101010101010,1010101001010101,

$$v1 + vv1 + v1 + vv1 + vvv1 + vv1 + v1 + vv1 + vv,$$

$$v1 + vv1 + v1 + vv1 + vv1 + vv1 + vvv1 + vv1 + v,$$

$$1 + vv1 + vvv1 + vv1 + v1 + vv1 + vvv1 + vv1 + v,$$

$$1 + vv1 + vvv1 + vv1 + vv1 + vv1 + v1 + vv1 + vv,$$

0110011001100110,0110011010011001,1001100110011001,1001100101100110,

$$v1 + v1 + vvv1 + v1 + vvv1 + v1 + vvv1 + v1 + vv,$$

$$v1 + v1 + vvv1 + v1 + vv1 + vvv1 + v1 + vvv1 + v,$$

$$1 + vvv1 + v1 + vvv1 + v1 + vvv1 + v1 + vvv1 + v,$$

$$1 + vvv1 + v1 + vvv1 + vv1 + v1 + vvv1 + v1 + vv,$$

0110100101101001,0110100110010110,1001011010010110,1001011001101001,

$$v1 + v1 + vv1 + vvv1 + vv1 + v1 + vv1 + vvv1 + v,$$

$$v1 + v1 + vv1 + vvv1 + v1 + vvv1 + vv1 + v1 + vv,$$

$$1 + vvv1 + vv1 + v1 + vv1 + vvv1 + vv1 + v1 + vv,$$

$$1 + vvv1 + vv1 + v1 + vvv1 + v1 + vv1 + vvv1 + v\}$$

bir $(16, 64, 16)$ −koddur.

3.2.19. Örnek: $(8,16,8)$ parametreli ${C_{R_v}}^{0,3} = \{(c_1, c_2).{M_{R_v}}^{0,3} |\, c_1 \in R_v, c_2 \in {F_2}^3\}$ kodu alınsın.

${S_{R_v}}'' = \{00000000, 11111111, vvvvvvvv, 1 + v1 + v1 + v1 + v1 + v1 + v1 + v1 + v\}$ olmak üzere,

${}_2{C_{R_v}}^{0,3} = \{(a, a + b, a + v.b, a + (1 + v).b) |\, a \in {C_{R_v}}^{0,3},\ b \in {S_{R_v}}''\}$ olur.

${}_2{C_{R_v}}^{0,3}$ kodu $(32, 128, 32)$ parametreli bir kod olur.

3.2.20. Örnek: $(16,64,16)$ parametreli ${C_{R_v}}^{2,0} = \{(c_1, c_2, c_3).{M_{R_v}}^{2,0} |\, c_1, c_2, c_3 \in R_v\}$ kodu alınsın.

${S_{R_v}}' = \{0000000000000000, 1111111111111111\}$ olmak üzere

${}_1{C_{R_v}}^{2,0}$ kodu $(32, 128, 32)$ parametreli bir koddur.

3.2.21. Örnek: $(16,64,16)$ parametreli ${C_{R_v}}^{2,0} = \{(c_1, c_2, c_3).{M_{R_v}}^{2,0} |\, c_1, c_2, c_3 \in R_v\}$ kodu alınsın.

${S_{R_v}}'' = \{0000000000000000, 1111111111111111, vvvvvvvvvvvvvvvv,$

$1 + v1 + v1 + v1 + v1 + v1 + v1 + v1 + v1 + v1 + v1 + v1 + v1 + v1 + v1 + v\}$

olmak üzere,

${}_2{C_{R_v}}^{2,0} = \{(a, a + b, a + v.b, a + (1 + v).b) |\, a \in {C_{R_v}}^{2,0},\ b \in {S_{R_v}}''\}$ olur. Böylece

${}_2{C_{R_v}}^{2,0}$ kodu $(64,256,64)$ parametresine sahip olur.

$R_v = F_2 + vF_2$ halkası üzerinde tek ve çift kod tanımı yapılmış ve örnekler gösterilmiştir. Bu kodların Gray dönüşümleri alınarak diğer kodlar ile ilişkisi verilmiştir.

3.2.22. Tanım: $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ ve $n = 2^{2\alpha_1 + \alpha_2}$ olmak üzere ${C_{R_v}}^{\alpha_1, \alpha_2} \subseteq {R_v}^n$ bir kod olsun. R_v halkası üzerinde,

$$odd\left({C_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2}\right)=\left\{(c_1,c_3,\dots,c_{n-1})\in {R_v}^{\frac{n}{2}}|(c_0,c_1,c_2,\dots,c_{n-1})\in {C_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2}\right\}$$

biçiminde tanımlanan koda ${C_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2}$ nin tek kodu denir.

$$even\left({C_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2}\right)=\left\{(c_0,c_2,\dots,c_{n-2})\in {R_v}^{\frac{n}{2}}|(c_0,c_1,c_2,\dots,c_{n-1})\in {C_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2}\right\}$$

şeklinde tanımlanan koda ${C_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2}$ nin çift kodu denir. Çift ve tek kodların tanımları F_2 cisminde benzer biçimde verilir.

3.2.23. Önerme: ${C_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2}\subseteq {R_v}^{n}$ bir kod olmak üzere;

i. $\alpha_1\geq 1,\alpha_2\geq 0$ için
$even\left({C_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2}\right)=odd\left({C_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2}\right)={C_{R_v}}^{\alpha_1-1,\alpha_2+1}$, dir.

ii. $\alpha_1\geq 0,\alpha_2\geq 1$ için
$even\left({C_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2}\right)\approx odd\left({C_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2}\right)={C_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2-1}$, dir (Krotov, 2001).

3.2.24. Önerme: ${C_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2}\subseteq {R_v}^{n}$ bir kod olsun. Φ_2, ${R_v}^{n}$ üzerinde Gray dönüşümü olsun. Bu durumda $even\left(\Phi_2\left({C_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2}\right)\right)=\Phi_2\left(even\left({C_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2}\right)\right)$ sağlanır (Krotov, 2001).

Bu önerme tek kodlar için de sağlanır.

3.2.25. Örnek: ${C_{R_v}}^{0,2}$ kodunu belirlemek için ${M_{R_v}}^{0,2}$ üreteç matrisini yazalım.

${M_{R_v}}^{0,2}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&1\\0&1&0&1\end{bmatrix}$ için ${C_{R_v}}^{0,2}=\left\{(c_1,c_2).{M_{R_v}}^{0,2}|\ c_1\in R_v,\ c_2\in {F_2}^2\right\}$ şeklindedir.

Buradan,

${C_{R_v}}^{0,2}=\{0000,0101,0011,0110,1111,1010,1100,1001,vvvv,v1+vv1+v,$

$vv1+v1+v,v1+v1+vv,1+v1+v1+v1+v,1+vv1+vv,1+v1+vvv,$

$1+vvv1+v\}\subseteq {R_v}^4$ olur. Bu kod için $d_{L_{R_v}}\left({C_{R_v}}^{0,2}\right)=4$ ve $\left|{C_{R_v}}^{0,2}\right|=16$'dır. Yani ${C_{R_v}}^{0,2}$, (4,16,4) parametreli bir koddur.

Buradan ${C_{R_v}}^{0,2}$ kodunun Gray görüntüsü,

$\Phi_2\left({C_{R_v}}^{0,2}\right)=\{00000000,01010101,00110011,01100110,00001111,01011010,$

00111100,01101001,11111111,10101010,11001100,10011001,11110000,
10100101,11000011,10010110$\} \subseteq {F_2}^8$ olur. $\Phi_2\left({C_{R_v}}^{0,2}\right)$ kodu (8,16,4) parametreli bir Hadamard kod olur.

3.2.26. Örnek: ${}_1{C_{R_v}}^{0,1}$ kodu ${C_{R_v}}^{0,2}$ koduna eşittir ve kodun elemanları aşağıdaki gibi bulunmuştur.

${C_{R_v}}^{0,2} = \{0000,0011,0101,0110,1111,1100,1010,1001, vvvv,$

$vv1 + v1 + v, v1 + vv1 + v, 1 + v1 + v1 + v1 + v, 1 + v1 + vvv, 1 + vv1 + vv, 1 + vvv1 + v\} \subseteq {R_v}^4$

Bu kodun çift kodu $even\left({C_{R_v}}^{0,2}\right) = \{00,01,11,10, vv, v1 + v, 1 + v1 + v, 1 + vv\}$ bulunur. Bu kodun Gray görüntüsü,

$\Phi_2\left(even\left({C_{R_v}}^{0,2}\right)\right) = \{0000,0101,1111,1010,0011,0110,1100,1001\}$ olur.

Bu kodun tek kodu $odd\left({C_{R_v}}^{0,2}\right) = \{00,01,11,10, vv, v1 + v, 1 + v1 + v, 1 + vv\}$ olurken bu kodun Gray görüntüsü,

$\Phi_2\left(odd\left({C_{R_v}}^{0,2}\right)\right) = \{0000,0101,1111,1010,0011,0110,1100,1001\}$ biçiminde bulunur. ${C_{R_v}}^{0,2}$ kodu için çift ve tek kod eşittir.

Ayrıca ${C_{R_v}}^{0,2}$ kodunun Gray görüntüsü,

$\Phi_2\left({C_{R_v}}^{0,2}\right) = \{00000000,01010101,00110011,01100110,00001111,01011010,$

00111100,01101001,11111111,10101010,11001100,10011001,11110000,

10100101,11000011,10010110$\} \subseteq {F_2}^8$ olarak bulunur. Buradan bu kodun çift kodu,

$even\left(\Phi_2\left({C_{R_v}}^{0,2}\right)\right) = \{0000,0101,1111,1010,0011,0110,1100,1001\}$ olur. O halde $even\left(\Phi_2\left({C_{R_v}}^{0,2}\right)\right) = \Phi_2\left(even\left({C_{R_v}}^{0,2}\right)\right)$ eşitliği elde edilir.

3.2.27. Örnek: ${C_{R_v}}^{1,0}$ kodu için çift kodu ve tek kodu eşittir. Dahası bu kodlar ${C_{R_v}}^{0,1}$ koduna eşit olur.

${C_{R_v}}^{1,0} = \left\{c_1 . {M_{R_v}}^{1,0} | c_1 \in {R_v}^2\right\} = \{0000,01v1 + v, 1111,101 + vv, vvvv, v1 + v01,$

$1+v1+v1+v1+v, 1+vv10, 0vv0, 01+v01+v, 11+v1+v1, 1v1v,$
$v00v, v1v1, 1+v111+v, 1+v01+v0\} \subseteq {R_v}^4$ olarak bulunur.

Böylece $even\left({C_{R_v}}^{1,0}\right) = \{00,11, vv, 1+v1+v, 0v, 11+v, v0, 1+v1\}$

$$odd\left({C_{R_v}}^{1,0}\right) = \{00,11, vv, 1+v1+v, 0v, 11+v, v0, 1+v1\}$$

elde edilir. Ayrıca ${C_{R_v}}^{0,1} = \{00,11, vv, 1+v1+v, 0v, 11+v, v0, 1+v1\} \subseteq {R_v}^2$ olur ve kodunun elemanları da aynıdır.

O halde $even\left({C_{R_v}}^{1,0}\right) = odd\left({C_{R_v}}^{1,0}\right) = {C_{R_v}}^{0,1}$ şeklindedir.

Ayrıca bu kod R_1 halkası ile üretilmiş $even\left({C_{R_1}}^{1,0}\right) = odd\left({C_{R_1}}^{1,0}\right) = {C_{R_1}}^{0,1}$ koduna eşit olur.

3.2.28. Örnek: ${C_{R_v}}^{1,0}$ kodu ${C_{R_v}}^{1,1}$kodunun çift koduna eşittir.

$\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ ve $n = 2^{2\alpha_1 + \alpha_2}$ olmak üzere

${C_{R_v}}^{1,1} = \left\{(c_1, c_2).{M_{R_v}}^{1,1} |\ c_1 \in {R_v}^2, c_2 \in F_2\right\}$ kodunun parametresi $(8,32,8)$ $-$koddur.

Buradan ${C_{R_v}}^{1,1}$ kodunun çift kodu,

$even\left({C_{R_v}}^{1,1}\right) = \{0000, 01v1+v, 0vv0, 01+v01+v, 1111, 101+vv, 11+v1+v1,$
$1v1v, vvvv, v1+v01, v00v, v1v1, 1+v1+v1+v1+v, 1+vv10, 1+v111+v,$
$1+v01+v0\} \subseteq {R_v}^4$

olur. Bu kodun parametresi $(4,16,4)$ $-$kodu biçimindedir. Bu koda uygun yer değiştirme ve permütasyon uygulandığında,

${C_{R_v}}^{1,0} = \{0000, 01v1+v, 0vv0, 01+v01+v, 1111, 101+vv, 11+v1+v1,$
$1v1v, vvvv, v1+v01, v00v, v1v1, 1+v1+v1+v1+v, 1+vv10, 1+v111+v,$
$1+v01+v0\}$ kodu elde edilir.

3.2.29. Örnek: $(8,32,8)$ parametreli ${C_{R_v}}^{0,3} = \left\{(c_1, c_2).{M_{R_v}}^{0,3} |\ c_1 \in R_v, c_2 \in {F_2}^3\right\}$ kodunun çift kodu,

$even\left({C_{R_v}}^{0,3}\right) = \{0000, 1111, vvvv, 1+v1+v1+v1+v, 0011, 1100, vv1+v1+v,$
$1+v1+vvv, 0101, 1010, v1+vv1+v, 1+vv1+vv, 0110, 1001, v1+v1+vv,$

$1 + vvv1 + v\}$ olarak bulunur. ${C_{R_v}}^{0,3}$ kodunun tek kodu ise

$odd\left({C_{R_v}}^{0,3}\right) = \{0000,1111, vvvv, 1 + v1 + v1 + v1 + v, 0011,1100, vv1 + v1 + v,$

$1 + v1 + vvv, 0110,1001, v1 + v1 + vv, 1 + vvv1 + v, 0101,1010, v1 + vv1 + v,$

$1 + vv1 + vv\}$ biçiminde olur. Buradan $even({C_{R_v}}^{0,3}) = odd({C_{R_v}}^{0,3})$ elde edilir.

Bu kodun Gray görüntüsü,

$\Phi_2\left(even\ ({C_{R_v}}^{0,3})\right) = \{00000000,11111111,00001111,11110000,00110011,$

$11001100,00111100,11000011,01010101,10101010,01011010,10100101,01100110,$

$10011001, 01101001,10010110\}$ olur. $\Phi_2({C_{R_v}}^{0,3})$ kodunun çift kodu,

$even\left(\ \Phi_2({C_{R_v}}^{0,3})\right) = \{00000000,11111111,00001111,11110000,00110011,$

$11001100,00111100,11000011,01100110,10011001,01101001,10010110,$

$01010101,10101010,01011010,10100101\}$ olur.

O halde $even\left(\Phi_2({C_{R_v}}^{0,3})\right) = \Phi_2\left(even({C_{R_v}}^{0,3})\right)$ eşitliği elde edilir.

Ayrıca tek kodun Gray görüntüsü,

$\Phi_2\left(odd\ ({C_{R_v}}^{0,3})\right) = \{00000000,11111111,00001111,11110000,00110011,$

$11001100,00111100,11000011,01010101,10101010,01011010,10100101,01100110,$

$10011001,01101001,10010110\}$ olur.

Diğer taraftan

$odd\left(\ \Phi_2 {C_{R_v}}^{0,3}\right) = \{00000000,11111111,00001111,11110000,00110011,$

$11001100,00111100,11000011,01010101,10101010,01011010,10100101,01100110,$

$10011001,01101001,10010110\}$ olur.

Böylece $\Phi_2\left(odd(\ {C_{R_v}}^{0,3})\right) = odd\left(\ \Phi_2({C_{R_v}}^{0,3})\right)$ elde edilir.

3.2.30. Örnek: $(16,64,16)$ parametreli ${C_{R_v}}^{2,0}$ kodunun çift kodu,

$even\left({C_{R_v}}^{2,0}\right) = \{00000000,0v0v0v0v, 0011vv1 + v1 + v, 0v11 + vv01 + v1,$

$00vvvv00,0vv0v00v, 001 + v1 + v001 + v1 + v, 0v1 + v10v1 + v1,$

$11+v0v1+v1v0,11001+v1+vvv,11111111,11+v11+v11+v11+v,$

$111+v1+v1+v1+v11,11+v1+v11+v111+v,11vv11vv,$

$11+vv011+vv0,1+v1+v001+v1+v00,1+v10v1+v10v,$

$vv1+v1+v0011,v01+v10v11+v,1+v11+v11+v11+v1,$

$1+v1+vvv1100,vv11vv11,v011+vv011+v,$

$1+v1+v1+v1+v1+v1+v1+v,1+v1v011+v0v,$

$vv0000vv,v00v0vv0,1+v1+v11111+v1+v,1+v111+v11+v1+v1,$

$vvvvvvvv,v0v0v0v0\}$ biçiminde $(8,32,8)$ parametreli kod olarak belirlenir.

${C_{R_v}}^{2,0}$ kodunun tek kodu,

$odd\left({C_{R_v}}^{2,0}\right)=\{00000000,0v0v0v0v,0011vv1+v1+v,0v11+vv01+v1,$

$00vvvv00,0vv0v00v,001+v1+v001+v1+v,0v1+v10v1+v1,$

$11+v0v1+v1v0,11001+v1+vvv,11111111,11+v11+v11+v11+v,$

$111+v1+v1+v1+v11,11+v1+v11+v111+v,11vv11vv,$

$11+vv011+vv0,1+v1+v001+v1+v00,1+v10v1+v10v,$

$vv1+v1+v0011,v01+v10v11+v,1+v11+v11+v11+v1,$

$1+v1+vvv1100,vv11vv11,v011+vv011+v,$

$1+v1+v1+v1+v1+v1+v1+v,1+v1v011+v0v,$

$vv0000vv,v00v0vv0,1+v1+v11111+v1+v,1+v111+v11+v1+v1,$

$vvvvvvvv,v0v0v0v0\}$ olarak bulunur. Bu kod $(8,32,8)$ parametresine sahiptir.

O halde $even({C_{R_v}}^{2,0})=odd({C_{R_v}}^{2,0})$ elde edilir.

Bu çift kodun Gray görüntüsü ise

$\Phi_2\left(even(\ {C_{R_v}}^{2,0})\right)=\{$0000000000000000,0000000001010101,0011001100111100,

0011001101101001,0000000000111100,0000000001101001,0011001100000000,

0011001101010101,1100110010010110,1100110011000011,1111111111111111,

1111111110101010,1111111111000011,1111111110010110,1100110011111111,
1100110010101010,1100110000000000,1100110001010101,0011001111000011,
0011001110010110,1111111101010101,1100110000111100,0011001111111111,
0011001110101010,1111111100000000,1100110001101001,0000000011000011,
0000000010010110,1111111100111100,1111111101101001,0000000011111111,
0000000010101010} olarak belirlenir.

Buradan

$even\left(\Phi_2\left(\ {C_{R_v}}^{2,0}\right)\right)$ = {0000000000000000,0000000001010101,0011001100111100,
0011001101101001,0000000000111100,0000000001101001,0011001100000000,
0011001101010101,1100110010010110,1100110011000011,1111111111111111,
1111111110101010,1111111111000011,1111111110010110,1100110011111111,
1100110010101010,1100110000000000,1100110001010101,0011001111000011,
0011001110010110,1111111101010101,1100110000111100,0011001111111111,
0011001110101010,1111111100000000,1100110001101001,0000000011000011,
0000000010010110,1111111100111100,1111111101101001,0000000011111111,
0000000010101010} elde edilir.

Böylece $even\left(\Phi_2\left(\ {C_{R_v}}^{2,0}\right)\right) = \Phi_2\left(even\left(\ {C_{R_v}}^{2,0}\right)\right)$ durumu bulunur.

Ayrıca

$\Phi_2\left(odd\left(\ {C_{R_v}}^{2,0}\right)\right)$ = {0000000000000000,0000000001010101,0011001100111100,
0011001101101001,0000000000111100,0000000001101001,0011001100000000,
0011001101010101,1100110010010110,1100110011000011,1111111111111111,
1111111110101010,1111111111000011,1111111110010110,1100110011111111,
1100110010101010,1100110000000000,1100110001010101,0011001111000011,
0011001110010110,1111111101010101,1100110000111100,0011001111111111,
0011001110101010,1111111100000000,1100110001101001,0000000011000011,

0000000010010110,1111111100111100,1111111101101001,0000000011111111,
0000000010101010} olur. Diğer taraftan

$odd\left(\Phi_2(\ {C_{R_v}}^{2,0})\right)$ = {0000000000000000,0000000001010101,0011001100111100,
0011001101101001,0000000000111100,0000000001101001,0011001100000000,
0011001101010101,1100110010010110,1100110011000011,1111111111111111,
1111111110101010,1111111111000011,1111111110010110,1100110011111111,
1100110010101010,1100110000000000,1100110001010101,0011001111000011,
0011001110010110,1111111101010101,1100110000111100,0011001111111111,
0011001110101010,1111111100000000,1100110001101001,0000000011000011,
0000000010010110,1111111100111100,1111111101101001,0000000011111111,
0000000010101010} elde edilir. O halde $odd\left(\Phi_2(\ {C_{R_v}}^{2,0})\right) = \Phi_2\left(odd(\ {C_{R_v}}^{2,0})\right)$ olur.

BÖLÜM 4

SEKİZ ELEMANLI HALKADA TEKRARLI OLUŞUM KODLARI

Bu bölümde tek değişkenli sekiz elemanlı halka yapısı tanıtılmış ve bu halka üzerinde yazılan tekrarlı oluşum kodları sunulmuştur.

4.1. Sekiz Elemanlı Halka için Üreteç Matrislerin Elde Edilmesi ve Kodların Yapısı

$\mathbb{Z}_2[v]/\langle v^3 - k\rangle$ halkasında $k = 0$ olması durumunda $v^3 = 0$ koşulunda bu halka üzerinde çalışılmıştır. $\mathbb{Z}_2 + v\mathbb{Z}_2 + v^2\mathbb{Z}_2$ kümesinin belirtilen toplama ve çarpma işlemleriyle bir halka yapısı oluşturduğu tablo yardımıyla ifade edilmiştir. Ayrıca, sekiz elemanlı bu halkanın tüm idealleri tespit edilerek bunlar aralarındaki ilişkiler belirtilmiştir. Sonrasında halka üzerinde ağırlık ve uzaklık kavramları ile üreteçleri sunulmuştur.

$k = 0$ için $v^3 = 0$ durumunu aldığımızda, yani;

$\mathbb{Z}_2[v]/\langle v^3 - k\rangle = \{a_0 + v.a_1 + v^2.a_2 + \langle v^3\rangle |\ a_i \in \mathbb{Z}_2, i = 0,1,2\}$ halkanın elemanları; $\mathbb{Z}_2 + v\mathbb{Z}_2 + v^2\mathbb{Z}_2 = \{0,1,v,v^2,1+v,1+v^2,v+v^2,1+v+v^2\}$ aşağıda tanımlanan $+$ ve $\cdot$ işlemleri altında biri halka oluşturur.

$+$	0	1	v	v^2	$1+v$	$1+v^2$	$v+v^2$	$1+v+v^2$
0	0	1	v	v^2	$1+v$	$1+v^2$	$v+v^2$	$1+v+v^2$
1	1	0	$1+v$	$1+v^2$	v	v^2	$1+v+v^2$	$v+v^2$
v	v	$1+v$	0	$v+v^2$	1	$1+v+v^2$	v^2	$1+v^2$
v^2	v^2	$1+v^2$	$v+v^2$	0	$1+v+v^2$	1	v	$1+v$
$1+v$	$1+v$	v	1	$1+v+v^2$	0	$v+v^2$	$1+v^2$	v^2
$1+v^2$	$1+v^2$	v^2	$1+v+v^2$	1	$v+v^2$	0	$1+v$	v
$v+v^2$	$v+v^2$	$1+v+v^2$	v^2	v	$1+v^2$	$1+v$	0	1
$1+v+v^2$	$1+v+v^2$	$v+v^2$	$1+v^2$	$1+v$	v^2	v	1	0

$\cdot$	0	1	v	v^2	$1+v$	$1+v^2$	$v+v^2$	$1+v+v^2$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	v	v^2	$1+v$	$1+v^2$	$v+v^2$	$1+v+v^2$
v	0	v	v^2	0	$v+v^2$	v	v^2	$v+v^2$
v^2	0	v^2	0	0	v^2	v^2	0	v^2
$1+v$	0	$1+v$	$v+v^2$	v^2	$1+v^2$	$1+v+v^2$	v	1
$1+v^2$	0	$1+v^2$	v	v^2	$1+v+v^2$	1	$v+v^2$	$1+v$
$v+v^2$	0	$v+v^2$	v^2	0	v	$v+v^2$	v^2	v
$1+v+v^2$	0	$1+v+v^2$	$v+v^2$	v^2	1	$1+v$	v	$1+v^2$

$\mathbb{Z}_2+v\mathbb{Z}_2+v^2\mathbb{Z}_2$ halkasının idealleri $\langle 0\rangle=\{0\},\langle v^2\rangle=\{0,v^2\},\langle v\rangle=\langle v+v^2\rangle=\{0,v,v^2,v+v^2\},\langle 1\rangle=\langle 1+v\rangle=\langle 1+v^2\rangle=\langle 1+v+v^2\rangle=\mathbb{Z}_2+v\mathbb{Z}_2+v^2\mathbb{Z}_2$ şeklinde belirlenmiştir ve bu idealler arasında $\langle 0\rangle\subset\langle v^2\rangle\subset\langle v\rangle=\langle v+v^2\rangle\subset\langle 1\rangle=\langle 1+v\rangle=\langle 1+v^2\rangle=\langle 1+v+v^2\rangle=\mathbb{Z}_2+v\mathbb{Z}_2+v^2\mathbb{Z}_2$ bağıntısı geçerlidir.

4.1.1. Tanım: $S = \mathbb{Z}_2 + v\mathbb{Z}_2 + v^2\mathbb{Z}_2$ halkası üzerinde;

$$\text{Her } r \in S \text{ için } w_L(r) = \begin{cases} 0\ , & r = 0 \\ 4\ , & r = v^2 \\ 2\ , & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

Şeklinde belirtilen fonksiyona S halkası üzerinde Lee ağırlık fonksiyonudur.

Bu durumda her $r = (r_0, r_1, \dots, r_{n-1}) \in S^n$ için $w_L(r) = \sum_{i=0}^{n-1} w_L(r_i)$ eşitliği sağlanır (Özkan, 2016).

F_2 cismi üzerinde Hamming ağırlığı 3.1.2. de verildiği gibidir.

4.1.2. Tanım: S^n üzerinde iki eleman arası uzaklık

$u_1, u_2 \in S^n$ ve $u_1 \neq u_2$ elemanları arasındaki uzaklık $d_{L_S}(u_1, u_2) = w_{L_S}(u_1 - u_2)$ olmak üzere, bir C kodunun minimum Lee uzaklığı $d_{L_S}(C) = min\left\{d_{L_S}(u_1, u_2) \middle|\ u_1 \neq u_2\ ve\ u_1, u_2 \in C\right\}$ biçiminde tanımlanır.

Bu kısımda $S = \mathbb{Z}_2 + v\mathbb{Z}_2 + v^2\mathbb{Z}_2$ halkasında özel matrisler tanımlanmıştır.

4.1.3. Tanım: $v^3 = 0$ koşulunda $\mathbb{Z}_2 + v\mathbb{Z}_2 + v^2\mathbb{Z}_2$ halkasında; $\alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{Z}_+ \cup \{0\}$ için ilk satır elemanları $\{1\}$ kümesinden, diğer satır elemanları ise $\alpha_2 = 0$ durumunda $\{0,1, v, v^2, 1+v, 1+v^2, v+v^2, 1+v+v^2\}$ kümesinden, $\alpha_1 = 0$ olduğunda $\{0, v^2\}$ kümesinden seçilen ve sütun elemanları lexicographically sıralama yöntemi ile sıralanmıştır. Bu işlemler sonucunda satır sayısı $\alpha_1 + \alpha_2 + 1$ olan özel bir ${M_S}^{\alpha_1,\alpha_2}$ matrisi oluşturulur. Bu matris S halkanın elemanları yardımı ile yazılan üreteç matrisi adı verilir. (Özkan, 2016).

Aşağıda ${M_S}^{\alpha_1,\alpha_2}$ matrislerinin nasıl oluşturulduğuna dair örnekler detaylı bir şekilde gösterilmiştir. Bu örnekler, matrislerin yapılarını ve bileşen seçim süreçlerini netleştirmek amacıyla verilmiştir.

$${M_S}^{0,0} = [1]_{1x1}\ , \qquad {M_S}^{0,1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & v^2 \end{bmatrix}_{2x2}\ , \qquad {M_S}^{0,2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & v^2 & v^2 \\ 0 & v^2 & 0 & v^2 \end{bmatrix}_{3x4}\ ,$$

$${M_S}^{1,0} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & v & v^2 & 1+v & 1+v^2 & v+v^2 & 1+v+v^2 \end{bmatrix}_{2x8}$$

$${M_S}^{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & v & v & v^2 & v^2 & 1+v & 1+v & 1+v^2 & 1+v^2 & v+v^2 & v+v^2 & 1+v+v^2 & 1+v+v^2 \\ 0 & v^2 & 0 & v^2 & 0 & v^2 & 0 & v^2 & 0 & v^2 & 0 & v^2 & 0 & v^2 & 0 & v^2 \end{bmatrix}_{3x16}$$

Bir önceki bölüm de tanımlanan özel matrisler temel alınarak kodlar oluşturulmuş ve bu kodlara ait parametreler hesaplanmıştır.

4.1.4. Tanım: $S = \mathbb{Z}_2 + v\mathbb{Z}_2 + v^2\mathbb{Z}_2$ halkasında;

Her $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ tamsayıları için $C_S{}^{\alpha_1,\alpha_2} = \{(c_1, c_2).M_S{}^{\alpha_1,\alpha_2} | c_1 \in S^{\alpha_1+1}, c_2 \in \mathbb{Z}_2{}^{\alpha_2}\}$ şeklinde yazılan koda $M_S{}^{\alpha_1,\alpha_2}$ üreteç matrisi ile elde edilmiş, $n = 2^{3\alpha_1+\alpha_2}$ uzunluğuna sahip $(n, 8n, 2n)$ parametreli koddur.

4.1.5. Tanım: S halkası üzerinde

$$\phi: S^n \longrightarrow \mathbb{Z}_2{}^{4n}$$

$$(r_1, r_2, \dots, r_n) \rightarrow \phi(r_1, r_2, \dots, r_n)$$

$$\phi(r_1, r_2, \dots, r_n) = \phi(z_1, z_2, \dots, z_n, x_1+z_1, x_2 + z_2, \dots, x_n+z_n, y_1+z_1, y_2 + z_2, \dots, y_n+z_n, x_1 + y_1+z_1, x_2 + y_2 + z_2, \dots, x_n + y_n+z_n)$$

olsun. Burada $1 \leq i \leq n$ ve $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{Z}_2$ için $r_i = x_i + y_i v + z_i v^2 \in S$ dir. Bu tanıma S halkasında Gray dönüşümüdür denir (Özkan, 2016).

4.1.6. Teorem: ϕ, S^n üzerinde bir Gray dönüşümü ise $C_S{}^{\alpha_1,\alpha_2}, M_S{}^{\alpha_1,\alpha_2}$ üreteç matris ile elde edilen $\phi(C_S{}^{\alpha_1,\alpha_2})$ kodu, $\mathbb{Z}_2$ üzerinde $(4n, 8n, 2n)$ parametreli bir Hadamard kod olur (Özkan, 2016).

4.2. Tekrarlı Oluşum Kodlar

$S = \mathbb{Z}_2 + v\mathbb{Z}_2 + v^2\mathbb{Z}_2$ halkası üzerinde birinci ve ikinci tekrarlı oluşum kod tanımı yapılmıştır.

4.2.1. Tanım: $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ ve $n = 2^{3\alpha_1+\alpha_2}$ olmak üzere,

$C_S{}^{\alpha_1,\alpha_2} = \{(c_1, c_2).M_S{}^{\alpha_1,\alpha_2} | c_1 \in S^{\alpha_1+1}, c_2 \in \mathbb{Z}_2{}^{\alpha_2}\}$ halkası üzerinde bir $(4n, 8n, 2n)$ kod, $S' = \{00 \dots 0, v^2 v^2 \dots v^2\}$ R_2 halkasında bir $(n, 2, 4n)$ $-$kod olsun.

S', $C_S{}^{\alpha_1,\alpha_2}$ kodları kullanılarak S halkasında belirlenen ${}_1C_S{}^{\alpha_1,\alpha_2} = \{(a, a+b) | a \in C_S{}^{\alpha_1,\alpha_2}, b \in S'\}$ koduna $(2n, 16n, 4n)$ parametreli birinci tekrarlı oluşum kodudur.

$S'' = \{0 \dots 0, 1 \dots 1, v \dots v, v^2 \dots v^2, 1+v \dots 1+v, 1+v^2 \dots 1+v^2, v+v^2 \dots v+v^2, 1+v+v^2 \dots 1+v+v^2\}$ S halkasında bir $(n, 8, 2n)$ $-$kod olsun.

S'' ve ${C_S}^{\alpha_1,\alpha_2}$ kodları kullanılarak S halkasında belirlenen ${}_2{C_S}^{\alpha_1,\alpha_2} = \{(a, a+b, a+vb, a+v^2b, a+(1+v)b, a+(1+v^2)b, a+(v+v^2)b, a+(1+v+v^2)b) | a \in {C_S}^{\alpha_1,\alpha_2}, b \in S''\} = \{0 \dots 0{,}1 \dots 1, v \dots v, v^2 \dots v^2, 1+v \dots 1+v, 1+v^2 \dots 1+v^2, v+v^2 \dots v+v^2, 1+v+v^2 \dots 1+v+v^2\}$ koduna $(8\mathrm{n}, 64\mathrm{n}, 16\mathrm{n})$ parametreli ikinci tekrarlı oluşum kodudur.

4.2.2. Önerme: $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ olmak üzere ${}_1{C_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2}$ kodu ${C_{R_v}}^{\alpha_1,1+\alpha_2}$ koduna ve ${}_2{C_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2}$ kodu ${C_{R_v}}^{\alpha_1+1,\alpha_2}$ koduna denktir. Özel olarak $\alpha_1 = 0$ olduğunda ${}_1{C_{R_v}}^{0,\alpha_2} = {C_{R_v}}^{1,\alpha_2}$ dir (Krotov, 2001).

4.2.3. Örnek: $v^3 = 0$ sekiz elemanlı halka üzerinde,

${C_S}^{0,1} = \{(c_1, c_2).{M_S}^{0,1} | \, c_1 \in S, c_2 \in \mathbb{Z}_2\} = \{00{,}0v^2, 11{,}11+v^2, vv, vv+v^2,$

$v^2v^2, v^20, 1+v1+v, 1+v1+v+v^2, 1+v^21+v^2, 1+v^21, v+v^2v+v^2,$

$v+v^2v, 1+v+v^21+v+v^2, 1+v+v^21+v\} \subseteq S^2$ olur.

Kodun parametresi $(n, 8n, 2n) = (2{,}16{,}4)$ olur.

${}_1{C_S}^{0,1} = \{(a, a+b) | a \in C^{0,1}, b \in S' = \{00, v^2v^2\}\}$

$= \{0000{,}00v^2v^2, 0v^20v^2, 0v^2v^20{,}1111{,}111+v^21+v^2, 11+v^211+v^2, 11+v^21+v^21,$

$vvvv, vvv+v^2v+v^2, vv+v^2vv+v^2, vv+v^2v+v^2v, v^2v^2v^2v^2, v^2v^200, v^20v^20,$

$v^200v^2, 1+v1+v1+v1+v, 1+v1+v1+v+v^21+v+v^2,$

$1+v1+v+v^21+v1+v+v^2, 1+v1+v+v^21+v+v^2, 1+v^21+v^21+v^21+v^2,$

$1+v^21+v^211, 1+v^211+v^21, 1+v^2111+v^2, v+v^2v+v^2v+v^2v+v^2,$

$v+v^2v+v^2vv, v+v^2vv+v^2v, v+v^2vvv+v^2,$

$1+v+v^21+v+v^21+v+v^21+v+v^2, 1+v+v^21+v+v^21+v1+v,$

$1+v+v^21+v1+v+v^21+v, 1+v+v^21+v1+v1+v+v^2\}$

kodun parametresi $(2n, 16n, 4n) = (4{,}32{,}8)$ olur.

$S = \mathbb{Z}_2 + v\mathbb{Z}_2 + v^2\mathbb{Z}_2$ halkasında ${M_S}^{\alpha_1,\alpha_2}$ üreteç matris ile elde edilen ${C_S}^{\alpha_1,\alpha_2}$ ve ${}_1{C_S}^{\alpha_1,\alpha_2}$ kodlarının Gray görüntüsünün parametreleri belirlenerek Hadamard kod olduğu gösterilmiş ve örnekler verilmiştir.

4.2.4. Teorem: ϕ, S^n üzerinde bir Gray dönüşümü olsun. ${}_1C_S{}^{\alpha_1,\alpha_2}, M_S{}^{\alpha_1,\alpha_2}$ üreteç matris ile üretilen kod olmak üzere $\phi({}_1C_S{}^{\alpha_1,\alpha_2})$ kodu, $\mathbb{Z}_2$ üzerinde $(8n, 16n, 4n)$ parametreli bir Hadamard kod belirtir.

4.2.5. Örnek: ${C_S}^{0,1}$ birinci tekrarlı oluşum kodunun Gray görüntüsünü belirleyelim.

$\phi({}_1C_S{}^{0,1}) = (z_1, z_2, z_3, z_4, x_1{+}z_1, x_2 + z_2, x_3{+}z_3, x_4 + z_4, y_1{+}z_1, y_2 + z_2, y_3{+}z_3, y_4{+}z_4, x_1{+}y_1{+}z_1, x_2{+}y_2{+}z_2, x_3{+}y_3{+}z_3, x_4{+}y_4{+}z_4)$ olur.

$\phi({}_1C_S{}^{0,1}) = \{$0000000000000000,0011001100110011,0101010101010101,
0110011001100110,0000111100001111,0011110000111100,0101101001011010,
0110100101101001,0000000011111111,0011001111001100,0101010110101010,
0110011010011001,1111111111111111,1100110011001100,1010101010101010,
1001100110011001,0000111111110000,0011110011000011,0101101010100101
,0110100110010110,1111000011110000,1100001111000011,1010010110100101,
1001011010010110,1111111100000000,1100110000110011,1010101001010101,
1001100101100110,1111000000001111,1100001100111100,1010010101101010,
1001011001101001$\}$ kodun parametreleri $(8n, 16n, 4n) = (16,32,8)$'dir.

4.2.6. Teorem: ϕ, S^n üzerinde bir Gray dönüşümü olsun. ${}_2C_S{}^{\alpha_1,\alpha_2}, M_S{}^{\alpha_1,\alpha_2}$ üreteç matris ile üretilen kod ise $\phi({}_2C_S{}^{\alpha_1,\alpha_2})$ kodu, $\mathbb{Z}_2$ üzerinde $(32n, 64n, 16n)$ parametreye sahip Hadamard kod belirtir.

4.2.7. Örnek: ${C_S}^{0,1}$ kodunun ikinci tekrarlı oluşum kodunu belirleyelim.

${}_2C_S{}^{0,1} = \{(a, a + b, a + vb, a + v^2b, a + (1 + v)b, a + (1 + v^2)b, a + (v + v^2)b, a + (1 + v + v^2)b) | a \in {C_S}^{0,1}, b \in S''\} = \{00,11, vv, v^2v^2, 1 + v1 + v, 1 + v^21 + v^2, v + v^2v + v^2, 1 + v + v^21 + v + v^2\}$

$= \{$0000000000000000,

$0011vvv^2v^21 + v1 + v1 + v^21 + v^2v + v^2v + v^21 + v + v^21 + v + v^2,$

$00vvv^2v^200v + v^2v + v^2vvv^2v^2v + v^2v + v^2,$

$00v^2v^20000v^2v^2v^2v^200v^2v^2,$

$$001 + v1 + vv + v^2v + v^2v^2v^21 + v^21 + v^21 + v + v^21 + v + v^2vv11,$$

$$001 + v^21 + v^2vvv^2v^21 + v + v^21 + v + v^211v + v^2v + v^21 + v1 + v,$$

$$00v + v^2v + v^2v^2v^200vvv + v^2v + v^2v^2v^2vv,$$

$$001 + v + v^21 + v + v^2v + v^2v + v^2v^2v^2111 + v1 + vvv1 + v^21 + v^2,$$

$$1111111111111111,$$

$$11001 + v1 + v1 + v^21 + v^2vvv^2v^21 + v + v^21 + v + v^2v + v^2v + v^2,$$

$$111 + v1 + v1 + v^21 + v^2111 + v + v^21 + v + v^21 + v1 + v1 + v^21 + v^21 + v + v^21 + v + v^2,$$

$$111 + v^21 + v^211111 + v^21 + v^21 + v^21 + v^2111 + v^21 + v^2,$$

$$11vv1 + v + v^21 + v + v^21 + v^21 + v^2v^2v^2v + v^2v + v^21 + v1 + v00,$$

$$11v^2v^21 + v1 + v1 + v^21 + v^2v + v^2v + v^2001 + v + v^21 + v + v^2vv,$$

$$111 + v + v^21 + v + v^21 + v^21 + v^2111 + v1 + v1 + v + v^21 + v + v^21 + v^21 + v^21 + v1 + v,$$

$$11v + v^2v + v^21 + v + v^21 + v + v^21 + v^21 + v^200vv1 + v1 + vv^2v^2,$$

$$vvvvvvvvvvvvvvvv,$$

$$vv1 + v1 + v00v + v^2v + v^2111 + v + v^21 + v + v^2v^2v^21 + v^21 + v^2,$$

$$vv00v + v^2v + v^2vvv^2v^200v + v^2v + v^2v^2v^2,$$

$$vvv + v^2v + v^2vvvvv + v^2v + v^2v + v^2v + v^2vvv + v^2v + v^2,$$

$$vv11v^2v^2v + v^2v + v^21 + v + v^21 + v + v^21 + v^21 + v^2001 + v1 + v,$$

$$vv1 + v + v^21 + v + v^200v + v^2v + v^21 + v^21 + v^21 + v1 + vv^2v^211,$$

$$vvv^2v^2v + v^2v + v^2vv00v^2v^2v + v^2v + v^200,$$

$$vv1 + v^21 + v^2v^2v^2v + v^2v + v^21 + v1 + v11001 + v + v^21 + v + v^2,$$

$$v^2v^2v^2v^2v^2v^2v^2v^2v^2v^2v^2v^2v^2v^2v^2v^2,$$

$$v^2v^21 + v^21 + v^2v + v^2v + v^2001 + v + v^21 + v + v^211vv1 + v1 + v,$$

$$v^2v^2v + v^2v + v^200v^2v^2vvv + v^2v + v^200vv,$$

$$v^2v^200v^2v^2v^2v^20000v^2v^200,$$

$$v^2v^21 + v + v^21 + v + v^2vv00111 + v1 + vv + v^2v + v^21 + v^21 + v^2,$$

$$v^2v^211v + v^2v + v^2001 + v1 + v1 + v^21 + v^2vv1 + v + v^21 + v + v^2,$$

$$v^2v^2vv00v^2v^2v + v^2v + v^2vv00v + v^2v + v^2,$$

$$v^2v^21 + v1 + vvv001 + v^21 + v^21 + v + v^21 + v + v^2v + v^2v + v^211,$$

$$0v^20v^20v^20v^20v^20v^20v^2,$$

$$0v^211 + v^2vv + v^2v^201 + v1 + v + v^2,$$

$$0v^2vv + v^2v^200v^2v + v^2vvv + v^2v^20v + v^2v,$$

$$0v^2v^200v^20v^2v^20v^200v^2v^20,$$

$$0v^21 + v1 + v + v^2v + v^2vv^201 + v^211 + v + v^21 + vvv + v^211 + v^2,$$

$$0v^21 + v^21vv + v^2v^201 + v + v^21 + v11 + v^2v + v^2v1 + v1 + v + v^2,$$

$$0v^2v + v^2vv^200v^2vv + v^2v + v^2vv^20vv + v^2,$$

$$0v^21 + v + v^21 + vv + v^2vv^2011 + v^21 + v1 + v + v^2vv + v^21 + v^21,$$

$$vv + v^2vv + v^2vv + v^2vv + v^2vv + v^2vv + v^2vv + v^2vv + v^2,$$

$$vv + v^21 + v1 + v + 0v^2v + v^2v11 + v^21 + v + v^21 + vv^201 + v^21,$$

$$vv + v^20v^2v + v^2vvv + v^2v^200v^2v + v^2vv^20,$$

$$vv + v^2v + v^2vvv + v^2vv + v^2v + v^2vv + v^2vvv + v^2v + v^2v,$$

$$vv + v^211 + v^2v^20v + v^2v1 + v + v^21 + v1 + v^210v^21 + v1 + v + v^2,$$

$$vv + v^21 + v + v^21 + v0v^2v + v^2v1 + v^211 + v1 + v + v^2v^2011 + v^2,$$

$$vv + v^2v^20v + v^2vvv + v^20v^2v^20v + v^2v0v^2,$$

$$vv + v^21 + v^21v^20v + v^2v1 + v1 + v + v^211 + v^20v^21 + v + v^21 + v,$$

$$v^20v^20v^20v^20v^20v^20v^20,$$

$$v^201 + v^21v + v^2v0v^21 + v + v^21 + v11 + v^2vv + v^21 + v1 + v + v^2,$$

$$v^20v + v^2v0v^2v^20vv + v^2v + v^2v0v^2vv + v^2,$$

$$v^200v^2v^200v^2v^200v^2v^200v^2,$$

$$v^201 + v + v^21 + vvv + v^20v^211 + v^21 + v1 + v + v^2v + v^2v1 + v^21,$$

$$v^2011 + v^2v + v^2v0v^21 + v1 + v + v^21 + v^21vv + v^21 + v + v^21 + v,$$

$$v^20vv + v^20v^2v^20v + v^2vvv + v^20v^2v + v^2v,$$

$$v^201 + v1 + v + v^2vv + v^20v^21 + v^211 + v + v^21 + vv + v^2v11 + v^2,$$

$$v + v^2vv + v^2vv + v^2vv + v^2vv + v^2vv + v^2vv + v^2vv + v^2v,$$

$$v + v^2v1 + v + v^2 1 + vv^2 0vv + v^2 1 + v^2 11 + v1 + v + v^2 0v^2 11 + v^2,$$

$$v + v^2vv^2 0vv + v^2v + v^2v0v^2v^2 0vv + v^2 0v^2,$$

$$v + v^2vvv + v^2v + v^2vv + v^2vvv + v^2vv + v^2v + v^2vvv + v^2,$$

$$v + v^2v1 + v^2 10v^2vv + v^2 1 + v1 + v + v^2 11 + v^2v^2 01 + v + v^2 1 + v,$$

$$v + v^2v1 + v1 + v + v^2v^2 0vv + v^2 11 + v^2 1 + v + v^2 1 + v0v^2 1 + v^2 1,$$

$$v + v^2v0v^2vv + v^2v + v^2vv^2 00v^2vv + v^2v^2 0,$$

$$v + v^2v11 + v^2 0v^2vv + v^2 1 + v + v^2 1 + v1 + v^2 1v^2 01 + v1 + v + v^2,$$

$$1 + v^2 1 + v^2 1 + v^2 1 + v^2 1 + v^2 1 + v^2 1 + v^2 1 + v^2 1 + v^2 1 + v^2 1 + v^2 1 + v^2 1 + v^2 1 + v^2,$$

$$1 + v^2 1 + v^2v^2v^2 1 + v + v^2 1 + v + v^2 11v + v^2v + v^2 001 + v1 + vvv,$$

$$1 + v^2 1 + v^2 1 + v + v^2 1 + v + v^2 1 + v^2 1 + v^2 1 + v1 + v1 + v + v^2 1 + v + v^2 111 + v1 + v,$$

$$1 + v^2 1 + v^2 111 + v^2 1 + v^2 1 + v^2 1 + v^2 11111 + v^2 1 + v^2 11,$$

$$1 + v^2 1 + v^2v + v^2v + v^2 1 + v^2 1 + v^2 1100vv1 + v + v^2 1 + v + v^2v + v^2v + v^2,$$

$$1 + v^2 1 + v^2 001 + v + v^2 1 + v + v^2 1 + v1 + vvvv^2v^2 1 + v1 + vv + v^2v + v^2,$$

$$1 + v^2 1 + v^2 1 + v1 + v111 + v^2 1 + v^2 1 + v + v^2 1 + v + v^2 1 + v1 + v111 + v + v^2 1 + v + v^2,$$

$$1 + v^2 1 + v^2vv1 + v1 + v11v^2v^2v + v^2v + v^2 1 + v + v^2 1 + v + v^2 00,$$

$$v + v^2v + v^2v + v^2v + v^2v + v^2v + v^2v + v^2v + v^2v + v^2v + v^2v + v^2v + v^2v + v^2v + v^2v + v^2,$$

$$v + v^2v + v^2 1 + v + v^2 1 + v + v^2v^2v^2vv1 + v^2 1 + v^2 1 + v1 + v0011,$$

$$v + v^2v + v^2v^2v^2v + v^2v + v^2v + v^2v + v^2 00v^2v^2vv00,$$

$$v + v^2v + v^2v^2v^2v + v^2v + v^2v + v^2v + v^2vvvvv + v^2v + v^2vv,$$

$$v + v^2v + v^2 1 + v^2 1 + v^2 00vv1 + v1 + v11v^2v^2 1 + v + v^2 1 + v + v^2,$$

$$v + v^2v + v^2 1 + v1 + vv^2v^2vv111 + v + v^2 1 + v + v^2 001 + v^2 1 + v^2,$$

$$v + v^2v + v^2 00vvv + v^2v + v^2v^2v^2 00vvv^2v^2,$$

$$v + v^2v + v^2 1100vv1 + v + v^2 1 + v + v^2 1 + v^2 1 + v^2v^2v^2 1 + v1 + v,$$

$$1 + v + v^2 1 + v + v^2 1 + v + v^2

$$1+v+v^2 1+v+v^2 1+v^2 1+v^2 1+v1+v1+v+v^2 1+v+v^2 111+v^2 1+v^2 1+v1+v11,$$

$$1+v+v^2 1+v+v^2 1+v1+v1+v+v^2 1+v+v^2 1+v+v^2 1+v+v^2 1+v+v^2 1+v1+v1+v1+v1 + v+v^2 1+v+v^2 1+v1+v,$$

$$1+v+v^2 1+v+v^2 v^2 v^2 111+v1+vvv001+v^2 1+v^2 v+v^2 v+v^2,$$

$$1+v+v^2 1+v+v^2 vv1+v^2 1+v^2 1+v1+v00v+v^2 v+v^2 11v^2 v^2,$$

$$1+v+v^2 1+v+v^2 111+v1+v1+v+v^2 1+v+v^2 111+v1+v1+v^2 1+v^2,$$

$$1+v+v^2 1+v+v^2 00111+v1+vv+v^2 v+v^2 v^2 v^2 1+v^2 1+v^2 vv,$$

$$1+v1+v1+v1+v1+v1+v1+v1+v1+v1+v1+v1+v1+v1+v1+v1+v,$$

$$1+v1+vvv111+v+v^2 1+v+v^2 00v+v^2 v+v^2 1+v^2 1+v^2 v^2 v^2,$$

$$1+v1+v111+v+v^2 1+v+v^2 1+v1+v1+v^2 1+v^2 111+v+v^2 1+v+v^2 1+v^2 1+v^2,$$

$$1+v1+v1+v+v^2 1+v+v^2 1+v1+v1+v1+v+v^2 1+v+v^2 1+v+v^2 1+v+v^2 1 + v1+v1+v+v^2 1+v+v^2,$$

$$1+v1+v001+v^2 1+v^2 1+v+v^2 1+v+v^2 v+v^2 v+v^2 v^2 11vv,$$

$$1+v1+vv+v^2 v+v^2 111+v+v^2 1+v+v^2 v^2 v^2 vv1+v^2 1+v^2 00,$$

$$1+v1+v1+v^2 1+v^2 1+v+v^2 1+v+v^2 1+v1+v111+v^2 1+v^2 1+v+v^2 1+v+v^2 11,$$

$$1+v1+vv^2 v^2 1+v^2 1+v^2 1+v+v^2 1+v+v^2 vv0011v+v^2 v+v^2,$$

$$11+v^2 11+v^2 11+v^2 11+v^2 11+v^2 11+v^2 11+v^2 11+v^2,$$

$$11+v^2 0v^2 1+v1+v+v^2 1+v^2 1+v^2 1vv+v^2 v^2 01+v+v^2 1+vv+v^2 v,$$

$$11+v^2 1+v1+v+v^2 1+v^2 111+v^2 1+v+v^2 1+v1+v1+v+v^2 1+v^2 11+v+v^2 1+v,$$

$$11+v^2 1+v^2 111+v^2 11+v^2 1+v^2 11+v^2 111+v^2 1+v^2 1,$$

$$11+v^2 vv+v^2 1+v+v^2 1+v, 1+v^2 1v^2 0v+v^2 v1+v1+v+v^2 0v^2,$$

$$11+v^2 v^2 01+v1+v+v^2 1+v^2 1v+v^2 v0v^2 1+v+v^2 1+vvv+v^2,$$

$$11+v^2 1+v+v^2 1+v1+v^2 111+v^2 1+v1+v+v^2 1+v+v^2 1+v1+v^2 11+v1+v+v^2,$$

$$11+v^2 v+v^2 v1+v+v^2 1+v1+v^2 10v^2 vv+v^2 1+v1+v+v^2 v^2 0,$$

$$1+v1+v+v^2 1+v1+v+v^2 1+v1+v+v^2 1+v1+v+v^2 1+v1+v+v^2 1+v1 + v+v^2 1+v1+v+v^2 1+v1+v+v^2,$$

$$1+v1+v+v^2 vv+v^2 11+v^2 1+v+v^2 1+v0v^2 v+v^2 v1+v^2 1v^2 0,$$

$$1+v1+v+v^2 11+v^2 1+v+v^2 1+v^2 1+v1+v+v^2 1+v^2 111+v^2 1+v+v^2 1+v1+v^2 1,$$

$$1+v1+v+v^21+v+v^21+v1+v1+v+v^21+v1+v+v^21+v+v^21+v1+v+v^21+v1+v1+v+v^21+v+v^21+v,$$

$$1+v1+v+v^20v^21+v^211+v+v^21+vv+v^2vv^2011+v^2vv+v^2,$$

$$1+v1+v+v^2v+v^2v11+v^21+v+v^21+vv^20vv+v^21+v^210v^2,$$

$$1+v1+v+v^21+v^211+v+v^21+v1+v1+v+v^211+v^21+v^211+v+v^21+v11+v^2,$$

$$1+v1+v+v^2v^201+v^211+v+v^21+vvv+v^20v^211+v^2v+v^2v,$$

$$1+v^211+v^211+v^211+v^211+v^211+v^211+v^211+v^21,$$

$$1+v^21v^201+v+v^21+v11+v^2v+v^2v0v^21+v1+v+v^2vv+v^2,$$

$$1+v^211+v+v^21+v11+v^21+v^211+v1+v+v^21+v+v^21+v11+v^21+v1+v+v^2,$$

$$1+v^2111+v^21+v^211+v^2111+v^211+v^21+v^2111+v^2,$$

$$1+v^21v+v^2v1+v1+v+v^211+v^20v^2vv+v^21+v+v^21+vv^20,$$

$$1+v^210v^21+v+v^21+v11+v^2vv+v^2v^201+v1+v+v^2v+v^2v,$$

$$1+v^211+v1+v+v^211+v^21+v^211+v+v^21+v1+v1+v+v^211+v^21+v+v^21+v,$$

$$1+v^21vv+v^21+v1+v+v^211+v^2v^20v+v^2v1+v+v^21+v0v^2,$$

$$1+v+v^21+v1+v+v^21+v1+v+v^21+v1+v+v^21+v1+v+v^21+v1+v+v^21+v1+v+v^21+v,$$

$$1+v+v^21+vv+v^2v1+v^211+v1+v+v^2v^20vv+v^211+v^20v^2,$$

$$1+v+v^21+v1+v^211+v1+v+v^21+v+v^21+v11+v^21+v^211+v1+v+v^211+v^2,$$

$$1+v+v^21+v1+v1+v+v^21+v+v^21+v1+v+v^21+v1+v1+v+v^21+v1+v+v^21+v1+v1+v+v^2,$$

$$1+v+v^21+vv^2011+v^21+v1+v+v^2vv+v^20v^21+v^21v+v^2v,$$

$$1+v+v^21+vvv+v^21+v^211+v1+v+v^20v^2v+v^2v11+v^2v^20,$$

$$1+v+v^21+v11+v^21+v1+v+v^21+v+v^21+v1+v^2111+v^21+v1+v+v^21+v^21,$$

$$1+v+v^21+v0v^211+v^21+v1+v+v^2v+v^2vv^201+v^21vv+v^2\}$$

kodun parametresi ${}_2C_S{}^{0,1} = (8n, 64n, 16n) = (16,128,32)$ olur.

Gray görüntüsü,

$$\phi({}_2C_S{}^{0,1}) = (z_1, z_2, \dots, z_{16}, x_1+z_1, x_2+z_2, \dots, x_{16}+z_{16},$$

$y_1+z_1, y_2+z_2, \dots, y_{16}+z_{16}, x_1+y_1+z_1, x_2+y_2+z_2, \dots, x_{16}+y_{16}+z_{16})$ olur.

Gray dönüşümü altında kodun parametresi $(32n, 64n, 16n) = (64,128,32)$ biçimindedir.

4.2.8. Örnek: ${C_S}^{0,2}$ kodunu belirleyelim.

$${C_S}^{0,2} = \{(c_1, c_2, c_3).{M_S}^{0,2} \mid c_1 \in S, c_2, c_3 \in F_2\}$$

$$= \left\{(c_1, c_2, c_3).\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & v^2 & v^2 \\ 0 & v^2 & 0 & v^2 \end{bmatrix} \mid c_1 \in S, c_2, c_3 \in F_2\right\}\text{'dir.}$$

Böylece

${C_S}^{0,2} = \{0000,00v^2v^2, 0v^20v^2, 0v^2v^20,1111,111+v^21+v^2, 11+v^211+v^2,$

$11+v^21+v^21, vvvv, vvv+v^2v+v^2, vv+v^2vv+v^2, vv+v^2v+v^2v, v^2v^2v^2v^2,$

$v^2v^200, v^20v^20, v^200v^2, 1+v1+v1+v1+v, 1+v1+v1+v+v^21+v+v^2,$

$1+v1+v+v^21+v1+v+v^2, 1+v1+v+v^21+v+v^21+v,$

$1+v^21+v^21+v^21+v^2, 1+v^21+v^211, 1+v^211+v^21, 1+v^2111+v^2,$

$v+v^2v+v^2v+v^2v+v^2, v+v^2v+v^2vv, v+v^2vv+v^2v, v+v^2vvv+v^2,$

$1+v+v^21+v+v^21+v+v^21+v+v^2, 1+v+v^21+v+v^21+v1+v,$

$1+v+v^21+v1+v1+v+v^2, 1+v+v^21+v1+v1+v+v^2\} \subseteq S^4$

kodun parametresi $(n, 8n, 2n) = (4,32,8)$ olur.

Bu ${C_S}^{0,2}$ kodunun Gray görüntüsü,

$$\phi\left({C_S}^{0,2}\right) = (z_1, z_2, z_3, z_4, x_1+z_1, x_2+z_2, x_3+z_3, x_4+z_4, y_1+z_1, y_2+$$
$$z_2, y_3+z_3, y_4+z_4, x_1+y_1+z_1, x_2+y_2+z_2, x_3+y_3+z_3, x_4+y_4+z_4) \text{ olur.}$$

Buradan

$\phi\left({C_S}^{0,2}\right) = \{0000000000000000,0011001100110011,0101010101010101,$

$0110011001100110,0000111100001111,0011110000111100,0101101001011010,$

$0110100101101001,0000000011111111,0011001111001100,0101010110101010,$

$0110011010011001,1111111111111111,1100110011001100,1010101010101010,$

1001100110011001,0000111111110000,0011110011000011,0101101010100101,
0110100110010110,1111000011110000,1100001111000011,1010010110100101,
1001011010010110,1111111100000000,1100110000110011,1010101001010101,
1001100101100110,1111000000001111,1100001100111100,1010010101011010,
1001011001101001} biçimindedir. Kodun parametresi $\phi\left({C_S}^{0,2}\right) = (4n, 8n, 2n) = (16,32,8)$ bulunur. Buradan ${C_S}^{0,2}$ kodunun birinci tekrarlı oluşum kodunu belirleyelim.

$$ {}_1{C_S}^{0,2} = \left\{(a, a+b) | a \in {C_S}^{0,2}, b \in S' = \{0000, v^2v^2v^2v^2\}\right\} $$

$$ = \{00000000, 0000v^2v^2v^2v^2, 00v^2v^200v^2v^2,$$

$$ 00v^2v^2v^2v^200, 0v^20v^20v^20v^2, 0v^20v^20v^20v^2,$$

$$ 0v^2v^200v^2v^20, 0v^2v^20v^200v^2, 11111111, 1111v^2v^2v^2v^2,$$

$$ 111 + v^21 + v^2111 + v^21 + v^2, 111 + v^21 + v^21 + v^21 + v^211,$$

$$ 11 + v^211 + v^211 + v^211 + v^2, 11 + v^211 + v^21 + v^211 + v^21,$$

$$ 11 + v^21 + v^2111 + v^21 + v^21, 11 + v^21 + v^211 + v^2111 + v^2, vvvvvvvvv,$$

$$ vvvv + v^2v + v^2v + v^2v + v^2, vvv + v^2v + v^2vvv + v^2v + v^2,$$

$$ vvv + v^2v + v^2v + v^2v + v^2vv, vv + v^2vv + v^2vv + v^2vv + v^2,$$

$$ vv + v^2vv + v^2v + v^2vv + v^2v, vv + v^2v + v^2vvv + v^2v + v^2v,$$

$$ vv + v^2v + v^2vv + v^2vvv + v^2, v^2v^2v^2v^2v^2v^2v^2v^2, v^2v^2v^2v^20000, v^2v^200v^2v^200,$$

$$ v^2v^20000v^2v^2, v^20v^20v^20v^20, v^20v^200v^20v^2, v^200v^2v^200v^2, v^200v^20v^2v^20,$$

$$ 1 + v1 + v1 + v1 + v1 + v1 + v1 + v1 + v, 1 + v1 + v1 + v1 + v1 + v^21 + v^21 + v^21 + v^2,$$

$$ 1 + v1 + v1 + v + v^21 + v + v^21 + v1 + v1 + v + v^21 + v + v^2,$$

$$ 1 + v1 + v1 + v + v^21 + v + v^21 + v + v^21 + v + v^21 + v1 + v,$$

$$ 1 + v1 + v + v^21 + v1 + v + v^21 + v1 + v + v^21 + v1 + v + v^2,$$

$$ 1 + v1 + v + v^21 + v1 + v + v^21 + v1 + v + v^21 + v1 + v + v^2,$$

$$ 1 + v1 + v + v^21 + v1 + v + v^21 + v1 + v + v^21 + v + v^21 + v,$$

$$ 1 + v1 + v + v^21 + v + v^21 + v1 + v1 + v + v^21 + v + v^21 + v,$$

$$ 1 + v1 + v + v^21 + v + v^21 + v1 + v + v^21 + v1 + v1 + v + v^2,$$

$$1+v^2 1+v^2 1+v^2 1+v^2 1+v^2 1+v^2 1+v^2, 1+v^2 1+v^2 1+v^2 1+v^2 1111,$$

$$1+v^2 1+v^2 111+v^2 1+v^2 11, 1+v^2 1+v^2 11111+v^2 1+v^2,$$

$$1+v^2 11+v^2 11+v^2 11+v^2 1, 1+v^2 11+v^2 111+v^2 11+v^2,$$

$$1+v^2 111+v^2 1+v^2 111+v^2, 1+v^2 111+v^2 11+v^2 1+v^2 1,$$

$$v+v^2 v+v^2 v+v^2 v+v^2 v+v^2 v+v^2 v+v^2 v+v^2, v+v^2 v+v^2 v+v^2 v+v^2 vvvv,$$

$$v+v^2 v+v^2 vvv+v^2 v+v^2 vv, v+v^2 v+v^2 vvvvv+v^2 v+v^2,$$

$$v+v^2 vv+v^2 vv+v^2 vv+v^2 v, v+v^2 vv+v^2 vvv+v^2 vv+v^2,$$

$$v+v^2 vvv+v^2 v+v^2 vvv+v^2, v+v^2 vvv+v^2 vv+v^2 v+v^2 v,$$

$$1+v+v^2 1+v+v^2 1+v+v^2 1+v+v^2 1+v+v^2 1+v+v^2 1+v+v^2 1+v+v^2,$$

$$1+v+v^2 1+v+v^2 1+v+v^2 1+v+v^2 1+v1+v1+v1+v,$$

$$1+v+v^2 1+v+v^2 1+v1+v1+v+v^2 1+v+v^2 1+v1+v,$$

$$1+v+v^2 1+v+v^2 1+v1+v1+v1+v1+v+v^2 1+v+v^2,$$

$$1+v+v^2 1+v1+v+v^2 1+v1+v+v^2 1+v1+v+v^2 1+v,$$

$$1+v+v^2 1+v1+v+v^2 1+v1+v1+v+v^2 1+v1+v+v^2,$$

$$1+v+v^2 1+v1+v1+v+v^2 1+v+v^2 1+v1+v1+v+v^2,$$

$$1+v+v^2 1+v1+v1+v+v^2 1+v1+v+v^2 1+v+v^2 1+v\}$$

kodunun parametresi $(2n, 16n, 4n) = (8,64,16)$ olarak belirlenir. Bu kodun Gray dönüşümü altında bulunan kodun parametresi $(8n, 16n, 4n) = (32,64,16)$ olur.

4.2.9. Örnek: $C_S{}^{1,0}$ kodunu belirleyelim.

$$C_S{}^{1,0} = \{(c_1, c_2).M_S{}^{1,0} | \, c_1, c_2 \in S\}$$

$$= \left\{(c_1, c_2).\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & v & v^2 & 1+v & 1+v^2 & v+v^2 & 1+v+v^2 \end{bmatrix} | \, c_1, c_2 \in S\right\}$$

$= \{c_1, c_1+c_2, c_1+vc_2, c_1+v^2 c_2, c_1+(1+v)c_2, c_1+(1+v^2)c_2, c_1+(v+v^2)c_2, c_1+(1+v+v^2)c_2 | \, c_1, c_2 \in S\}$ olur. Buradan

$$C_S{}^{1,0} = \{00000000, 01vv^2 1+v1+v^2 v+v^2 1+v+v^2, 0vv^2 0v+v^2 vv^2 v+v^2,$$

$$0v^2 00v^2 v^2 0v^2, 01+vv+v^2 v^2 1+v^2 1+v+v^2 v1, 01+v^2 vv^2 1+v+v^2 1v+v^2 1+v,$$

$$0v+v^2 v^2 0vv+v^2 v^2 v, 01+v+v^2 v+v^2 v^2 11+vv1+v^2,$$

$$11111111{,}101 + v1 + v^2vv^21 + v + v^2v + v^2, 11 + v1 + v^211 + v + v^21 + v1 + v^21 + v + v^2,$$

$$11 + v^2111 + v^21 + v^211 + v^2, 1v1 + v + v^21 + v^2v^2v + v^21 + v0,$$

$$1v^21 + v1 + v^2v + v^201 + v + v^2v, 11 + v + v^21 + v^21 + v1 + v + v^21 + v^21 + v,$$

$$1v + v^21 + v + v^21 + v^20v1 + vv^2, vvvvvvvv, v1 + v0v + v^211 + v + v^2v^21 + v^2,$$

$$v0v + v^2vv^20v + v^2v^2, vv + v^2vvv + v^2v + v^2vv + v^2,$$

$$v1 + v^2v^2v + v^21 + v + v^21 + v^201 + v, v1 + v + v^20v + v^21 + v^21 + vv^21,$$

$$vv^2v + v^2v0v^2v + v^20, v1 + v^21 + v^2v + v^21 + v101 + v + v^2, v^2v^2v^2v^2v^2v^2v^2v^2,$$

$$v^21 + v^21 + v + v^201 + v + v^21v1 + v, v^2v + v^20v^2vv + v^20v, v^20v^2v^200v^20,$$

$$v^21 + v + v^21 + v011 + vv + v^21 + v^2, v^21v + v^201 + v1 + v^2v1 + v + v^2,$$

$$v^2v0v^2v + v^2v0v + v^2, v^21 + vv01 + v^21 + v + v^2v + v^21,$$

$$1 + v1 + v1 + v1 + v1 + v1 + v1 + v1 + v, 1 + vv11 + v + v^20v + v^21 + v^2v^2,$$

$$1 + v11 + v + v^21 + v1 + v^211 + v + v^21 + v^2,$$

$$1 + v1 + v + v^21 + v1 + v1 + v + v^21 + v + v^21 + v1 + v + v^2,$$

$$1 + v01 + v^21 + v + v^2v + v^2v^21v, 1 + vv + v^211 + v + v^2v^2v1 + v^20,$$

$$1 + v1 + v^21 + v + v^21 + v11 + v^21 + v + v^21 + v^2, 1 + vv^21 + v^21 + v + v^2v01v + v^2,$$

$$1 + v^21 + v^21 + v^21 + v^21 + v^21 + v^21 + v^21 + v^2, 1 + v^2v^21 + v + v^21v + v^201 + vv,$$

$$1 + v^21 + v + v^211 + v^21 + v1 + v + v^211 + v, 1 + v^211 + v^21 + v^2111 + v^21,$$

$$1 + v^2v + v^21 + v10v1 + v + v^2v + v^2, 1 + v^201 + v + v^21vv^21 + vv + v^2,$$

$$1 + v^21 + v11 + v^21 + v + v^21 + v11 + v + v^2,$$

$$v + v^2v + v^2v + v^2v + v^2v + v^2v + v^2v + v^2v + v^2, v + v^21 + v + v^2v^2v1 + v^21 + v01,$$

$$v + v^2v^2vv + v^20v^2v0, v + v^2vv + v^2v + v^2vvv + v^2v,$$

$$v + v^21 + v^20v1 + v1v^21 + v + v^2, v + v^21 + vv^2v11 + v + v^201 + v^2,$$

$$v + v^20vv + v^2v^20vv^2, v + v^210v1 + v + v^21 + v^2v^21 + v,$$

$$1 + v + v^21 + v + v^21 + v + v^21 + v + v^21 + v + v^21 + v + v^21 + v + v^21 + v + v^2,$$

$$1 + v + v^2v + v^21 + v^21 + vv^2v10, 1 + v + v^21 + v^21 + v1 + v + v^211 + v^21 + v1,$$

$$1 + v + v^21 + v1 + v + v^21 + v + v^21 + v1 + v1 + v + v^21 + v,$$

$1+v+v^2v^211+vv01+v^2v+v^2, 1+v+v^2v1+v^21+v0v+v^21v^2,$

$1+v+v^211+v1+v+v^21+v^211+v1+v^2, 1+v+v^2011+vv+v^2v^21+v^2v\}$

olarak belirlenir. Kodun parametresi $(n, 8n, 2n) = (8,64,16)$ olur. Gray dönüşümü altında belirlenen kodun parametresi $(4n, 8n, 2n) = (32,64,16)$ olur.

$C_S{}^{1,0}$ kodunun 1. tekrarlı oluşum kodu parametresi $(2n, 16n, 4n) = (16,128,32)$'dir. ${}_1C_S{}^{1,0}$'ın Gray dönüşümü $\phi({}_1C_S{}^{1,0})$ kodunun parametrsi $(8n, 16n, 4n) = (64,128,32)$ olur.

$C_S{}^{1,0}$ kodunun 2. tekrarlı oluşum kodu $(8n, 64n, 16n) = (64,512,128)$ parametresine sahip olur. ${}_2C_S{}^{1,0}$'ın Gray dönüşümü altında $\phi({}_2C_S{}^{1,0})$ kodunun parametresi $(32n, 64n, 16n) = (256,512,128)$ olur.

Buradan ${}_1C_S{}^{0,1}$ kodu $C_S{}^{0,2}$ koduna eşittir. Ayrıca bu kodların Gray dönüşümü alındığında $\phi({}_1C_S{}^{1,0}) = \phi(C_S{}^{0,2})$ olarak bulunur.

${}_2C_S{}^{1,0}$ kodu $C_S{}^{1,1}$ koduna eşittir. Ayrıca bu kodların Gray dönüşümü alındığında $\phi({}_2C_S{}^{1,0}) = \phi(C_S{}^{1,1})$ olarak bulunur.

BÖLÜM 5

SONUÇLAR

BÖLÜM 3'te iki farklı halka yapısı ortaya konuldu. Bu halkalar $k = 1$ ve $k = v$ durumları için R_1 ve R_v halkaları olarak isimlendirilmektedir. Dört elemanlı R_1 ve R_v halkalarının elemanları ile özel matrisler oluşturuldu. Kodların üreteçleri olarak kullanılan bu özel matrisler, ilgili halkaların özelliklerine göre oluşturulmuştur. ${C_{R_1}}^{\alpha_1,\alpha_2}$ ve ${C_{R_v}}^{\alpha_1,\alpha_2}$ biçimi ile yazılan kodların parametreleri, genel bir parametre sınırını sağladığı için biçimsel olarak Hadamard kodlar ile ilişkilendirilmiştir. Her iki kod tipinin Gray dönüşümleri altında hangi kodlara karşılık geldiği sonuçları ortaya konulmuştur. İki farklı durum için tek kodlar, çift kodlar Birinci tekrarlı oluşum kodları ve ikinci tekrarlı oluşum kodları tanımları verilmiştir. Bu kodların üzerinde devirli ve yarı-devirli dönüşümler ile Gray dönüşümleri verilen farklı kodların benzerlikleri, eşitlikleri ve denklikleri hakkında sonuçlar ortaya konulmuştur. Matris oluştururken satır ve sütun sayılarına koşullar konularak hangi tek kodların, hangi çift kodlara eşit kodlara eşit veya denk olduğu sonuçları bulunmuştur ve farklı örnekler üzerinde uygulaması gösterilmiştir. Bir tek veya çift kodun Gray görüntüsü ile kodun Gray görüntüsünün tek veya çift kodunun eşit olduğu önermesi sunulmuştur. Bu önermenin bir sonucu olarak farklı uygulamalar gösterilmiştir. Ayrıca bu formda oluşturulan bir devirli kodun Gray görüntüsü altındaki kod ile bu kodun Gray görüntüsü altındaki kodun 2. mertebeden yarı-devirli kod olduğu sonucundan da bahsedilmiştir. Buradan Hadamard kodlarının 2. mertebeden yarı-devirli kodların hangi tiplerine eşit çıktığı ifade edilmiştir. Birinci tekrarlı oluşum kodlarının ve ikinci tekrarlı oluşum kodlarının farklı tipteki kodlar ile ilişkileri de gösterilmiştir.

BÖLÜM 4'te tek değişkenli polinom halkası ele alınmıştır. Burada bu halkaya izomorf olan sekiz elemanlı $\mathbb{Z}_2 + v\mathbb{Z}_2 + v^2\mathbb{Z}_2$ halkasının elemanları kullanılarak matrisler oluşturulmuştur. Bu matrislerin ürettiği ${C_S}^{\alpha_1,\alpha_2}$ kodları yazılmıştır. Sonra bu kodların birinci tekrarlı oluşum kodları ve ikinci tekrarlı oluşum kodları tanımları verilmiş ve hangi kodlara karşılık geldiği uygulamaları yapılmıştır. Bu ${C_S}^{\alpha_1,\alpha_2}$ kodları, birinci tekrarlı oluşum kodlarının ve ikinci tekrarlı oluşum kodlarının Gray görüntüleri ile Hadamard kod ilişkisi ortaya konulmuştur. Sonuç olarak konunun pekişmesi açısından bu ifadeleri barındıran örnekler çözülmüştür.

KAYNAKLAR

Bandi, R. K., & Bhairwal, M. (2014, September). Codes over $Z_4 + vZ_4$. *In 2014 International Conference on Advances in Computing, Communications and Informatics (ICACCI)* (pp. 422–427). IEEE.

Berrou, C., Glavieux, A., & Thitimajshima, P. (1993, May). Near Shannon limit error-correcting coding and decoding: Turbo-codes. 1. In Proceedings of ICC'93-IEEE International Conference on Communications (Vol. 2, pp. 1064-1070). IEEE.

Blake, I. F. (1972). Codes over certain rings. Information and Control, 20(4), 396–404.

Bose, R. C., & Ray-Chaudhuri, D. K. (1960). On a class of error correcting binary group codes. *Information and control*, *3*(1), 68-79.

Bossert, M. (1999). *Channel coding*. Wiley.

Chapman, H. (1996). *Coding theory* (2nd ed.). Butterworth Press.

Çallıalp, F. (2011). *Örneklerle soyut cebir*. Birsen Yayınevi.

Delsarte, P. (1978). Bilinear forms over a finite field, with applications to coding theory. *Journal of Combinatorial Theory, Series A, 25(*3), 226–241.

Gabidulin, E. M., & Loidreau, P. (2005). On the design of codes in rank metric. *In Proceedings, International Symposium on Information Theory*, *2005. ISIT 2005.* (pp. 121-123). Adelaide, Australia.

Gao, Y., & Lai, C. (2017). Cyclic codes of odd length over $Z_4\,[u]/< u^k >$. *Cryptography and Communications*, *9*, 599–624.

Gao, J., & Fu, F. W. (2015). Linear codes and $(1 + uv)$-constacyclic codes over $R\,[v]/(v^2 + v)$. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, 98*(4), 1044–1048.

Hamming, R. W. (1950). Error detecting and error correcting codes. *The Bell System Technical Journal, 29*(2), 147–160.

Hungerford, T.W. (1974). *Algebra*. New York: Springer Verlag.

Justesen, J., & Hoholdt, T. (2004). *A course in error-correcting codes* (Vol. 1). European Mathematical Society.

Kandemir, N., & Özkan, M. (2024). Repetitive occurrence codes in eight element ring. *International Congress on Natural Sciences and Applied Mathematics*, İstanbul, Türkiye. https://doi.org/10.5281/zenodo.12678585

Kandemir, N., & Özkan, M. (2023). Dört elemanlı halkada tek kodlar ve çift kodlar. *3rd International Conference on Scientific and Academic Researches (ICSAR), 1*(3), 601–605.

Krotov, D. S. (2001). Z_4-linear Hadamard and extended perfect codes. *Electronic Notes in Discrete Mathematics, 6*, 107–112.

Krotov, D. S. (2000). Z_4-linear perfect codes. *Diskretnyi Analiz i Issledovanie Operatsii, 7*(4), 78–90. https://arxiv.org/pdf/0710.0198

Kshevetskiy, A., & Gabidulin, E. (2005). The new construction of rank codes. *In Proceedings International Symposium on Information Theory 2005. ISIT 2005* (pp. 2105–2108).

Lin, S., & Costello, D. J. (2004). *Error control coding* (2nd ed.). Prentice Hall, 0-13-017973-6.

Ling, S., & Xing, C. (2004). *Coding theory: a first course.* Cambridge University Press.

MacWilliams, F. J. (1977). The theory of error-correcting codes. *Elsevier Science Publishers BV google schola*, *2*, 39-47.

Özkan, M., & Kandemir, N. (2024). Applications on gray images of special generator codes on $F_2 + vF_2$ in the case $v^2 = v$. *Internatıonal Congress on Natural Scıences And Applied Mathematics*, İstanbul, Türkiye. https://doi.org/10.5281/zenodo.12678585

Özkan, M., & Öztürk, B. (2018). Certain rings and group codes. *Journal of New Results in Engineering and Natural Sciences, 8*(3), 25–30.

Özkan, M., & Öke, F. (2017). Repeat codes, even codes, odd codes and their equivalence. *General Letters in Mathematics, 2*(1), 110–118.

Özkan, M. (2016). *Hadamard kodları ve halkalar üzerindeki kodlar* (Yayımlanmamış doktora tezi). Trakya Üniversitesi/ Fen Bilimler Enstitüsü, Edirne.

Özkan, M., & Öke, F. (2016). A relation between Hadamard codes and some special codes over $F_2 + uF_2$. *App. Mathematics and Inf. Sci*, *10*(2), 701-704.

Pless, V. (2011). *Introduction to the theory of error-correcting codes*. John Wiley & Sons.

Richardson, T., & Urbanke, R. (2008). *Modern coding theory*. Cambridge University Press.

Roman, S. (1992). *Coding and information theory*. New York: Springer Verlag.

Shannon, C. E. (1948). A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal, 27*(3), 379–423.

Trappe, W., & Washington, L. C. (2002). *Introduction to cryptography with coding theory*. Prentice Hall.

Vermani, L. R. (2022). *Elements of algebraic coding theory*. Routledge.

Wolfmann, J. (1999). Negacyclic and cyclic codes over Z_4. *IEEE Transactions on Information Theory*, *45*, 2527–2532.

Zhu, S., Wang, Y., & Shi, M. (2010). Some results on cyclic codes over $F_2 + vF_2$. *IEEE Transactions on Information Theory, 56*(4), 1680–1684.

ÖZGEÇMİŞ

İlkokul ve ortaokulu Gaziosmanpaşa İlkokulu Babaeski-Kırklareli'nde, liseyi Şehit Ersan Yenici Anadolu Lisesi Babaeski-Kırklareli'nde okudum.

2017'de kaydolduğum Trakya Üniversitesi Matematik Bölümünden Ağustos 2021'de mezun oldum.

Ocak 2022'de Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Hesaplamalı Bilimler Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans programına başladım.