Trakya Eğitim Dergisi

ISSN: 2630-6301
Yayımcı: Trakya Üniversitesi

Vol. 16, No. 2, 880-932, 2026
DOI: 10.24315/tred.1723069

Araştırma Makalesi

Cebirsel Açıdan İkili İşlemler Konusunda Öğretmen Adaylarının Yaşadıkları Kavram Yanılgıları

Mustafa Özkan[1*]
Levent Vural[2]

[1]Trakya Üniversitesi, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Edirne, Türkiye
mustafaozkan@trakya.edu.tr

[2]Trakya Üniversitesi, Eğitim Programları ve Öğretim Anabilim Dalı, Edirne, Türkiye
leventvural@trakya.edu.tr

*Sorumlu Yazar

Geliş tarihi:19.06.2025
Kabul tarihi:29.07.2025
Yayım tarihi:30.04.2026

Özet: Bu çalışmanın temel amacı, ilköğretim matematik öğretmenliği programında öğrenim gören öğrencilerin cebirsel ikili işlemler konusundaki kavram yanılgılarını derinlemesine incelemektir. Kavramların öğrenme süreçlerindeki temel rolü ve kavram yanılgılarının alan bilgisi edinimindeki engelleyici etkisi bağlamında bir nitel durum çalışması gerçekleştirilmiştir. Farklı sınıf düzeylerinden 89 öğretmen adayının katılımıyla yürütülen çalışmada, araştırmacılar tarafından geliştirilen matematiksel işlem ve açık uçlu sorular içeren 10 soruluk bir veri toplama aracı kullanılmıştır. Verilerin analiz sürecinde alan uzmanı görüşleri alınmış ve tekrarlı değerlendirmelerle geçerlik ve güvenirlik sağlanmaya çalışılmıştır. Veri toplama aracından elde edilen bulgulara göre öğretmen adaylarının ikili işlemler konusunda genel olarak kavram yanılgısı yaşadıklarını ortaya koymuştur. Adayların yarısından fazlasının kavram yanılgısı yaşadığı söylenebilir. Sonuç olarak adaylarda "ikili işlem" kavramının tam olarak oluşmadığı, kavram yanılgısı yaşamayan adaylarda ise diğer işlem özelliklerinin tam olarak ifade edilemediği gözlemlenmiştir.

Anahtar Kelime: Cebir, İkili işlemler, Kavram yanılgısı, Matematik öğretimi

GİRİŞ

Her disiplin olgular ve kavramlar üzerinden tartışır, aktarılır ve ilerler. Bilim aynı zamanda olay, durum ve yaşantıları açıklamak ile anlaşılır kılmak için yeni kavramlar üreterek etkililiğini arttırır. Bu bakımdan kavramlar bilimin yapı taşları olarak görülebilir. Öncül (2000), kavram sözcüğünü *"birden çok nesne ya da yaşantıyı belirten ya da bunlar arasındaki ilişkiyi anlatan genel ya da soyut düşünce"* olarak tanımlamaktadır. Kavramlar soyutlama ve genelleme işlemi sonucu elde edilirler. Bu çerçevede öğretme-öğrenme sürecinde kavramların öğrenenler tarafından tam olarak içselleştirilmesi öğrenme yaşantısının da etkili olduğu şeklinde yorumlanabilir. Üst düzey düşünme süreçlerini ve öğrenci merkezli bir eğitim sürecini merkezine alan yapılandırmacı yaklaşım, kavram öğrenmeyi oldukça önemseyen bir anlayışı barındırmaktadır. Senemoğlu (2013) da doğru kavram ediniminin, öğrenmenin ve bilişsel gelişimin temelini oluşturduğunu belirtmektedir. Bu kapsamda öğrenci merkezli bir eğitimin etkin bir şekilde işletilebilmesi için kavram öğretiminin de etkin bir şekilde gerçekleştirilmesi gerekmektedir. Türkiye Yüzyılı Maarif Modeli öğretim programı ortak metninde de *"bilgi kümeleri ile birlikte kavramsal beceriler, alan becerileri, bu becerileri destekleyen eğilimler ve programlar arası bileşenler çerçevesinde beceri örgüsüne dayalı bir yaklaşım esas alınmıştır"* denilerek kavramsal becerilere verilen önem vurgulanmak istenmiştir (Milli Eğitim Bakanlığı (MEB), 2024). Bu kapsamda kavramsal beceriler programlarda; temel beceriler, bütünleşik beceriler ve üst düzey düşünme becerileri olarak aşamalandırılmıştır. Bunun yanında karar verme, problem çözme ve eleştirel düşünme becerileri de üst düzey düşünme becerileri olarak belirtilmiştir. Öğretim programlarında okuryazarlık becerileri içerisinde de kavram öğretiminin önemine yönelik açıklamalara ulaşmak mümkündür (MEB, 2024). Bu çerçevede okullarda yer verilen her ders/disiplin için kavram öğretimi öğretmenler açısından önemini koruyarak öğretim süreçlerinin önemli bir parçası olarak halen süregelmektedir. Fakat kavramsal ilişkinin iyi

Cite as(APA 7): Ozkan M., & Vural L. (2025). Cebirsel Açıdan İkili İşlemler Konusunda Öğretmen Adaylarının Yaşadıkları Kavram Yanılgıları. *Trakya Eğitim Dergisi, 16*(2), 880—932. https://doi.org/10.24315/tred.1723069

This is an open Access paper distributed under the terms of Conditidions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.

kurulamaması ya da olması gereken bilimsel anlamından farklı şekillerde anlamlandırılması öğrenenlerin alan bilgisi ediniminde önemli bir engel olabilmektedir.

Kavram yanılgısı olarak nitelendirilebilecek bu durum (Hammer, 1996; McDonald, 2010; Swan, 2001) etkili bir alan öğretimini ve alan edinimini engelleyen faktörlerin başında gelmektedir. Baştürk ve Dönmez (2010)'e göre böyle durumda öğretmenlerden beklenen *"öğrencilerde var olan veya var olabilecek kavram yanılgılarının farkında olmanın yanı sıra bu kavram yanılgılarını iyi bir şekilde analiz ederek yapacakları öğretimi planlama ve şekillendirmede kullanmaları*" olarak belirtilmektedir. Kavram yanılgıları aynı zamanda anlamlı öğrenmeyi engelleyen önemli bir faktör olarak da görülmektedir (Ay, 2017). Fujii (2020), kavramların kabul edilen anlamlarla çeliştiği düşünüldüğünde, öğreticilerin kavram yanılgısı terimini kullanılma eğiliminde olduğunu belirterek bazı araştırmacılar veya eğitimcilerin "kavram yanılgısı" yerine "alternatif kavram" terimini kullanmayı tercih ettiklerini de vurgulamaktadır. Ojese (2015), öğrencilerin genellikle iki türde hata yaptıklarını belirterek bunları; kavramsal hatalar ile uygulama hataları olarak tanımlamaktadır. Kavramsal hatalar, anlama eksikliği ile ilişkili olarak gerçekleşen bir hata türüdür. Kavram hatalarının kaynağı bu kapsamda kavram yanılgıları olabilmektedir. Mohyuddin ve Khalil (2016), kavram yanılgılarının iki nedenden dolayı sorun teşkil ettiğini belirtmektedir. Birincisi, öğrencilerin bunları yeni deneyimleri yorumlamak için kullandıklarında öğrenmeyi engellemeleri ikinci olarak da öğrencilerin kavram yanılgılarına duygusal ve entelektüel olarak bağlanmış oldukları için kendilerine benzemeyen yeni kavramları kabul etmekte zorluk yaşamalarıdır. Türkdoğan, Bülbül, Güler ve Danişman (2015), kavram yanılgıları ile yapılmış ilk ve en önemli çalışmalardan birisinin Erlwanger'e (1973) ait olduğuna işaret edip, Benny adındaki bir öğrencinin kendi matematiksel kurallarını oluşturarak yaptığı işlemlerin nedenlerini kavrayamadığı için nasıl bir kavram yanılgısına düştüğünün çalışmada açıklanmaya çalışıldığını belirtmektedir. Alanyazında kavram yanılgılarının gerçekleşme nedenleri ile ilgili olarak (Güveli, Bulut & Güveli, 2018; Satan, vd., 2021; Subrapto, 2020; Şen & Yılmaz, 2013; Yağbasan & Gülçiçek, 2003) öğrencilerin ön bilgileri, öğretim yöntemleri, öğrencinin bilişsel yapısı, kültür, öğreticinin kendi yanılgıları ve öğretim materyalleri gibi etmenler sayılmaktadır. Özellikle kavramların yoğun olduğu derslerde farklı etmenler bu yanılgıların kaynağı olabilmektedir.

Kavramların yoğun olarak yer aldığı derslerden biri de matematik dersidir. Matematik dersi ilköğretim kurumlarında haftalık 5 saat, ortaöğretim kurumlarında ise farklılık göstermekle birlikte örneğin Anadolu liselerinde 9. ve 10. sınıflarda haftalık 6 saat olarak belirlenmiştir (Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı (TTKB), 2024). Matematik öğretiminde kavramsal yapının tam olarak öğrenilmeden farklı kavramlara ilişkin yaşantılara geçilmesi kavram yoğun bir ders için anlaşılırlığı da engelleyebilmektedir. Küçük ve Demir (2009), matematiğin birikimli bir bilim dalı olması nedeniyle önceki bilgiler ve kavramlar bir sonrakiler için basamak oluşturduğundan, kavram yanılgılarının ve bilgi eksikliklerinin belirlenerek mutlaka çözüm yollarının aranması gerektiğini belirtmektedir. Türkdoğan, vd. (2015), herhangi bir kavramla ilişkili onlarca kavrama değinmeden birçok kavramı tanımlamanın matematik söz konusu olduğunda çok zor olduğunu vurgulayarak, bu durumu *"fonksiyonlar tanımlanmadan limit, limit tanımlanmadan da türev*

tanımlanamamaktadır" şeklinde ilişkilendirmektedir. Bu birikimli ve birbiri üzerine kurulu kavramsal ilişki öğretim programlarında da süreç içerisinde sarmal bir yapıda kendini göstermiştir (Ersoy, 2006; Özkale & Memiş, 2022). Matematiksel kavramların bu ilişkisi göz önünde bulundurulduğunda özellikle ilköğretim birinci ve ikinci kademede, birkaç üniteyi kaçırmış bir öğrencinin konuları takip edebilmesi bile çoğu zaman mümkün olamamaktadır (Türkdoğan, vd., 2015). Böylesi bir ilişkinin kesintiye uğraması ise konu alanı bilgisi eksik öğrenmelerle öğrenenlerin süreçten kopmaları anlamına gelmektedir. Alanyazın incelendiğinde matematik dersi söz konusu olduğunda öğrenenlerin farklı yaş ve düzeylerde çeşitli konulardaki öğrenme içeriğine yönelik olarak "kavram yanılgıları" (Küçük & Demir, 2009; Kshetree vd., 2021; Malambo, 2021; Powell & Nelson, 2020; Themane & Luneta, 2021) yaşadıkları gözlemlenmektedir. Bu bağlamda, matematik derslerinde yaşanan kavram yanılgıları, yalnızca öğrencilerin değil, aynı zamanda öğretmen adaylarının da karşılaştığı önemli bir sorundur (İlhan & Akın, 2022; Owusu vd., 2023; Ünver & Elçi, 2022). Öğretmen adayları üzerinde yapılan araştırmalar incelendiğinde adayların soyut matematik (Moralı, Köroğlu ve Çelik, 2004), bağlam temelli problem çözme (İlhan & Akın, 2022), trigonometri (Malambo, 2021), $'<'$ ve $'>'$ sembolleri, toplama ve çıkarma, tam sayıların çarpımı ve bölümü, tam sayılar, problem çözme, kelime problemleri çözme (Owusu vd., 2023) gibi çok çeşitli konularda kavram yanılgılarını belirlemeye yönelik çalışmaların yer aldığı görülmektedir. Bu çalışmalar içerisinde öğretmen adaylarının ikili işlemler konusunda yaşamış oldukları kavram yanılgılarını ortaya koyan bir çalışmanın olmadığı gözlemlenmiştir. Bu nedenle çalışmanın amacı; ilköğretim matematik öğretmenliği programında öğrenim gören öğretmen adaylarının ikili işlemler konusunda cebirsel açıdan yaşamış oldukları kavram yanılgılarını ortaya çıkarmaktır. Öğretmen adayları lisans öğrenimleri sırasında alan ve alan öğretimine yönelik derslerde bazı kavramlara yönelik olarak kavram yanılgılarına sahip olabilmektedirler. Bu durum ilgili alanda öğrenim gören adayların uzmanlık becerilerinde sıkıntıya neden olabilmektedir. Öte yandan bu kavram yanılgıları ile meslek yaşamlarına başlamak öğretim süreçlerinde de kimi sorunların kaynağı olabilmektedir. Bu nedenle adayların mezuniyet öncesinde olası kavram yanılgılarını ortaya çıkarmak ve sonrasında bu yanılgılar üzerinde çalışmalar yapmak yaşanabilecek sorunların giderilmesi açısından önemli gözükmektedir. Bu kapsamda çalışmanın genel amacı *"öğretmen adaylarının cebirsel açıdan ikili işlemler konusunda yaşamış oldukları kavram yanılgılarını"* ortaya çıkarabilmektedir. Bu amaç kapsamında aşağıdaki sorulara bazı yanıtlar aranmıştır?

1. Öğretmen adaylarının ikili işlemler konusunda cebirsel açıdan yaşadıkları kavram yanılgıları var mıdır, varsa yaşamış oldukları bu yanılgılar nelerdir?
2. Adayların yaşamış oldukları kavram yanılgıları sınıf düzeyine göre bir farklılık göstermekte midir?
3. Adayların yaşamış oldukları bu kavram yanılgılarının olası nedenleri nelerdir?

YÖNTEM

Araştırmanın bu bölümünde araştırma yöntemine, veri toplama araçlarına, verilerin analizine, araştırma bulgularının güvenirliği kapsamında gerçekleştirilen uygulamalar ile etik ilkeler ekseninde yapılan çalışmalara yer verilmiştir.

Araştırmanın Modeli

Bu araştırma nitel araştırmalar ekseninde tasarlanmış olup durum çalışması yöntemi kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Durum çalışmasında temel amaç, bir durum ya da kavram hakkında detaylı bir araştırma yapmak ve durumu olduğu gibi sunmaktır (Büyüköztürk vd., 2016). Bu amaçla ilköğretim matematik öğretmenliğinde her sınıf düzeyinde öğrenim gören öğretmen adaylarının araştırmacılar tarafından hazırlanan veri toplama aracına vermiş oldukları yanıtlar üzerinden varsa kavram yanılgıları ortaya konulmaya çalışılmıştır. Bu kapsamda araştırmacılar tarafında bu amaca hizmet eden en iyi nitel araştırma deseninin durum çalışması olduğu düşünülmüştür.

Araştırmanın Katılımcıları

Araştırma kapsamında ilköğretim matematik öğretmenliği programında öğrenim gören 11 birinci sınıf öğrencisi, 39 ikinci sınıf öğrencisi, 24 üçüncü sınıf öğrencisi ve 15 dördüncü sınıf öğrencisi yer almıştır. Dağılımın ikinci ve üçüncü sınıf düzeylerinde daha yoğun seçilmesi ilgili sınıflarda alınan pür matematik derslerinin yoğunluğu ile ilgili olmuştur(Cebir dersleri 2. ve 3. Sınıflarda okutulmaktadır). Araştırmada evreni temsilen örneklem alma yoluna gidilmemiş sadece farklı öğrenim düzeylerinde sınıf çoğunluğunu içeren öğretmen adayına ulaşma noktasında özen gösterilmiştir.

Veri Toplama Aracı

Araştırmada veri toplama aracı araştırmacılar tarafından geliştirilmiştir. Veri toplama aracında tüm katılımcılara sınıf düzeyi fark etmeksizin aynı sorular yöneltilmiş ve sorulara verdikleri yanıtlar üzerinden kavram yanılgılarına ilişkin analiz süreci gerçekleştirilmiştir. Adaylara veri toplama aracında toplam 10 (on) soru yöneltilmiştir. Soruların 5'i *"A*={1,2,3} *, B*={3,4,5} *olmak üzere A+B=? A. B=?"* örneğinde olduğu gibi matematiksel işlem gerektiren sorulardan oluşurken diğer 5 soru ise *"İkili işlem ile fonksiyon arasında bir ilişki var mıdır?"* örneğindeki gibi açık uçlu sorulardan oluşmaktadır. Soruların hazırlanışında iki matematik ve bir matematik eğitiminde görev yapan alan uzmanı olmak üzere üç alan uzmanının görüşlerinden yararlanılmıştır. Bu kapsamda alan uzmanlarına hazırlanan sorular verilerek kapsam ve teknik olarak soruları incelemeleri istenmiş varsa olası görüşleri alınmaya çalışılmıştır. Gelen görüşler doğrultusunda sorularda bazı değişikliklere gidilmiştir. Değişikliğe gidilen sorularla ilgili olarak en son fen fakültesi matematik bölümünde öğrenim gören üç öğrencinin görüşleri alınmış ve soruları yanıtlamaları istenmiştir. Üç öğrenci sorularla ilgili olarak bir düzeltme önerisinde bulunmamış ve yaklaşık 30 dakikalık sürede de soruları yanıtlayarak araştırmacılara geri vermişlerdir. İncelenen yanıtlar ve öğrenci görüşleri de dikkate alınarak soruların uygulanmaya hazır olduğu sonucuna varılmıştır.

Verilerin Toplanması ve Analizi

Araştırmanın verileri araştırmacılar tarafından ders ortamında uygulanarak toplanmıştır. Verilerin toplanması sırasında adaylardan kişisel bilgilerine yönelik veri alınmamış analiz sürecinde sınıf düzeyleri

dikkate alınarak bazı yorumlamalarda bulunulmuştur. Adayların soruları yanıtlamaları 40 dakika ile 25 dakika arasında değişkenlik göstermiştir. Böylelikle toplamda 89 öğretmen adayından veri elde edilmiştir.

Verilerin analizi sürecinde elde edilen 89 veri toplama aracından farklı sınıflardan olmak üzere toplam 20 veri toplama aracı seçilmiş ve matematik bölümünde görev yapan alan uzmanına güvenirlik için yanıt anahtarı ile birlikte gönderilerek öğrenci yanıtlarını değerlendirmesi ve değerlendirmeler sırasında olası kavram yanılgılarına yönelik olarak görüş belirtmesi istenmiştir. Alan uzmanına gönderilen aynı öğrenci verileri araştırmacılar tarafından da değerlendirilmiş sonrasında alan uzmanı ile olası kavram yanılgılarına ilişkin görüş alışverişinde bulunulmuştur. Gerçekleştirilen görüş alışverişinde belirlenen olası kavram yanılgıları karşılıklı olarak paylaşılmış ve Miles & Huberman (1994) formülü kullanılarak %90 oranında kavram yanılgıları üzerinde bir uzlaşının sağlandığı görülmüştür. Bu kapsamda diğer veri toplama araçlarında yer alan öğrenci yanıtlarının değerlendirilmesi ve yanılgıların tespiti araştırmacılar tarafından gerçekleştirilmiştir. Tüm kâğıtların değerlendirilmesinin ardından rastgele seçilen on kağıt araştırmacılar tarafından yeniden değerlendirilerek yanlılığın önüne geçilmeye çalışılmıştır.

Araştırmanın Geçerlik ve Güvenirliği

Araştırmanın geçerlik ve güvenirliğini sağlayabilmek adına veri toplama aracının hazırlanış sürecinden başlayarak verilerin analizine kadar bazı uygulamalar gerçekleştirilmiştir. Bu uygulamaların araştırmacı yanlılığı ile verilerin inandırıcılığına katkı sunduğu düşünülmektedir. Öncelikli olarak veri toplama aracının hazırlanışından üç uzmandan kapsam geçerliği ve soruların teknik açıdan doğru olarak hazırlanışı noktasında görüşleri istenmiştir. Veri toplama aracının uygulanışı sırasından adaylardan ad-soyad vb. kişisel bilgi istenmemiş ve uygulamanın değerlendirme amacı taşımadığı bilgisi paylaşılmıştır. Bu çerçevede uygulamalar rahat bir ortamda gerçekleştirilmiş, yanıtlar noktasında araştırmacıların adaylara herhangi bir desteği olmamıştır. Verilerin analizi için alan uzmanından yararlanılmış, adayların olası kavram yanılgıları noktasında karşılıklı görüş alışverişinde bulunulmuştur.

Araştırmanın Etik Onayı

Araştırma kapsamında öncelikle Trakya Üniversitesi Sosyal ve Beşeri Bilimler Araştırmaları Etik Kurulu'nun 09.01.2025 tarih ve 774295 sayılı kararı ile araştırmanın yapılabilmesi açısından etik ve bilimsel standartlar açısından bir sakınca bulunmadığına ilişkin onay alınmıştır (Ek 1).

BULGULAR VE YORUMLAR

Araştırmanın bu bölümünde veri toplama aracından elde edilen bulgulara ve bu bulgulara ilişkin bazı yorumlara yer verilmiştir. Veri toplama aracında öğretmen adaylarına her sınıf düzeyinde aynı sorular yöneltilmiş olup yanıtlardan ikili işlem konusunda yaşadıkları kavram yanılgıları ortaya çıkartılmaya çalışılmıştır. Bulguların sunumunda alt amaçlarla paralellik taşıması noktasında özen gösterilmiştir. Bu

kapsamda veri toplama aracında yer alan sorular ayrı ayrı değerlendirilmiş olup olası kavram yanılgılarına yönelik açıklamalara ve bunun olası nedenlerine sorular içerisinde yer verilmiştir.

1. soru: "ikili işlem kavramından ne anlıyorsunuz?"

Bu soruya yanıt olarak 1.sınıf ilköğretim matematik öğretmenliği okuyan öğretmen adaylarının verdiği yanıtlar genellikle şöyledir: "iki farklı sayı arasında gerçekleşen işlemler", " işlem yapılırken veya eşitlenirken bir çiftinin olması gereklidir", "ikili işlemde elemanları ikişerli toplamaktır.", " A={1,2}, B={3,4} bunlar arasındaki işlemler ikili işlem olur" ve "matematikte işlemler hep iki sayı arasında olur 3. sayı daha sonra eklenir ve öyle devam eder." biçiminde cevaplar verilmiştir. Burada ikili işlem sorulduğunda yanıt olarak yine içinde işlem veya ikili işlem kelimesi geçirilmiştir. İlk yanıtta iki farklı sayı arasında denilmiş ancak işleme alınacak sayıların farklı olması gerekmemektedir. Dikkatlice incelendiğinde 1+1 ifadesi literatürde yok anlamına gelir. Bu nedenle adayın kavram yanılgısı söz konusu olmuştur. Diğer başka yanıt olarak "işlem yapılırken veya eşitlenirken bir çiftinin olması gereklidir" yanıtıdır. İşlem nasıl yapılır aynı şekilde işlem nasıl eşitlenir ve neyin çiftinin olması gerekir? Bazen matematikte kullandığımız kavramların yaptıkları işlem aktarırken veya ifade edilirken yanlış ve anlamından uzak olarak kullandığı çok yaygın görülür. Bunun için matematiksel bir kavramın ne için ve nerede kullanıldığını yani o kavramın öncelikle tanımının iyi bilinmesi gerekmektedir. İçinde işlem geçen başka bir yanıtta ise "ikili işlem işlemde elemanları ikişerli toplamaktır" biçiminde olmuştur. Burada ise sadece toplamaya vurgu yapılmıştır. Oysaki birçok ikili işlem olabilmektedir. Bir başka yanlış aktarım ise "işlemde" kelimesi olmuştur. İşlemde yani bir kümede olarak bahsedilebilir veya işlem kelimesi vurgulanacaksa işlem ile denilmesi gerekmektedir. Yine 1.sınıf öğretmen adaylarında işlem kavramını açıklamada kullanılan "A={1,2} ve B={3,4} kümesi belirterek işlem bunlar arasında olur" olarak bahsedildiğinde durumun özel bir örnekle açıklanmaya çalışıldığı gözlemlenmiştir. Ayrıca bu iki küme ve bu iki küme elemanları başka iken farklı iki kümeden eleman alarak işleme sokmak ikili işlem tanımıyla örtüşmemektedir. Bir başka yanıtta ise "matematikte işlemler hep iki sayı arasında olur, 3. sayı daha sonra eklenir ve öyle devam eder" cümlesi kurulmuştur. Burada önceki yanıtlara bakarak daha mantıklı bir açıklama yapılmasına karşın iki sayı arasında gerçekleşebileceğinden bahsedilmiştir. Gerçekten de işlemler sayıların arasında mı olur? Yoksa aynı kümenin elemanları arasında mı tanımlıdır? Oysaki buradan şöyle bir çıkarım yapabiliriz, sayılar arasında ifadesi yerine elemanlar arasında ifadesini kullanmak daha doğru olacaktır. Mesela tüm sayı kümelerinin elemanları sayıdır ve sayı denilmesinde bir sakınca yoktur. Fakat bu sayıyı henüz bilmiyorsak ve gerektiğinde sayı değilse ya da o kümenin sayısı değilse o zaman daha genel olan eleman kavramını kullanmak daha iyi olacaktır.

Bunun dışında bir A={a,b,c} kümesinde bir o işlemi tanımlarsak

o	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

ve işlem neticesi bu tablodaki gibi olur.

a o b =c ifadesinde a,b,c elemanlarına sayı denilmesi doğru olmayacaktır. A kümesi bir sayı kümesi değildir.

Başka bir adayın yanıtı "(x,y) değeri olduğunu anlıyorum" şeklinde olmuştur. Burada x ve y'nin hangi kümede olduğu ve değerlerinin nasıl hesaplandığı bilgisinden uzak bir yaklaşımdan söz edilmektedir. Yine aynı sınıftan adaydan alınan yanıt "toplama, çıkarma veya çarpma, bölme" olmuştur. Burada çıkarmanın ve bölmenin bir ikili işlem olmadığını ayrıca veya bağlamının doğru bir biçimde kullanılmadığı gözlemlenmektedir. Bu seviyedeki adayların henüz soyut matematik dersini almadığı göz önünde bulunduğunda yanıtın tolere edilebileceği düşünülebilir. Başka bir yanıtta "üç sayının toplanması 3+2+1 ilk önce 3+2=5 sonra 5+1=6" biçiminde ifadeler yazılmıştır. Konudan epeyce uzak cevaplar ortaya çıktığı gözlemlenmiştir. Bunlar dışında yanıt vermeyen bir aday ile "verilen iki değer arasında bir işlem yapıp sonrasında değer belirlemek ya da iki işlem bir" ve "bileşke, parametrik fonksiyonları anlıyorum" gibi konunun uzağında boş bırakmamak adına verilen cevaplar gözlemlenmiştir. Genel olarak bakıldığında test tekniği ile soru çözmeye alışkın olan sınavları yeni tamamlamış ve lisans eğitiminde teorik olarak Matematiğin temelleri ve Analiz I dersini alan adaylar için yanıtlardan kavramın tam olarak anlaşılmadığı ortaya çıkmaktadır.

Bu soruya 2.sınıf ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü okuyan öğretmen adaylarının verdikleri yanıtları analiz ettiğimizde aşağıdaki yorumlar ortaya çıkmıştır. Bu sorunun yanıtlarında genellikle toplama ve çarpma işleminden bahsedildiği gözlemlenmiştir. Bu yanıtın da 1.sınıf öğrencilerinden farklı olarak işlem bilincinde ilk akla gelen adi işlemler olan toplama ve çarpma işleminden bahsedildiği olmuştur. Farklı yanıtlar olarak "kümenin elemanları arasında gerçekleşen etkileşim" cevabı gelmiştir. Bu yanıtta ise bir kümeden eleman alınacağının farkındalığı ortaya çıkmaktadır. Gelen diğer farklı yanıtlar ise şöyle olmuştur: "İki ifadeyi matematiksel hesaplamaya sokmaktır.", "Aynı kümeden olan iki elemanın tek bir işlem ile sonucuna varılması.", "Tanım kümeleri aynı iki elemanın alınıp üzerinde işlem yapılması.", "İkili işlem, iki ifade arasında bir (işlem) kural belirlenip bu kurala göre bu iki ifadenin başka bir ifadeye eşit olmasıdır.", "İki girdi bir çıktıdan oluşur.", "Girdiler aynı kümeden olmalıdır.", "Aynı kümeden alınan 2 elemanla yapılan işleme ikili işlem denir.", "Konu içerisinde aynı işlemin farklı veya aynı sayılarla işleme sokulmasıdır.", "Aynı türden iki sayı işleme sokulmasıdır.", "İkili işlem iki farklı işlem türünden oluşan denklem sistemidir.", "İşlemler sadece iki sayı arasında gerçekleşir.", "Değerlerin sıralı ikili olarak ifade edilmesi.", "İki sayı için yapılan işlem.", "İki eleman arasında yapılan işlemler". Bu biçimde verilen yanıtlar matematiksel olarak kavramın ne olacağı fakat ifade etmede net olduğu açık olarak gözükmektedir. Ama yine de temel olarak ikili işlem ile ilgili duyumları ve teorik bilgi için de kulak dolgunluğu olduğu ve tamamen anlamsız olmayan ifadeler olduğu sonucu ortaya çıkar. Son iki örnekte ise biri sayı diğeri eleman ifadesine yer vermiştir. Sayı cevabı veren sonuç odaklı sayı kümesi olarak düşünmüş oysaki eleman ifadesini geçiren öğretmen adayı daha genel olarak sadece sayılarda tanımlanmayacağını fark etmesi memnun edicidir. Bir başka aday ise iki gerçek sayı arasında bir sonuca bağlı olan hesaplama süreci yanıtını vermek sayı ibaresini de spesifik halde belirtmiştir. Bu yanıtlara ilave olarak 2 aday aldıkları Lineer Cebir 1 dersinden örnekler ile açıklık getirmeye çalışmıştır. (Mesela: matris ve denklem sistemi). Diğer yanıtların yaklaşık %45'i toplama ve çarpma işlemlerinden ve bunların detaylarından söz etmiştir. Hatta çıkartma ve bölme ifadelerinin işlem olmadığı da doğru olarak

örneklendirilmiştir. Genel olarak 2.sınıf öğretmen adaylarından bu soru yanıtı için 1. Sınıflara göre daha iyi yanıtlar ve akademik bir dil kullanma gayreti içinde oldukları gözlenmiştir. Bu da soyut matematik dersinde teorik olarak konunun ifade edilmesi ve Lineer Cebir 1 dersinde kavramın sık sık geçmesinden olduğu yorumlanmaktadır. 24 öğretmen adayının yanıt verdiği 3.sınıf ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde memnun edici ve teorik cevapların verildiği gözlemlenmiştir. Matematiksel notasyonların da kullanıldığı yanıtlar arasında alt sınıflara nazaran daha uzun bir anlatım ihtiyacı olduğu fark edilmiştir.

- Örneğin: $*:A\times A\longrightarrow A$
  $(a,b)\longrightarrow a*b$ biçimindedir.
- $o:AxA\longrightarrow A$
  $(a,b)\longrightarrow a\circ b$ yanıtı.
- İkili işlem $A\times A\longrightarrow A$ ya tanımlı bir fonksiyondur.
- Bir kümeden alınan herhangi iki elemanın işleme sokulmasıdır.
- $+:R\times R\longrightarrow R$
  $(x,y)\longrightarrow x+y$

biçiminde yanıtların alınması oldukça memnun etmiştir. Bunun yanı sıra "ikili işlem herhangi bir kümeden alınan elemanların tanımlanmış işleme soktuğumuzda çıkan sonuç yine aynı kümenin elemanı ise o işleme ikili işlem denir.", "bir kümeden alınan iki elemanın ilgili işleme sokulup yeni bir eleman oluşturması. Bu elemanın da en başta aldığımız kümede olması gerekir. Yani kapalı olmalıdır.", "Bir kümeden alınan iki elemanın belirli bir kurala göre bir işlemden geçmesi sonucunda yine o kümeye düşmesi işlemidir.", "Aynı kümeye ait iki elemanın bir işlem kullanılarak sonuç vermesi." , "Boş olmamak şartıyla herhangi iki değerin belirlenen işleme sokularak aynı kümedeki değerini veren kavramdır.", "Aynı kümeden iki elemanın işleme girmesi.", "Aynı kümeden alınan iki elemanın bir işleme sokulması. Bu işlemin ne olduğunu belirleyip aynı kümeden aldığımız iki elemana uygulanacaktır ve bu işlemin sonucunda elde ettiğimiz sonucun yine aynı kümenin bir elemanı olduğunu görürsek bu işlemin o küme üzerinde kapalı olduğunu söyleyebiliriz.", "K bir küme ve K'nın herhangi herhangi iki elemanını, K kümesindeki bir elemana denk getiren bir kural", "Aynı küme içerisinden alınan iki elemanın belirli bir işleme tabi tutulmasına denir.".

Bunların tersinde verilen yanıtlar işlem kelimesini geçirerek açıklanmaya çalışılmıştır. Adaylardan yalnızca bir tanesi toplama ve çarpmadan bahsetmiştir. 2. Sınıf adaylara göre teorik bakış açısının geliştiği fakat yine de oransal olmak kavramının iyi ifade edilmediği yargısı söylenebilir.

4. sınıf ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü adaylarının yanıtları ise aşağıdaki gibidir.

- $A\times A\longrightarrow A$ ise ikili işlemdir.
- $N\times N\longrightarrow N$,$Q\times Q\longrightarrow Q$
- herhangi bir A kümesinin bir elemanının kendisi veya başka bir eleman ile işleme girmesidir.
- $A\times A=A$ oluyorsa aynı kümeden seçilen iki sayı işleme sokulunca yine aynı kümeden başka bir sayı ile eşleşiyorsa N :Doğal sayı $N\times N\longrightarrow N$ / 2+3=5 gibi.
- Aynı kümeden seçilen iki elemanın işleme alınması
- Aynı kümeden iki veya daha fazla elemanın işleme alınması
- Bir kümenin iki elemanının yine aynı kümede eleman olmasıdır. $x,y\in S$ için $x\circ y=z\in S$ olmalı.
- Belirli özellikleri taşıyan bağıntılara denir. Aynı kümeden alınıp görüntüsü aynı kümeye düşmelidir.
- İkili işlem kavramı (a,b),(c,d) sıralı ikililerini belirli bir küme içerisinde belirtip ona göre işlemler yapmaktır.

- Eğer a,b,c∈G için a*(b*c)=(a*b)*c , 3+(4+1)=(3+4)+1öyle ki G'de belirtilen bir a=e*a=a*e vardır.
- A'nın herhangi iki elemanına yine A'nın bir elemanına karşılık gelmesi','bir fonksiyondan diğer fonksiyona tanımlı işlemdir.
- belirli kümelerde seçilen elemanların belirli işlemler uygulanarak yeni bir çıktı alma işine ikili işlem denir.

Öğretmen olmaya en yakın aday olan 4.sınıfların yanıtlarına bakıldığında ifadelerde akademik dili tam olmasa da ikili işlem kavramındaki fikirlerini açıklamıştır. Bu sınıftan daha net ifadeler beklense de sonuçlar bu yönde olmamıştır.

2. soru: İkili işlem ile fonksiyon arasında bir ilişki var mıdır?

Adaylara ilk soruda yöneltilen genel soru devamında ikili işlem ile fonksiyon arasında bir ilişki var mıdır? Sorusunu yanıtlamaları beklenmiştir. Burada ilk sorudaki cevabının üzerine fonksiyon bilgisi ile ilk sorusuna cevap verdiği cevaba dayanması beklenmiştir. İkili işlemin matematikte en temel kavramlarından biri olan fonksiyon olup olmadığı yanıtları araştırılmıştır. Birinci sınıf öğretmen adaylarında bu soruya verilen yanıtlarda üç öğrenci yanıt vermemiştir. "Fonksiyonlarla işlemlerde ikili işlemler kullanılır". "Vardır" cevapları, "evet vardır" cevabı. "Fonksiyonlara verilen işlemlerle ikili işlemler olarak da yapılır". "Bileşke Fonksiyona benzetilebilir ve bir de a+b ile y=x gibi ikisinin de çift terimi vardır" gibi yanıtlar verilmiştir. Bu verilen yanıtlar neticesinde ikili işlemin fonksiyonla ilişkisinin var olduğunun net bir ifadesi ortaya çıkmadığı ortaya koyulmuştur. Vardır kısa cevaplarının neticesinde vardır cevabını veren adayların birinci soruda verdikleri yanıtlara bakıldığında bunun sadece bir cevaptan ibaret olduğu anlaşılmaktadır. ikili işlem kavramının fonksiyon kavramıyla ilişkisinin net olarak ortaya konulamadığı ikinci soru itibariyle gözlenmektedir.

İkinci sınıf öğretmen adaylarında ise aşağıdaki gibi yanıtlar gelmiştir:

- İkili işlemde de fonksiyonda da girdiler ve çıktılar olur.
- Vardır.
- Vardır. Fonksiyon ikili işlem kullanılarak yazılabilir. Örneğin f(x)=2x+1.
- f(a,b),fonksiyonu aynı zamanda ikili işlemi ifade eder.
- Vardır çünkü fonksiyonlar arasında da ikili işlemler olabilir.
- Fonksiyonlar arasında yine ikili işlemler olabilir. Bileşke fonksiyonlar verilebilir.
- Vardır. Fonksiyonları tanımlanan tanım ve değer kümelerinde kendi içlerinde yapılan işleme ikili işlem denir.
- Fonksiyon bir ikili işlemdir. Girdileri ve çıktıları vardır.
- Bir ilişki vardır ancak ikili işlem bir fonksiyon değildir.
- Evet vardır.
- Evet vardır. Fonksiyonlarda eğer tanım kümesi aynı ise çarpma ve toplama işlemleri yapılabilir.
- Fonksiyon aldığı değer için bir işlemin varken fonksiyona verdiğim değerlerin sonucunda da bir bağlantı vardır.
- Vardır, ikisinde de kümelerle ilgileniyoruz.
- İkisi de küme ile ilgilidir.
- Vardır ama açıklayamam ikili işlemi fonksiyona da uygulayabiliriz.
- Fonksiyon elde etmek için kullanılması gereken bir kavram.

- Bileşke fonksiyon ile ikili işlem arasında ilişki vardır. f(a)=b , g(b)=c için (g∘f)(a)=?
- Evet, fonksiyonlar ikili işlemdir. Fonksiyonlarda verilen ifadenin bilinmeyeni yerine bir eleman konulur ve bir sonuç çıktı verir. İşlemin de aynı şekilde girdileri ve çıktıları vardır.
- Vardır. Fonksiyonları çözmek ve yazmak için ikili işlemlerden yararlanırız.
- Fonksiyonlar belirtilen durumlarda kullanılır.
- Fonksiyonlardaki kendi içlerinde yapılan işlemlere ikili işlem denir.
- Evet vardır. İkili işlem olabilmesi için fonksiyonun tanımlı olması lazım.
- Vardır. İşlemler fonksiyonlar arasında gerçekleşir. İşlemlerin gerçekleşmesi için fonksiyon çeşitleri aynı olmalı.
- İkili işlemler fonksiyon kuralında yer alan işlemlerdir.
- Aynı küme içerisinde bulunan fonksiyonlarda ikili işlem uygulanabilir.
- İkili işlemde de fonksiyonda da 2 sayı 2 terim arasında işlem yapılır. 3 sayı terimi aynı anda toplayamayız.
- Fonksiyon içerisinde ikili işlemleri barındırır. Fonksiyona verdiğimiz bir değer olur ve bu gerekli işlemlerin uygulanmasıyla yeni bir değer bulunur. Yani aralarında bir ilişki bulunur.
- Evet fonksiyonu uygularken denklem çözümünde ikili işlemden yararlanırız.
- Biz fonksiyonda koordinat sisteminde grafik çiziminde giderken ikili işlemleri kullanarak sonuca erişiriz.

Bunların dışındaki diğer yanıtlar da vardır. “Evet vardır” gibi cevaplar verilmiştir. Açıklama yapılmamıştır. Görüldüğü üzere verilen yanıtlar neticesinde ikinci sınıf öğretmen adaylarının. Bu sorunun yanıtında almış oldukları analiz derslerinden bahsetmeye çalışmış olmaları ancak ikili işlem kavramıyla ilişkisiyle tam bir bağ kuramadığı sonucu ortaya çıkmıştır. Oysa ki soyut matematik ve lineer cebir gibi dersleri gören bu sınıf öğretmen adayları bu sorudaki yatkınlıklarını daha detaylı bir şekilde açıklamaları beklenebilirdi. Bu da ikili işlem ve fonksiyon kavramlarının net bir şekilde ifade edilemediği ortaya çıkmaktadır. Uygulama olarak iki kavramında çok iyi anlaşıldığı düşünülmekte olup, ifade anlamında bu kavramların gerçek manada aktarılamadığı gözlemlemektedir.

Üçüncü sınıf öğretmen adayları ise ikili işlem ile fonksiyon arasındaki bir ilişki var mıdır sorusuna yanıtları şu şekildedir:

Öncelikle altı aday yanıt vermemiştir. Bu altı aday birinci soruda yanıt vermiştir.

- Fonksiyon da bir işlemdir.
- İkili işlemde bir fonksiyon belirlenir. Aralarında ilişki vardır. Fonksiyonların altında yatan kavram da ikili işlemdir. İki fonksiyonun toplanması, çarpılması.
- Her iki işlemde bir fonksiyondur.
- İkili işlemler iki eleman arasında yapılır ve bu eleman bir kümede tanımlıdır ve sonucu bir kümeye işlenir.
- Fonksiyon aslında bir dönüşümdür. İşlemlerle Z⟶R tanımlanabilir.Fonksiyon, tanım kümesinde boşta eleman kalmayacak ve her elemanın yalnız bir görüntüsü olacak şekilde tanımlanmıştır.
- Fonksiyonlar ikili işlemin prensibini kullanan yapılardır.
- Vardır, fonksiyonlar da bir işlem belirtir.
- Fonksiyonda da bir kümenin bir başka kümeye eleman görürüz.İkili işlemde aynı kümeden aynı kümeye giderken fonksiyonda farklı kümeye gidilebilir.
- ikili işlemde aslında bir fonksiyondur.
- Her ikili işlem bir fonksiyondur

- Fonskiyon aslında bir kurala göre değiştirme makinasıdır diyebiliriz. Ikili işlem ile yaptığı kuralı uygulamak ve sonuca ulaşmaktır. Ikili işlem iyi tanımlanmış fonksiyon olur.
- İkili işlem tanımlanan kümeden diğer değer kümesine giden fonksiyona denir. Her ikili işlem bir fonksiyondur.
- Örneğin biz bir yıldız işlemi tanımlıyoruz. Bu işleme göre her a,b∈R olan 2 eleman aldığımızda a*b=a+3b-ab şeklinde tanımlanabilir. Fonksiyonları da bir kümeden bir elemanı alıp o eleman üzerinde belirli dönüşümler yapıp başka bir elemana götürürüz. Bu yönüyle işlemle fonksiyon arasında bir ilişki vardır. F(x+y)'nin görüntüsü x+3y-xy olur.
- Fonksiyon ikili işlem içerir.
- A⟶B tanımlı bir fonksiyon Venn şemasıyla açıklanmıştır. A ve b elemanlarını a*b ye götürmüş. * ikili işlem olsun.

Başka cevaplarda evet vardır, fonksiyondur şeklinde cevaplarla aynıdır. Buradan anlaşıldığı üzere üçüncü sınıf öğretmen adaylarının ikili işlemle fonksiyon arasındaki ilişkisini kısmen açıklamaya çalışmış, fonksiyon bilgisi ve ikili işlem bilgisine sahip olduğu ortaya çıkmış ancak net olarak istenilen seviyede ikili işlemin bir fonksiyonla ilişkisini tam olarak ifade edemediği gözlemlemiştir.

Dördüncü sınıf öğretmene adaylarınınsa bu soruya verdikleri yanıtlar genel olarak şöyledir:

- İkili işlem ile fonksiyon arasında ilişki vardır. Çünkü fonksiyonda seçilen tanım kümesinden bir eleman ikili işlemi uygulayarak yani bir görüntü oluşuyor. Burada yeni bir görüntü kümesi oluşuyor. Tanım kümesindeki elemanlara göre.
- Vardır, ikili işlem fonksiyonlar arasında belirlenir.
- Fonksiyonun içinde ikili işlem vardır.
- f ve g fonksiyonları tanımlanmış örnekler üzerinden ifadeler sunulmuştur.
- Vardır, ikili işlem içerisinde fonksiyon barındırır.
- Her ikili işlem fonksiyondur ama fonksiyon ikili işlem değildir.
- İkili işlem tanımlı olduğu işleme göre yeni bir eleman tanımlıyor. Fonksiyonda da aynı şekilde işlemine tanımlı duruma göre eleman çıkıyor.
- İkili işlem bir sonuç verirken fonksiyon bir sonraki sonucu da verir. Fonksiyonun içinde ikili işlem uygulanabilir.
- Her fonksiyon ikili işlem içerir.
- Vardır, ikisinde de bir kümeden bir eleman seçip diğer kümeden başka bir elemanla eşleniyor. Bir sonuca ulaşıyor. Venn şeması örnekleriyle sunum yapılmıştır.
- Fonksiyon içerisinde ikili işlem bulunur.
- İki kümenin kartezyen çarpımda yine aynı kümeye giderek bir işlem tanımlıyorsak bir f fonksiyonu N×N kümesinden (tanım kümesi) N kümesine (görüntü kümesi) tanımlayabiliriz.

Üç tane de yanıtsız kağıt bulunmaktadır. Burada gözlemleniyor ki dördüncü sınıf öğretmen adaylarının ikili işlem ile fonksiyon arasındaki bir ilişki kurmaya çalıştıkları bellidir. Fonksiyon tanımını iyi bildikleri ikili işlem tanımında da yorum yapabildikleri gözlenmekte olup ikisi arası ilişkiyi kurmaya çalıştıkları gözlenmektedir. Oysa ki ikili işlem kavramını tamamen kavramsal olarak bilindiği varsayılmış olsa burada fonksiyon olup olmadığıyla ilgili şundan dolayı şu özelliklerden dolayı fonksiyon olduğunu ortaya çıkar gibi bir yorum yapılabilirdi. Genel olarak ikinci soruda işlem ile fonksiyon arasında ilişki var mıdır sorusuna yanıt olarak tüm sınıflardaki öğretmen adaylarının yanıtları baz alındığında buradaki doğru değerlendirme oranının düşük olduğu gözlenmiştir. Bunun da alt sınıflarda fonksiyon bilgisinin çok fazla gelişmediği, (daha doğrusu fonksiyon tanımı) 3 ve 4. sınıflarda ise kavramın net olarak uygulanabilir olduğu kısmı akılda olmadığından

dolayıdır. Netice olarak ilk 2 soru sonucunda birinci soruda iyi ifade edilebilen ikili işlem kavramları, ikinci soruda fonksiyonla ilişkisi %75 oranında doğru bağlantı kurulmuştur.

3. soru : İşlem özellikleri kaç tanedir? İsimlerini yazınız.

İlköğretim matematik öğretmenliği öğretmen adaylarına birinci ve ikinci sorularda yöneltilen sorular üzerine işlem özellikleri kaç tanedir isimlerini yazınız sorusu yöneltilmiştir. Birinci ve ikinci soruda verdikleri yanıtlara göre aynı sınıf kategorilerinde analiz yapacak olursak burada öncelikle adayların cevaplarının işlemin ne olduğunu önceki soruda fonksiyonla ilişkisi olup olmadığını önceki sorularda belirttikleri cevaplara göre beklenen yanıt işlem özelliklerini kapalılık özelliği, birleşme özelliği, değişme özelliği, etkisiz eleman özelliği, ters eleman özelliği gibi özellikleri verip üzerine daha fazla üst sınıflarda da iki farklı işlemden bahsediyorsak dağılma özellikleri gibi özelliklerden söz edilebilmesi bekleniyordu.

Birinci sınıf öğretmen adaylarının bu soruya verdikleri yanıtlar şöyledir:

- Dağılma, birleşme, değişme
- Değişme özelliği, birleşme özelliği, dağılma özelliği
- Dağılma özelliği, yutan eleman, etkisiz eleman
- Değişme özelliği, sadeleştirme, etkisiz eleman, yutan eleman
- Değişme özelliği, birleşme özelliği, dağılma özelliği
- Dağılma, birleşme
- Çarpmada dağılma özelliği, çarpmada birleşme özelliği, toplama ve çarpmada etkisiz olma özelliği
- Yerine koyma
- İki tanedir.

Cevapları verilmiştir. İki öğrenci ise bu soruyu yanıtsız bırakmıştır.

Birinci sınıf öğretmen adaylarının yanıtlarını analiz ettiğimizde “iki tanedir” cevabını veren öğretmen adayının burada aslında toplama ve çarpma ile ilgili bir durumu kastettiği anlaşılmakta. Başka bir öğretmen adayının ise “yerine koyma” yazarak aslında bunun bir özellik olmadığı ama ifade edemediği sonucu ortaya çıkmaktadır. Bir başka öğretmen adayının ise “sadeleştirme” diyerek aslında sadeleştirmenin bir özellik olmadığının farkında olmaması ve genel olarak da bir işlemin var olduğu ve belli özelliklerinin olması gerektiği kısımlarının orta seviyeye yakın bir şekilde farkında olduğu ancak bir sıralama bütününün olmadığı buradaki işlem kavramının tam anlaşılmadığının ve özelliklerinin rastgele bir şekilde sıraladıklarını yaptıkları fark edilmiştir. Bu soru için üst sınıflara doğru cebirsel dersler aldıkça bu bakış açısının daha yüksek seviyelere ulaşacağı kanaatinde olmaktayız.

İkinci sınıf öğretmen adaylarının ise verdiği yanıtlar şu şekildedir:

- Değişme özelliği, etkisiz eleman
- Değişme özelliği, etkisiz eleman özelliği, birleşme özelliği, birbiri üzerine dağılma özelliği, birim eleman özelliği olmak üzere beş tanedir.
- Soldan sağa doğru üslü ifadeler (önce çarpım ve bölüm sonra toplama ve çıkarma)
- Tam sayılarda işlemlerin özellikleri: değişme, dağılma, birleşme
- Etkisiz eleman özelliği, birim eleman özelliği, dağılma özelliği, paranteze alma özelliği
- Dağılma özelliği, ters eleman özelliği, birleşme özelliği, değişme özelliği, birim özelliği, etkisiz eleman özelliği, kapalılık özelliği

- Değişme özelliği, birleşme özelliği, dağılma özelliği, birim eleman özelliği, ters eleman özelliği
- Değişme özelliği her işlem için farklı özellikler vardır. Örneğin toplamada değişme özelliği varken çıkarmada olmayabilir.
- Birleşme özelliği, dağılma, ters eleman, birim, değişme
- Birleşme, değişme, dağılma
- Dağılma özelliği, değişme özelliği, birleşme özelliği
- Dağılma özelliği, değişme özelliği, birleşme özelliği
- Dağılma, birleşme, etkisiz eleman, yutan eleman, ters eleman
- Değişme özelliği, birleşme özelliği, dağılma özelliği
- Birleşme özelliği, dağılma özelliği sağdan veya soldan
- Değişme özelliği, birleşme özelliği, etkisiz eleman özelliği, kapalılık özelliği
- Değişme özelliği, birleşme özelliği, dağılma özelliği, etkisiz eleman özelliği, birim eleman özelliği
- Değişme özelliği, birleşme özelliği, dağılma özelliği, etkisiz eleman özelliği, birim eleman özelliği
- Beş tane: etkisiz eleman, ters eleman toplama işlemine ve çarpma işlemine göre, birim eleman özelliği, dağılma özelliği
- Dağılma özelliği, birleşme özelliği, kapalılık özelliği, birim eleman özelliği
- Değişme, birleşme, dağılma şeklinde böyle 5-6 tane cevap var
- Birleşme ve dağılma
- Tanımlı olma özelliği, dağılma özelliği, birim eleman özelliği, ters eleman özelliği, birleşme özelliği beş tanedir.
- Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine soldan ve sağdan dağılma özelliği, toplama ve çarpma işleminin yer değiştirme özelliği
- Yer değiştirme, etkisiz eleman, ortak çarpan, birim eleman
- Yer değiştirme, dağılma, birleşme
- Değişme, dağılma, birleşme
- Değişme, dağılma, birleşme
- Değişme, dağılma, birleşme
- Değişme, dağılma, birleşme
- Değişme, dağılma, birleşme
- Dağılma, birleşme, birim, değişme, ters eleman

Bunların dışında diğer cevaplarda toplama işleminin özellikleri, çarpma işleminin özellikleri diye toplama işleminin özellikleri değişme dağılma, çarpma işleminin özellikleri değişme, dağılma, birleşme şeklinde yanıtlar dört tanedir. Bunun dışındaki birçok cevapta da dağılma, değişme, etkisiz eleman, birim eleman olmak üzere yorumlamalar yapılmıştır. Bunun dışında farklı cevaplar olarak da parantez özelliği şeklinde bir özellik yazan bir öğretmen adayımız olmuştur. Genel olarak bakıldığı zaman 2. sınıf öğretmen adaylarının 1.sınıf öğretmen adaylarına göre verdikleri cevaplar yaklaşık olarak %75 seviyelerinde işlem özelliklerine doğru yanıtlar verdikleri gösterilmiştir. Bu da bu öğrencilerin lineer cebir dersini alması ve daha önemlisi soyut matematik derslerini almaları, bu derslerde bu konuların işlenmesine bağlanmıştır. Burada 1. ve 2. sorudaki yanıtlarına bakarak 3. sorudaki ifadelerin daha doğru olduğu örneğin 1. ve 2. sorulardaki kavramlar da ikili işlem ve fonksiyonla ikili işlem kavramı çok net anlatamayıp ama işlem özelliklerinde doğru yanıt veren adayların varlığını büyük olasılıkla görmekteyiz. Bu da konunun soyut olarak yorumlama gücünün az olduğu ancak özellik olarak ve bilgi olarak belli ifadelerin kullanılabildiklerini göstermektedir.

Üçüncü sınıf öğretmen adayları ise işlem özellikleri kaç tanedir isimlerini yazınız sorusuna bir öğrenci yanıt vermemiştir. Bir öğrenci ‘”işlem iyi tanımlanmış kümeler arasında yapılır, işlemde kapalılık özelliği vardır” şeklinde bir ifade kullanmış. Bir başka öğrenci “aynı kümede çalışmamız gerekir, işlem sonucu da aynı kümede çıkması gerekir.” gibi özelliklerinden ziyade ikili işlemin nasıl yazılabileceği ile ilgili yorumlar yapmış. Buradaki soruyu yanlış anlamasıyla ilgili olmuş olabilir. Bunun dışında 6 tane öğrenci üç ve dört tane özelliklerinden bahsetmiş ama işlemin özelliklerinin doğru olduğunu söylemiş. Bunun dışında geri kalan tüm öğrenciler ise tüm özellikleri yazabilmişlerdir. 2 öğrenci de bunu matematiksel gösterimlerle yapmıştır. Bu da cebir dersinin hali hazırda alıyor olurken uygulanan bir çalışma olduğu için cebir derslerinde elemanların birbiriyle ilişkisini özellikle grup cebirsel yapısını bildikleri göz önünde bulundurularak oldukça yüksek oranda başarılı cevaplar verdikleri gözlenmiştir. Burada üçüncü sınıf öğretmen adaylarının bir ve ikinci sorulara verdikleri yanıtlarla üçüncü sorudaki verdikleri yanıt aynı 2.sınıfta olduğu gibi yüksek bir oranda cevaplama olduğu görülmüştür. Bu da kavramın düzgün bir şekilde ifade edileceğinin göstergesi olmuştur.
İşlem özellikleri kaç tanedir isimlerini yazınız sorusuna 4. sınıf öğretmen adaylarının verdikleri yanıtlar ise bir hayli memnun edicidir. Burada sadece bir öğrenci iki özelliğinden bahsetmiş. Bir öğrenci de bir kümede tanımlı olmalıdır şeklinde yanıt vermiştir. Diğer tüm öğrenciler işlemlerin özelliklerini bir eksik veya açıklayıcı bir şekilde yazmışlardır. Burada dört yıl boyunca aldıkları tüm cebirsel derslerde ve işlem kullanılan birçok pür matematik dersinde öğrencilerin soru çözümlerinde ve teorik bilgilerini kullanırken kullanmış oldukları bu kavramlarda doğru yanıtlar verdiklerini göstermiştir. Burada 1. ve 2. sorulardaki verdikleri doğru yanıtların üzerine paralel olarak yine aynı şekilde aynı öğrencilerin düzgün bir şekilde ifade edebildikleri gözlemlenmiştir. Genel olarak bakıldığı zaman dört sınıf seviyelerinde öğrencilerin yanıtları incelendiğinde üst sınıflara gittikçe işlem özelliklerini düzgün bir şekilde ifade edebildikleri gözükmüştür. Bu da aldıkları derslerin bu konudaki kavramları düzgün bir şekilde ifade edebiliyor olduklarını ortaya koymaktadır.

4. soru: Bildiğiniz işlemleri yazınız.

Bundan sonraki kısımda dördüncü soruda bildiğiniz işlemleri yazarak aslında ilk üç soruda verdikleri yanıtların burada doğru bir şekilde yanıtlayıp yanıtlayamadıkları ölçülecektir ve daha sonraki kısımlarda artık öğrencilerin daha çok bilgiye yönelik sorular olacağı ve aslında gittikçe soru düzeyini ölçerek aslında ikili işlem kavramını aşama aşama hatırlatarak ilerletmeyi amaçlanan sorularla birlikte çalışma devam etmiştir. Çalışmamızın dördüncü sorusu olan bildiğiniz işlemleri yazınız sorusuna cevap olarak birinci sınıf öğretmen adaylarının verdikleri cevaplar genellikle toplama çarpma çıkartma bölme olmuştur. Bir öğrenci toplama ve çarpma yazmıştır bir öğrenci de soruyu yanıtsız bırakmıştır. Burada genel olarak gözüküyor ki dört işlem kavramının anlatıldığı orta öğretim ve öncesinde yoğun olarak dört işlem bilgisi kullanıldı. Oysaki burada adi işlemlerin sadece toplama ve çarpma olduğu bilgisi öğrencilerin cebirsel dersler gördükten sonra gelişmesini beklediğimiz notasyonlar olacaktır. Çıkartmanın toplamayla ilişkili olduğu aslında bir elemanın toplamsal tersinin çıkartma olduğu bilgisi öğrenileceğini beklemekteyiz. Birinci sınıftaki öğrencilerin cevaplarına baktığımız zaman dört işlem konusu kullanıldığını görmekteyiz.

İkinci sınıf öğretmen adaylarının ise bu soruya verdikleri yanıtta 20 kişinin toplama işlemi ve çarpma işlemi yazdığı görülmektedir. Burada da adi işlemlerin (temel işlemlerin) bu olduklarını gösteriyor. Diğer yanıtlarda ise toplama, çarpma şeklinde ikili işlem ve yanında ayrıyeten skaler işlemi belirten 3 kişi bulunmaktadır. Bir kategoride ise işlemlerin örnekleriyle anlatılmaya çalışılmıştır. Ve iki öğrenci de analitik bilgisine üzerine vektörlerle işlemlerden bahsetmiştir. Görülüyor ki 2. sınıf öğretmen adaylarındaki 39 kişinin 1.sınıftaki öğretmen adaylarına göre verdikleri yanıtlar memnun edici niteliktedir ve aslında 1., 2. ve 3. sorulardaki ikinci sınıfların verdikleri yanıtlara göre işlem bilgisini aşama olarak bildiğiniz işlemleri yazınız dediğimiz zaman işlemlere net bir cevap verdikleri gözlenmektedir.

Üçüncü sınıf öğretmen adaylarının ise bildiğiniz işlemleri yanıtlayınız sorusuna verdikleri cevap şu şekildedir: 2 öğrenci dört işlemden bahsetmiş (toplama, çıkarma, çarpma, bölme şeklinde), 1 öğrenci ise örnek veren bir denklem sunmuştur. Diğer tüm öğrenciler (21 kişi) toplama ve çarpmanın işlem olduğunu yazmış ve yanına adi işlem olarak belirtenler, bölmenin ve çarpmanın birer ikili işlem olmadığını belirtmişlerdir. Bu da görülüyor ki öğrencilerin cebir dersinde bu kavramın vurgulandığını ve bunu iyi analiz ettikleri gözlenmektedir.

Dördüncü sınıf öğretmen adaylarında ise 15 adayın verdikleri yanıtlarda 7 tanesi 4 işlemden bahsetmiş, 7 tanesi ise ikili işlemden bahsetmiş, bir öğrenci ise örnek göstermiştir. Burada gözüken şu ki 4. sınıfta pür matematik derslerinin alınmadığı ve geçilen cebirsel derslerin alt sınıflarda kaldığı ve artık öğrencilerin tekrardan KPSS sınavlarına çalıştıklarından ve önemli olanın soru çözmek olduğunu düşündüklerinden dolayı buradaki ikili işlem kavramını aslında birçok işleme yansıtmışlardır. İkili işlem dediğimiz zaman aslında birçok işlem tanımlanabileceği ama bildiğimiz adi işlemler olarak toplama ve çarpmayı vereceğimiz bunu da hangi kümelerde verebileceklerimizi örneğin bugüne kadar bahsedilmeyen bir küme söz konusu ise bunun reel sayılar kümesi olduğunu söyleyebiliriz. Ama bunun dışında birçok sayı kümesinde ve farklı kümelerde benzer işlemler tanımlanabilir. Hatta sayı kümeleri olmayıp farklı türden işlemler de tanımlanabilir. Cebir, lineer cebir2, lineer cebir1, soyut matematik gibi farklı derslerde bu tür notasyonlar çok fazlasıyla kullanılmıştır.

5. soru: $x \in \mathbb{Z}$ için $3x + 4 = 13$ denklemini çözünüz.

Bundan sonraki sorularda özellikle 5,6,7 ve 10. Sorularda elamanter işlemler yapmaları gerektiğinden dolayı 1,2,3,4. Sorudaki notasyonları burada değerlendirip değerlendiremedikleri ortaya çıkacaktır.

$x \in \mathbb{Z}$ için $3x + 4 = 13$ denklemini çözünüz sorusuna cevap olarak:

$x \in \mathbb{Z}$ için $3x + 4 = 13 \Rightarrow 3x + 4 + (-4) = 13 + (-4)$ (1)

$\Rightarrow 3x + 0 = 9$ (2)

$\Rightarrow 3.x = 9$ (3)

$\Rightarrow \frac{1}{3}.(3.x) = \frac{1}{3}.9$ (4)

$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}.3\right).x = \frac{1}{3}.9$ (5)

$\Rightarrow 1.x = 3$ (6)

$\Rightarrow x = 3 \in \mathbb{Z}$ (7)

Öğretmen adaylarına uygulanan bu çalışmada beşinci soru olan x∈Z için 3x+4=13 denklemini çözünüz sorusunda cevap olarak öğrencilerin yanıtlarından beklenen ifade yukarıdaki gibi 7 aşamada sorunun çözülmesidir. Öncelikle 3x+4=13 denklemini yazdığımızda burada öncelikle 3x ifadesini yalnız bırakabilmek için birinci basamakta eşitliğin her tarafını sağdan tam sayılarda dördün toplamsal tersi olan –4 ile topladığımızı söyleriz. İkinci aşamada ise eşitliğin sol tarafında 4 ile –4 ü topladığımız zaman 0 tam sayısını elde etmekteyiz. Bu da bir sayıyla o sayının toplamsal tersini topladığımız zaman tam sayılarda etkisiz eleman özelliği olduğu için tam sayılardaki 0 elemanını yan tam sayıların toplama işlemine göre etkisiz elemanını bulmuş oluruz. İkinci basamakta 3x+0=9 denklemini elde etmiş oluruz bu şekilde. Üçüncü basamakta ise 3x elemanını 0 elamanını topladığımız zaman 3x elemanı olduğunu görüyoruz. Dördüncü basamakta ve dördüncü açıklamamız olarak x elemanını yalnız bırakabilmek için eşitliğin her tarafını soldan 3 ün çarpımsal tersini ekliyoruz kısmı için toplamsal olarak değil de çarpımsal olarak yazmış oluyoruz. Burada dikkat edecek olursak birleşme özelliğini de kullanıyoruz. Beşinci aşamada 1/3 ile 3 için çarpma işleminin birleşme özelliğini kullandık ve eşitliğin sağ tarafında da 1/3 ile 9 u çarptık. Burada 9 sayısının aslında 3.3 şeklinde iki sayının çarpımı şeklinde yazarak, 1/3 ile 3 ün Z deki çarpma işlemine göre etkisiz elemanın 1 olduğunu da söyleyebilirdik. Fakat elemanı Z olarak değil de buradaki çarpmanın reel sayılarda (R) de olduğuna dikkat edelim çünkü 1/3 tam sayıların elemanı değildir. Netice olarak altıncı basamakta yapılan işlem 1.x =3 eşitliği gelmiştir. Burada da 1 ile x elemanını çarptığımız zaman x çıkacağını görüyoruz çünkü buradaki 1 çarpmadaki birim elemandır. Dolayısıyla 3 tam sayısını bulmaktayız.

Bu sorunun cevabında 1. sınıf öğretmen adaylarının 11 kişi içerisinde 9 kişi cevabı 3 olarak bulmuştur. Burada önemli olan bu ifadenin işlemlere dikkat edip burada kaç tane ikili işlem var olduğunu ve bir çözümü nasıl yapmamız gerektiğini sorduğumuzda hızlı bir şekilde 3 diyenler olmuştur. 7 basamaklı olarak çözdüğümüz sorunun en az 3 basamakta çözülmesini bekleriz. Birinci sınıf öğretmen adaylarından 3 basamakta bu soruyu çözen sadece bir kişidir.

İkinci sınıf öğretmen adaylarının ise bu soruda cevabı 3 olarak bulma oranları %90 nın üzerindedir. Burada da soruyu yanıtlama şekilleri 5 basamakta çözen kişi sayısı 1 kişi, 4 basamakta çözen kişi sayısı 5, diğerleri 3 aşamada soruları çözmüştür ve direkt 3 cevabını verenler de olmuştur. Burada görülüyor ki 2.sınıf öğretmen adayları önceki ilk 4 soruda verdikleri yanıtlara göre elemanları düzgün kullanmayı, aradaki ise bağlacını kullanmayı, bir denklemden başka bir denkleme nasıl geçildiğini göstermekte birinci sınıf öğretmen adaylarına göre daha başarılıdırlar.

Üçüncü ve dördüncü sınıf öğretmen adaylarının verdikleri yanıtlara bakılacak olursa yaklaşık olarak %100e yakını x =3 cevabını vermişlerdir ve burada bazı öğretmen adaylarının 4ü sağa geçirdiğini ve hatta bunu okla gösterdiği de görülmüştür. Burada öğretmen adaylarına derslerde belirttiğimiz buradaki 4 sayısı sağ tarafa geçmiyor oysaki eşitliğin her tarafına 4ün toplamsal tersini ekliyoruz şeklinde olmuştur. Herhangi bir sayıyı başka tarafa geçirme gibi bir durum söz konusu değildir. Ama burada bu ifadeyi anlatırken birçoğumuzun alt sınıflarda matematikte yaşamış olduğu sorunları buna da bağlayabiliriz. 3. ve 4. sınıf

öğretmen adaylarının burada 5 aşamada soruyu çözenler hatta 1/3 yerine 3^{-1}yazan da görülmüştür. Burada da belki tam sayılarda bu ifadenin olmadığı o yüzden 3^{-1} i bir sembol olarak da kullandığı gözlemlenmiştir. 1. ve 2. sınıf öğretmen adaylarına göre verilen yanıtlar daha çok memnun edicidir. Burada 5. soruda verilen denklemin bir kavram hatası olduğu yani kavram hatasının da soldaki elemanı sağ tarafa geçirdiğinden kaynaklıdır. Burada önemli olan x=3 cevabının verilmesi memnun edici burada oldukça basit bir denklem var fakat denklemi çözmekten ziyade denklemi doğru metotla çözülebildiği kavramı bilinmelidir.

6. soru: i) 3+2 =? ii) 3+ 2+ 1=?

6.soruda i şıkkında 3+2=? ii şıkkında 3+2+1=? olarak yazılmıştır. Burada ilk 5 soruda ikili işlemle ilgili bilgiler sorulduktan sonra ve bir denklemi çözmesi istendikten sonra oldukça kolay bir soru yöneltilmesi belki beklenti olarak şaşırtma olabileceği öğrencilere düşündürülmek istenmiştir. Şimdi 3 ve 2 sayısını topladığımız zaman bunun reel sayılarda tam sayılarda ya da ilgili sayı kümesinde topladığımız zaman cevabın 5 olduğunu görmekteyiz ancak burada hangi sayı kümesinde çalıştığımız ortada değildir. Ya da herhangi bir sayı kümesinde çalıştığımız belli değildir. Örneğin bu kümenin içerisinde sadece 3 ve 2 olsun ve işlemi de şu şekilde tanımlanmış olsun. Iki tane elemanın toplamı yine 2 olsun. Böyle bir yeniden tanımlama yapılabilir ya da farklı türden ikili işlemler tanımlanabilir. Dolayısıyla buradaki toplama işlemine reel veya tam sayılarda adi işlem olarak bakıyorsak burada tabi ki cevabın 5 olması beklenir. Bunun dışında bu soruda böyle bir açıklama da yazılması öğrencilerden beklenmektedir. Ii şıkkında ise aynı şekilde 3+2 sayısına 1 eklenmiştir. Matematikte 3 tane sayı yan yana hiçbir zaman toplanmaz. Bu şekilde yazılan bir ifadede bir kavram yanılgısı olduğu, ya önce 3ile 2yi topladığımız ya da 2 ile 1i topladığımız şekilde bir paranteze alınması gerekir. İkili işlem dediğimiz zaman 3 tane eleman toplanmaz. İkili işlem kavramında iki tane eleman toplanacaktır. Dolayısıyla burada 3+2yi toplayıp 5 ile 1i toplamamız gerekmektedir. Bunun için de burada birleşme özelliğini kullanmamız gerekir. Dolayısıyla üst sorularda işlemin özellikleri kaç tanedir sorusunda birleşme özelliğinden bahseden bir öğrencinin burada buna dikkat etmesi beklenmektedir. Netice olarak 3 tane sayıyı bu şekilde topladığımız zaman bunun bu şekilde toplanmayacağı ve birleşme özelliğini kullanmamız gerektiğini ve ikili işlemin de iki tane elemanı toplayabileceği sonucunun verilmesi gerekirdi. Bu sorunun yanıtlarını değerlendirdiğimizde sınıf gözetmeksizin çoğunlukla 5 ve 6 cevaplarının verildiği ya da değişme özelliğinin kullanıldığı görülmektedir. Oysaki burada değişme özelliğinden ziyade birleşme özelliğinin vurgulanması gerekmektedir. Alt sınıflardan üst sınıflara doğru giderken gittikçe tüm sınıf oranlarının sorulara verdikleri mantıklı yanıtların yükseldiğini görmekteyiz ancak yine de tam istenilen cevapların burada verilemediği görülmektedir. Ancak 3. ve 4. Sınıf öğretmen adaylarının, bunların ne olduğunu açıklayan ifadelere yakın olan ifadeleri verildiği gözlenmektedir. Bu durum cebir dersini aldıktan sonra öğretmen adaylarının bu tür eşitliklere verdikleri cevaplar memnun edicidir.

7. soru: A=$\{1,2,3\}$, B=$\{3,4,5\}$ olmak üzere A+B=? A. B=?

A={1,2,3}, B={3,4,5} olmak üzere A+B=?, A.B=? sorusu için

$A+B=\{a+b|a\in A,\ b\in B\}$ ve $A.B=\{a.b|a\in A,\ b\in B\}$ kümeleri bilinmelidir.

A+B={1+3, 1+4, 1+5, 2+3, 2+4, 2+5, 3+3, 3+4, 3+5} biçiminde yazılmalı ve kümede 9 tane elemanın olduğu fark edilmelidir. Burada sonrasında 1+3 elemanının 4 olup olmadığı ile ilgili bir çıkarım yapmamızın mümkün olmadığının fark edilmesi gerekmektedir. A ve B kümeleri örneğin Reel sayıların (tam sayılar, rasyonel sayılar, doğal sayılar) birer alt kümesi olduğu bilgisi olsun ve A+B arasındaki toplama işleminin kümeler arasında bir toplama işlemi olduğu ancak bu kümenin elemanı a+b arasındaki + işleminin ise ilgili sayı kümesindeki adi toplama işlemi bilgisi olsaydı A+B kümesinin elemanları {4,5,6,7,8} olarak 5 elemanlı olurdu. Burada ikili işlemin önemine ve kullanım yerine dikkat edilmesi gerekmektedir. Dolayısı işle kavram yanılgısının olabileceği önemli bir detaydır. Diğer taraftan A.B kümesi için A.B={1.3, 1.4, 1.5, 2.3, 2.4, 2.5, 3.3, 3.4, 3.5} kümesi bulunmalıdır.

A+B kümesindeki gibi benzer yorumlayacak olursak A.B kümesi yani A ile B kümesinin bir işlem ile A.B olarak yeni küme olması ve her bir elemanı soldaki elemanı Adan sağdaki elemanı ise B kümesinden alınmak üzere elemanların çarpımı biçiminde yazılabileceğini söyleyebiliriz. Burada elemanlar arasında bir ikili işlemi yok ise elemanların 1.3, 1.4 gibi olacağı var ise A.B={3,4,5,6,8,9,10,12,15} biçiminde olacağı aşikardır. Burada belirli bir açıklama olmadığı için A+B ve A.B kümelerini sırasıyla
{1+3,1+4,1+5,2+3,2+4,2+5,3+3,3+4,3+5}
{1.3,1.4,1.5,2.3,2.4,2.5,3.3,3.4,3.5} yazılmalıdır.
Bu soruya yanıt olarak 1. ve 2.sınıf öğretmen adaylarındaki toplam 50 kişiden sadece 2.sınıftan 1 kişinin bu durumunda A ve B kümeleri Reel sayıların alt kümesi ise cevabın direkt bir reel sayı çıkacağını yoksa normal şekilde olabileceğini söylemiştir. Onun dışındaki 49 öğrencinin de cevabının benzer olduğunu ve bir neticenin 1 ile 3ün toplamının 4 olabileceği şeklinde cevapların verildiği gözlenmektedir. Ayrıca 2 öğrencide ise çarpma işlemini kartezyen çarpım olarak düşünüp sıralı ikili olarak yazdığı görülmüştür. Bunun dışında 3. ve 4. sınıf öğretmen adaylarının ise bu soruda verdikleri yanıtlarda elemanları tek tek topladıkları ya da elemanları ayrı ayrı çarptıkları gözlenmiştir. Bunun dışında verilen sözel yanıtlar da olmuştur ancak olması gereken ifadeyi 5 öğrenci doğru bir şekilde yanıtlamıştır ve sonucun olmadığını yorumsuz bir şekilde söylemiştir. Buda gösteriyor ki 3 ve 4. sınıf öğrencilerinin burada farkındalık seviyelerinin alt sınıflara göre daha yüksek olduğu ortaya çıkmaktadır ancak yine de tüm öğretmen adaylarının verdikleri yanıtlar gözlemlendiğinde önceki ilk 6 soruya bakarak en fazla kavram yanılgısı yaşanılan soru olduğu ortaya çıkmıştır.

8. soru: Etkisiz eleman ve Birim eleman aynı olur mu? Açıklayınız.

Öğretmen adaylarına yöneltilen bir diğer soru ise sekizinci soruda etkisiz eleman ile birim elemanın aynı olup olamayacağı sorusudur. İlk 7 soruda bunun aksine, burada ikili işlemin özelliklerinden biri olan etkisiz eleman özelliği doğrudan vurgulanmakta ve öncekilerle ilişkili olup olmadığı incelenmektedir. İlk 7 soruda verdikleri yanıta göre düşünmeleri gerektiği ortaya çıkmıştır. Öncelikle etkisiz elemanın ne olduğunu öğrencinin bilmesi gerektiği açıktır. Etkisiz eleman özelliği bir ikili işlemin etkisiz eleman özelliğinin var olması gerekir. Örneğin tam sayılardaki etkisiz elemanı toplama işlemi ile bir ilişki koyuyorsak sıfır diyebiliriz. Ancak tam sayılar kümesi birçok sayı kümesinden yalnızca bir tanesidir ve toplama işlemi de bu küme üzerinde yazılabilecek işlemlerden sadece bir tanesidir. Toplama işlemi gibi tam sayılar kümesinde birden fazla ikili

işlem tanımlanabilir. Böyle bakıldığı zaman her zaman etkisiz elemanın sıfır olma zorunluluğu yoktur ama açık bir şekilde aşikar olarak bakılan adi işlemlerde buradaki etkisiz elemanın sıfır olduğu gözlenmektedir. Aynı şekilde Tam sayılar kümesinde çarpma işleminin etkisiz elemanı birdir. Burada reel sayılar kümesi için çarpma ikili işlemini kullandığımız zamanda da ortaya çıkan etkisiz eleman bir olacaktır. Özet ile şöyle yapacak olursak, reel sayılar kümesinde toplamı ve çarpma işlemleri tanımlı olmuş olsun. Birinci olan işleme göre olan etkisiz elemana etkisiz eleman denir ikinci işleme göre olan etkisiz elemana birim eleman denir. Dolayısıyla bir küme üzerinde hem etkisiz eleman hem birim elemandan bahsediyor olabilmemiz için bu kümenin üzerinde 2 işlem olması gerekir ve bu 2 işlemden de ikisinin de ayrı ayrı etkisiz elemanlarının bulunması gerekir. Örneğin reel sayılar kümesi üzerinde toplama işleminin etkisiz elemanı vardır ve sıfırdır. Yine aynı şekilde çarpma işleminin etkisiz elemanı vardır ve birdir. Dolayısıyla bu küme için sıfır ve bir etkisiz eleman ve birim eleman olur sırasıyla.

Sonuç olarak etkisiz ve birim eleman aynı olur mu sorusuna cevap olarak aynı olmayacağı ikisinin de varsa farklı işlemler sonucu ortaya çıkacağı olduğu ifadesi beklenmektedir.
Bu soruda 1.sınıf öğretmen adaylarının verdikleri yanıtlar şöyledir:

- Çarpmada birim eleman da etkisiz eleman da birdir. En azından çarpmada aynı olur.
- Etkisiz eleman çarpma işleminde birdir. Sonuç etkisiz eleman ile işleme giren eleman olur.
- Her zaman aynı olmaz.
- Etkisiz eleman işlemden işleme değişir. Bir elemanı çarpmada etkisiz toplamada etkili elemandır.
- İşleme göre değişir. Toplama işleminde sıfır hem etkisiz hem birimdir.
- Etkisiz eleman işlem sonucuna etkisi bulunmayan elemandır. Birim eleman verilen değere göre sonuç değeri aynı olur.
- Etkisiz eleman 0, birim eleman 1
- İkisi aynı şeydir.

Diğer adaylar ise yanıt vermemiştir. Burada görülüyor ki etkisiz eleman ve birim eleman ayrımının 1. sınıf seviyesinde çok da farkına varılmadığı sonucu ortaya çıkmaktadır.

İkinci sınıf öğretmen adaylarının verdikleri yanıtları incelediğimizde ise verilen farklı türden yanıtlar genellikle şu şekildedir.

- Etkisiz eleman ve birim eleman aynı olabilir
- Etkisiz eleman işlem özelliklerine göre değişiklik gösterir. Çarpmanın etkisi elemanı bir toplamanın etkisi elemanı sıfırdır.
- Etkisiz eleman işlemde değişiklik yapmaz. Altında bir örnekle açıklanmış.
- Çarpma işleminde etkisiz eleman ve birim eleman aynı olur, ikisi de birdir.
- Etkisiz eleman toplama işleminde sıfırdır, çarpma işleminde birdir. Etkisiz eleman ve birim eleman sadece çarpma ve bölme işlemlerinde aynı olur.
- Aynı olmaz.
- Etkisiz elemanla birim eleman birbirinden farklı kavramlardır. Etkisiz elemanı ile ilgili işlemin sonucunu değiştirmez bir etkisi yoktur.

- Aynı olabilir çarpmadaki işlemde etkisiz ve birim eleman birdir.
- Olabilir, 1.1=1 işleminde bir hem etkisiz hem de birim elemandır.
- Fonksiyonda aynı sonuca ulaştığı durumlar olabilir.
- Birim eleman ve etkisiz eleman aynı olabilir.
- Hayır aynı olmaz. Etkisiz eleman örneğin toplama işleminde sıfırdır. Toplama işlemini etkilemez.
- Etkisiz eleman ve birim eleman aynı olabilir. Bilinen çarpma işlemi göz önünde bulundurduğumuzda etkisiz elemanda birim eleman da birdir.
- Aynı olduğu durumlar olur.
- Toplama işleminde etkisiz eleman 0+a=a, a+0= a birincisinde birim eleman toplama işleminden denilmiş.
- Olabilir mesela toplamaya göre etkisiz eleman sıfır birim eleman değildir. Çarpmaya göre etkisiz eleman bir birim elemandır denilmiş.
- Değildir ancak işleme göre değişir. Etkisiz eleman, işleme hiçbir zaman etki yapmazken birim elemanı işlemi etkileyebilir.
- Etkisiz eleman çarpma işleminin sonucunu değiştirmeyen elemandır
- Hayır, hangi işlem içerisinde kullanıldığına bağlıdır.
- Çarpma işleminin birim elemanı, bir toplama işlemini birim elemanı sıfırdır. Bu ikisi yani etkisiz ve birim eleman aynıdır, aynı şeylerdir.
- Yapılan işlemin herhangi işlem olduğuna bağlı olarak etkisiz elemanın da birim eleman da aynı olur.
- Aynı olabilir ama farklı işlemler için aynı işlemin etkisiz ve birim elemanı bence aynı olmaz şeklinde ve üçgen ve kare gibi örnek verilmiş.
- Aynı olabilir. Örneğin 1×1 etkisiz eleman ve birim eleman birdir denilmiş.
- Örnek üzerinden gösterilmiş.

Diğer yanıtlar da bu yanıtlara benzer olarak yorumlanmıştır ve bir öğretmen adayı yanıt vermemiştir. Burada görülüyor ki 1. sınıflar bu bilgiyi yorum üzerine açıklanmaya çalışılmış, özellikle soyut matematik dersi görüldükten sonra ancak yine de buradaki kavramı net olarak ifade edilemediği dikkat çekmiştir. Burada yakın cevapların ilk 7 soruları araştırıldığında da daha bilinçli yazıldığı ortaya konulmuştur. Ama istenilen düzeyde cevapların olmadığı, yani buradaki ifadelerin ikili işlem konusunda etkisiz ve birim eleman kavramlarında kavram yanılgısı yaşadıkları ortaya çıkmıştır.

3.sınıf öğretmen adaylarının ise bu soruya verdikleri farklı türden yanıtlar şu şekildedir:

- Evet etkisiz eleman birim eleman olarak adlandırılır.
- Her işlemde aynı olmak zorunda değildir ama aynı olduğu işlemler de bulunur. Işlemin ne olduğuna göre birim eleman da etkisiz eleman da farklılık gösterebilir.
- Etkisiz eleman bir kümede verilen bir işleme göre o kümeden öyle bir elemanla işleme koyacağız ki sonuç yine aynı eleman çıksın. Bunu matematiksel sembollerle de gösterilmiş.
- Grupta olur ama halkada olmaz.

- Aynı olur.
- a.b=a, a+b=a
- Etkisiz eleman ve birim eleman grupta aynıdır. Halkada etkiswiz eleman 1. işleme göredir. Birim eleman ise 2. işlemin etkisiz elemanıdır.
- Etkisiz ve birim eleman halkada farklı olur çünkü işlemler farklı olur aynı olamaz. Halkada 1. işleme göre etkisiz eleman, 2. işleme göre birim eleman bulunur.
- Evet olabilir. Çarpmada etkisiz ve birim eleman 1 olabilir.
- Halkalarda etkisiz ve birim eleman aynı olmaz.
- Aynı olabilir ama olması çok zor bir ihtimaldir.
- Halkalarda 1. işlem etkisiz eleman olarak tanımlanırken 2. işlem birim eleman olarak tanımlanır.
- İşlem sonucunu değiştirmeyen eleman sıfır işlemin etkisiz elemanıdır. Belirli bir ölçüde değer belirten elemana birim eleman denir. İkisi farklı şeydir.
- Bazen aynı olur bazen aynı olmaz. Hangi işlemde olduğuna göre değişir.
- Etkisiz ve birim elemanın aynı olduğu durumlar vardır. Genel olarak aynı değildir.

Ve bir aday da soruyu yanıtsız bırakmıştır. Bu şekilde verilen yanıtlarda görülüyor ki öğrencilerin cebir dersini alıp cebir dersinde ders takibinin yapıldığı ancak cebirsel yapılardan söz ettikleri ortaya çıkmıştır. Grup yapısı ve halka yapısı tanımlarına göre yorum yaptıkları gözükmektedir. Verilen yanıtların 1. ve 2. sınıflara göre daha olgun olduğu ancak yine de öğrencilerin bu konularda kavram yanılgısına düştükleri ortaya çıkmaktadır.

4.sınıf öğretmen adaylarının ise bu soruya verdikleri farklı yanıtlar şu şekildedir:

- Etkisiz ve birim eleman aynıdır.
- Bazı işlemlerde aynı olabilir ama tanımları aynı değildir.
- Grupta aynı olurken halkada aynı olmaz.
- Hayır aynı olmaz.
- Etkisiz ve birim eleman aynı şeydir. İkili işlemde bir eleman tersiyle işleme girdiğinde birim eleman yani etkisiz eleman elde edilir.
- Etkisiz eleman sayının işleme girdiğinde yine o elemanın aynı olarak ortaya çıkmasıdır.
- Etkisiz eleman olması için a*e=e*a=a
- Aynıdır sayıyı ters elemanıyla işleme sokarsak etkisiz elemana, birim elemana ulaşırız
- Olabilir ama çarpma deyince birim eleman, toplamada etkisiz eleman daha çok kullanılıyor. Örneğin çarpmada 1.
- Grup için aynı olurken halka için aynı durum söz konusu değildir. Birim elemanı ise çarpma işleminde kullanıyoruz ikisinin aynı olduğunu düşünmüyorum.
- Etkisiz ve birim eleman çarpma işleminde aynı olabilir.

Bir öğretmen adayı bu soruyu yanıtsız bırakmıştır. 4. sınıf öğretmen adaylarında görülüyor ki 3. sınıftaki öğretmen adaylarına paralel olarak cebir dersinden etkilenerek verilen cevaplar olmuştur. Ancak yine de kavram yanılgısına düştükleri ortaya çıkmıştır.

Tüm öğretmen adaylarının yanıtları incelendiğinde şu ana kadar olan ilk 8 soru içerisinde bu 8. soruda en çok kavram yanılgısı yaşadıkları sorulardan ikincisi olarak adlandırılır. 7 ve 8. sorularda kavram yanılgılarına düştükleri çok açık bir şekilde görülmektedir.

9. soru: Her elemanın tersi var mıdır? Açıklayınız. Örneğin Reel sayılar kümesinde 3 elemanının tersi var mıdır? Gösteriniz.

İlk sekiz soruda öğretmen adaylarının ikili işlem konusundaki sorulardaki becerileri ölçülmüştür. İşlemin özellikleri, etkisiz eleman, ikili işlemin tipleri, işlem önceliği gibi sorular yöneltilmiştir. Verdikleri sınıf düzeylerine göre dokuzuncu soruda sorular soru "her elemanın tersi var mıdır, açıklayınız" örneğin reel sayılar kümesinde 3 elemanının tersi var mıdır, gösteriniz şeklinde yöneltilmiştir. 1.sınıf öğretmen adaylarının verdikleri yanıtlar genellikle her elemanın tersi yoktur şeklinde olmuştur. Şöyle ki öncelikle her elemanın tersi var mıdır sorusuna cevap olarak etkisiz elemanın var olması gerektiği konusunun bilinmesi gerekir ve hangi işlemle bir elemanın tersinin olup olmadığının sorgulanması gerekir. Reel sayılar kümesinde adi toplama işleminde çalışıyorsak 3 elemanının tersi 0 etkisiz elemanına karşılık -3 çıkacaktır. Adi çarpma işlemine göre ise 3 elemanının tersi 1/3 çıkacaktır çünkü etkisiz elemanı yani birim elemanı 1dir. Böyle bir ayrıma gidilmesi gerekmektedir. Bunun dışında üst sınıflara doğru reel sayılar kümesinde sadece adi toplama ve adi çarpma işlemleri olmadığı bunun dışında spesifik farklı işlemlerin de var olabileceği bilinmesi gerekmektedir. Bu soruda ölçülmek istenen önceki soruların üzerine etkisiz eleman, işlem özellikleri, işlem yeteneği gibi ifadeleri burada net olarak ifade edebilmesi amaçlanmaktadır. 1.sınıf öğretmen adaylarında genellikle bu soruda verilen cevap her elemanın tersinin olmadığı yönündedir. Onun dışında genellikle ise toplamaya göre -3, çarpmaya göre 1/3 cevabının %50'nin üzerinde verildiği gözlenmektedir. Burada dikkatli bir şekilde incelendiğinde 3 öğrencinin reel sayılarda sıfırın tersinin olmadığı gibi bir cevap verilmiştir. 1 ile ilgili özelliklerden bahsedilmiştir. Yani burada etkisiz elemanın ters eleman özelliğinden önce olması gerektiği ile ilgili bir kavram karışıklığı yaşadığı gözlenmektedir. 8. sorudaki aynı olur, aynı olmaz veya verilen yanlış cevaplara göre 9.sorudaki cevaplarda da benzerlik göstermektedir. Dolayısıyla öğrencilerin çoğunluğunun burada reel sayılar kümesindeki elemanların tersleriyle ilgili sorun yaşadıkları ortaya çıkmaktadır. Ancak öğrencilerin ilk 2 soruda verdikleri yanıtlar dikkate alındığında 9. sorudaki yanıtlarının ilk 8 sorudaki yanıtlarına göre daha başarılı oldukları gözlenmektedir. Bunun da önceki sorulardaki yapmış oldukları rahat cevapların burada daha tutarlı olarak ve önceki sorulardaki soru şekillerinin kendilerini geliştirmeye yönelik olduğunu fark edip ve bilgi birikimlerini burada yansıtmaya çalıştıkları gözlenmektedir.

2.sınıf öğretmen adaylarının ise bu soruda verdikleri yanıtlar 1. sınıftaki öğrencilere göre biraz daha derli toplu olmuştur. Burada 3^{-1} ifadesini kullanan öğrencilerin olduğu gözlenmektedir. Bunun da 3^{-1} ifadesindeki –1 ifadesinin bir sembol, gösterim olduğu özellikle soyut matematik gibi derslerde vurgulandığı ve bunu bazı öğrencilerin fark ettiğini gözlemlemek mümkündür. Açık bir şekilde genel olarak verilen yanıtlar

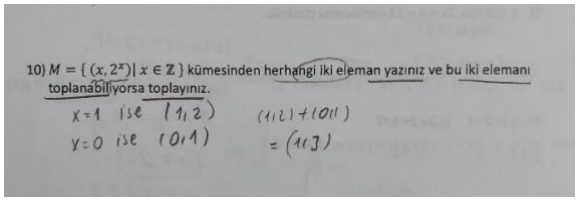
şu şekilde olmuştur: toplama işlemine göre reel sayılarda 3'ün tersi –3'tür, çarpma işlemine göre reel sayılarda 3'ün tersi 1/3'tür şeklinde cevaplar verilmiştir. Burada da tersi var mıdır ifadesinde yaklaşık olarak %60'ı tersi vardır, %40'ı tersi yoktur şeklinde cevap vermiştir. Tersi vardır diyenlerin de açıklamaları ve tersi yoktur diyenlerin de açıklamaları olmuştur. Bu da gösteriyor ki öğrencilerin burada almış oldukları soyut matematik, analiz ve lineer cebir tarzındaki derslerde işlemlerle ilgili çalışmaların neticesi olduğu söylenebilir. Ancak yine de belli kavramlarda net cevapların tam olarak beklentiyi karşılamadığı gözlenmektedir.

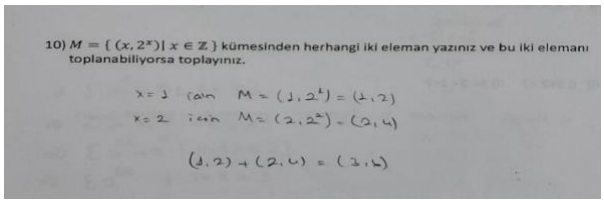
Bu soruda 3. ve 4. sınıf öğretmen adaylarını birlikte değerlendirmekte yarar görülmüştür çünkü genel olarak verilen cevaplar benzer şekilde olmuştur. Bu sınıf düzeyinde alınan pür matematik derslerinin iki sınıf düzeyinde de eşit şekilde alındığı ve 4. sınıfta herhangi bir şekilde pür matematik dersi olmadığı için 4.sınıf öğretmen adaylarının 3. sınıftaki öğretmen adaylarına göre benzer yanıtlar verdikleri görülmüştür. Burada da 2. sınıf öğretmen adaylarına göre biraz daha olumlu cevaplar verildiği gözlenmektedir. Burada kavramsal ifadelerin kullanıldığı dikkat çekmektedir oysaki alt sınıflarda bu kavramlara rastlanmamıştır. Yine aynı şekilde 3^{-1} sembolünün hem toplama hem çarpma için kullanıldığı görülmüştür. Bu sonuçların, yanıtların memnun edici olduğu söylenebilir. Burada 3. ve 4. sınıf öğretmen adaylarının 9. soruda ikili işlemde etkisiz elemanın farklılığından bahseden öğretmen adayları da olmuştur ve bunun üzerine de 3'ün tersinin toplama işlemine göre -3, çarpma işlemine göre ise 1/3 olduğu genelde yorum yapılmıştır ve özel şekilde işlemlerden de bahseden öğretmen adaylarının olduğu memnun edici seviyededir.

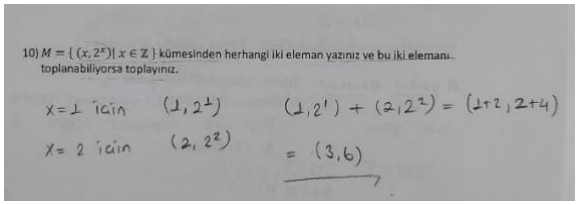
10. soru: $M = \{ (x, 2^x) | \, x \in \mathbb{Z} \}$ kümesinden herhangi iki eleman yazınız ve bu iki elemanı toplanabiliyorsa toplayınız.

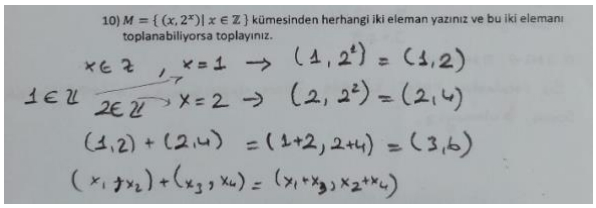
Bu çalışmanın son sorusuna geldiğimizde ilk 9 soruda ikili işlemlerle ilgili birçok özellikten, işlem yeteneğinden bahsedilmiştdördüncüi. Son olarak da 8 ve 9. sorularda etkisiz ve ters eleman ile ilgili yorumlar istenmişti. Son olarak ise bir küme verilip bu kümeden 2 tane eleman yazmaları istenmiştir. Buradaki kümenin sıralı ikili olduğu ve 1. sıradaki elemanın 2.sıradaki elemanla ilişkili olduğu bir küme yazılmıştır. Burada beklenen 2 elemanın yazılabileceği, bu iki eleman toplanabiliyorsa toplayınız şeklinde bir ifade belirtilmiştir. Ancak burada M kümesi üzerinde bir ikili işlemin tanımlanmadığının vurgusu öğrenciler tarafından fark edilmesi beklenmekteydi. M kümesi üzerinde bir toplama işlemi tanımlanması gerekiyor. Sıralı ikilide iki tane elamanın nasıl toplanabiliyor olmasının bir tanımı olması gerekiyor ve 1. bileşenle 2. bileşeni yazarken birbirlerine bağlı bir şekilde yazıldıklarına dikkat edilmesi gerekiyordu. Burada öğretmen adaylarının ilk 9 soruda verdikleri yanıtlara oranla düşük bir yanıt verdikleri gözlenmekte ve burada son olarak 10.soru neticesinde öğrencilerin her sınıf düzeyinde tam anlamıyla kavram yanılgısı yaşadığının neticesini burada gözlemleyebildiğimizi anlıyoruz. 1.sınıf düzeyindeki öğretmen adaylarında hemen hemen bu kümeden eleman alabilmek bile kolay olmamıştır ve iki elemanın da toplamanı yapan hemen hemen mümkün olmamıştır. 2.sınıf öğretmen adaylarında ise bu kümeden 2 tane eleman alan birçok öğrenci olmuştur ancak buradaki elemanların toplanamadığı ile ilgili çok az bir yanıt ortaya çıkmıştır. 3. sınıftaki öğretmen adaylarında ise M kümesinden iki tane elaman genellikle doğru seçilmiş ve genellikle alınan elemanlar (1,2), (2,4) şeklinde olmuş ve topladıkları zaman ise (3,6) elemanının M'de olmadığı şeklinde birçok öğrenci bu şekilde yanıt vermiştir. Bu şekilde doğru ancak ikisi arasındaki toplamanın bir adi toplama olmadığını ve burada bir toplama

tanımlanmadığını belirtmeleri gerekmekteydi. Bu anlamda 3.sınıf öğretmen adaylarında bunun dikkat edilmediği ve bu açıklamanın hemen hemen neredeyse yapılmadığı gözlenmektedir. Ancak verilen ters örneklerin cebir derslerinde bir ifadenin ispatının olmadığında ters örnek verilebileceğinin karşılığını vermişlerdir. Ancak aradaki yapılan toplama işleminin ise tanımlanmadığını yani burada bir ikili işlem olup olmadığını belirtmeleri beklenmekteydi. Son olarak 4. sınıf öğretmen adaylarında ise 3.sınıftaki öğretmen adaylarına benzer şekilde yanıtlar verdikleri gibi oranında hemen hemen yakın olduğu gözlenmektedir. Genel olarak bakıldığında 10. Soruda kümeden iki tane eleman alınabildiği gözlenmekte ancak iki elemanın genellikle direkt toplanmakta ve o elemanın da 3. ve 4. sınıflarda cevabının bu kümede olmadığı söylenmektedir. İşte bu kümedeki elemanın olmadığının aslında kapalılık özelliğinin olmadığı vurgusunun yapılması beklenmekte dolayısıyla böyle bir işlem tanımlanabiliyor olması gerekiyor ve bu işlemin neticesinde M kümesinden alınan 2 elemanın yine M kümesinde olduğu söylenebiliyordu. Burada dikkat edilecek olursa hiçbir öğretmen adayında uygun bir şekilde işlem tanımlama şekline gidilmemiştir. Dolayısıyla 10.soru neticesinde ilk 9 soruda verilen olumlu, olumsuz yanıtların 10.soruda uygulanamadığı yani elemanın reel sayıda, tam sayıda alındığı zaman yapılabildiği ancak sıralı ikili üzerinde çalışıldığında ise bu ifadelerin tam anlamıyla örtüşmediğini görmekteyiz. Aşağıda bununla ilgili birkaç tane öğretmen adaylarının verdikleri yanıtların fotoğrafları sunulmuştur.









TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu araştırmada ilköğretim matematik öğretmenliği öğretmen adaylarının cebirsel olarak ikili işlem konusunda yaptıkları kavram yanılgılarının incelenmesi amaçlanmıştır. Çalışmada ikili işlem kavramı ile yanılgılarının ortaya çıkması için aşamalı olarak adaylara 10 farklı açık uçlu soru yöneltilmiştir. Öğretmen adaylarının yanılgılarından dolayı yapılan hataların farkına varılmamasından dolayı ortaya çıkan sonuçlar hakkında yorumlarda bulunulmuştur. Dolayısıyla ikili işlem konusunun öğretmen adayları eğitmeni oldukları sınıf düzeyinde "işlem" konusunu anlatırken dikkat etmeleri gereken noktalar açısından tüm paydaşlara böyle bir çalışma sunulmuştur. Literatür taraması yapıldığında matematiksel kavram yanılgıları ile ilgili çalışmalar öğrenme, öğretme ve konu kavramı üzerinden gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmada kavram yanılgıları, öğretmen adaylarının öğretmenlik süreçlerinde öğretimi kolaylaştırması için konunun teorik olarak ele alıdığı ayrıca

tavsiyelerin verildiği bir çalışma olmuştur. Mevcut çalışmalarla benzerlik göstermediğinden mukayese konusunda liteartür ile ilişkilendirilmemiştir. Sonuç olarak; soru temelli tüm sınıf düzeyleri genel olarak değerlendirildiğinde birinci soru için tüm öğretmen adayları içinde kavramsal olarak görüş belirten aday oranı %15 civarında olmuştur. Tüm sınıflar dikkate alındığında kavramsal fikir belirtenlerin oranının düşük olduğu belirtilebilir. İkili işlem kavramını anlamak için yöneltilen ilk soru birçok cevaba açık olduğundan ilk aşamada yanıtların sınıf seviyelerine göre uygun olduğu kanaatine varılmıştır. Birinci soruda ikili işlem kavramında beklenilen seviyelerde olmayan cevapların ikinci soruda doğru olma oranı yaklaşık %20 seviyelerindedir. Bu kapsamda genel olarak ilk iki soruda öğretmen adaylarının ikili işlem kavramında kavramsal yanılgıya düştükleri açıkça görülmektedir. Üçüncü sorunun yanıtları göz önüne alındığında kavram yanılgısı yaşamadıkları ancak birinci ve ikinci soru ile birlikte değerlendirildiğinde kavramsal olarak adayların konuyu tam olarak ifade edemedikleri açık olarak gözlemlenmiştir. Dördüncü soruda öğretmen adaylarının "*bildiğiniz işlemleri yazınız*" sorusuna çoğunlukla öğretmen adaylarının "*adi toplama*" ve "*adi çarpma*" işlemlerini örnek olarak verdikleri gözlemlenmiştir. Bu biçimde yanıtlayan öğretmen adaylarının ilk üç soruda vermiş oldukları yanıtlara göre değerlendirildiğinde ise ilk üç soruda farklı kavramlarla verilen cevapların 4.soruda tutarlı olduğu gözlenmiştir. İlk dört soru dikkate alınıp değerlendirildiğinde öğretmen adaylarının "ikili işlem" konusunda kavram yanılgısı yaşadıkları söylenebilir.

Veri toplama aracında sonraki dört sorunun değerlendirmesi sonucunda adayların en çok altıncı soruda kavram yanılgısı yaşadıkları tespit edilmiştir. Tüm sekiz soru içerisinde adayların tek tek verdikleri yanıtlar dikkate alındığında ise ikili işlem kavramının adaylarda tamamen oluşmadığı, ikili işlem kavramı tamamen oluşmuş adaylarda ise diğer işlem özelliklerinin de tam olarak ifade edilemediği ortaya çıkmıştır. Son olarak "etkisiz elemanla birim eleman aynı olur mu" kısmında cebir dersindeki "grup" ve "halka" kavramlarına atıfta bulunulmuştur. Bunun dışında etkisiz eleman ve birim eleman kavramın geçtiği farklı pür matematik derslerinden örnekler verilmeye çalışılmış ancak hangi kümede ve hangi işlem ile verildiği vurgusu ve detayı adaylar tarafından açıklanamadığı gözlemlenmiştir. Son iki soru için ise ilk iki sınıf ve son iki sınıf öğretmen adayları arasında fark olduğu gözlemlenirken bunun nedeni olarak da alınan matematik derslerinin işlem yeteneğine daha iyi yansıtıldığı şeklinde yorumlanmıştır.

KAYNAKÇA

Ay, Y. (2017). A review of research on the misconceptions in mathematics education. M. Shelley, M. Pehlivan (Ed.), *Education research highlights in mathematics, science and technology*. (ss. 21-31). Isres Publishing.

Baştürk, S. & Dönmez, G. (2011). Matematik öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konusuyla ilgili kavram yanılgıları. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 5(1), 225 - 249.

Buyukozturk, S., Kılıc-Cakmak, E., Akgun, O. E., Karadeniz, S., & Demirel, F. (2016). *Scientific research methods*. Pegem Academy.

Ersoy, Y. (2006). İlköğretim matematik öğretim programındaki yenilikler-I: Amaç, içerik ve kazanımlar. *İlköğretim Online*, 5(1), 30-44. https://dergipark.org.tr/tr/download/article-file/91060

Fujii, T. (2020). Misconceptions and alternative conceptions in mathematics education. Lerman, S. (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education.* (ss. 625-627). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_114

Güveli, E., Baran Bulut, D., & Güveli, H., (2018). Matematikte kavram yanılgılarına yönelik öğretmen adaylarının bilgi ve görüşlerinin değerlendirilmesi. A. İşcan (Ed.), *Eğitim bilimlerinde örnek araştırmalar.* (ss. 419-438). Nobel Akademik Yayıncılık.

Hammer, D. (1996). More than misconceptions: Multiple perspectives on student knowledge and reasoning, and an appropriate role for education research. *American Journal of Physics*, 64, 1316-1325. http://dx.doi.org/10.1119/1.18376

Ilhan, A., & Akın, M. F., (2022). Analysis of contextual problem solutions, mathematical sentences, and misconceptions of pre-service mathematics teachers. *Internatıonal Electronıc Journal of Mathematıcs Educatıon*. 17(1), 2-14 10.29333/iejme/11470

Kshetree, M. P., Acharya, B. R., Khanal, B., Panthi, R. K., & Belbase, S. (2021). Eighth grade students'misconceptions and errors in mathematics learning in Nepal. *European Journal of Educational Research,* 10(3), 1101-1121. https://doi.org/10.12973/eu-jer.10.3.1101

Malambo, P. (2021). Implicit misconceptions in prospective mathematics teachers' reasoning about trigonometric concepts. *Contemporary Mathematics and Science Education*, 2(2), ep21011. https://doi.org/10.30935/conmaths/11054

McDonald, B. (2010). *Mathematical misconceptions*. Lambert Academic Publishing.

Özkale, A., & Memiş, Y. (2022). İlköğretim matematik öğretim programında sarmal yaklaşım yansımalarının incelenmesi. *Milli Eğitim Dergisi,* 51(234), 1031-1062. https://doi.org/10.37669/milliegitim.848842

Miles, M, B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded Sourcebook. (2nd ed)*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Mohyuddin, R. G., & Khalil, U. (2016). Misconceptions of Students in Learning Mathematics at Primary Level. *Bulletin of Education and Research*, 38(1), 133-162.

Moralı, S., Köroğlu, H., & Çelik, A. (2004). Buca Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmen Adaylarının Soyut Matematik Dersine Yönelik Tutumları ve Rastlanan Kavram Yanılgıları. *Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24(1).

Ojose, B. (2015). *Common misconceptions in mathematics: Strategies to correct them*. University Press of America.

Owusu, A., Bornaa, C., Kwakye, D., & Iddrisu, A. (2023). Pre-service mathematics teachers' errors and misconceptions of integer operations. *Journal of Statistics and Mathematical Concepts*, 1(2), 1-19. https://doi.org/10.58425/jsmc.v1i2.127

Powell SR, Nelson G. (2021). University students' misconceptions about rational numbers: Implications for developmental mathematics and instruction of younger students. *Psychology of Schools*. 58(2), 307–331. https://doi.org/10.1002/pits.22448

Satan, N., Aksakal, K., & Ay, Z. (2021). Üslü İfadelerde Yaşanan Kavram Yanılgılarının Olası Nedenleri ve Önlem Önerilerinin Öğretmen Adaylarının Görüşlerine Dayalı Olarak İncelenmesi. *Manisa Celal Bayar Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 9(1), 32-48. https://doi.org/10.52826/mcbuefd.853179

Senemoğlu, N. (2013). *Gelişim, öğrenme ve öğretim*, (23rd Ed.). Yargı Yayınevi.

Suprapto, N. (2020). Do we experience misconceptions?: An ontological review of misconceptions in science. *Studies in Philosophy of Science and Education*, 1(2), 50-55. https://doi.org/10.46627/sipose.v1i2.24

Swan, M. (2001). Dealing with misconceptions in mathematics. P. Gates (Ed.), *Issues in mathematics teaching* (pp. 147-165). Routledge.

Şen, Ş., & Yılmaz, A. (2013). Kimya öğretmen adaylarına göre kavram yanılgılarının nedenleri. *Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Dergisi* (35), 59-95. https://dergipark.org.tr/en/download/article-file/231557

Themane, K. M., & Luneta, K. (2021). Misconceptions and associated errors in the learning of mathematics place value in South African primary schools: A literature review. *Preprint Organisation*. 456(1), 1-14. https://doi.org/10.20944/preprints202105.0456.v1

Türkdoğan, A., Güler, M., Bülbül, B. & Danişman, Ş. (2015). Türkiye'de matematik eğitiminde kavram yanılgılarıyla ilgili çalışmalar: tematik bir inceleme. *Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi,* 11(2). https://doi.org/10.17860/efd.26545

Ünver, S. K., & Elçi, A. N. (2022). Opinions of pre-service elementary school mathematics teachers on misconceptions. *Research on Education and Psychology*, 6(2), 236-253. https://doi.org/10.54535/rep.1205806

Yağbasan, R., & Gülçiçek, A. G. Ç. (2003). Fen öğretiminde kavram yanilgilarinin karakteristiklerinin tanimlanmasi. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 13(13), 102-120.

Trakya Journal of Education

ISSN : 2630-6301
Publisher : Trakya University

Vol. 16, No. 2, 880-932, 2026
DOI: 10.24315/tred.1723069

Research Article

Algebraic Conceptual Misunderstandings of Prospective Teachers Regarding Binary Operations

Mustafa Özkan[1*]
Levent Vural[2]

[1]Trakya University, Department of Mathematics and Science Education, Edirne, Türkiye
mustafaozkan@trakya.edu.tr

[2]Trakya University, Department of Educational Sciences, Edirne, Türkiye
leventvural@trakya.edu.tr

*Corresponding Author

Received: 19.06.2025
Accepted: 29.07.2025
Available Online: 30.04.2026

Abstract: This study primarily aims to conduct an in-depth investigation into the conceptual misunderstandings of prospective elementary mathematics teachers concerning algebraic binary operations. Employing a qualitative case study design, the research is situated within the framework of the fundamental role of concepts in learning and the impeding effect of conceptual misunderstandings on subject matter knowledge acquisition. The study involved 89 prospective teachers from various grade levels within an elementary mathematics education program. A 10-item data collection instrument, developed by the researchers and comprising both mathematical operation and open-ended questions, was utilized. The data analysis process incorporated expert opinions from the field and repeated evaluations to enhance validity and reliability. Findings from the data collection tool revealed that prospective teachers generally experience misconceptions regarding binary operations. It can be said that more than half of the prospective teachers experience misconceptions. In conclusion, it was observed that the concept of "binary operation" was not fully formed among the candidates, and even those who did not exhibit conceptual misunderstandings often struggled to fully articulate other properties of operations

Keywords: Algebra, Binary operations, Conceptual misunderstanding, Mathematics education

INTRODUCTION

Every discipline discusses, conveys, and progresses through phenomena and concepts. Science, at the same time, enhances its effectiveness by generating new concepts to explain and clarify events, situations, and experiences. In this respect, concepts can be seen as the building blocks of science. Öncül (2000) defines the term "concept" as "a general or abstract thought that denotes multiple objects or experiences, or that describes the relationship between them." Concepts are obtained as a result of the processes of abstraction and generalization. Within this framework, the complete internalization of concepts by learners in the teaching-learning process can be interpreted as an indication that the learning experience is also effective. The constructivist approach, which centers higher-order thinking processes and a student-centered educational process, embraces an understanding that places significant importance on concept learning. Senemoğlu (2013) also states that the correct acquisition of concepts forms the basis of learning and cognitive development. Within this scope, the effective implementation of concept teaching is necessary for student-centered education to be operated effectively. The common text of the Türkiye's Century Education Model (Türkiye Yüzyılı Maarif Model) curriculum also states that "an approach based on a skill web within the framework of conceptual skills along with knowledge clusters, field skills, tendencies supporting these skills, and interdisciplinary components has been adopted," thereby aiming to emphasize the importance attributed to conceptual skills (Ministry of National Education (MEB), 2024). Within this scope, conceptual skills in the curricula are categorized as basic skills, integrated skills, and higher-order thinking skills. Furthermore, decision-making, problem-solving, and critical thinking skills are also specified as higher-order thinking skills. In the curricula, it is also possible to find explanations regarding the importance of concept teaching within literacy skills (MEB, 2024). Within this framework, concept teaching remains important for teachers in every subject/discipline taught in schools and continues to be a significant part of the teaching processes. However, the failure to establish conceptual relationships effectively or the interpretation of concepts in ways different from their required scientific meaning can be a significant obstacle in learners' acquisition of subject matter knowledge.

Cite as(APA 7): Ozkan M., & Vural L. (2025). Algebraic Conceptual Misunderstanding of Prospective Teachers Regarding Binary Operations. *Trakya Journal of Education 16(2), 880–932. https://doi.org/10.24315/tred.1723069*

This is an open Access paper distributed under the terms of Conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.

This situation, which can be characterized as a misconception (Hammer, 1996; Swan, 2002; McDonald, 2010), is one of the primary factors hindering effective subject matter teaching and acquisition. According to Baştürk and Dönmez (2010), what is expected from teachers in such a case is "to be aware of the existing or potential misconceptions in students, as well as to analyze these misconceptions well and use them in planning and shaping the teaching they will do." Conceptual misunderstandings are also seen as a significant factor hindering meaningful learning (Ay, 2017). Fujii (2020) states that when concepts are thought to contradict accepted meanings, instructors tend to use the term "misconception," while also emphasizing that some researchers or educators prefer to use the term "alternative conception" instead of "misconception." Ojese (2015) indicates that students generally make two types of errors, defining them as conceptual errors and procedural errors. Conceptual errors are a type of error that occurs in relation to a lack of understanding. The source of conceptual errors can thus be conceptual misunderstandings. Mohyuddin and Khalil (2016) state that conceptual misunderstandings pose a problem for two reasons. Firstly, they hinder learning when students use them to interpret new experiences, and secondly, because students are emotionally and intellectually attached to their conceptual misunderstandings, they have difficulty accepting new concepts that do not resemble their existing ones. Türkdoğan, Bülbül, Güler, and Danişman (2015) point out that one of the first and most important studies on conceptual misunderstandings belongs to Erlwanger (1973), noting that the study attempts to explain how a student named Benny fell into a conceptual misunderstanding because he could not understand the reasons for the operations he performed by creating his own mathematical rules. In the literature, factors such as students' prior knowledge, teaching methods, the student's cognitive structure, culture, the instructor's own misconceptions, and teaching materials are cited as reasons for the occurrence of conceptual misunderstandings (Yağbasan & Gülçiçek, 2003; Şen & Yılmaz, 2013; Güveli, Bulut & Güveli, 2018; Subrapto, 2020; Satan, Aksakal & Ay, 2021). Especially in courses with a high density of concepts, various factors can be the source of these misunderstandings.

One of the courses with a high density of concepts is mathematics. The mathematics course is scheduled for 5 hours per week in primary education institutions, and while it varies in secondary education institutions, for example, it is 6 hours per week in the 9th and 10th grades of Anatolian high schools (Board of Education and Instruction (TTKB), 2024). In mathematics instruction, moving on to experiences related to different concepts without fully learning the conceptual structure can also hinder comprehensibility for a concept-intensive course. Küçük and Demir (2009) state that since mathematics is a cumulative science, prior knowledge and concepts form a step for the subsequent ones, so conceptual misunderstandings and knowledge deficiencies must be identified and solutions must be sought. Türkdoğan, Bülbül, Güler, and Danişman (2015) emphasize that defining many concepts without referring to dozens of concepts related to any single concept is very difficult when it comes to mathematics, relating this situation with the example that "limit cannot be defined without defining functions, and derivative cannot be defined without defining limit." This cumulative and interconnected conceptual relationship has also manifested itself in the curriculum in a spiral structure over time (Ersoy, 2006; Özkale & Memiş, 2022). Considering this relationship between mathematical concepts, especially in the first and second levels of primary education, it is often not even possible for a student who has missed a few identity s to follow the topics (Türkdoğan, Bülbül, Güler & Danişman, 2015). The disruption of such a relationship leads to learners becoming detached from the process due to incomplete learning of subject matter knowledge. When the literature is examined, it is observed that learners experience "conceptual misunderstandings" regarding the learning content of various topics at different ages and levels when it comes to mathematics (Küçük & Demir, 2009; Powell & Nelson, 2020; Kshetree et al., 2021; Malambo, 2021; Themane & Luneta, 2021). In this context, the conceptual misunderstandings encountered in mathematics lessons pose a significant issue not just for students, but also for prospective teachers (İlhan & Akın, 2022; Ünver & Elçi, 2022; Owusu et al., 2023). An examination of research conducted with prospective teachers reveals studies aimed at identifying their conceptual misunderstandings across a broad range of topics, including abstract mathematics (Moralı, Köroğlu & Çelik, 2004), context-based problem solving (İlhan & Akın, 2022), trigonometry (Malambo, 2021), the symbols $'<'$ and $'>'$, addition and subtraction, multiplication and division of integers, integers themselves, problem solving, and solving word problems (Owusu et al., 2023). Within these studies, it has been observed that there is a **gap in research specifically investigating** the conceptual misunderstandings experienced by prospective teachers regarding binary operations. Therefore, the aim of this study is to **uncover** the algebraic conceptual misunderstandings of pre-service elementary mathematics teachers enrolled in elementary mathematics education programs concerning binary operations. candidates **may hold** conceptual misunderstandings about certain concepts during their undergraduate studies in subject matter and pedagogy courses. This situation can **hinder the development of** specialization skills among candidates studying in the relevant field. Furthermore, beginning their professional careers with these conceptual misunderstandings can also **lead to issues** in teaching processes. For this reason, identifying the

potential conceptual misunderstandings of candidates before graduation and subsequently conducting studies on these misunderstandings appears important for **mitigating** potential problems. Within this scope, the overarching aim of the study is "to identify the algebraic conceptual misunderstandings of candidates regarding binary operations." To achieve this aim, answers to the following questions were sought:

1. Are there any algebraic conceptual misunderstandings experienced by candidates regarding binary operations, and if so, what are these misunderstandings?
2. Do the conceptual misunderstandings experienced by the candidates show a difference according to their grade level?
3. What are the possible reasons for these conceptual misunderstandings experienced by the candidates?

METHOD

This section of the research details the research method, data collection instruments, data analysis procedures, practices implemented to ensure the reliability of the research findings, and the studies conducted in accordance with ethical principles.

Research Design

This research, designed within the scope of qualitative research methodologies, employed the case study method. The core objective of a case study is to thoroughly investigate a phenomenon or concept and to present it in its natural context (Büyüköztürk et al., 2016). To this end, the study aimed to uncover potential conceptual misunderstandings among pre-service elementary mathematics teachers across all grade levels of the elementary mathematics education program, based on their responses to a data collection instrument developed by the researchers. In this regard, the researchers determined that the case study design was the most appropriate qualitative approach to achieve this research goal.

Participants

The research included 11 first-year students, 39 second-year students, 24 third-year students, and 15 fourth-year students enrolled in the elementary mathematics education program. The fact that the distribution was more dense at the second and third grade levels was related to the density of pure mathematics courses taken in the relevant grades (Algebra courses are taught in the 2nd and 3rd grades). The study did not aim to obtain a sample representative of the population; instead, efforts were focused on reaching a majority of candidates across different levels of study.

Data Collection Instrument

The data collection instrument used in the study was developed by the researchers. All participants, regardless of their grade level, were asked the same questions in the data collection instrument, and the analysis process regarding conceptual misunderstandings was carried out based on their responses. A total of 10 (ten) questions were posed to the candidates in the data collection instrument. While 5 of the questions consist of questions that require mathematical operations, such as “A+B=? A.B=?” where A={1,2,3}, B={3,4,5}, the other 5 questions consist of open-ended questions, such as “Is there a relationship between a binary operation and a function?”. The preparation of the questions benefited from the opinions of three field experts: two mathematicians and one expert working in mathematics education. Within this scope, the prepared questions were given to the field experts, and they were asked to examine the questions in terms of scope and technical aspects, and their potential opinions were sought. Some changes were made to the questions in line with the feedback received. Regarding the revised questions, the opinions of three senior undergraduate students studying in the mathematics department of the faculty of science were obtained, and they were asked to answer the questions. These three students did not suggest any corrections to the questions and returned their answers to the researchers within approximately 30 minutes. Considering the reviewed responses and the students' feedback, it was concluded that the questions were ready for implementation.

Data Collection and Analysis

The data for the study was collected by the researchers in a classroom setting. No personal information was collected from the candidates during the data collection process. However, some interpretations were made during the analysis process, taking into account their grade level. The time taken for the candidates to answer the questions varied between 40 and 25 minutes. Thus, data was collected from a total of 89 candidate teachers. A total of 20 data collection tools from different grades were selected from the 89 data collection tools obtained during the data analysis process. A total of 20 data collection tools from different grades were selected and sent to a mathematics expert, along with an answer key, for reliability. The expert was asked to evaluate the student responses and comment on potential misconceptions during the evaluations. The same student data sent to the expert was also evaluated by the researchers, who then exchanged views with the expert regarding potential misconceptions. Possible misconceptions identified during the exchange were shared and, using the Miles & Huberman (1994) formula, a 90% consensus was achieved on misconceptions. In this context, the researchers evaluated student responses in other data collection tools and identified any misconceptions. Following the evaluation of all papers, ten randomly selected papers were re-evaluated by the researchers to prevent bias.

Validity and Reliability of the Research

To ensure the validity and reliability of this research, several steps were taken from the development of the data collection instrument through to the analysis of the data. These measures are intended to enhance the credibility of the findings and minimize researcher bias. Initially, during the development phase of the data collection instrument, the opinions of three experts were sought regarding its content validity and the technical accuracy of the questions. During the administration of the instrument, participants were not asked for personal information such as their names, and they were informed that the exercise was not for evaluative purposes. Consequently, the data collection took place in a relaxed atmosphere, and the researchers provided no assistance to the participants in formulating their responses. For the data analysis, a field expert was consulted, and a mutual exchange of views was conducted to discuss the participants' potential conceptual misunderstandings.

Ethical Approval of the Research

Within the scope of the research, ethical approval was initially obtained from the Trakya University Social and Human Sciences Research Ethics Committee with its decision dated 09.01.2025 and numbered 774295, stating that there were no ethical or scientific objections to the conduct of the research (Appendix 1).

FINDINGS AND COMMENTS

In this section of the research, the findings obtained from the data collection tool and some comments on these findings are included. In the data collection tool, the same questions were asked to the teacher candidates at each grade level and the misconceptions they experienced about binary operations were tried to be revealed from the answers. In the presentation of the findings, care was taken to ensure that they were parallel to the sub-purposes. In this context, the questions in the data collection tool were evaluated separately and explanations regarding possible misconceptions and possible reasons for these were included in the questions.

Question 1: "What do you understand by the concept of binary operations?"

The answers given by the first-year primary school mathematics teacher candidates to this question are generally as follows: "operations that occur between two different numbers", "when performing an operation or equating, a pair must be present", "in binary operations, it is adding the elements in pairs", "A={1,2}, B={3,4} operations between these are binary operations" and "in mathematics, operations always occur between two numbers, the 3rd number is added later and so on." When a binary operation is asked here, the words operation or binary operation are used as the answer. In the first answer, it is said between two different numbers, but the numbers to be performed do not need to be different. When examined carefully, the expression 1+1 does not exist in the literature. Therefore, the candidate has a misconception. Another answer is "when performing an operation or equating, a pair must be present". How is an operation done, how is an operation equalized and what needs to have a pair? Sometimes it is very common that the concepts we use in mathematics are used incorrectly and far from their meaning when transferring or expressing the operations they perform. For this, it is necessary to know well what and where a mathematical concept is used for, that is, the definition of that concept. In another answer that included an operation, it was as follows: "A binary operation is adding elements in pairs in an operation." Here, only addition is emphasized. However, there can be many binary operations. Another incorrect transfer was the word "operation". It can be mentioned as an operation, that is, in a set, or if the word operation is to be emphasized, it should be said with an operation. Again, it was observed that when the concept of operation was explained by 1st grade prospective teachers as "A={1,2} and B={3,4} sets are specified and the operation is between them," the situation was tried to be explained with a special example. In addition, taking elements from two different sets while these two sets and the elements of these two sets are different and putting them into operation does not coincide with the definition of a binary operation. In another answer, the sentence "in mathematics, operations always occur between two numbers, the 3rd number is added later and so on" was made. Although a more logical explanation was made by looking at the previous answers here, it was mentioned that it can occur between two numbers. Do operations really occur between numbers? Or are they defined between elements of the same set? However, we can make the following inference from here, it would be more correct to use the expression between elements instead of the expression between numbers. For example, the elements of all number sets are numbers and there is no harm in calling them numbers. However, if we do not know this number yet and if necessary, if it is not a number or if it is not the number of that set, then it would be better to use the more general concept of element. Apart from this, if we define an o operation in a set A={a,b,c},

o	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

and the result of the operation will be as in this table.

In the expression a o b =c, it would not be correct to call the elements a,b,c numbers. Set A is not a set of numbers.

Another candidate's answer was "I understand that there is a value of (x, y)". Here, an approach that is far from the knowledge of which set x and y are in and how their values are calculated is mentioned. Again, the answer received from the candidate from the same class was "addition, subtraction or multiplication, division". Here, it is observed that subtraction and division are not binary operations or that their context is not used correctly. Considering that candidates at this level have not yet taken an abstract mathematics course, it can be thought that the answer can be tolerated. In another answer, expressions such as "addition of three numbers 3+2+1 first 3+2=5 then 5+1=6" were written. It was observed that answers that were quite far from the subject emerged. Apart from these, it was observed that a candidate who did not respond and answers such as "performing an operation between two given values and then determining the value or two operations are one" and "I understand composition, parametric functions" were given in order not to leave blanks that were far from the subject. Generally speaking, it is clear from the answers that the concept is not fully understood for candidates who are accustomed to solving questions with test techniques, have just completed exams, and

have taken the Fundamentals of Mathematics and Analysis I course theoretically in their undergraduate education.

When we analyze the answers given by the 2nd grade primary school mathematics teacher candidates to this question, the following comments emerged. It was observed that the answers to this question generally mentioned addition and multiplication. This answer, unlike the 1st grade students, mentioned addition and multiplication, which are the first ordinary operations that come to mind in the awareness of operations. The answer "interaction between the elements of a set" came as different answers. In this answer, the awareness that an element will be taken from a set emerges. Other different answers received were as follows: “It is to put two expressions into mathematical calculation.”, “Reaching the result of two elements from the same set with a single operation.”, “Taking two elements with the same definition sets and performing an operation on them.”, “A binary operation is determining a rule (operation) between two expressions and according to this rule, these two expressions are equal to another expression.”, “Two inputs consist of one output.”, “Inputs must be from the same set.”, “An operation performed with 2 elements taken from the same set is called a binary operation.”, “It is to put the same operation into operation with different or the same numbers within the subject.”, “It is to put two numbers of the same type into operation.”, “A binary operation is a system of equations consisting of two different types of operations.”, “Operations are performed only between two numbers.”, “Expressing values as ordered pairs.”, “Operations performed for two numbers.”, “Operations performed between two elements.” The answers given in this way seem to be clear in terms of what the concept will be mathematically but are clear in expression. But it is still basically the result that there is a lot of ear for the sensations and theoretical knowledge related to binary operations and there are expressions that are not completely meaningless. In the last two examples, one of them included the expression number and the other element. The teacher candidate who gave the answer number thought as a result-oriented number set, whereas the teacher candidate who used the expression element realized that it will not be defined only in numbers more generally. Another candidate gave the answer of a calculation process that depends on a result between two real numbers and specifically stated the expression number. In addition to these answers, 2 candidates tried to clarify with examples from the Linear Algebra 1 course they took. (For example: matrix and equation system). Approximately 45% of the other answers mentioned addition and multiplication operations and their details. It was even correctly exemplified that subtraction and division expressions are not operations. In general, it was observed that 2nd grade teacher candidates gave better answers for this question compared to 1st grades and made an effort to use an academic language. This is interpreted as the fact that the subject is expressed theoretically in the abstract mathematics course and the concept is frequently mentioned in the Linear Algebra 1 course. It was observed that satisfactory and theoretical answers were given in the 3rd grade primary school mathematics teaching department, to which 24 prospective teachers responded. It was noticed that there was a need for a longer explanation compared to the lower grades among the answers where mathematical notations were also used.

- For example: $*:A\times A \longrightarrow A$

$(a,b) \longrightarrow a* b .$

- $o :A \times A \longrightarrow A$

Answer $(a,b) \longrightarrow a \circ b .$

- binary operation $A \times A \longrightarrow$ is a function defined on A.
- It is the processing of any two elements taken from a set.
- $+:R\times R \longrightarrow R$

$(x,y) \longrightarrow x+y$

It was very pleasing to receive answers in the form. In addition, “a binary operation is the process of putting elements from any set into a defined operation and the result is an element of the same set.”, “a binary operation is the process of putting two elements from a set into the relevant operation and creating a new element. This element must also be in the set we took from in the first place. In other words, it must be closed.”, “a process of putting two elements from a set into that set again after going through an operation according to a certain rule.”, “a result of using an operation on two elements belonging to the same set.” , “It is the concept that gives the value of any two values in the same set by putting them into a specified operation, provided that they are not empty.”, “The entry of two elements from the same set into an operation.”, “The entry of two elements taken from the same set into an operation. We will determine what this operation is and apply it to two elements we take from the same set, and if we see that the result we obtain as a result of this operation is again an element of the same set, we can say that this operation is closed on that set.”, “K is a set and a rule that equates

any two elements of K to an element in set K", "It is called the application of two elements taken from the same set to a specified operation.".

The answers given in contrast to these were tried to be explained by using the word operation. Only one of the candidates mentioned addition and multiplication. It can be said that the theoretical perspective has developed compared to the 2nd grade candidates, but the concept of being proportional is still not well expressed.

The answers of the 4th grade primary school mathematics teaching department candidates are as follows.

- $A \times A \longrightarrow A$ is a binary operation.
- $N \times N \longrightarrow N$,$Q \times Q \longrightarrow Q$
- Any element of set A can be processed with itself or with another element.
- If $A \times A = A$ and two numbers chosen from the same set are processed and match with another number from the same set, then N: Natural number $N \times N \longrightarrow N$ / 2+3=5 etc.
- Processing two elements selected from the same set
- Processing two or more elements from the same set
- Two elements of a set are elements of the same set. For $x,y \in S$ It must be $x \circ y = z \in S$.
- It is called relations that have certain properties. They must be taken from the same set and their images must fall into the same set.
- The concept of binary operation is to specify the ordered pairs (a, b), (c, d) in a certain set and perform operations accordingly.
- If $a,b,c \in G$ for $a*(b*c)=(a*b)*c$, 3 +(4+1)=(3+4)+1 such that there exists $a=e*a=a*e$ specified in G.
- Corresponding to any two elements of A and one element of A ' is an operation defined from one function to the other function.
- The process of obtaining a new output by applying certain operations to the elements selected in certain sets is called binary operation.

When we look at the answers of the 4th graders who are the closest candidates to becoming teachers, although their academic language is not complete in the expressions, they have explained their ideas on the concept of binary operation. Although clearer statements were expected from this class, the results were not in this direction.

Question 2 : Is there a relationship between a binary operation and a function?

The general question posed to the candidates in the first question was followed by the question of whether there is a relationship between binary operations and functions. Here, it was expected that the candidates would base their answer to the first question on their knowledge of functions. The answers to whether the function, which is one of the most basic concepts in mathematics, is a binary operation were investigated. Three students did not answer this question among the first-year teacher candidates. "Binary operations are used in operations with functions". The answers "There are", the answer "Yes, there are". "The operations given to functions are also performed as binary operations". " It can be likened to a composite function and also a+b and y=x, both of which have double terms" were given. As a result of these answers, it was revealed that there was no clear statement that there was a relationship between binary operations and functions. When the answers given by the candidates who gave the answer "There are" as a result of their short answers are examined, it is understood that this consisted of only one answer. It is observed in the second question that the relationship between the concept of binary operation and the concept of function is not clearly stated .

The second -year teacher candidates gave the following answers:

- Both binary operations and functions have inputs and outputs.
- There is.
- There is. The function can be written using binary operations. For example, f(x)=2x+1.
- The function f (a, b) also represents a binary operation.
- It exists because there can be binary operations between functions too.
- There may be binary operations between functions. Composite functions may be given.
- There is. The operations performed within the definition and value sets defined by the functions are binary.
  is called a transaction .
- A function is a binary operation. It has inputs and outputs.
- There is a relationship, but the binary operation is not a function.
- Yes, there is.
- Yes, there is. Multiplication and addition operations can be performed on functions if the domain is the same.
- While there is an operation for the value the function takes, there is also a result for the values I give to the function.
  There is a connection .
- Yes, we are interested in sets in both cases.
- Both are related to the cluster.
- There is, but I can't explain it, we can also apply the binary operation to the function.
- A concept that must be used to obtain a function.
- There is a relationship between the composite function and the binary operation. For f(a)= b , g (b)=c, (g ∘ f)(a)=?
- Yes, functions are binary operations. In functions, an element is used instead of the unknown of the given expression.
  is inserted and a result is output. Similarly, a process has inputs and outputs.
- There is. We use binary operations to solve and write functions.
- Functions are used in the specified situations.
- Operations performed within functions are called binary operations.
- Yes, there is. In order for it to be a binary operation, the function must be defined.
- There are. Operations occur between functions. Function types for operations to occur
  should be the same .
- Binary operations are operations included in the function rule.
- Binary operations can be applied to functions within the same set.
- In both binary operations and functions, operations are performed between 2 numbers and 2 terms. 3 number terms are performed at the same time.
  we can't collect .
- The function contains binary operations. There is a value that we give to the function and this is necessary.
  By applying the operations, a new value is found. In other words, there is a relationship between them.
- Yes, when applying the function, we use binary operations in solving the equation.
- When we go to the graph drawing in the coordinate system of the function, we use binary operations to get the result.

There are also other answers besides these. Answers like " Yes, there are" were given. No explanation was provided. As can be seen, as a result of the answers given, it was concluded that the second-year teacher candidates tried to mention the analysis courses they had taken in the answer to this question, but could not establish a complete connection with the concept of binary operations. However, it could have been expected that this class of teacher candidates, who had taken courses such as abstract mathematics and linear algebra, would explain their tendencies in this question in more detail. This also reveals that the concepts of binary operations and functions cannot be expressed clearly. It is thought that both concepts are understood very well in practice, but it is observed that these concepts cannot be conveyed in the real sense in terms of expression .

Third -grade teacher candidates to the question of whether there is a relationship between binary operations and functions are as follows:

of all, six candidates did not answer. These six candidates answered the first question.

- A function is also an operation.
- A function is determined in binary operations. There is a relationship between them. The underlying concept of functions is also binary operations. Addition and multiplication of two functions.
- Both operations are a function.
- Binary operations are performed between two elements and this element is defined in a set and its result is processed into a set.
- The function is actually a transformation. $Z \longrightarrow R$ can be defined with operations . The function is defined in such a way that there is no idle element in the domain and each element has only one image.
- Functions are structures that use the principle of binary operations.
- Yes, functions also specify an operation.
- we see that one set is an element of another set. While going from the same set to the same set in a binary operation, in the function, it is possible to go to a different set.
- Binary operations are actually a function.
- Every binary operation is a function
- the function is actually a machine that changes according to a rule. What it does with binary operations is to apply the rule and reach the result. Binary operations are well-defined functions.
- A binary operation is a function that goes from a defined set to another set of values. Every binary operation is a function.
- For example, we define a star operation. According to this operation, when we take 2 elements $a,b \in R$, it can be defined as a*b=a+3b-ab. Functions also take an element from a set and perform certain transformations on that element and take it to another element. In this respect, there is a relationship between the operation and the function. The image of F(x+y) is x+3y-xy.
- The function involves binary operations.
- $A \longrightarrow B$ is a defined function explained with a Venn diagram. It takes the elements a and b to a*b. Let * be a binary operation.

There are other answers, the same as the answers like yes, it is a function. As it is understood from here, third-grade teacher candidates tried to partially explain the relationship between binary operations and functions, it turned out that they had function knowledge and binary operation knowledge, but it was observed that they could not fully express the relationship between binary operations and a function at the desired level. The general answers given by fourth-grade teacher candidates to this question are as follows:

- There is a relationship between binary operation and function. Because in the function, an element from the selected domain is applied to the binary operation, that is, an image is formed. Here, a new image set is formed. According to the elements in the domain.
- Yes, binary operations are determined between functions.
- There is a binary operation inside the function.
- f and g are defined and expressions are presented through examples.
- Yes, it contains functions within binary operations.
- Every binary operation is a function, but a function is not a binary operation.
- Binary operation defines a new element according to the operation it is defined in. Similarly, in a function, an element is created according to the situation defined in its operation.
- While a binary operation gives one result, a function also gives the next result. Binary operations can be applied inside a function.
- Every function involves binary operations.
- Yes, in both of them, an element is selected from a set and matched with another element from the other set. It reaches a conclusion. Venn diagram examples are presented.
- There is a binary operation within the function.
- the Cartesian product of two sets , we can define a function f from the set N×N (domain) to the set N (range).

also three unanswered papers . It is observed here that the fourth grade teacher candidates are clearly trying to establish a relationship between binary operations and functions. It is observed that they know the definition of function well and can comment on the definition of binary operations and they are trying to establish a relationship between the two. However, if it was assumed that the concept of binary operations was completely known conceptually, a comment could be made about whether it is a function or not, such as it is revealed that it is a function due to the following features. In general, when the answers of the teacher candidates in all grades were taken into account in the second question , it was observed that the correct evaluation rate here was low. This is because the knowledge of functions (more precisely, the definition of functions) was not developed much in the lower grades, and the part where the concept is clearly applicable was not remembered in the 3rd and 4th grades. As a result, as a result of the first 2 questions, the binary operation concepts that could be well expressed in the first question and the relationship with the function in the second question were correctly established by 75%.

Question 3 : How many operation features are there? Write their names.

Primary school mathematics teacher candidates were asked, in response to the first and second questions, how many operational properties are there? They were asked to name them. If we were to analyze the answers to the first and second questions within the same grade categories, we would first examine the candidates' answers to the previous question, whether they were related to a function, and, based on their answers to previous questions, the expected response would be to identify operational properties such as closure, associative, commutative, neutral element, and inverse element. Furthermore, in higher grades, if we're discussing two different operations, we would be expected to discuss properties such as distributive properties. The answers given by first-year teacher candidates to this question are as follows:

- Dispersion, unification, change
- Mutable property, combinative property, dispersive property
- Dispersion property, absorbing element, neutral element
- Commutative property, simplification, neutral element, absorbing element

- Mutable property, combinative property, dispersive property
- Disintegration, unification
- Distributive property in multiplication, associative property in multiplication, neutral property in addition and multiplication
- Replacement
- There are two.

The answers are given. Two students left this question unanswered.

When we analyze the answers of first-year prospective teachers, it is understood that the prospective teacher who gave the answer "there are two" actually meant a situation related to addition and multiplication. Another prospective teacher wrote "substitution" and it turns out that this is not a feature but he could not express it. Another prospective teacher said "simplification" and was not aware that simplification is not a feature and was generally aware of the parts of an operation that it should have certain features at a medium level, but it was noticed that there was no ordering whole, the concept of the operation here was not fully understood and they listed the features randomly. We believe that this perspective will reach higher levels as we take algebra courses towards the upper grades for this question.

Second -year teacher candidates are as follows:

- Mutable property, neutral element
- There are five of them: the property of change, the property of neutral elements, the property of union, the property of distribution over each other, and the property of identity elements.
- Exponential expressions from left to right (first multiplication and division, then addition and subtraction)
- Properties of operations on integers: commutative, distributive, associative
- Neutral element property, identity element property, distributive property, bracketing property
- Distributive property, inverse element property, associative property, commutative property, identity ary property, neutral element property, closure property
- Commutative property, associative property, distributive property, identity element property, inverse element property
- The commutative property has different properties for each operation. For example, while addition has the commutative property, subtraction may not.
- Composition, distributive, inverse element, identity, change
- identity, change, disintegration
- Distributive property, commutative property, combinative property
- Distributive property, commutative property, combinative property
- Dispersion, union, neutral element, engulfing element, reverse element
- Mutable property, combinative property, dispersive property
- Associative property, distributive property from right or left
- Mutability property, associative property, neutral element property, closure property
- Mutational property, combinatory property, distributive property, neutral element property, identity element property
- Mutational property, combinatory property, distributive property, neutral element property, identity element property
- Five: neutral element, inverse element according to addition and multiplication, identity element property, distributive property
- Distributive property, associative property, closure property, identity element property
- There are 5-6 answers like change, merger, dispersion.

- Merger and dissolution
- There are five of them: the property of being defined, the property of being distributed, the property of being a identity element, the property of being an inverse element, and the property of being associative.
- Distributive property of multiplication on addition from left and right, commutative property of addition and multiplication
- Displacement, neutral element, common factor, identity element
- Displacement, dispersion, unification
- Change, disintegration, unification
- Change, disintegration, unification
- Change, disintegration, unification
- Change, disintegration, unification
- Change, disintegration, unification
- Dispersion, union, identity, change, inverse element

Apart from these, there are four answers in the other answers as the properties of addition, properties of multiplication, properties of addition, change, distribution, properties of multiplication, change, distribution, combination. In many answers other than this, interpretations were made as distribution, change, neutral element, identity element. Apart from this, we had a teacher candidate who wrote a feature as the feature of parentheses as different answers. When looked at in general, it was shown that the answers given by the 2nd grade teacher candidates compared to the 1st grade teacher candidates gave correct answers to the features of operations at approximately 75% levels. This is also attributed to the fact that these students took the linear algebra course and, more importantly, the abstract mathematics courses and these subjects were covered in these courses. Here, by looking at the answers in the 1st and 2nd questions, we see that the statements in the 3rd question are more correct, for example, the concepts in the 1st and 2nd questions are binary operations and functions, and the candidates who could not explain the concept of binary operations very clearly but gave correct answers in the features of operations. This shows that the power of interpreting the subject abstractly is low, but certain expressions can be used as features and information.

o One student stated, "The operation is performed between well-defined sets, and the operation has the closure property." Another student commented, "We need to work on the same set, and the result of the operation must also be in the same set," rather than specifically addressing the properties themselves.This may have been due to a misunderstanding of the question. Six other students mentioned three or four properties but stated that the properties of the operation were correct. All the remaining students were able to write all the properties. Two students also used mathematical notation. Because this was an exercise implemented while they were already taking algebra, it was observed that they gave a very high rate of successful answers, considering their knowledge of the relationships between elements in algebra classes, especially the algebraic structure of groups. Here, the third-year prospective teachers' answers to questions one and two, as well as to the third question, showed a similarly high rate of response as in the second grade.This was an indication that the concept could be expressed correctly. The responses of the 4th-grade preservice teachers to the question "How many properties of operations are there?" were quite satisfactory. Only one student mentioned two properties. One student responded, "They must be defined on a set.". All other students provided either an incomplete or explanatory description of the properties of operations. This demonstrates that students have provided correct answers to these concepts, which they have used in solving problems and applying their theoretical knowledge in all algebra courses they have taken over the past four years, as well as in many pure mathematics courses that use operations.

In parallel with the correct answers they provided for questions 1 and 2, it was also observed that the same students were able to express the concepts correctly. Generally, when the students' responses across the 4th grades were examined, it was observed that they were able to express the properties of operations correctly as they progressed to higher grades. This demonstrates that the courses they have taken have enabled them to express the concepts in this subject correctly.

Question 4 : Write down the operations you know.

In the following section, by writing the operations you know in the fourth question, it will be measured whether the answers they gave in the first three questions can be answered here correctly and in the following sections, the students will now have more knowledge-oriented questions and the study continued with questions that are actually aimed at gradually reminding the concept of binary operations by gradually measuring the level of the questions. In response to the fourth question of our study , which is the question of writing the operations you know, the answers given by the first-grade teacher candidates were generally addition, multiplication, subtraction and division. One student wrote addition and multiplication and one student left the question unanswered . Here, it seems that in general, the knowledge of four operations was used intensively in secondary education and before, where the concept of four operations was explained. However, the knowledge that ordinary operations are only addition and multiplication here will be the notations that we expect the students to develop after taking algebraic courses . We expect that the knowledge that subtraction is related to addition and that the additive inverse of an element is subtraction will be learned. When we look at the answers of the first-grade students, we see that the subject of four operations is used.

The second -year teacher candidates to this question, it is seen that 20 people wrote addition and multiplication. Here, it shows that these are ordinary operations (basic operations). In the other answers, there are 3 people who stated binary operations as addition and multiplication and also scalar operations. In one category, an attempt was made to explain the operations with examples. And two students mentioned operations with vectors on their analytical knowledge. It is seen that the answers given by 39 people in the second-year teacher candidates are satisfactory compared to the first-year teacher candidates and in fact, according to the answers given by the second-year students in the 1st , 2nd and 3rd questions, it is observed that they gave a clear answer to the operations when we asked them to write the operations they know in stages of their knowledge of operations.

The third grade teacher candidates to the question of answering the operations you know is as follows: 2 students mentioned four operations (addition, subtraction, multiplication, division), and 1 student presented an equation giving an example. All other students (21 people) wrote that addition and multiplication are operations, and those who stated them as basic ordinary operations stated that division and multiplication are not binary operations. This shows that the students emphasized this concept in algebra class and analyzed it well.

In the fourth grade teacher candidates, 7 of the 15 candidates mentioned 4 operations, 7 mentioned binary operations, and one student gave an example. What is seen here is that since pure mathematics courses were not taken in the 4th grade and the algebraic courses passed remained in the lower grades and since the

students were now studying for the KPSS exams again and thought that the important thing was to solve questions, they actually reflected the concept of binary operations here to many operations. When we say binary operations, many operations can actually be defined, but we will give addition and multiplication as basic ordinary operations that we know, and in which sets we can give this, for example, if there is a set that has not been mentioned so far, we can say that this is the set of real numbers. But other than this, similar operations can be defined in many number sets and different sets. In fact, operations of different types can be defined instead of number sets. This is why such notations have been used a lot in different courses such as algebra, linear algebra2, linear algebra1, and abstract mathematics.

Question 5 : Solve the equation $3x+4=13$ for $x \in \mathbb{Z}$.

In the following questions, especially in questions 5, 6, 7 and 10, it will become clear whether they can evaluate the notations in questions 1, 2, 3 and 4, as they need to perform elementary operations .

$3x+4=13$, $x \in \mathbb{Z}$ for $x \in \mathbb{Z}$. In answer to the question "Solve the equation":

$3x+4=13$ for $x \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow 3x+4+(-4)=13+(-4)$ (1)

$\Rightarrow 3x+0=9$ (2)

$\Rightarrow 3.x=9$ (3)

$\Rightarrow \frac{1}{3}.(3.x)=\frac{1}{3}.9$ (4)

$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}.3\right).x=\frac{1}{3}.9$ (5)

$\Rightarrow 1.x=3$ (6)

$\Rightarrow x=3 \in \mathbb{Z}$ (7)

Teacher candidates, the fifth question is to solve the equation 3x+4=13 for x ∈ Z. The expected answer from the students is to solve the problem in 7 steps as above. First of all, when we write the equation 3x+4=13, we say that in the first step we add all sides of the equation from the right with -4, which is the additive inverse of four in integers, in order to leave the expression 3x alone. In the second step, when we add 4 and -4 on the left side of the equation, we obtain the integer 0. This means that when we add a number with the additive inverse of that number, since it is an neutral element in integers, we find the neutral element of the 0 element in integers according to the addition operation of the side integers. In the second step, we obtain the equation 3x+0=9 in this way. In the third step, when we add the element 3x and the element 0, we see that there is a 3x element. In the fourth step and as our fourth explanation, in order to leave the x element alone, we add all sides of the equation from the left with the multiplicative inverse of 3, and here we write the part as multiplicative instead of additive . If we pay attention here, we also use the associative property. In the fifth step, we used the associative property of 1/3 and 3, and on the right side of the equation, we multiplied 1/3 and 9. Here, we could have written the number 9 as the product of two numbers as 3.3 and said that the neutral element is 1 according to the multiplication operation of 1/3 and 3 in Z, but let's pay attention here not to the element as Z, but to the fact that the multiplication here is in real numbers (R) because 1/3 is not an element of integers. As a result, the equation 1. x =3 has come from the operation done in the sixth step. Here, we see that when we

multiply the x element by 1, x will come out because 1 here is the identity element in the multiplication. Therefore, we find the integer number 3.

In the answer to this question, 9 out of 11 first-year teacher candidates found the answer as 3. The important thing here is that when we asked how many binary operations there were here and how we should solve a solution, there were those who quickly said 3. We expect the problem we solved in 7 steps to be solved in at least 3 steps. Only one person from the first-year teacher candidates solved this question in 3 steps.

Second -year teacher candidates finding the answer as 3 in this question is over 90% . Here, the way they answered the question is that the number of people who solved it in 5 steps is 1 person, the number of people who solved it in 4 steps is 5, the others solved the questions in 3 steps and there were also those who directly answered 3. Here, it is seen that the second-year teacher candidates are more successful than the first-year teacher candidates in showing how to use the elements properly, how to use the conjunction in between, and how to move from one equation to another, according to the answers they gave in the first 4 questions.

The third and fourth grade teacher candidates are examined, almost 100% of them gave the answer x = 3 and it was observed that some teacher candidates passed 4 to the right and even showed this with an arrow. Here, what we told the teacher candidates in the lessons was that the number 4 here does not pass to the right side, but we add the additive inverse of 4 to each side of the equation. There is no such thing as passing any number to another side. However, while explaining this expression here, we can also attribute the problems that many of us experienced in mathematics in the lower grades to this. 3^{-1} It was seen that the third and fourth grade teacher candidates solved the question in 5 stages and even wrote instead of 1/3. Here, it was observed that perhaps this expression does not exist in integer numbers, so 3^{-1} they also used i as a symbol. The answers given by the first and second grade teacher candidates are more satisfactory. Here, the equation given in the 5th question is a conceptual error, that is, the conceptual error is due to the fact that it passed the element on the left to the right. The important thing here is that the answer x=3 is satisfactory. There is a very simple equation here, but rather than solving the equation, one should know the concept that the equation can be solved with the correct method.

Question 6 : i) 3+2 =? ii) 3+ 2+ 1=?

In question 6, in option i it is written as 3+2=? and in option ii it is written as 3+2+1=? Here, after asking information about binary operations in the first 5 questions and asking them to solve an equation, it is intended to make students think that asking a very easy question may be a surprise as an expectation . Now, when we add the numbers 3 and 2, we see that the answer is 5 when we add them in real numbers, integers or in the relevant number set, but it is not clear which number set we are working on here. Or it is not clear that we are working on any number set. For example, let there be only 3 and 2 in this set and let the operation be defined as follows. Let the sum of two elements be 2 again. Such a re-definition can be made or different types of binary operations can be defined. Therefore, if we look at the addition operation here as an ordinary operation in real or integers, of course the answer is expected to be 5. Apart from this, students are also expected to write such an explanation in this question. In option II , 1 is added to the number 3+2 in the same way. In mathematics, 3 numbers are never added side by side . It should be put in parentheses as there is a

misconception in an expression written in this way, either we add 3 and 2 first or we add 2 and 1. When we say binary operation, 3 elements are not added. In the concept of binary operation, two elements will be added. Therefore, we need to add 3+2 here and add 5 and 1. For this, we need to use the associative property here. Therefore, a student who mentioned the associative property in the question of how many properties of the operation are in the above questions is expected to pay attention to this here. As a result, it should have been given that when we add 3 numbers in this way , it will not be added in this way and we should use the associative property and that the binary operation can add two elements. When we evaluate the answers to this question, it is seen that the answers 5 and 6 are mostly given or the commutative property is used, regardless of the class. However, the associative property should be emphasized here rather than the commutative property. As we go from lower grades to upper grades, we see that the logical answers given by all grades to the questions increase, but it is still seen that the exact answers desired are not given here. However, it is observed that in the 3rd and 4th grades, expressions close to the expressions explained above are given. This is pleasing that the upper grades give such answers to such equations after taking the algebra course in this sense.

Question 7 : A= $\{1,2,3\}$ **, B=** $\{3,4,5\}$ **A+B=? A. B=?**

For the question A+B= ?, AB=? where A={1,2,3}, B={3,4,5}

$A+B=\{a+b|a\in A,\ b\in B\}$and $A.B=\{a.b|a\in A,\ b\in B\}$ clusters must be known.

It should be written as A+B={1+3, 1+4, 1+5, 2+3, 2+4, 2+5, 3+3, 3+4, 3+5} and it should be noticed that there are 9 elements in the set. Here, it should be noticed that it is not possible to make an inference about whether the element 1+3 is 4 or not. For example, if the sets A and B are subsets of Real numbers (integers, rational numbers, natural numbers), and if the addition operation between A+B is an addition operation between sets, but the + operation between the elements of this set a+b is an ordinary addition operation in the relevant number set, the elements of the set A+B would have 5 elements as {4,5,6,7,8}. Here, it is necessary to pay attention to the importance of the binary operation and its place of use. Therefore, it is an important detail that there may be a misconception about the work. On the other hand, for the set AB, there must be the set AB={1.3, 1.4, 1.5, 2.3, 2.4, 2.5, 3.3, 3.4, 3.5}.

If we interpret it similarly as in the set A+B, we can say that the set AB, that is, the set A and B, can be written as a new set AB with an operation and each element can be written as the product of the elements, with the element on the left taken from A and the element on the right from set B. Here, it is obvious that if there is no binary operation between the elements, the elements will be like 1.3, 1.4, if there is, it will be in the form A.B={3,4,5,6,8,9,10,12,15}. Since there is no specific explanation here, let's call the sets A+B and AB respectively.

{1+3,1+4,1+5,2+3,2+4,2+5,3+3,3+4,3+5}

{1.3,1.4,1.5,2.3,2.4,2.5,3.3,3.4,3.5} should be written.

In response to this question, only 1 student from the 2nd grade out of 50 students from the 1st and 2nd grade said that if the sets A and B are subsets of Real numbers, the answer will be a direct real number, otherwise it

can be normal. It is observed that the answers of the other 49 students are similar and that the sum of 1 and 3 can be 4. In addition, it was observed that 2 students thought of the multiplication operation as Cartesian product and wrote it as an ordered pair . Apart from this, it was observed that the 3rd and 4th grade teacher candidates added the elements one by one or multiplied the elements separately in their answers to this question. Apart from this, there were also verbal answers given, but 5 students answered the required statement correctly and said without comment that there was no result. This shows that the awareness levels of 3rd and 4th grade students are higher here than those in lower grades, but when the answers given by all prospective teachers are observed, it turns out that this is the question with the most misconceptions when compared to the previous 6 questions.

Question 8 : Can the neutral element and the identity element be the same? Explain.

Another question directed to the teacher candidates was the question of whether the neutral element and the identity element can be the same in the eighth question. In contrast to this in the first 7 questions, here the neutral element feature, which is one of the features of the binary operation, is directly emphasized. And whether it is related to the previous ones or not. It has emerged that they should think according to the side they gave in the first 7 questions. First of all, it is clear that the student should know what the neutral element is. The neutral element feature requires the existence of the neutral element feature of a binary operation. For example, if we put a relationship between the neutral element in integers and the addition operation, we can say zero. However, the set of integers is only one of many number sets and the addition operation is only one of the operations that can be written on this set. More than one binary operation can be defined on the set of integers, such as the addition operation. When looked at in this way, the neutral element does not always have to be zero, but it is clearly observed that the neutral element here is zero in basic ordinary operations that are looked at as obvious . Similarly, it is clear that the multiplication operation in the set of integers does not have a neutral element. Here, when we use the multiplication binary operation for the set of real numbers, the expression that comes out here will be 1, the neutral element. In summary, let's say that the addition and multiplication operations are defined in the set of real numbers. The neutral element according to the first operation is called the neutral element, and the neutral element according to the second operation is called the identity element. Therefore, in order to be able to talk about both the neutral element and the identity element on a set, there must be 2 operations on this set, and both of these 2 operations must have separate neutral elements. For example, the neutral element of the addition operation on the set of real numbers is zero. Similarly, the neutral element of the multiplication operation is one. Therefore, zero and one are the neutral elements and identity elements for this set, respectively.

As a result, the answer to the question of whether the neutral and identity elements will be the same is expected to be that they will not be the same and if they exist, they will emerge as a result of different processes. The answers given by first-year teacher candidates to this question are as follows:

- In multiplication, the identity element and the neutral element are the same. At least in multiplication they are the same.

- The neutral element is one in the multiplication operation. The result is the element that entered the operation with neutral element
- It is not always the same.
- The neutral element varies from operation to operation. An element is an neutral element in multiplication and an effective element in addition.
- It varies according to the operation. In addition, zero is both a null and a identity.
- An neutral element is an element that has no effect on the result of the operation. The result value will be the same according to the value given to the identity element.
- Neutral element 0, identity element 1
- They are the same thing.

The other candidates did not respond. It can be seen here that the distinction between neutral elements and identity elements is not very well recognized at the first-year level.

second -year teacher candidates, the different types of answers given are generally as follows.

- The neutral element and the identity element can be the same
- The neutral element varies according to the operation properties. The neutral element of multiplication is one and the neutral element of addition is zero.
- The inactive element does not make any changes to the process. It is explained with an example below.
- In the multiplication operation, the neutral element and the identity element are the same, they are both one.
- The neutral element is zero in addition and one in multiplication. The neutral element and the identity element are the same only in multiplication and division.
- It won't be the same.
- The neutral element and the identity element are different concepts. The neutral element does not change the result of the operation and has no effect.
- The same may be true for multiplication, the operation is neutral and the identity element is one.
- Maybe, in the operation 1.1=1, one is both a neutral and a identity element.
- There may be cases where the function reaches the same result.
- The identity element and the neutral element may be the same.
- No, it is not the same. The neutral element is zero, for example, in addition. It does not affect the addition operation.
- The neutral element and the identity element can be the same. When we consider the known multiplication operation, the neutral element and the identity element are also one.
- There are times when it is the same.
- In the addition operation, the neutral element is 0+a=a, a+0= a. In the first one, the identity element is said to be from the addition operation.
- It may be, For example, zero, which is an ineffective element according to addition, is not a identity element.

- It is not, but it varies according to the process. The neutral element never affects the process, while the identity element can affect the process.
- The neutral element is the element that does not change the result of the multiplication operation.
- No, it depends on which process it is used in.
- The identity element of a multiplication operation is zero, the identity element of an addition operation is zero. These two, the neutral and the identity element, are the same, they are the same thing.
- Depending on whether the operation is any operation, the neutral element and the identity element will be the same.
- It may be the same, but for different operations, the neutral and identity elements of the same operation are not the same in my opinion, and examples such as triangle and square are given.
- It may be the same. For example, it is said that 1×1 neutral element and identity element are one.
- Shown through example.

Other answers were interpreted as similar to these answers and one teacher candidate did not respond. Here it is seen that the 1st graders tried to explain this information by commenting, especially after taking an abstract mathematics course, but it was still noticeable that the concept here could not be clearly expressed. When the first 7 questions of the close answers were investigated, it was revealed that they were written more consciously. However, it was revealed that the answers were not at the desired level, that is, the expressions here were neutral in binary operations and they had misconceptions in identity element concepts.

The different types of answers given by 3rd grade teacher candidates to this question are as follows:

- Yes, the neutral element is called the identity element.
- It does not have to be the same in every process, but there are processes where it is the same. Depending on the process , the identity element and the neutral element may differ.
- We will process an ineffective element in a set according to a given operation with an element from that set so that the result is the same element.
- It happens in the group, but not in the ring.
- It will be the same.
- a .b =a, a+b =a
- The neutral element and the identity element are the same in the group. The neutral element in the ring is related to the 1st operation. The identity element is the neutral element of the 2nd operation.
- The neutral and identity elements are different in the ring because the operations are different and cannot be the same. In the ring, there is a neutral element according to the first operation and a identity element according to the second operation.
- Yes, it is possible. In multiplication, the neutral and identity element can be 1.
- In rings, the neutral and identity elements are not the same.
- It may be the same, but it is very unlikely to happen.

- In rings, the first operation is defined as the neutral element, while the second operation is defined as the identity element.
- The element that does not change the result of the operation is the neutral element of the zero operation. The element that indicates a value to a certain extent is called the identity element. The two are different things.
- Sometimes it's the same, sometimes it's not. It depends on which process you're in.
- There are cases where the neutral and identity elements are the same. In general, they are not the same.

And one candidate left the question unanswered. It is seen from the answers given in this way that it has been revealed that the students took the algebra course and followed the course in the algebra course but they talked about algebraic structures. It is seen that they made comments according to the definitions of group structure and ring structure. It is revealed that the answers given are more mature than the 1st and 2nd graders but the students still have misconceptions about these subjects.

The different answers given by 4th grade teacher candidates to this question are as follows:

- The neutral and identity elements are the same.
- They can be the same in some operations, but their definitions are not the same.
- While it is the same in the group, it is not the same in the ring.
- No, it will not be the same.
- The neutral and identity elements are the same thing. When an element is processed with its opposite in a binary operation, the identity element, that is, the neutral element, is obtained.
- The neutral element is that when the number is processed, that element appears as the same.
- For the neutral element a*e=e*a=a
- It is the same, if we process the number with its inverse element, we reach the neutral element, the identity element.
- Maybe, but when it comes to multiplication, the identity element is used more, and in addition, the neutral element is used more. For example, in multiplication, 1.
- While it is the same for the group, it is not the same for the ring. We use the identity element in the multiplication operation, I don't think the two are the same.
- The neutral and the identity element can be the same in multiplication.

One teacher candidate left this question unanswered. It was seen that the 4th grade teacher candidates gave answers that were influenced by the algebra course, similar to the 3rd grade teacher candidates. However, it was revealed that they still had misconceptions.

When the answers of all prospective teachers are examined, this 8th question is the second question in which they had the most misconceptions out of the first 8 questions so far. It is clearly seen that they had misconceptions in questions 7 and 8.

Question 9 : Does every element have an inverse? Explain. For example, does the element 3 in the set of real numbers have an inverse? Show.

The first eight questions measured the skills of the prospective teachers in questions on binary operations. Questions such as the properties of the operation, the neutral element, the types of binary operations, and the priority of operations were asked. According to the grade levels they gave, the questions in the ninth question were asked as "Does every element have an inverse, explain", for example, does the element 3 in the set of real numbers have an inverse, show. The answers given by the 1st grade prospective teachers were generally as "Not every element has an inverse". First of all, in response to the question of whether every element has an inverse, it is necessary to know that the neutral element must exist and with which operation an element has an inverse. If we are working on ordinary addition on the set of real numbers, the inverse of the element 3 will be -3, corresponding to the neutral element 0. According to ordinary multiplication, the inverse of the element 3 will be 1/3 because the neutral element, that is, the identity element, is 1. Such a distinction needs to be made. Apart from this, it needs to be known that there are not only ordinary addition and ordinary multiplication operations in the set of real numbers towards the upper grades, but there may also be specific different operations. This question aims to clearly express expressions such as neutral element, operation properties, operation ability on previous questions that are intended to be measured. The answer given to this question by 1st grade teacher candidates is generally that not every element has an inverse. Apart from that, it is generally observed that the answer of -3 according to addition and 1/3 according to multiplication is given more than 50%. When examined carefully here, 3 students gave an answer such as there is no inverse of zero in real numbers. Properties related to 1 are mentioned. In other words, it is observed that there is a conceptual confusion here regarding the neutral element being before the inverse element property. According to the wrong answers given in question 8, it is the same, it is not the same or the answers in question 9 are similar. Therefore, it is revealed that the majority of students have problems with the inverses of the elements in the set of real numbers. However, when the answers given by the students in the first 2 questions are taken into consideration, it is observed that their answers in question 9 are more successful than their answers in the first 8 questions. It is observed that they realized that the relaxed answers they gave in the previous questions were more consistent here and that the question forms in the previous questions were aimed at improving themselves and they tried to reflect their knowledge here.

The answers given by the 2nd grade teacher candidates to this question were a bit more organized than the 1st grade students. Here, it is observed that there are students who use the expression 3^{-1}. It is also possible to observe that the expression -1 in the expression 3^{-1} is a symbol, a representation, especially in courses such as abstract mathematics, and that some students noticed this. The answers given in general were as follows: According to the addition operation, the opposite of 3 in real numbers is -3, according to the multiplication operation, the opposite of 3 in real numbers is 1/3. Here, in the question of whether there is an inverse, approximately 60% answered that there is an inverse, and 40% answered that there is no inverse. Those who said there is an inverse also provided explanations, and those who said there is no inverse also provided explanations. This also shows that it can be said that it is the result of the studies related to operations in the

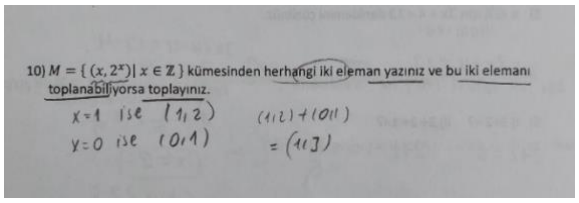
abstract mathematics, analysis and linear algebra courses that the students have taken here. However, it is still observed that the clear answers in certain concepts do not fully meet the expectations.

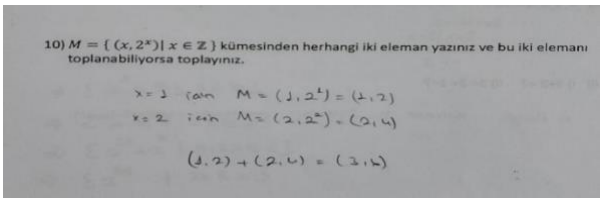
It was deemed useful to evaluate this question together with the 3rd and 4th grade teacher candidates because the answers given were generally similar. It was observed that the pure mathematics courses taken at this grade level were taken equally in both grades and there was no pure mathematics course in the 4th grade, so the 4th grade teacher candidates gave similar answers compared to the 3rd grade teacher candidates. Here, it was observed that slightly more positive answers were given compared to the 2nd grade teacher candidates. It is noteworthy that conceptual expressions were used here, whereas these concepts were not encountered in the lower grades. Again, 3^{-1} it was seen that the symbol was used for both addition and multiplication. It can be said that these results and answers were satisfactory. Here, there were also teacher candidates who mentioned the difference of the neutral element in the binary operation in question 9 of the 3rd and 4th grade teacher candidates, and thereupon, it was generally commented that the inverse of 3 is -3 according to the addition operation and 1/3 according to the multiplication operation, and it was satisfactory that there were teacher candidates who also mentioned operations in a special way.

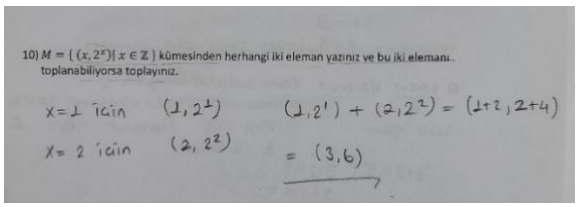
Question 10 : $M = \{ (x, 2^x) | \ x \in \mathbb{Z} \}$ Write any two elements from the set and add them if they can be added.

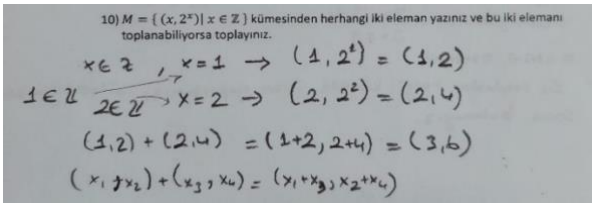
When we come to the last question of this study, many features and operation skills related to binary operations were mentioned in the first 9 questions. Finally, comments were asked about the neutral and inverse element in questions 8 and 9. Finally, a set was given and they were asked to write 2 elements from this set. A set was written where the set here is an ordered pair and the element in the 1st place is related to the element in the 2nd place. Here, it was stated that the expected 2 elements can be written, if these two elements can be added, add them. However, it was expected that the students would notice the emphasis that a binary operation was not defined on the set M. An addition operation needs to be defined on the set M. There needs to be a definition of how two elements can be added in an ordered pair, and it was necessary to pay attention to the fact that the 1st and 2nd components were written in a way that is connected to each other when writing them. Here, it is observed that the teacher candidates gave a low response compared to the answers they gave in the first 9 questions, and here, finally, as a result of the 10th question, we understand that we can observe the result that students have complete misconceptions at every grade level . In the 1st grade teacher candidates, it was almost not easy to even get an element from this set and it was almost impossible to add both elements. In the 2nd grade teacher candidates, there were many students who got 2 elements from this set, but very few answers emerged regarding the elements here not being able to be added . In the 3rd grade teacher candidates, two elements from the set M were generally correctly selected and the elements usually taken were (1,2), (2,4) and when they added them, many students responded in this way by saying that the element (3,6) was not in M. In this way, it is correct, but they had to state that the addition between the two was not an ordinary addition and that no addition was defined here. In this sense, it is observed that this was not taken into consideration in the 3rd grade teacher candidates and this explanation was almost never made. However, they responded that a counterexample can be given when there is no proof of a statement in algebra lessons. However, it was

expected that the addition operation in between was not defined, that is, they were expected to state whether there was a binary operation here. Finally, it is observed that the 4th grade teacher candidates gave similar answers to the 3rd grade teacher candidates and that the ratio is almost close. When looked at in general, it is observed that two elements can be taken from the set in Question 10, but the two elements are usually added directly and it is said that the answer of that element is not in this set in the 3rd and 4th grades. It is expected to emphasize that the fact that there is no element in this set does not actually have a closedness property, therefore such an operation must be defined and as a result of this operation, it could be said that the 2 elements taken from the set M are again in the set M. If we pay attention here, no teacher candidate has gone to a suitable operation definition method. Therefore, as a result of the 10th question, we see that the positive and negative answers given in the first 9 questions cannot be applied to the 10th question, that is, when the element is taken in real numbers or integer numbers, it can be done, but when working on the ordered pair , these expressions do not fully overlap. Below are the photographs of the answers given by a few prospective teachers.









DISCUSSION AND CONCLUSION

This study aims to examine the misconceptions of primary school mathematics teacher candidates regarding algebraic binary operations. In the study, 10 different open-ended questions were asked to the candidates in order to reveal their misconceptions about the concept of binary operations. Comments were made on the results that emerged due to the fact that the mistakes made by the teacher candidates were not noticed due to their misconceptions. Therefore, such a study was presented to all stakeholders in terms of the points that teacher candidates should pay attention to when teaching the subject of “operation” in the class level they are teaching. When reviewing the literature, studies on mathematical misconceptions were conducted through the lens of learning, teaching, and subject matter. This study theoretically addressed the topic of misconceptions and offered recommendations to facilitate teaching for prospective teachers during their teaching careers. Because it was not similar to existing studies, it was not used in the literature for comparison. As a result; when all class levels based on questions were evaluated in general, the rate of candidates who stated a conceptual opinion for the first question was around 15%. When all classes were taken into consideration, it could be stated that the rate of those who stated a conceptual opinion was low. Since the first question asked to understand the concept of binary operations was open to many answers, it was concluded that the answers were appropriate for the class levels in the first stage. The rate of correct answers that were not at the expected levels in the concept of binary operations in the first question was

around 20% in the second question. In this context, it is clearly seen that the candidates had conceptual misconceptions about the concept of binary operations in the first two questions. When the answers to the third question are considered, it is clearly observed that they did not experience misconceptions, but when evaluated together with the first and second questions, it is clearly observed that the candidates could not fully express the subject conceptually. In the fourth question, it was observed that the candidates mostly gave "ordinary addition" and "ordinary multiplication" as examples to the question "Write the operations you know". When the candidates who answered in this way were evaluated according to the answers they gave in the first three questions, it was observed that the answers given with different concepts in the first three questions were consistent in the 4th question. When the first four questions were taken into consideration and evaluated, it can be said that the candidates had misconceptions about "binary operations".

As a result of the evaluation of the next four questions in the data collection tool, it was determined that the candidates had misconceptions the most in the sixth question. When the answers given by the candidates one by one in all eight questions were considered, it was revealed that the concept of binary operations was not fully formed in the candidates, and in the candidates whose concept of binary operations was fully formed, the other operation features could not be fully expressed. Finally, in the section "Can the neutral element and the identity element be the same?", references were made to the concepts of "group" and "ring" in the algebra course. Apart from this, examples were tried to be given from different pure mathematics courses where the concepts of the neutral element and the identity element were used, but it was observed that the candidates could not explain in which set and with which operation they were given and in detail. For the last two questions, it was observed that there was a difference between the first two grades and the last two grades of teacher candidates, and the reason for this was interpreted as the mathematics courses taken were better reflected in the ability to operate.

REFERENCES

Ay, Y. (2017). A review of research on the misconceptions in mathematics education. M. Shelley, M. Pehlivan (Ed.), *Education research highlights in mathematics, science and technology*. (ss. 21-31). Isres Publishing.

Baştürk, S. & Dönmez, G. (2011). Matematik öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konusuyla ilgili kavram yanılgıları. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 5(1), 225 - 249.

Buyukozturk, S., Kılıc-Cakmak, E., Akgun, O. E., Karadeniz, S., & Demirel, F. (2016). *Scientific research methods*. Pegem Academy.

Ersoy, Y. (2006). İlköğretim matematik öğretim programındaki yenilikler-I: Amaç, içerik ve kazanımlar. *İlköğretim Online*, 5(1), 30-44. https://dergipark.org.tr/tr/download/article-file/91060

Fujii, T. (2020). Misconceptions and alternative conceptions in mathematics education. Lerman, S. (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education.* (ss. 625-627). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_114

Güveli, E., Baran Bulut, D., & Güveli, H., (2018). Matematikte kavram yanılgılarına yönelik öğretmen adaylarının bilgi ve görüşlerinin değerlendirilmesi. A. İşcan (Ed.), *Eğitim bilimlerinde örnek araştırmalar.* (ss. 419-438). Nobel Akademik Yayıncılık.

Hammer, D. (1996). More than misconceptions: Multiple perspectives on student knowledge and reasoning, and an appropriate role for education research. *American Journal of Physics*, 64, 1316-1325. http://dx.doi.org/10.1119/1.18376

Ilhan, A., & Akın, M. F., (2022). Analysis of contextual problem solutions, mathematical sentences, and misconceptions of pre-service mathematics teachers. *Internatıonal Electronıc Journal of Mathematıcs Educatıon*. 17(1), 2-14 10.29333/iejme/11470

Kshetree, M. P., Acharya, B. R., Khanal, B., Panthi, R. K., & Belbase, S. (2021). Eighth grade students'misconceptions and errors in mathematics learning in Nepal. *European Journal of Educational Research,* 10(3), 1101-1121. https://doi.org/10.12973/eu-jer.10.3.1101

Malambo, P. (2021). Implicit misconceptions in prospective mathematics teachers' reasoning about trigonometric concepts. *Contemporary Mathematics and Science Education*, 2(2), ep21011. https://doi.org/10.30935/conmaths/11054

McDonald, B. (2010). *Mathematical misconceptions*. Lambert Academic Publishing.

Özkale, A., & Memiş, Y. (2022). İlköğretim matematik öğretim programında sarmal yaklaşım yansımalarının incelenmesi. *Milli Eğitim Dergisi,* 51(234), 1031-1062. https://doi.org/10.37669/milliegitim.848842

Miles, M, B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded Sourcebook. (2nd ed)*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Mohyuddin, R. G., & Khalil, U. (2016). Misconceptions of Students in Learning Mathematics at Primary Level. *Bulletin of Education and Research*, 38(1), 133-162.

Moralı, S., Köroğlu, H., & Çelik, A. (2004). Buca Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmen Adaylarının Soyut Matematik Dersine Yönelik Tutumları ve Rastlanan Kavram Yanılgıları. *Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24(1).

Ojose, B. (2015). *Common misconceptions in mathematics: Strategies to correct them*. University Press of America.

Owusu, A., Bornaa, C., Kwakye, D., & Iddrisu, A. (2023). Pre-service mathematics teachers' errors and misconceptions of integer operations. *Journal of Statistics and Mathematical Concepts*, 1(2), 1-19. https://doi.org/10.58425/jsmc.v1i2.127

Powell SR, Nelson G. (2021). University students' misconceptions about rational numbers: Implications for developmental mathematics and instruction of younger students. *Psychology of Schools*. 58(2), 307–331. https://doi.org/10.1002/pits.22448

Satan, N., Aksakal, K., & Ay, Z. (2021). Üslü İfadelerde Yaşanan Kavram Yanılgılarının Olası Nedenleri ve Önlem Önerilerinin Öğretmen Adaylarının Görüşlerine Dayalı Olarak İncelenmesi. *Manisa Celal Bayar Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 9(1), 32-48. https://doi.org/10.52826/mcbuefd.853179

Senemoğlu, N. (2013). *Gelişim, öğrenme ve öğretim*, (23rd Ed.). Yargı Yayınevi.

Suprapto, N. (2020). Do we experience misconceptions?: An ontological review of misconceptions in science. *Studies in Philosophy of Science and Education*, 1(2), 50-55. https://doi.org/10.46627/sipose.v1i2.24

Swan, M. (2001). Dealing with misconceptions in mathematics. P. Gates (Ed.), *Issues in mathematics teaching* (pp. 147-165). Routledge.

Şen, Ş., & Yılmaz, A. (2013). Kimya öğretmen adaylarına göre kavram yanılgılarının nedenleri. *Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Dergisi* (35), 59-95. https://dergipark.org.tr/en/download/article-file/231557

Themane, K. M., & Luneta, K. (2021). Misconceptions and associated errors in the learning of mathematics place value in South African primary schools: A literature review. *Preprint Organisation*. 456(1), 1-14. https://doi.org/10.20944/preprints202105.0456.v1

Türkdoğan, A., Güler, M., Bülbül, B. & Danişman, Ş. (2015). Türkiye'de matematik eğitiminde kavram yanılgılarıyla ilgili çalışmalar: tematik bir inceleme. *Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi,* 11(2). https://doi.org/10.17860/efd.26545

Ünver, S. K., & Elçi, A. N. (2022). Opinions of pre-service elementary school mathematics teachers on misconceptions. *Research on Education and Psychology*, 6(2), 236-253. https://doi.org/10.54535/rep.1205806

Yağbasan, R., & Gülçiçek, A. G. Ç. (2003). Fen öğretiminde kavram yanilgilarinin karakteristiklerinin tanimlanmasi. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 13(13), 102-120.