T.C.

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ BOYUTLU ANYONİK SİSTEMLERDE WİGNER KRİSTALİ OLUŞUMUNDA ETKİLEŞMELERİN ÖNEMİ

ERDAL EREN UĞURCUKLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FİZİK ANABİLİM DALI

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ali İhsan MEŞE

EDİRNE-2015

T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Mustafa ÖZCAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Serap DALGIÇ

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Ali İhsan MEŞE

Tez Danışmanı

Bu tez, tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından Fizik Anabilim Dalında bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Prof. Dr. Ş. Erol OKAN	
Doç. Dr. Afif SIDDIKİ	
Yrd. Doç. Dr. Ali İhsan MEŞE	

T.Ü.FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİZİK YÜKSEK LİSANSPROGRAMI

DOĞRULUK BEYANI

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin kaynak gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

05/06/2015

Erdal Eren UĞURCUKLU

Yüksek Lisans Tezi

İki Boyutlu Anyonik Sistemlerde Wigner Kristali Oluşumunda Etkileşmelerin Önemi

T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı

ÖZET

Bu çalışmada, iki boyutlu bir anyonik sistemde Wigner kristali[1] oluşumu parçacıklar arası farklı etkileşme tanımlamaları altında iki boyutlu bir anyonik sistemde sayısal olarak incelenmiştir. Wigner kristalinin oluşumunda sistemin bozonik ve sanki bozonik özellikler göstermesine bağlı olarak yapının fiziksel özelliklerinde meydana gelebilecek olan farklılıklar ve benzerlikler incelenmiştir. İki boyutta harmonik olarak tuzaklanan parçacıkların konumları ve taban durum enerjileri varyasyon yaklaşıklığı altında tek parçacık dalga fonksiyonu Gaussian formda alınıp optimizasyon rutinlerinden faydalanarak parçacık sayısına bağlı olarak hesaplanmıştır.

Yıl : 2015

Sayfa Sayısı : 39

Anahtar Kelimeler: Anyonlar, Wigner Kristali, Etkileşmeler, Varyasyonel Metot

Master Thesis

The Importance of Interactions in the Formation of Wigner crystal at Two-Dimensional Anyonic Systems

Trakya University Institute of Natural Sciences

Department of Physics

ABSTRACT

The Scope of this thesis is to investigate the anyonic systems regime and to seek fort he effect of interaction potential on the formation of Wigner Crystal[1], in detail. We have investigated the effect of statistical interactions and the effects of particle number have been explored. The effect of the anionic defination on the Wigner Crystalization has been investigated by a phase factor that is added to the single particle wave function described by a Gaussian form. By doing so, the spatial distribution and the ground state of the particles have been examined as a function of the number of particles via the variational calculation techniques utilizing the optimization routines.

Year : 2015

Number of Pages : 39

Keywords : Anyons, Wigner Crystal, Interactions, Variational Methods

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren sevgili hocam Yrd. Doç. Dr. Ali İhsan MEŞE' ye yine kıymetli tecrübelerinden faydalandığım hocalarım Prof. Dr. Ş.Erol OKAN, Doç. Dr. Afif SIDDIKİ, Doç. Dr. Özgür MÜSTECAPLIOĞLU, Doç. Dr. Fikret İŞIK, Yrd. Doç. Dr. Mehmet Akif SABANER, Dr. Engin ÇİÇEK, Dr. Deniz EKŞİ ve Fizik bölümündeki diğer değerli hocalarıma, arkadaşlarıma ve manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan çok değerli aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
İÇİNDEKİLER iv
SİMGELER VE KISALTMALAR v
ŞEKİLLER DİZİNİ vii
BÖLÜM 1: GİRİŞ 1
1.1.Bose -Einstein Yoğunlaşması (BEY) ve Bose-Einstein İstatisliği 2
1.2. Anyonlar ve Anyon İstatisliği 9
BÖLÜM 2: ÇOK PARÇACIKLI SİSTEMLER 14
2.1.Çok Parçacık Problemi 14
BÖLÜM 3: BULGULAR VE SONUÇLAR 20
3.1.Bulgular 20
3.2.Sonuçlar 33
ÖZGEÇMİŞ 39

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan simgeler ve kısaltmalar aşağıda açıklamaları ile verilmiştir.

Simgeler	**Açıklamalar**
λ_{dB}	De BroglieDalga Boyu
h	Plack Sabiti
m	Parçacığın Kütlesi
k_B	Boltzman Sabiti
T	Sıcaklık
λ	Dalga Boyu
$\hbar$	İndirgenmiş Plack Sabiti
Ψ	Dalga Fonksiyonu
υ	Anyonik Parametre
V	Hacim
ρ	Yoğunluk
$\bar{n}_i$	T sıcaklığında ε_i Enerji Seviyesindeki Dağılım Fonksiyonu
ε_i	Kinetik Enerji
μ	Kimyasal Potansiyel
β	$\frac{1}{k_B T}$ ile Tanımlanan Parametre
N	Parçacık Sayısı
N_0	Toplam Parçacık Sayısı
T_c	Kritik Sıcaklık

$\rho(\varepsilon)$	Üç Boyutta Serbest Parçacık İçin Durum Yoğunluğu
H	Hamiltonyen
E	Enerji
W_0	Frekans
M_I	Çekirdeğin Kütlesi
Z_I	Atom Sayısı
R_I	Çekirdeğin Koordinatı
r_i	Elektronun Koordinatı
Ψ^+	Dalga Fonksiyonunun Eşleniği
$\vec{P}_i$	Momentum
$\vec{A}_\upsilon$	Anyon Ayar Fonksiyonu
Ψ_T	Varyasyonel Parametresine Durum Dalga Fonksiyonu
$\vec{B}$	Manyetik Alan
K_0	Bessel Fonksiyonu
V_0	Çiftlenim Sabiti
r_0	Erim Mesafesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil-1.1: Bose-Einstein Yoğunlaşmasının şematik olarak gösterimi. (a) Yüksek $T >> T_c$ sıcaklığında ideal gaz atomları (b) Düşük $T < T_c$ sıcaklığında $\lambda_{dB} = \frac{\hbar}{mv} \propto T^{\frac{-1}{2}}$ (c) $T << T_c$, BEY $\lambda_{dB} = d$,(c) Sıcaklık sıfıra yaklaştığında, termal bulut ortadan kaybolması ve saf bozon yoğunlaşması ortaya çıkması…….....8

Şekil-1.2: Yoğunluk profillerinin sıcaklığa bağlı değişimine göre BEC……...9

Şekil-1.3: x-y düzleminde A ve B noktalarına yerleştirilen iki parçacığın yer değişiminin gösterimi…….. 12

Şekil-1.3: (a) ve (b) Anyon ve kompozit parçacık arasındaki ilişkinin gösterilmesi. (c) Kompozit parçacığın Chern-Simons akısı manyetik akı kullanıldığında oluşan elektron…….. 13

Şekil-3.1: Parçacık sayısına bağlı olarak sistemin enerjisinin $V_0 = 5\hbar w$ çiftlenim sabitine ve υ=0 anyonik parametresine göre değişimi…….. 21

Şekil-3.2: Uzun ve kısa erimli etkileşmelerde, $V_0 = 5\hbar w$ çiftlenim sabitine υ=0 anyonik parametre değerinde parçacık sayısına bağlı olarak enerjideki değişimi…… 22

Şekil-3.3:Kısa erimli ($\log(\frac{r}{r_o})$) etkileşmede parçacık sayısına bağlı olarak yoğunluk dağılımınlarının $V_0 = 5\hbar w$ çiftlenim şiddetine ve υ=0 anyonik parametresine bağlı olarak değişimi……... 23

Şekil-3.4: Kısa ve uzun erimli etkileşmelerde yoğunluk dağılımlarının N= 6,9 ve 17 deneysel sonuçlarla karşılaştırılması…….. 24

Şekil-3.5: Kısa erimli ($\log(\frac{r}{r_o})$) etkileşmeleri için, N=1,2,....,16,17 parçacık için varyasyon metodu ile elde edilen sonuçların literatürde bulunan teorik ve deneysel sonuçlarla kıyaslanması…...……..... 25

Şekil-3.6:$\mathrm{Log}(\frac{r}{r_o})$etkileşme potansiyeli kullanılarak, yoğunluk dağılımlarının N=4,5,6 ve 7 parçacık için anyon parametresi υ=0,υ=0,1 ve υ=0,2 göre değişimleri……. 26

Şekil-3.7:$\mathrm{Log}(\frac{r}{r_o})$etkileşme potansiyeli kullanılarak, yoğunluk dağılımlarının N=8,9,10 ve 11 parçacık için anyon parametresi υ=0,υ=0,1 ve υ=0,2 göre değişimleri……. 27

Şekil-3.8:$\mathrm{Log}(\frac{r}{r_o})$etkileşme potansiyeli kullanılarak, yoğunluk dağılımlarının N=12,13 ve 14 parçacık için anyon parametresi υ=0,υ=0,1 ve υ=0,2 göre değişimleri……. 28

Şekil-3.9:$\mathrm{Log}(\frac{r}{r_o})$etkileşme potansiyeli kullanılarak, yoğunluk dağılımlarının N=15,16 ve 17 parçacık için anyon parametresi υ=0,υ=0,1 ve υ=0,2 göre değişimleri……. 29

Şekil-3.10:N=6 parçacık için, kısa ve uzun erimli etkileşmeler altında yoğunluk dağılımlarının anyon parametresine bağlı olarak deneysel ve teorik çalışmalarla (υ =0) karşılaştırılması…… 30

Şekil-3.11: N=9 parçacık için, kısa ve uzun erimli etkileşmeler altında yoğunluk dağılımlarının anyon parametresine bağlı olarak deneysel ve teorik çalışmalarla (υ =0) karşılaştırılması…… 31

Şekil-3.12:N=6 parçacık için, kısa ve uzun erimli etkileşmeler altında yoğunluk dağılımlarının anyon parametresine bağlı olarak deneysel ve teorik çalışmalarla (υ =0) karşılaştırılması…… 32

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Gazlar; sıvı ve katılara göre;

- Düzensizdirler.
- Yoğunlukları düşüktür.
- Kendi aralarındaki etkileşimleri zayıf olan molekül veya atomlardan oluşurlar.

Gazları fiziksel özelliklerine göre klasik ve kuantum gazı olarak iki sınıfa ayırmak mümkündür. Bose-Einstein Yoğuşması (BEY) kuantum gazı olarak bilinen en önemli niceliktir. Bu nedenle (BEY) klasik gazlardan farklı olarak kuantum gazı olarak incelenmelidir.

Gazlar en temel olarak atomlardan ya da moleküllerden meydana gelir. Gaz tanecikleri arasındaki uzaklığı taneciklerin boyutları ile kıyaslandığında çok büyüktür. Gaz tanecikleri bulundukları ortamda tamamen rastgele bir halde bulunup çok hızlı hareket ederler. Gaz ısıtıldığında taneciklerin kinetik enerjisi arttığı için çok daha hızlı hareket ederken, soğudukça kinetik enerjileri azaldığından dolayı hızları düşer. Bu nedenle gaz taneciklerin kinetik enerjisi sıcaklığa bağlıdır. Çok düşük sıcaklığa inildiğinde gaz taneciklerinin hareketleri durur ve bu fiziksel duruma Bose-Einstein Yoğuşması denir. Bu durumda artık gazlar klasik gaz halinde değil kuantum gazı durumunda bulunmaktadır.

Bu çalışmada, iki boyutta etkileşen harmonik olarak tuzaklanmış bir anyonik sistem ele alınmıştır. Parçacıkların harmonik tuzak içinde kalabilmesi için z-ekseni yönünde bir ayar fonksiyonu seçilmiştir. Hesaplamalarda tek parçacık dalga fonksiyonu Gaussian formunda tanımlanmıştır. Anyonik parçacıklar kendi aralarında yer

değiştirdiklerinde bir faz kazandıklarından dolayı hesaplamalarda bozonik dalga fonksiyonuna faz etkisi ($e^{i\pi\upsilon}$) eklenmiş ve buradaki (υ) parametresine göre bozonik (υ=0) veya fermiyonik(υ=1) limit durumları irdelenmiştir.

Parçacıklar arasındaki Coulomb etkileşmesi ifadesi üç boyutta Poisson denklemi çözülerek iki boyuta indirgendiğinde etkileşme potansiyeli V(r)≈ $V_0K_0(r)$ formuna dönüşür. Burada V_0,etkileşmenin genliği ve $K_0(r)$ birinci dereceden bessel fonksiyodur.

Bu çalışmada iki boyutta etkileşen anyonik bir sistem ele alındığından bu etkileşme potansiyelinin kullanılması daha uygundur. Ele alınan potansiyel enerji kısa erimli ve uzun erimli olmak üzere ikiye ayrılır. Uzun erimli etkileşmeler de $K_0(r)$ birinci dereceden bessel fonksiyonu kullanılması uygundur. Kısa erimli etkileşmelerde ise logaritmik (log(r)) bir etkileşme kullanılması daha uygundur[2]. Çünkü kısa erimli etkileşmelerde log(r) potansiyelinin kullanılması teorik ve deneysel çalışmalarda daha uygun olduğu gösterilmiştir[3].

1.1.Bose-Einstein Yoğunlaşması (BEY) ve Bose-Einstein İstatisliği

Fizikçiler ve diğer bilim adamları tarafından yıllarca ışığın parçacık mı yoksa dalga mı olduğu tartışılmıştır. Max Planck yirminci yüzyılın başlarında ışığın parçacık gibi davranış gösterdiğini bulmuştur. Max Planck'a göre; ışık sanki devamlı dalgalar değil de, enerji paketçikleri gibi davranıyordu. Isıtılan cisimlerden yayılan radyasyonun spektral dağılımının enerjinin kesikli düzeylere sahip olması gerektiğini belirterek buna da ışımanın evrensel yasası adını verdi. Bu buluşu sayesinde 1918 yılında Max Planck Nobel Ödülünün sahibi oldu.

Bose-Einstein yoğunlaşması fikri ilk olarak 1924 yılında teorik çalışmaları ile bilinen Hindistanlı bilim adamı Satyendra Nath Bose özdeş parçacıklardan oluşan bir gaz gibi davranan fotonlar için Planck'ın karacisim ışıması yasasını türetip, bu çalışmalarını Albert Einstein'e göndermesi ile ortaya çıkmıştır. Albert Einstein, Bose'un bu teorisini atomlardan oluşan bir ideal gaza genelleştirdi ve teorik çalışmalarla tahminde bulundu. Einstein'ın tahmini; "Eğer atomlar yeterince soğuk olurlarsa onların dalgaboylarının çok büyük ve onların dalga fonksiyonlarının da üst üste geleceğini öne

sürdü. Bu atomlar aslında kendi özdeşliklerini bir makroskobik kuantum durumu veya süperatom oluşturarak kaybedeceklerdi.” İşte bu öngörülerdeki süperatom veya makroskopik kuantum durumu Bose-Einstein yoğunlaşmasıdır.

Dünya üzerindeki birçok araştırma grubu, oluşturdukları Bose-Einstein yoğunlaşmasını ışığı yavaşlatmaktan atom lazeri yapmaya hatta kara delikleri modellemek için bile kullandılar. Ayrıca, atomlar arasındaki etkileşmenin çok iyi bir şekilde kontrol edilmesinde Bose-Einstein yoğunlaşması yoğun madde sistemlerinin özelliklerinin simüle edilmesi veya benzeştirilmesinde kullanılmaktadır. Araştırmacıların şimdiki amaçları ise aynı kuantum durumu normal olarak işgal edemeyen fermiyonlardan yoğunlaşmalı durumlar yapabilmektir [4].

Kuantum mekaniksel olarak bir sistemin durumunu sistemin dalga fonksiyonu belirler. Yapısal özellikleri (elektrik yükü, kütle vb.) açısından ayırt edilemeyen parçacıkların oluşturduğu çok parçacıklı bir sistemi birbirinden ayıt etmek çok zordur. Fakat kuantum mekaniksel açıdan bu çok parçacıklı sistemi ayırt etmek mümkündür. Çok parçacıklı bir sistemin toplam dalga fonksiyonu, parçacıkların kendi aralarındaki yer değiştirmesine göre ya simetrik, ya da antisimetrik olmalıdır. Toplam dalga fonksiyonunu oluşturan parçacıkların dalga fonksiyonlarını kuantum mekaniğine özgü olan spin belirler. Bir kuantum parçacığı için spin $\hbar$ veya $\hbar/2$ nin tam katları değerine sahiptir.

Parçacıkların bu spin değerlerine bağlı olarak iki grupta incelenebilir:

1. Spinleri tam sayı olan parçacıklar bozon olarak adlandırılırlar. Örneğin fotonun spini 1, π-mezonun spini 0’dır. Bu tür parçacıkların dalga fonsiyonları simetriktir ve Bose-Einstein istatisliğine uyarlar[5].

Bu simetrik özelliğinden dolayı yerlerini değiştirmeleri dalga fonksiyonu tanımını değiştirmez. Bu nedenle, dalga fonksiyonu ifadesi

$$\Psi(x,y)= \Psi(y,x) \tag{1.1}$$

gibi olur.

2. Spinleri yarım tam sayı olan parçacıklara fermiyon denir. Örneğin elektron, proton ve nötronun spini $^1/_2$ 'dir. Bu tür parçacıkların dalga fonksiyonları antisimetriktir ve Fermi-Dirac istatisliğine uyarlar[5].

Bu durumda parçacıklar yer değiştirdiğinde dalga fonksiyonu antisimetri özelliğinden dolayı

$$\Psi(x,y)= -\Psi(y,x) \tag{1.2}$$

şeklinde tanımlanır.

İki boyutta iki özdeş parçacık ele alındığında, birinci parçacığın konumu $\Psi_a(x)$ de diğerinin $\Psi_b(y)$ de olduğunu ve bu durumların dik ve normalize olduklarını varsayılır. Bu durum için dalga fonksiyonu şu şekilde ifade edilir;

$$\Psi(x,y) = \Psi_a(x)\Psi_b(y) \tag{1.3}$$

İki boyutta iki anyon parçacığı için en genel dalga fonksiyonu;

$$\Psi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2!}}\left[\Psi_a(x)\Psi_b(y) + e^{i\pi\upsilon}\Psi_a(y)\Psi_b(x)\right] \tag{1.4}$$

gibi tanımlanır. (1.4) denkleminde υ=0 alınırsa yer değiştirme dalga fonksiyonu bozonlar için;

$$\Psi_+(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2!}}[\Psi_a(x)\Psi_b(y) + \Psi_a(y)\Psi_b(x)] \tag{1.5}$$

formunu verir. Eğer (1.4) denkleminde υ=1 alınırsa yer değiştirme dalga fonksiyonu fermiyonlar için;

$$\Psi_-(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2!}}[\Psi_a(x)\Psi_b(y) - \Psi_a(y)\Psi_b(x)] \tag{1.6}$$

gibi olur. Bu parametreye bağlı olarak υ 0 ile 1 arasındaki değerleri aldığı için dalga fonksiyonu değişmektedir. Bu durumlar Bölüm 1.2'de ayrıntılı olarak incelenecektir.

Yüksek sıcaklıklarda fermiyonlar ve bozonlar arasındaki davranış farkı belirgin değildir. Fakat yeterince düşük sıcaklıklarda femiyonlar ve bozonlar arasındaki davranış farkı istatistiksel olarakdaha iyi gösterilebilir. Antisimetrik dalga fonksiyona sahip olan fermiyonlar, Pauli dışarlama ilkesi gereği, aynı kuantum durumunda en fazla iki

parçacık olacak şekilde yerleşirlerken simetrik dalga fonksiyona sahip olan bozonlar, aynı kuantum durumunda herhangi bir sınırlama olmaksızın konumlanabilirler.

Mutlak sıcaklıkta bozonik özellik gösteren parçacıklar taban durumunda bulunur. Bose bu durumu istatistik olarak, parçacıklar arasında etkileşimin olmadığı kritik sıcaklığın altına inildiğinde bir faz geçişi olacağını ve sıcaklığa bağlı olarak parçacıkların tamamına yakınının taban durumuna yerleşeceğini göstermiştir. Düşük sıcaklıklarda oluşan bu faz değişimi buharın yoğunlaşmasını andırdığından dolayı Bose-Einstein Yoğuşması (BEY) olarak adlandırılır. Faz geçişinde parçacıkların kendilerine has özelliklerini kaybettiği ve tüm parçacıkları ayrı değil aynı tek-parçacık kuantum durumunda bulunabildiği kristal bir forma dönüştüğü yapılan çalışmalarda gösterilmiştir[5].

Bose-Einstein Yoğunlaşmasının faz geçişinin birçok özellikleri büyük kanonik topluluk bölüşüm fonksiyonu tarafından hesaplanabilir. Bu fonksiyon;

$$Z_{gc} = Tr(\exp[-\beta(\widehat{H} - \mu\widehat{N}]) \tag{1.7}$$

gibi ifade edilir. Burada $\beta=\frac{1}{k_B \mathrm{T}}$ters sıcaklık, k_B Boltzman sabiti ve T sıcaklığı gösterir. $\widehat{H}$ Hamilton operatörü, $\widehat{N}$ sayı operatörü ve μ ise büyük kanonik topluluğun kimyasal potansiyelidir[6].

Bölüşüm fonksiyonundan hesaplanabilen atomların toplam sayısı (N) ;

$$N = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial ln Z_{gc}}{\partial \mu}\right)_{(T,V)} \tag{1.8}$$

ile hesaplanabilir.

Özdeş bozonların oluşturduğu bir sistem için;

$$lnZ_{gc} = -\sum_i \ln(1 - z\exp(-\beta\varepsilon_i)) \tag{1.9}$$

olarak ifade edilir. Sistemdeki tüm parçacıkların sayısı;

$$N = \sum_i N_i = \sum \frac{1}{z^{-1}\exp(\beta\epsilon) - 1} \tag{1.10}$$

Denklemiyle bulunur. Eğer V hacmindeki enerji seviyeleri arasındaki mesafe büyükse k_BT çok daha az olabilir ve bu durumda toplam bir integrale dönüştürülebilir:

$$N = N_0 + N_{ex} = N_0 + \int d\epsilon \frac{\rho(\epsilon)}{z^{-1}\exp(\beta\epsilon)-1} \tag{1.11}$$

Burada $\rho(\epsilon)$ enerji yoğunluğudur. V hacim olmak üzere, üç boyutta serbest parçacık için durum yoğunluğu şöyle ifade edilir;

$$\rho(\epsilon) = \frac{V(2m)^{3/2}}{\hbar^3 (2\pi)^2}\sqrt{\epsilon} \tag{1.12}$$

Denklem (1.11)'deki integral kuantum dejenere rejimin taban durumun dışında atomların sayısını vermek içinde değerlendirilebilir. Bu denklemde yer alan

$$N_{ex} = \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2mk_BT}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\zeta(\frac{3}{2}) \tag{1.13}$$

ifadesinde Γ ve ζ sırasıyla Gamma ve Riemann zeta fonksiyonlarıdır. Denklem 1.11'deki $N_0 = 0$ alınıp denklem (1.13) tekrar düzenlenirse; Kritik sıcaklık T_c kolayca ayarlanarak şöyle tanımlanır.

$$T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B}(\frac{n}{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)})^{2/3} \tag{1.14}$$

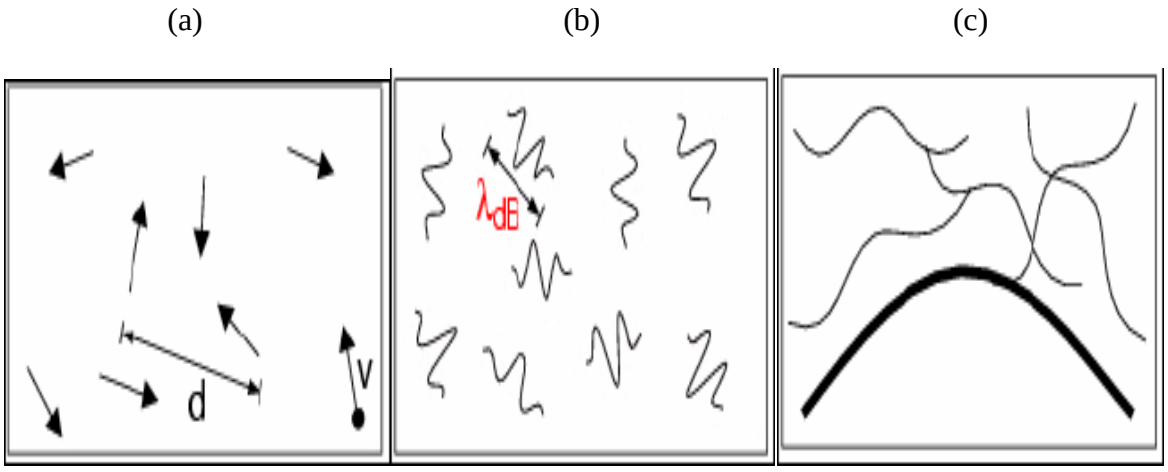
Burada $n = \frac{N}{V}$ ve $\zeta(\frac{3}{2})$ =2.612 dir. Sistemin sıcaklığı azaltılmaya başlandığı zaman, parçacıkların De Broglie dalga boyu büyüklüğü artmaktadır (Şekil 1.1). Parçacıkların sayı yoğunluğu ile doğru orantılı olarak bir $T_c \cong 3.31\frac{\hbar^2 n^{2/3}}{mk_B}$ [7] kritik sıcaklığında dalga paketleri üst üste gelerek süperpozisyon oluşur. Sıcaklık(*T)* azaldıkça dalga paketleri süperpozisyonu güçlendirmeye başlar. Bu en düşük sıcaklıkta tüm parçacıklar uyarılmış durumda kalabilirler ve faz alanına uyan yoğunluğu veren formül:

$$n\lambda_{dB}^3 = \zeta(\frac{3}{2}) = 2.612 \tag{1.15}$$

gibidir. Burada $\lambda_{dB} = \sqrt{2\pi\hbar^2/mk_BT}$ de Broglie dalga boyudur. Tüm parçacıklar arasındaki mesafe de Broglie dalga boyu ile karşılaştırılabilir hale geldiği zaman Şekil 1'den de görüleceği gibi BEY faz geçişi basitleştirilmiş resim ile uyumludur. Kritik sıcaklığın altında uyarılmış durumdaki atom sayısı azalır ve atomlar taban durumuna göre makroskobik olarak doldurulmaya başlar.

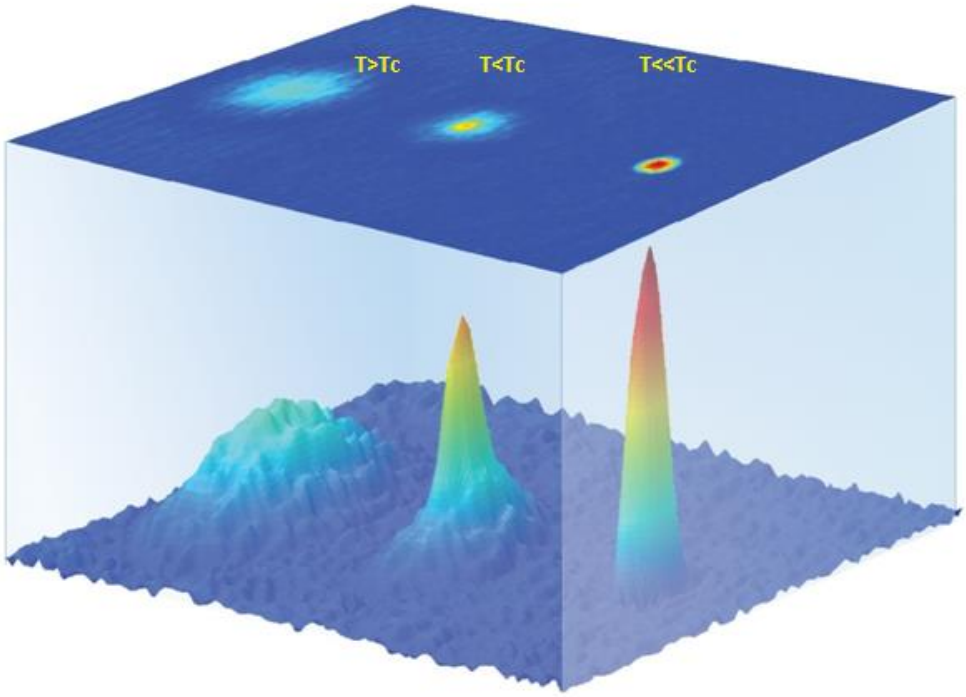
$$\frac{N}{N_0} = 1 - (\frac{T}{T_c})^{3/2} \tag{1.16}$$

Bu denklem enerjisi ve momentumu sıfır olan parçacıkların kesrini verir. T sıcaklığı T_c 'den büyük olduğu için taban durumundaki parçacıkların sayısı ihmal edilecek kadar azdır. Fakat T sıcaklığı azalarak T_c 'nin altına indiğinde taban durumundaki parçacıkların sayısı hızla artar. Taban seviyesinde bulunan parçacıkların enerjileri sıfırdır. Bu taban durumunda bulunan parçacıklara Bose-Einstein Yoğunlaşması (BEY) adı verilir. Fakat, fermiyonlar Pauli dışarlama ilkesi gereği aynı kuantum durumunda iki parçacıktan fazla bulunmaması özelliğini düşük sıcaklıklarda da korumaktadır. Bu nedenle fermiyonik gazlarda (BEY) elde edilememektedir.



Şekil-1.1: Bose-Einstein Yoğunlaşmasının şematik olarak gösterimi. (a) Yüksek $T >> T_c$ sıcaklığında ideal gaz atomları (b) Düşük $T < T_c$ sıcaklığında $\lambda_{dB} = \frac{\hbar}{mv} \propto T^{\frac{-1}{2}}$ (c) $T << T_c$, BEY $\lambda_{dB} = d$,(c) Sıcaklık sıfıra yaklaştığında, termal bulut ortadan kaybolması ve saf bozon yoğunlaşması ortaya çıkması[8].

Şekil 1.1'de ideal gaz atomlarının sıcaklığa bağlı değişimiyle Bose-Einstein Yoğuşmasına geçişi göstermektedir. Şekil 1.1 (a) Yüksek sıcaklıklarda zayıf etkileşimlerde bulunan bir gaz yüksek hızda bulunur. Şekil 1.1 (b)'de Düşük sıcaklıklarda artık atomlar De Broglie dalga boyu (λ_{dB}) ile tanımlanabilen dalga paketleri olarak ele alınabilirler. Bose-Einstein Yoğunlaşmasına geçiş sıcaklığına gelindiğinde atomların dalga boyu aralarındaki uzaklıkla kıyaslanacak büyüklüğe gelir.Şekil 1.1 (c)'de ise, sıcaklık kritik sıcaklığın altına düşürüldüğünde atomların dalga fonksiyonları bir birleriyle örtüşmeye başlar ve böylece BEY ortaya çıkar. Böylece bu durumda sistem tek bir dalga fonksiyonu ile tanımlanacak hale gelir.Şekil 1.2'de ise Bose-Einstein Yoğunlaşmasının sıcaklığa bağlılığı gösterilmiştir.



Şekil-1.2: Bose-Einstein Yoğunlaşmasına(BEC) geçişte yoğunluk dağılımının sıcaklığa bağlı değişimi[9].

1.2. Anyonlar ve Anyon İstatisliği

Kuantum teorisinde her parçacık ya "bozon" yada "fermiyon"dur. Bozonlar, kendi kuantum durumlarında sınırsız sayıda bir arada bulunabilirken, fermiyonlar kendi kuantum durumlarında yalnız yaşarlar. Son dönemlerde yapılan araştırmalarda, elektronlarla ilişki belirli "quasi parçacıklar"ın arada bir yerde olduğunu söylemektedir. Uzun yıllar önce araştırmacılar üçüncü olarak "anyon"ları önerdi ve bu grupta ancak sınırlı sayıda tek bir durumda yaşayabilirdi. Hiçbir araştırmacı bu özelliği doğrudan gözlemleyemedi fakat bir araştırmacı, 1990'larda gözlenen ve "Kesirli Kuantum Hall Etkisi(KKHE)" denilen etkide elektronların gözlemlenen garip durumunu "anyon" olarak adlandırdı[10].

Anyonlar; bozonlar ve fermiyonlar arasında bulunan, kesirli istatistik taşıyan parçacıklardır. Bu parçacıklar birbirinden ayırt edilemezler. Özdeş parçacıkların ayırt edilemezliği kuantumsal mekanik bir ifadedir. Klasik mekaniksel olarak karşılığı yoktur. Kütle, yük, spin gibi özgün özellikleri aynı fakat fiziksel özellikleriyle birbirinden fark edilemeyen parçacıklara özdeş parçacıklar denir. Özdeş parçacıklardan oluşmuş ve sistemin fiziksel özelliklerinde hiçbir değişikliğe yol açmadan birbirlerinin yerine geçebilen parçacıklardan oluşan sistemlere özdeş parçacıklar sistemi denir. Klasik mekaniksel olarak özdeş parçacıkların ayırt edilemezlik sorunu yoktur. Kuantum mekaniksel olarak parçacıkların ayırt edilemezliği ortaya çıkmıştır.

Kuantum mekaniğinde parçacığa eşlik eden bir dalga fonksiyonu vardır. Dalga fonksiyonun zaman içindeki değişimi ve her konumda bulunma olasılığını bulabilir ve parçacıkların hangi konumda oldukları ölçülebilir. Özdeş parçacıkların ilk ölçümü yapıldığında, bir sonraki ölçümde hangi parçacıkların konumunun ölçüldüğünü belirlemek imkânsızdır. Heisenberg belirsizlik ilkesinden dolayı her bir ölçüm sistemin durumunu bozar. Belirsizlik ilkesinden dolayı parçacıkların nereye gideceği tam olarak ölçülemez. Bu yüzden kuantum mekaniğinde özdeş parçacıklar genellikle ayırt edilemezler.

İstatistik, parçacıkların yer değiştirmesiyle ilgili bir özelliktir. Kuantum mekaniksel olarak iki özdeş parçacığı göz önüne alalım. Bu parçacıkların dalga fonksiyonunu $\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$ ile gösterelim. İki özdeş parçacık yer değiştirdiğinde;

$$\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=e^{i\pi\upsilon}\Psi\left(\vec{r}_2,\vec{r}_1\right) \tag{1.18}$$

özdeş olur. Çünkü dalga fonksiyonunun kendisi gözlenebilir bir nicelik değildir. Özdeş parçacıklar yer değiştirildiğinde fiziksel olarak orijinalinden ayırt edilemediği için $e^{i\pi\upsilon}$ kadar bir faz farkı gelir. Dalga fonksiyonunda faz farkı kadar bir değişim olur ve dalga fonksiyonu özdeş kalır. Burada υ anyon parametresi ve $\pi\upsilon$ faz farkıdır. Özdeş parçacıklar bir kez daha yer değiştirirse dalga fonksiyonu;

$$\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=e^{i2\pi\upsilon}\,\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2) \tag{1.19}$$

bulunur ve dolayısıyla $e^{i\pi\upsilon}=\mp 1$[11]. Karekök alındığında olası istatistik ya bozon $e^{i\pi\upsilon}=1$, ya da fermiyon $e^{i\pi\upsilon}=-1$ olur. Burada υ=1,2,…,n tamsayı değerlerini alır. Bu bir kez kabul edildikten sonra, fermiyon alan operatörü $\Psi(\mathrm{t},\bar{\mathrm{x}})$ olmak üzere

$$\Psi(\mathrm{t},\vec{\mathrm{y}})\Psi(\mathrm{t},\vec{\mathrm{x}})=-\Psi(\mathrm{t},\vec{\mathrm{x}})\Psi(\mathrm{t},\vec{\mathrm{y}}) \tag{1.20}$$

antikomütasyon bağıntısı, Pauli dışarlama ilkesini verir:

$$\Psi(\mathrm{t},\vec{\mathrm{x}})\Psi(\mathrm{t},\vec{\mathrm{x}})=0 \tag{1.21}$$

Sonuç olarak şu söylenebilir: üç boyutlu uzayda sadece iki tip özdeş parçacık sistemi vardır: bozonlar ve fermiyonlar. Bunlar aşağıdaki özellikleriyle ayırt edilebilir:

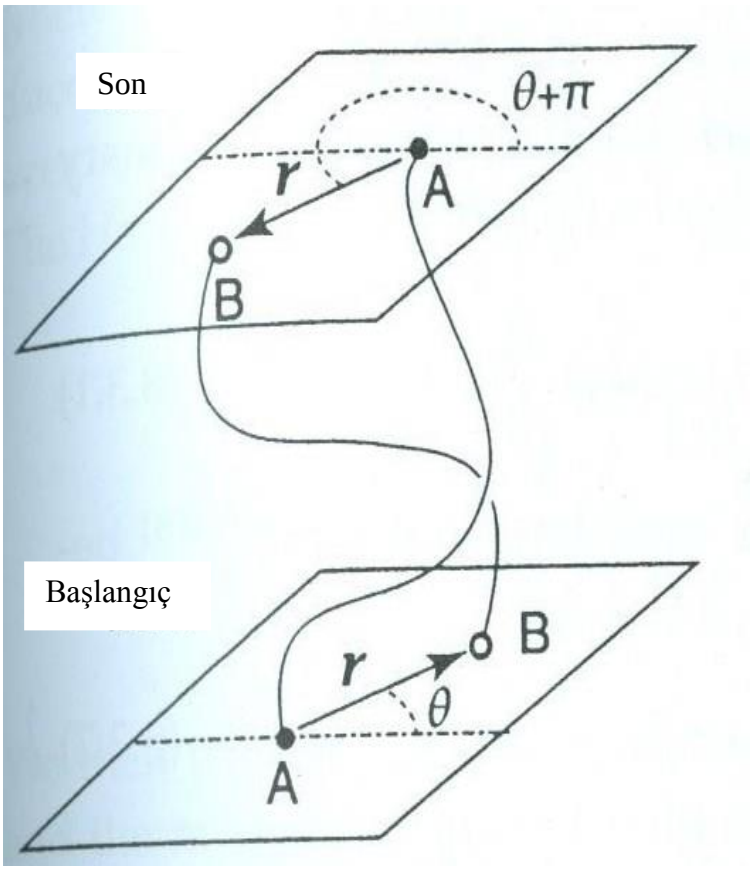
- Spin
- Yerdeğiştirme
- Pauli Dışarlama İlkesi

İki boyutlu uzayda durum tamamen farklıdır; çünkü ilmek bir düzleme kısıtlanmıştır. Diğer parçacığın pozisyonu ile kesişmeden ilmeği büzmek, küçültmek mümkün değildir. Fermionların, Pauli dışarlama ilkesine göre birbirleri ile kesişemezler. Göz önüne alınan parçacıkların dışarlama ilkesini sağlaması için üst üste gelmelerinin engellenmeleri gerektiği postüla ediliyor.

υ parametresi, özdeş parçacıklara özgü keyfi gerçel bir sayıdır. İlmek, diğer parçacığı n kez çevrelerse,

$$\Psi^n(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=\left(e^{i2\alpha\pi}\right)^n\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2) \tag{1.22}$$

olur. Bu parametre bir noktanın diğer noktanın etrafında, iki boyutlu uzayda birbirinin üzerinden geçmeden kaç kez daire çizeceğinin topolojik bir sayısıdır. Burada $\left(e^{i2\alpha\pi}\right)^n = 1$ ve $\left(e^{i\alpha\pi}\right)^n = \mp 1$ olur[12]. υ kesirli değerler alabilir. Kesirli istatistik iki boyutlu uzaya özgü topolojik bir özelliktir.



Şekil-1.3: x-y düzleminde A ve B noktalarına yerleştirilen iki parçacığın yer değişiminin gösterimi[13].

Parçacıkların 2-boyutlu uzayda kesirli spin ve istatistiğe sahip olabilecekleri mantıksal bir sonuçtur. Bu parçacıklara Wilczek tarafından anyonlar demiştir.

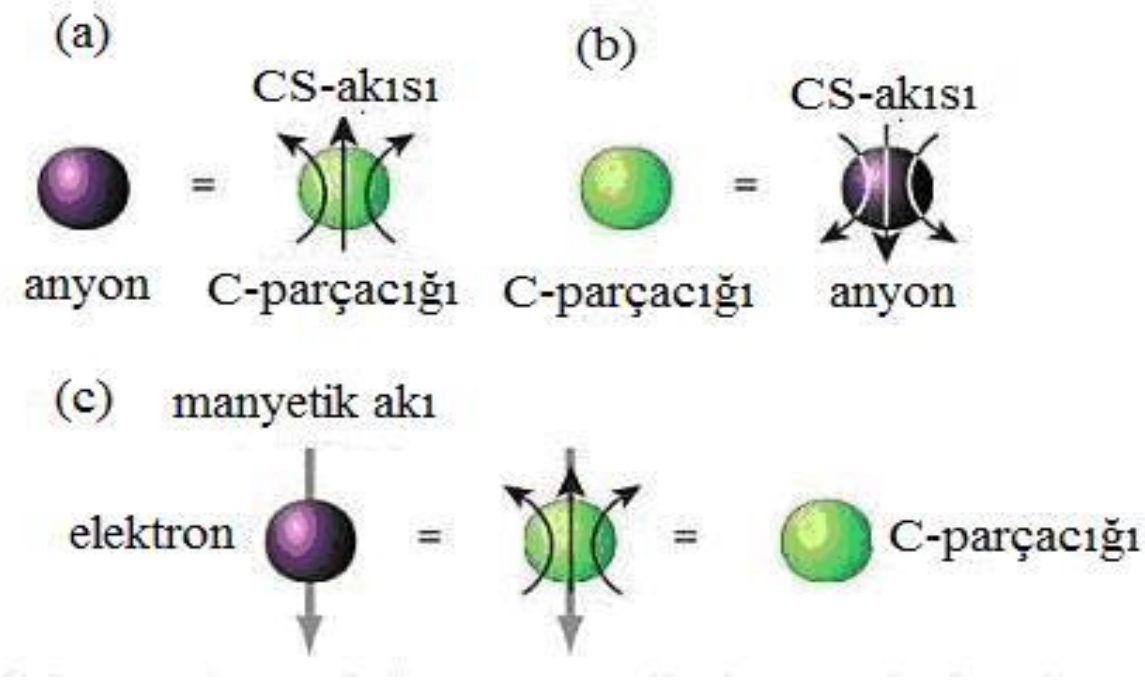
$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ dalga fonksiyonunun tek değerli olmaya ihtiyacı yoktur ve bu nedenle de $e^{i\pi\upsilon} = \mp 1$ olması gerekmez. Antikomütasyon bağıntısına göre;

$$\Psi(t, \vec{y})\Psi(t, \vec{x}) = e^{i\pi\upsilon}\Psi(t, \vec{x})\Psi(t, \vec{y}) \tag{1.23}$$

anyon komütasyon bağıntısıolarak genelleştirilmektedir. Burada faz faktörü $e^{i\pi\upsilon}$

keyfidir. İki boyutlu uzay böylece, anyon denilen kesirli spin ve istatistiğe sahip egzotik parçacıkların tanımlamasını sağlar.

Bir anyon, akı-taşıyan bir bozon veya fermiyon olarak alınmaktadır. Akıya Chern-Simons akısı (C-S akısı)[14], bozon veya fermiyona da kompozit parçacık (C-parçacık) denilir. Alternatif olarak, bir anyona bir Chern-Simons akısı tutturulduğunda bir kompozit parçacık oluşturulur. Kompozit parçacık, Chern-Simons akısı manyetik alan tarafından ortadan kaldırıldığı zaman fiziksel bir gerçeklik kazanır (KH sistemlerinde olduğu gibi). Bu açıklamaların gösterimi Şekil 1.4' de verilmiştir;



Şekil-1.4: (a) ve (b) Anyon ve kompozit parçacık arasındaki ilişkinin gösterilmesi. (c) Kompozit parçacığın Chern-Simons akısı manyetik akı kullanıldığında oluşan elektron[14].

Şekil 1.4 ' deki objelerin anlamı;

- Kuantum mekaniksel olarak anyonları, "istatistik etkileşme" yapan parçacıklar (kompozit parçacıklar) gibi formüle etmek kolaydır. Aynı zamanda, anyon dinamiğini, kompozit parçacıklar için uygulamak yerindedir; çünkü onlar sıradan fermiyon ve bozonlardır.

- Elektronlar eğer bir düzleme kısıtlandırılırlarsa, anyondurlar. Dolayısıyla, elektron, bir kompozit parçacık ile Chern-Simons akısının bağlı durumu olarak temsil edilir [Şekil 1.4.(a)]. Chern-Simons akısı manyetik akı ile ortadan kaldırıldığında, kompozit parçacık fiziksel gerçeklik kazanır [Şekil 1.4.(c)].

BÖLÜM 2

ÇOK PARÇACIKLI SİSTEMLER

Bu bölümde, çok parçacıklı sistemin çözüm yolları incelenecektir. Çok parçacıklı sistemin enerji özdeğerleri ve dalga fonksiyonlarının tanımı farklı çözüm metotları ile nasıl elde edildiğinden bahsedilecektir. İlk önce çok parçacıklı sistemin Schrödinger denklemi tanımlanmıştır. Bu enerjiyi bulmak için Schrödinger denkleminde bulunan hamiltonyen ifadesi parçacıklar arasındaki çekirdek-çekirdek, çekirdek-elektron ve elektron-elektron potansiyel ifadeleri yerine konulmuş ve sistemin enerjisi hesaplanmıştır. Sistemin enerjisi varyasyon metodu kullanılarak hesaplanmıştır. Bu çalışmada çok parçacıklı sistemin çözüm yöntemi ve enerji hesabı için varyasyon metodu detaylı bir biçimde açıklanmış bunun yanı sıra enerji hesabı için kullanılan diğer çözüm metodlarından da bahsedilmiştir.

2.1.Çok Parçacık Problemi

Elektronların ve çekirdeğin oluşturduğu bir sistem için Schrödinger denklemi,

$$\hat{H}\Psi=E\Psi \tag{2.1}$$

şeklinde yazılır. Bu dalga denkleminin ilk önce $\hat{H}$ ifadesinin tanımlanması gerekir. Hamiltonyen en genel hali ile tanımlanırsa;

$$\hat{H}=\hat{T}_e+\hat{T}_ç+\hat{V}_{e-ç}+\hat{V}_{e-e}+\hat{V}_{ç-ç} \tag{2.2}$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki ilk terim($\hat{T}_e$) elektronun kinetik enerjisini, ikinci terim ($\hat{T}_ç$) ise çekirdeğin kinetik enerjisi, üçüncü terim ($\hat{V}_{e-ç}$) çekirdek ve elektronlar arasındaki coulomb çekim alanı terimini,dördüncü terim ($\hat{V}_{e-e}$) elektronlar arasındaki coulomb etkileşme potansiyelini ve beşinci terim ($\hat{V}_{ç-ç}$) ise çekirdekler arasında meydana gelen coulomb etkileşme potansiyelini ifade etmektedir. $\hat{\mathrm{H}}$ bulunan terimler atomik kütle birim (akb) sistemimde düzenlenirse;

$$\hat{H} = -\sum_{i=1}^{N_e}\frac{1}{2}\nabla_i^2 - \sum_{I=1}^{N_i}\frac{1}{2M_I}\nabla_I^2 - \sum_{i=1}^{N_e}\sum_{I=1}^{N_I}\frac{Z_I}{\left|\vec{r}_i - \vec{R}_I\right|} + \sum_{i=1}^{N_e}\sum_{j>i}^{N_i}\frac{1}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|} + \sum_{I=1}^{N_e}\sum_{j>I}^{N_i}\frac{Z_I Z_j}{\left|\vec{R}_I - \vec{R}_j\right|} \qquad (2.3)$$

gibi olur. Burada $\mathrm{M_l}$ çekirdek kütlesi, Z_l atom sayısı, $\vec{\mathrm{r}}_\mathrm{i}$ ve $\vec{\mathrm{R}}_\mathrm{l}$ ise sırasıyla elektron ve çekirdeğin koordinatlarıdır.$\hat{\mathrm{H}}$ ifadesi Schrödinger denkleminde yerine yazılırsa;

$$\left(-\sum_{i=1}^{N_e}\frac{1}{2}\nabla_i^2 - \sum_{I=1}^{N_i}\frac{1}{2M_I}\nabla_I^2 - \sum_{i=1}^{N_e}\sum_{I=1}^{N_I}\frac{Z_I}{\left|\vec{r}_i - \vec{R}_I\right|} + \sum_{i=1}^{N_e}\sum_{j>i}^{N_i}\frac{1}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|} + \sum_{I=1}^{N_e}\sum_{j>I}^{N_i}\frac{Z_I Z_j}{\left|\vec{R}_I - \vec{R}_j\right|}\right)\Psi = \mathrm{E}\Psi \qquad (2.4)$$

şeklinde olur. Böyle bir sistemin taban durumu özellikleri zamandan bağımsız olarak,

$$\hat{H}\psi\left(\vec{r}_i, \vec{R}_I\right) = E\psi\left(\vec{r}_i, \vec{R}_I\right) \qquad (2.5)$$

gibi ifade edilir. Burada $\psi\left(\vec{r}_i, \vec{R}_I\right)$ çok parçacık dalga fonksiyonu ve *E* sistemin toplam enerjisidir.N parçacıktan oluşan iki boyutlu anyonik bir sistemin, en genel hali ile Hamiltonyen ifadesi;

$$\hat{\mathrm{H}} = \int dr\Psi^{\dagger}(r)\hat{H}_o\Psi(r) + \frac{1}{2}\int drdr'\Psi^{\dagger}(r)\,\Psi^{\dagger}(r')V\left(\left|r - r'\right|\right)\Psi(r')\Psi(r) \qquad (2.6)$$

şeklinde yazılır. Burada $\widehat{\mathrm{H_o}}$,

$$\widehat{\mathrm{H_o}} = \frac{1}{2\mathrm{M}}\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{N}}\left[\vec{\mathrm{P}}_\mathrm{i} + \vec{\mathrm{A}}_\upsilon(\vec{\mathrm{r}}_\mathrm{i})\right]^2 + \frac{\mathrm{MW_0}^2}{2}\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{N}}\vec{\mathrm{r}}_\mathrm{i}^{\,2} \qquad (2.7)$$

olarak tanımlanan kinetik enerji ile tuzaklama potansiyelin toplamıdır. Kinetik terimde bulunan anyon ayar potansiyeli,

$$\vec{A}_{\upsilon}(\vec{r}_i) = \hbar\,\upsilon \sum_{j\neq i}^{N} \frac{\vec{z}\,x\vec{r}_{ij}}{\left|\vec{r}_{ij}\right|^2}$$

(2.8)

olarak seçilir[15]. Burada, $\vec{z}$ iki boyutlu düzlemde bulunan dik birim vektör, $\vec{r}_{ij}=\vec{r}_i - \vec{r}_j$ ve anyonların spin istatisliğinin bir çeşiti olarak anyonik faktör (υ) karekterizedir. υ ; 0 ile 1 arasında değişir. $\upsilon = 0$ olduğun da bozon, $\upsilon = 1$ olduğunda fermiyondur.

Sistemin taban durum enerjisi varyasyon hesabı yöntemiyle minimum enerji düzeyinde kararlı hale getirilebilmesi için aşağıda tanımlandığı gibi hesaplanır.

$$E = \frac{\int \Psi_T^*(\overrightarrow{R})\hat{H}\Psi_T(\overrightarrow{R})d(\overrightarrow{R})}{\int \Psi_T^*(\overrightarrow{R})\Psi_T(\overrightarrow{R})d(\overrightarrow{R})} \tag{2.9}$$

Burada, $\hat{H}$ sistemin hamiltonyeni, $\Psi_T(\overrightarrow{R})$ sistemin varyasyonel parametreye sahip deneme dalga fonksiyonu ve $\vec{R}$ ise tüm parçacıkların koordinatıdır. Ortalama $\vec{A}$ alanı içindeki parçacıkların hareketi,

$$\vec{A}(\overrightarrow{r}) = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r} \tag{2.10}$$

olarak alınır[15]. Bu gösterimde parçacıklar $\vec{B} = 2\pi\hbar\rho\upsilon\vec{z}$ manyetik alanının olduğu sistem içindeki parçacıkların ortalama ρ yoğunluğuyla indüklenmiş $\vec{A}$ alanına yönelirler. Burada $\rho = \frac{1}{\pi r_o^2}$ alınır ve buradaki r_0 parçacıklar arasındaki ortalama mesafedir.

Anyonlar bozonik olarak tanımlandığında dalga fonksiyonu en genel hali ile ,

$$\Psi_T(\overrightarrow{R}) = \prod_{k=1}^{N} \Psi_T(\overrightarrow{r_k}) \tag{2.11}$$

gibi olur. Sistemin normalize deneme dalga fonksiyonu daha açık olarak tanımlanırsa;

$$\Psi_T(\overrightarrow{R}) = \left(\frac{\alpha+\upsilon}{\pi}\right)^{\frac{N}{2}} \prod_{k=1}^{N} exp(-(\alpha+\upsilon)\frac{(x_k^2+y_k^2)}{2}) \tag{2.12}$$

formunda olur.

Deneme dalga fonksiyonu bu şekilde tanımlandığında minimum enerji;

$$E_\upsilon = N\left[1 + \upsilon^2(N-1)\left[\ln\left(\frac{2}{\delta}\right) - (N-2)\right]\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.13}$$

olarak bulunur[15]. İki boyutta $\upsilon \to 0$ giderken anyonların temel durum enerjisi bozonik limit yakınında olduğu düşünülür. Temel enerji durumunda merkezi kütle hareketi sabit değilse:

$$E \approx \hbar\omega_0\left[N + N(N-1)\frac{\upsilon}{2}\right] \tag{2.14}$$

yaklaşık olarak böyle tanımlanır[15]. Burada N parçacık sayısını göstermektedir. Bu yüzden, $\upsilon \to 0$'da υ^2kuvvetlerini bu enerji ifadesini için genişletir. Burada δ ise;

$$\delta = 2exp\left(-\frac{1+\upsilon(N-2)}{\upsilon}\right)r_0 \tag{2.15}$$

gibi tanımlanır. Bu ifade denklem (2.13)'de yerine yazılırsa,

$$E_\upsilon = \hbar\omega_0 N[1 + \upsilon(N-1)]^{\frac{1}{2}} \tag{2.16}$$

gibi olur. Denklem (2.6)'daki potansiyel ifadesini parçacıklar arası Coulomb etkileşmesi üç boyutta Poisson denklemi çözülerek iki boyutta indirgendiğinde;

$$V(\left|\vec{r} - \vec{r}^{\,'}\right|) = \left(V_0 K_0\left(\frac{\left|\vec{r} - \vec{r}^{\,'}\right|}{r_0}\right)\right) \tag{2.17}$$

olarak gösterilmiştir [16]. Burada V_0 çiftlenim sabiti, r_0 erim mesafesi ve K_0 Bessel fonksiyonudur. Bu ifadenin limit durumları incelendiğinde parçacıklar arasındaki erim mesafesine bağlı olarak etkileşme potansiyeli;

$$V(\left|\vec{r} - \vec{r}^{\,'}\right|) = \begin{pmatrix} V_0\sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x} \;, & x >> 1 \\ \\ -V_0 Log(x) \;, & x << 1 \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

olarak tanımlanır. İki boyutlu anyonik bir sistemin dalga fonksiyonu denklem (2.11)'de tanımlandığı gibi her bir parçacığın dalga fonksiyonlarının çarpımı;

$$\Psi_m(r_1, r_2, \cdots, r_m) = N\big(\Psi_1(r_1)\Psi_2(r_2)\cdots\Psi_m(r_m)\big) \tag{2.19}$$

şeklinde yazılır. Burada N boylandırma sabitidir. İki boyutta iki özdeş parçacık için

Hartree formunda dalga fonksiyonu;

$$\Psi(r_1, r_2) = N\Psi_1(r_1)\Psi_2(r_2) \tag{2.20}$$

gibi olur. Hartree yaklaşımında çok elektronlu sistemin dalga fonksiyonunu tek elektron dalga fonksiyonlarının çarpımı olarak yazma ilkesine dayanır[17]. Hartree yaklaşımı atomlar için güzel sonuçlar verir. Tek elektron fonksiyonlarında oldukça iyidir. Ancak parçacıkların değiş tokuşu olduğunda simetriyi sağlayama özelliğine sahip değildirler. Hâlbuki bu çalışmada ele aldığımız çok parçacık dalga fonksiyonu komşu indislerin değiş tokuşuna göre simetrik olmalıdır. Bu yüzden, Hartree yaklaşımı yerine Hartree-Fock yaklaşımı daha yaygın kullanılır. Hatree yaklaşıklığı BEC durumunda yani değiş tokuşun önemli olmadığı kısa erimli etkileşmeli durumlarda kullanılır.

Parçacıkların kendi aralarında yer değiştirmesi sistemin enerjisini değiştirir. Bu nedenle dalga fonksiyonunu tanımlarken bu etkiyi de göz önüne alan tanımı;

$$\Psi(r_1, r_2) = det\begin{vmatrix}\Psi_1(r_1) & \Psi_2(r_1)\\ \Psi_1(r_2) & \Psi_2(r_2)\end{vmatrix} \tag{2.21}$$

$$\Psi(r_1, r_2) = \frac{1}{\sqrt{2!}}[\Psi_1(r_1)\Psi_2(r_2) \pm \Psi_a(r_2)\Psi_b(r_1)] \tag{2.22}$$

şeklinde olmalıdır. $\Psi(r_1, r_2)$ dalga fonksiyonunu; bozonik sistemler için tanımlanırsa simetrik olması gerektiğinden aradaki işaret (+), fermiyonik sistemler için tanımlanırsa anti simetrik (-) olmalıdır. Denklem (2.22)'de ikinci terimin önüne $e^{i\pi\beta}$ anyonik durumu tanımlayan faz denklem (2.11)'de tanımlandığı gibi anyonik parametre konularak denklem (1.6) elde edilir. Bu metoda Hatree-Fock yaklaşıklığı adı verilir.

Üç özdeş parçacık için Hartree-Fock yaklaşımı gösterilirse;

$$\Psi(r_1, r_2, r_3) = det\begin{vmatrix}\Psi_1(r_1) & \Psi_2(r_1) & \Psi_3(r_1)\\ \Psi_1(r_2) & \Psi_2(r_2) & \Psi_3(r_2)\\ \Psi_1(r_3) & \Psi_2(r_3) & \Psi_3(r_3)\end{vmatrix} \tag{2.23}$$

şeklinde olur. Bu ifadeyi bozonik bir sistem için tanımlayacak olursak,

$$\Psi(r_1, r_2, r_3) = N \begin{bmatrix} \Psi_1(r_1)\Psi_2(r_2)\Psi_3(r_3) + \Psi_1(r_2)\Psi_2(r_1)\Psi_3(r_3) \\ +\Psi_1(r_3)\Psi_2(r_2)\Psi_3(r_1) + \Psi_1(r_1)\Psi_2(r_3)\Psi_3(r_2) \\ +\Psi_1(r_3)\Psi_2(r_1)\Psi_3(r_2) + \Psi_1(r_2)\Psi_2(r_3)\Psi_3(r_1) \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

şeklinde olur[18]. Parçacıklardaki kendi aralarında yer değiştirme enerjiyi etkileyeceği için üstteki gibi yazımı daha uygundur. Dalga fonksiyonu Gaussian formunda, tanımlandığı gibi Hermite veya Laguerre polinomları şeklinde de ifade edilebilir. Kristal faz durumunda parçacıklar birbirleriyle girişim yapmayacak şekilde birbirinde uzak mesafelere yerleştikleri için her bir parçacığın deneme dalga fonksiyonunu Gaussien formunda tanımlamada hiçbir mahsur yoktur. Uzun erimli etkileşmeler için $K_o(r)$ birinci dereceden Bessel fonksiyonları kullanılır. $K_o(r)$ birinci dereceden Bessel Fonksiyonunu seriye açılırsa yani kısa erimli etkileşmeler için,

$$K_o(r) \cong -\log(\mathrm{r}) \quad (2.25)$$

olur. Böylece çok parçacıklı sistemin enerjisini denklem (2.9)'da tanımlanan varyasyon metodu kullanılarak minimum enerji ve bu enerjiye karşılık gelen dalga fonksiyonu bulunur.

Parçacıkların bulunma olasılığı enerjinin minimum değerine karşılık gelen dalga fonksiyonu ifadesi kullanılarak;

$$\rho(r, r') = \langle \Psi^+(r')\Psi(r) \rangle \quad (2.26)$$

denklemiyle tanımlanır[17]. Bulunma olasılığı ifadesiyle iki boyutta harmonik olarak tuzaklanmış anyonik bir sistem de parçacıkların dağılımları hesaplanabilir.

BÖLÜM 3

BULGULAR VE SONUÇLAR

3.1.Bulgular

Bu çalışmada harmonik olarak tuzaklanmış parçacıklardan oluşan anyonik bir sistemin taban durum enerjileri ve yoğunluk dağılımları farklı etkileşme potansiyeli ve anyon parametresine bağlı değişimi sistematik olarak incelenmiştir. Şekil 3.1'de gösterildiği gibi kısa erimli etkileşme enerjisinin; parçacık sayısına bağlı olarak değişimi gösterilmiştir. Parçacık sayısı arttığında enerjinin de yaklaşık lineer olarak arttığı gözlenmiştir. Burada $\upsilon=0$ alındığında sistem aslında bozonik yapıdadır ve daha önceki çalışmalarla uyumludur[2]. Şekil 3.2'de özellikle parçacıkların dağılımlarının farklı bir karakter gösterildiği değerlere bakılmıştır. 6 parçacığın (1,5) ve (0,6), 9 parçacık için (1,8) veya (2,7) ve 17 parçacık içinde (1, 5, 11) veya (1, 6, 10) dağılımlarından hangisinin gözleneceğine bakılmıştır. Literatürdeki çalışmalarda kısa erimli etkileşmeler 6 parçacık için (0,6), 9 parçacık için (1,8) ve 17 parçacık için (1, 5, 11) dağılımı görülmüştür ve elde ettiğimiz sonuçlar bu çalışmalar ile uyumludur[20].

Şekil 3.3'de kısa erimli etkileşmeler de parçacık sayısına bağlı olarak N=4-17 parçacık sayısı için dağılımlar gösterilmiştir.

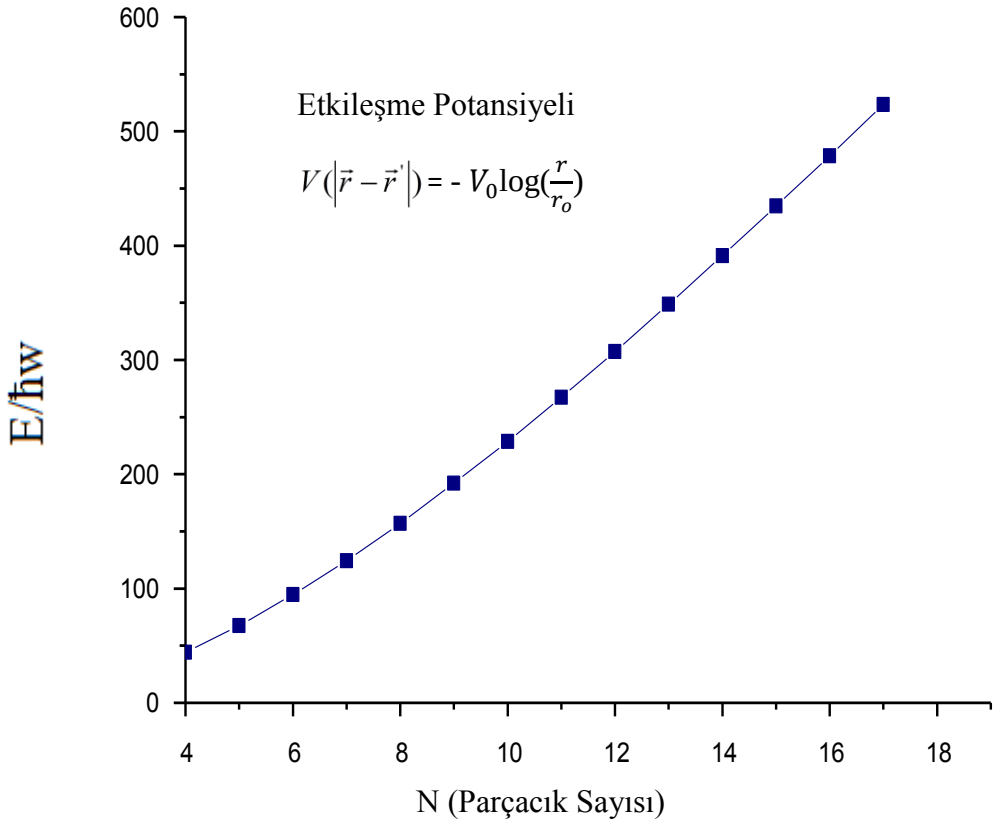
Şekil 3.4'de N=6, 9 ve 17 parçacık için dağılımlar kısa ve uzun erimli etkileşme potansiyeli tanımı altında elde edilen sonuçlar literatürdeki deneysel bir çalışma ile kıyaslanmıştır. Uzun erimli etkileşme durumunda deneysel sonuçla tamamen benzer sonuçlar elde edilmiştir.

Şekil 3.5'de ise kısa erimli etkileşme potansiyeli tanımı ile elde edilen sonuçlar literatürde bulunan farklı etkileşme tanımlarıyla ve çözüm yöntemleriyle bulunan

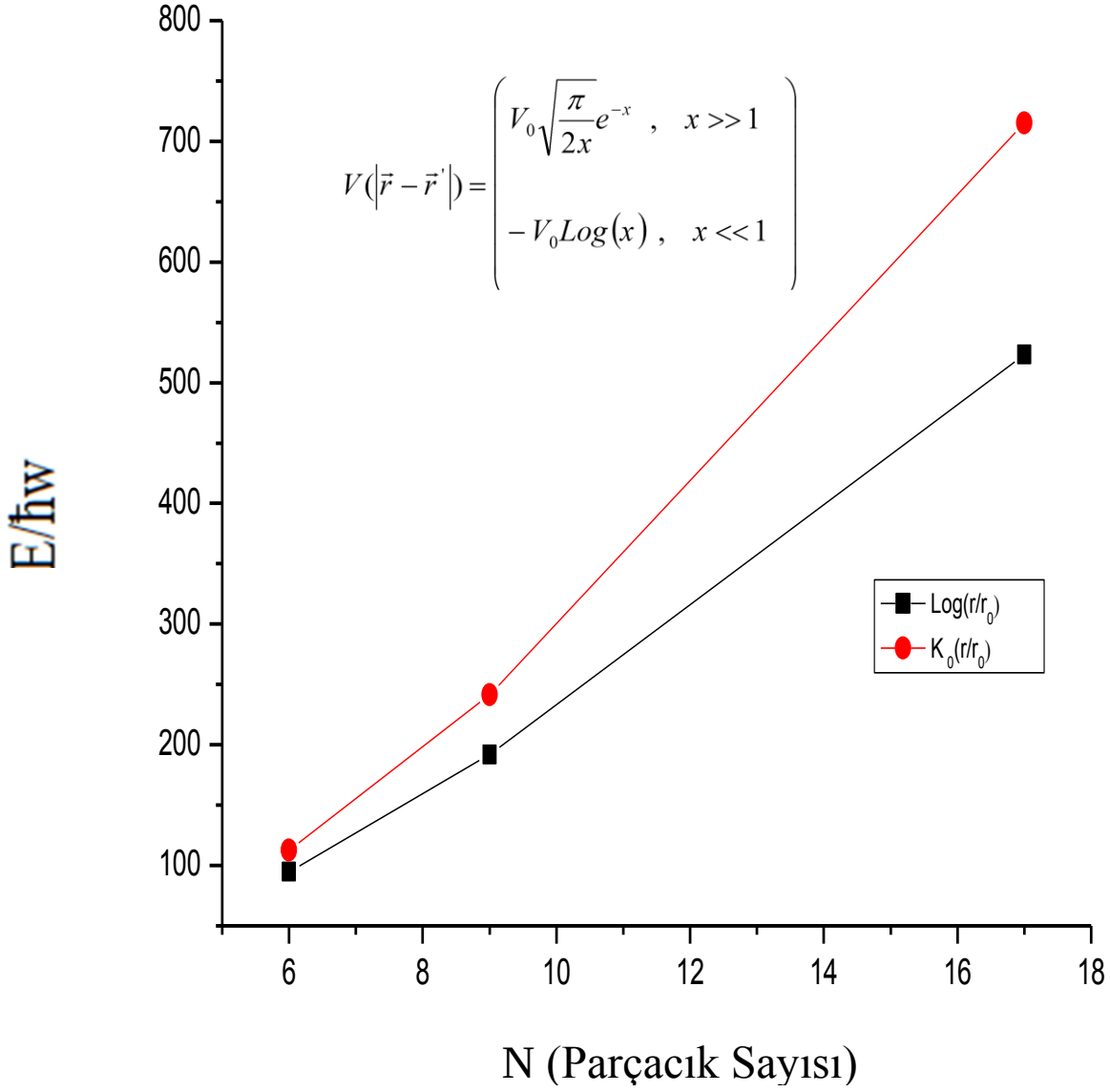
sonuçlarla karşılaştırılması verilmiştir. Ying-Ju tarafından yapılan çalışmalara bakıldığında kısa erimli (ln(r)) ve uzun erimli (1/r) etkileşme potansiyeli tanımlama ile bulunan sonuçlar bu tez çalışmasında bulunan uzun ve kısa erimli etkileşme sonuçlarıyla büyük ölçüde benzerlik göstermektedir[22].

Şekil 3.6, Şekil 3.7, Şekil 3.8 ve Şekil 3.9 da parçacık sayısı N=4-17 için kısa erimli etkileşme altında taban durum için anyon parametresine bağlı değişimi gösterilmiştir. Burada sonuçları kıyaslamak amacıyla özellikle anyon parametrenin bozon limitine yakın değerlerine (υ=0.1 ve υ=0.2) bakılmıştır.

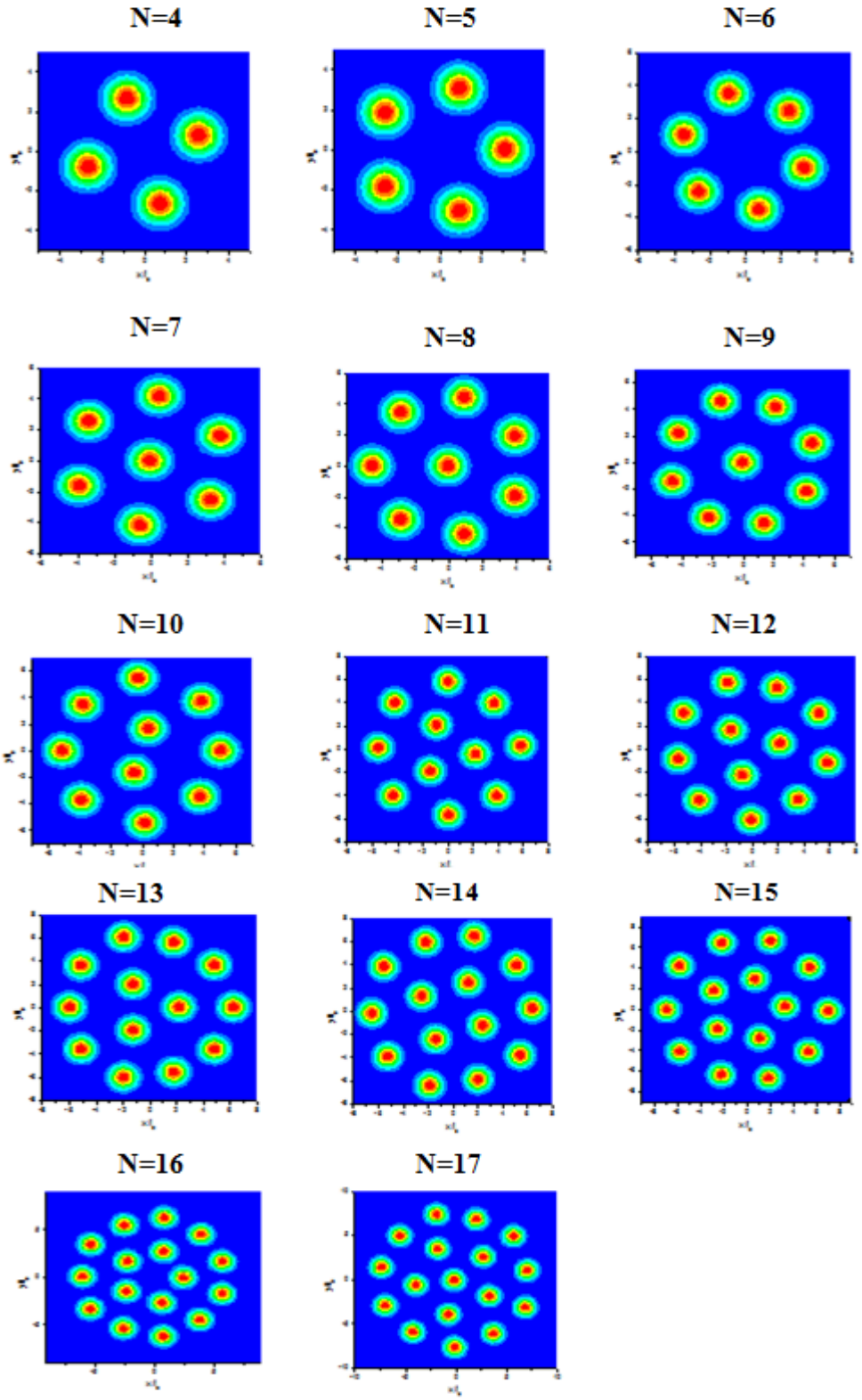
Şekil 3.10, Şekil 3.11 ve Şekil 3.12 de uzun ve kısa erimli etkileşme potansiyeli tanımı altında farklı anyon parametresi değerlerinde N=6, 9 ve 17 için taban durum dağılımları önceki çalışmalarla karşılaştırılmıştır.



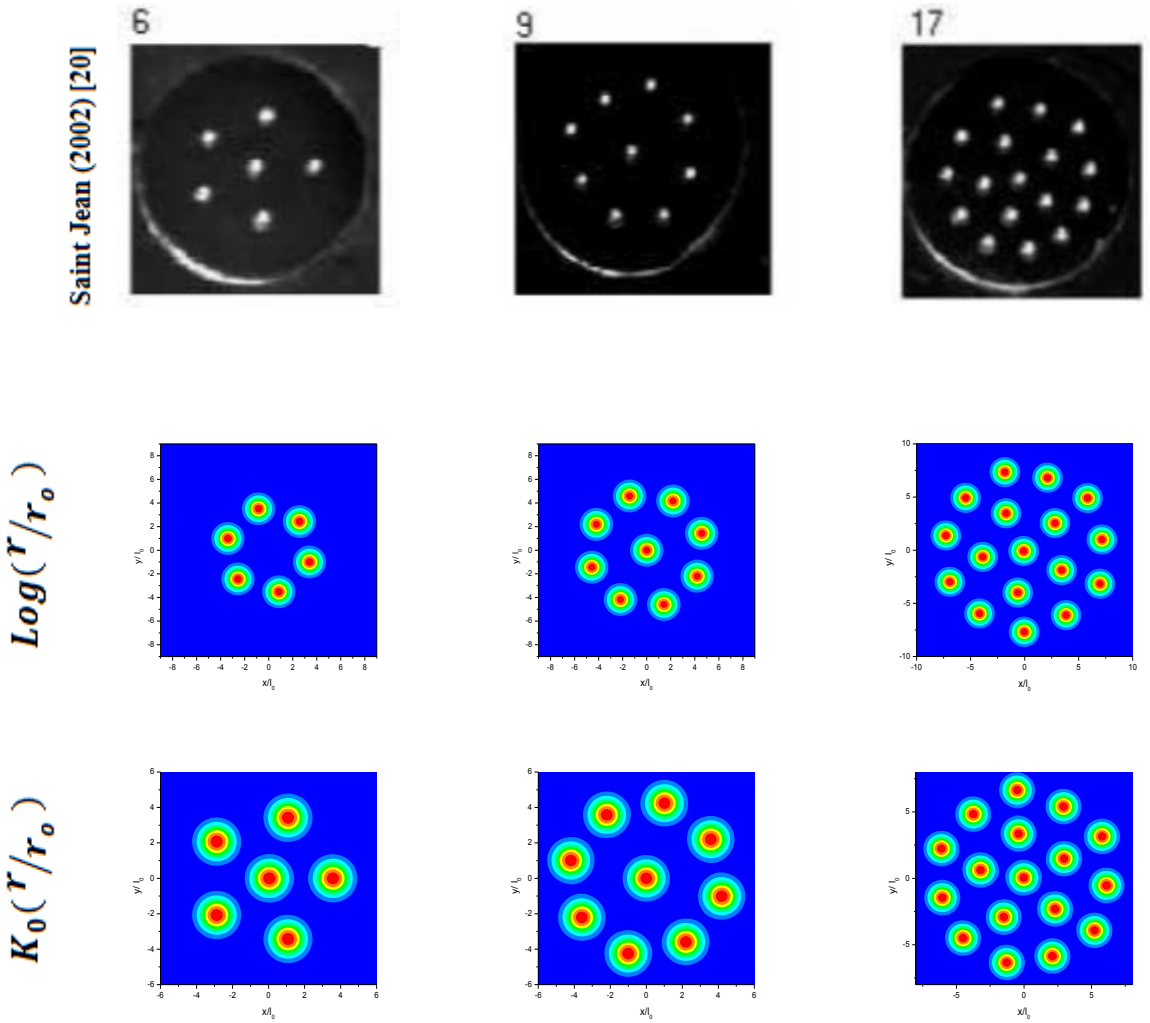
Şekil-3.1: Parçacık sayısına bağlı olarak sistemin enerjisinin $V_0 = 5\hbar w$ çiftlenim sabitine ve υ=0 anyonik parametresine göre değişimi.



Şekil-3.2: Uzun ve kısa erimli etkileşmelerde, $V_0 = 5\hbar w$ çiftlenim sabitine υ=0 anyonik parametre değerindeparçacık sayısına bağlı olarak enerjideki değişimi.

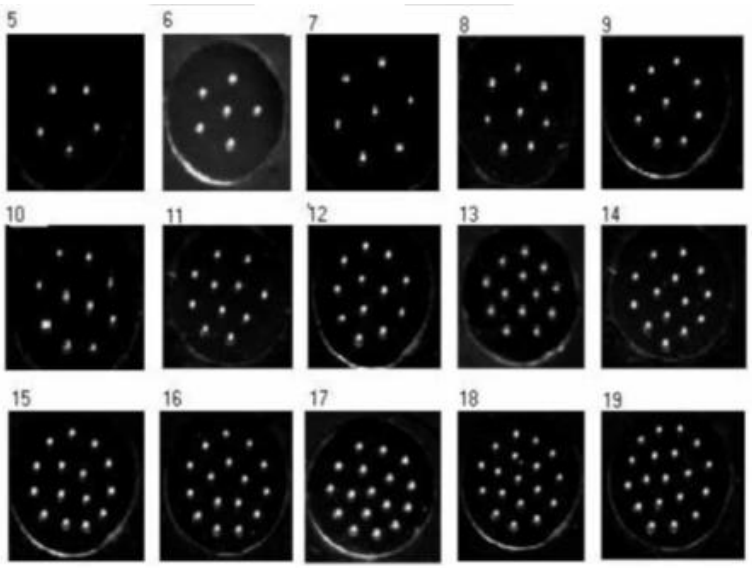


Şekil-3.3:Kısa erimli (log($\frac{r}{r_o}$))etkileşmedeparçacık sayısına bağlı olarakyoğunluk dağılımınlarının$V_0 = 5\hbar w$çiftlenim şiddetine ve υ=0 anyonik parametresine bağlı olarak değişimi.



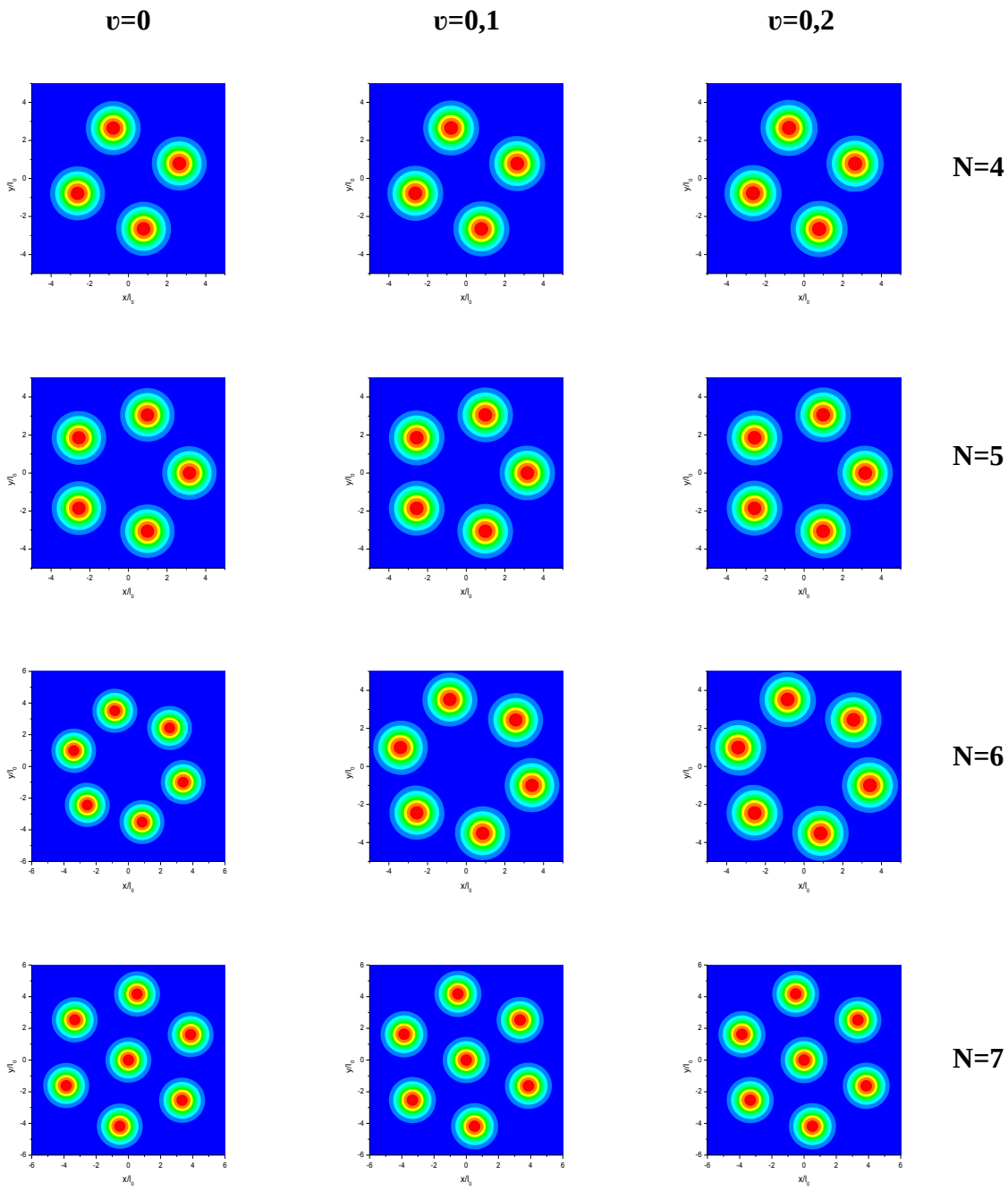
Şekil-3.4: Kısa ve uzun erimli etkileşmelerde yoğunluk dağılımlarının N=6,9 ve 17 deneysel sonuçlarla kıyaslanması.

N_0	Bizim sonuçlar (V.M)	M. Saint Jean (Deneysel)	Campbell *et al.* (M.D)	Ymg-Ju *et al.* (M.D)	Bolton *et al.* (M.C)	Bedanov *et al.* (M.C)	Schweigert *et al.* (M.D)	Ymg-Ju *et al.* (M.D)
V(r)	Log(r)	Ln(1/r)	Ln(1/r)	Ln(1/r)	1/r	1/r	1/r	1/r
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5
7	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
8	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7
9	1/8	1/8	1/8	1/8	2/7	2/7	2/7	2/7
10	2/8	2/8	2/8	2/8	2/8	2/8	2/8	2/8
11	3/8	3/8	3/8	3/8	3/8	3/8	3/8	3/8
12	3/9	3/9	3/9	3/9	3/9	3/9	3/9	3/9
13	4/9	4/9	4/9	4/9	4/9	4/9	4/9	4/9
14	4/10	4/10	4/10	4/10	4/10	4/10	4/10	4/10
15	5/10	4/11	4/11	5/10	5/10	5/10	5/10	5/10
16	5/11	5/11	5/11	1/5/10	1/5/10	1/5/10	1/5/10	1/5/10
17	1/5/11	1/5/11	1/5/11	1/5/11	1/5/11	1/6/10	1/6/10	1/6/10

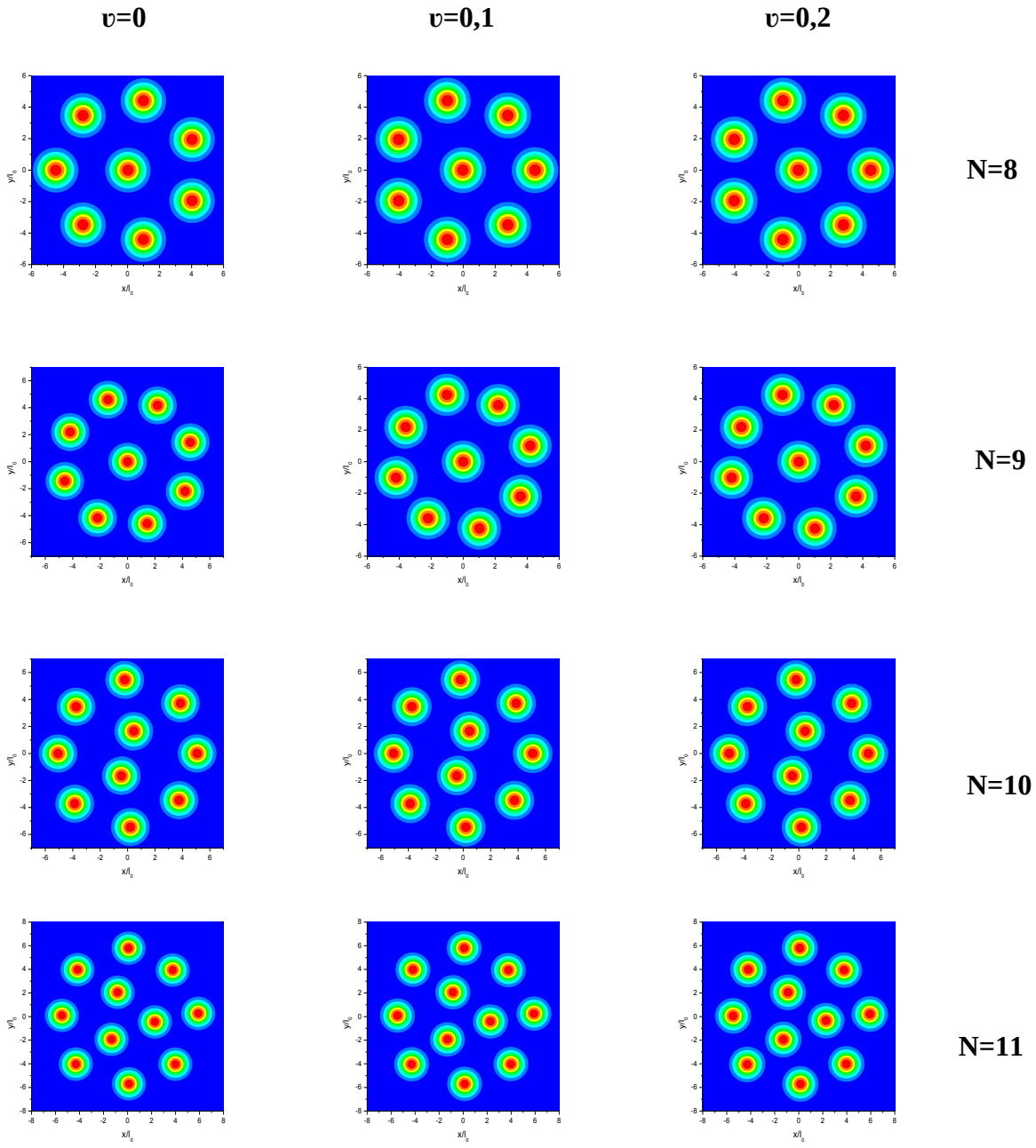


Europhys. Lett., **55** (1), pp. 45–51 (2001) **[20]**

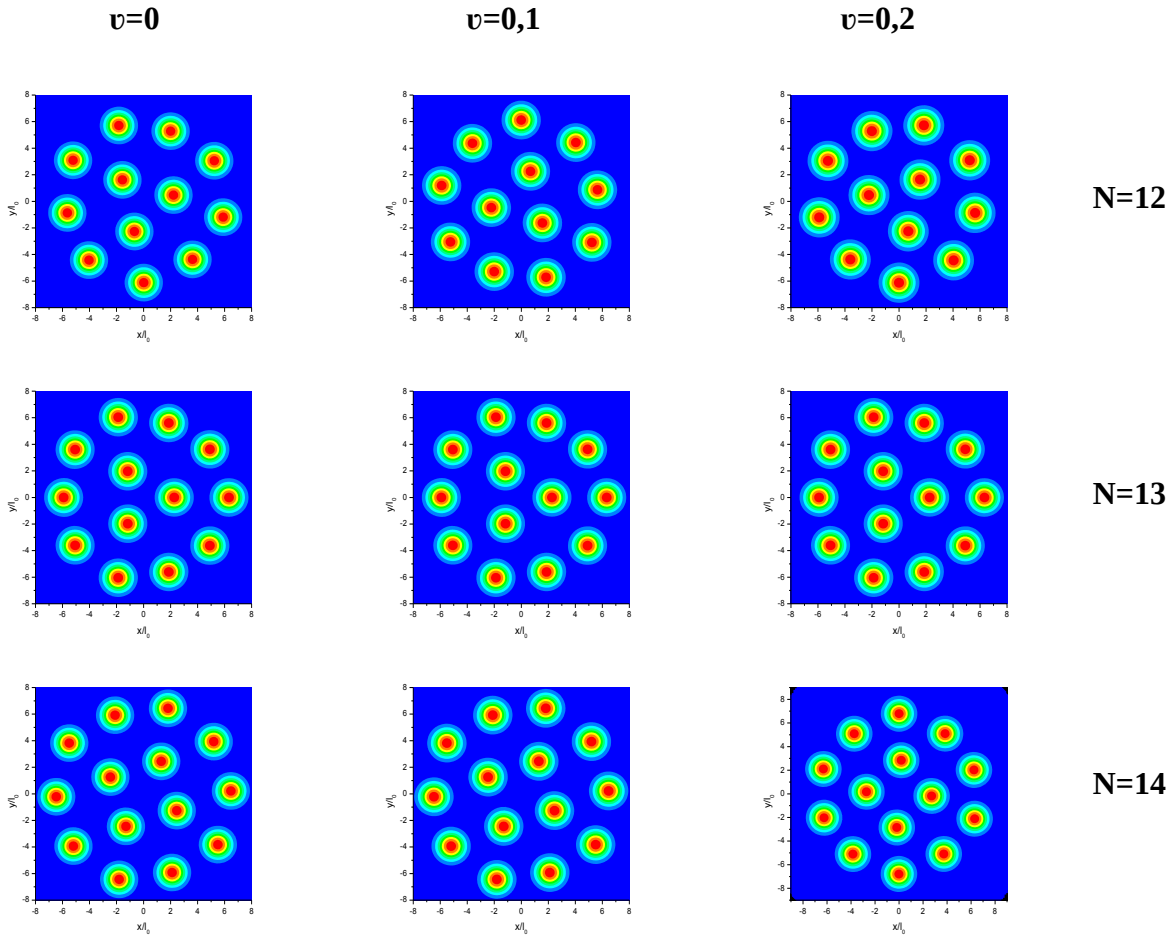
Şekil-3.5: Kısa erimli ($\log(\frac{r}{r_o})$) etkileşmeleri için, N=1,2,....,16,17 parçacık için varyasyon metodu ile elde edilen sonuçların literatürde bulunan teorik ve deneysel sonuçlarla kıyaslanması.



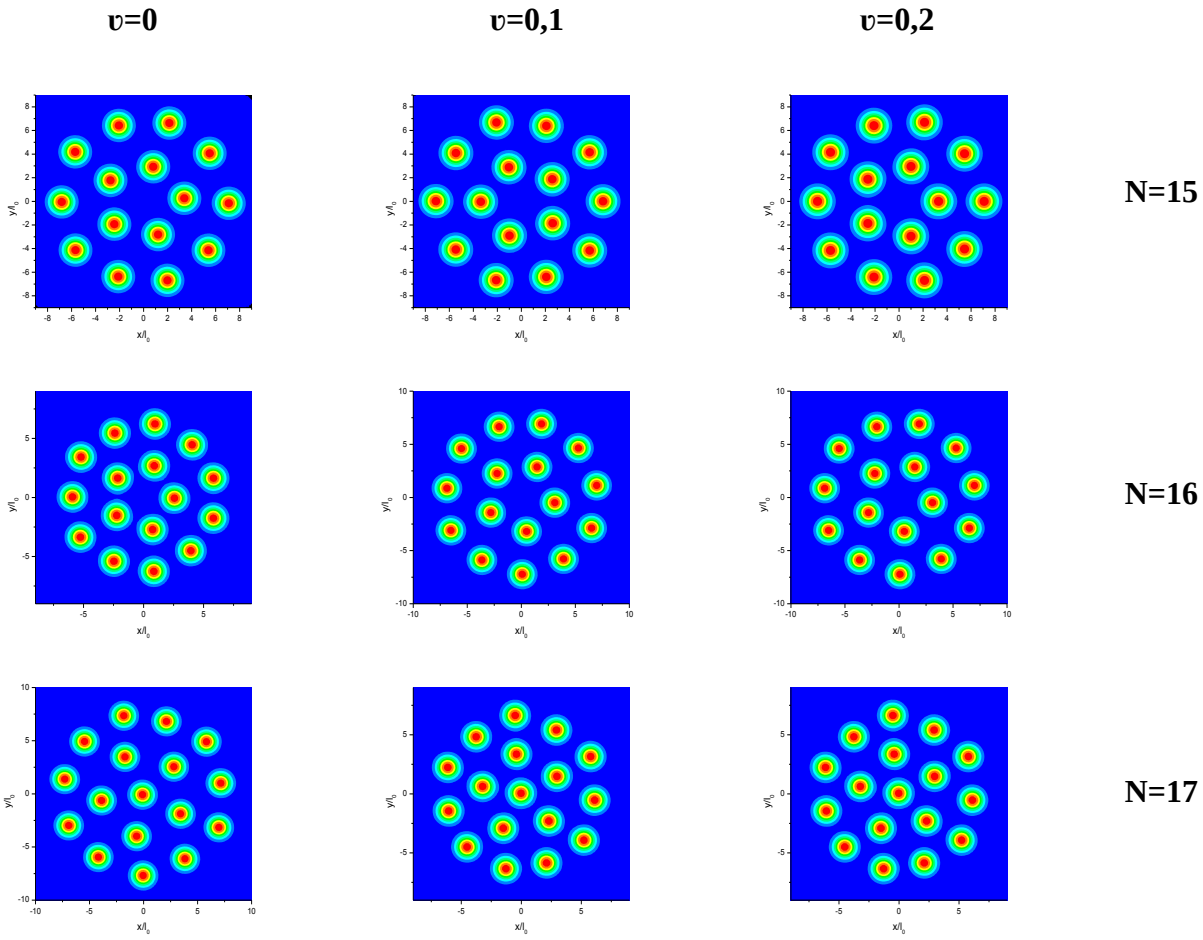
Şekil-3.6:Log($\frac{r}{r_o}$)etkileşme potansiyeli kullanılarak, yoğunluk dağılımlarının N=4,5,6 ve 7 parçacık için anyon parametresi υ=0,υ=0,1 ve υ=0,2 göre değişimleri.



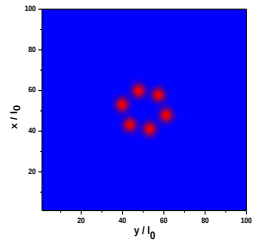
Şekil-3.7:Log($\frac{r}{r_o}$)etkileşme potansiyeli kullanılarak, yoğunluk dağılımlarının N=8,9,10 ve 11 parçacık için anyon parametresi υ=0,υ=0,1 ve υ=0,2 göre değişimleri.



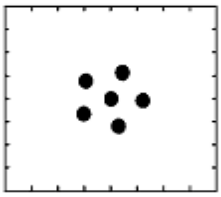
Şekil-3.8:Log($\frac{r}{r_o}$)etkileşme potansiyeli kullanılarak, yoğunluk dağılımlarının N=12,13 ve 14 parçacık için anyon parametresi υ=0,υ=0,1 ve υ=0,2 göre değişimleri.



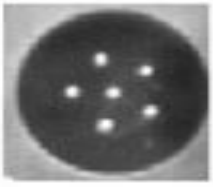
Şekil-3.9:Log($\frac{r}{r_o}$)etkileşme potansiyeli kullanılarak, yoğunluk dağılımlarının N=15,16 ve 17 parçacık için anyon parametresi υ=0,υ=0,1 ve υ=0,2 göre değişimleri.



A.I.Mese (2011) [3]



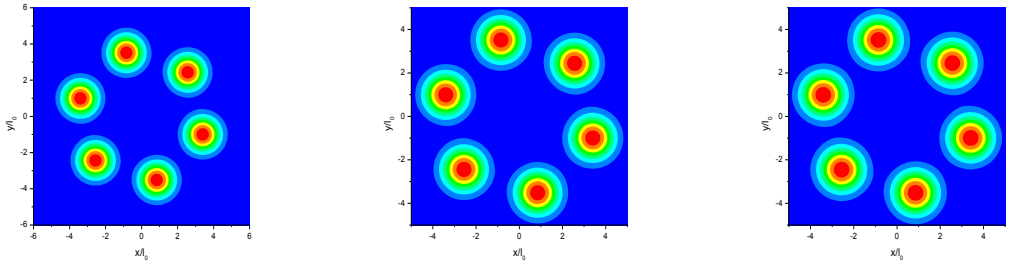
Apolinario (2005) [19]



Saint Jean (2002) [20]

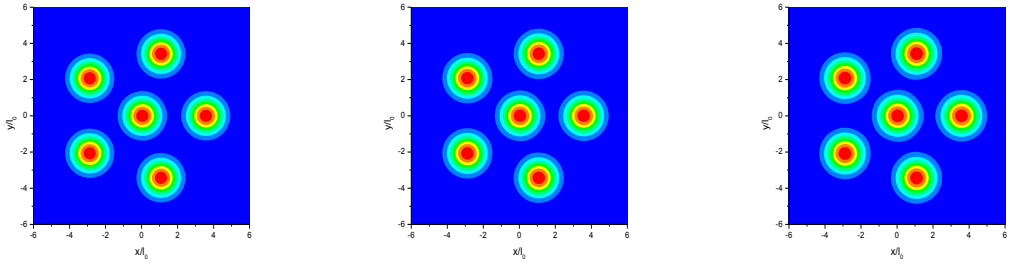
υ =0 **υ =0,1** **υ =0,2**

$Log(r/r_o)$

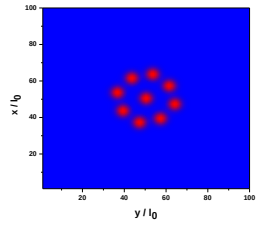


υ =0 **υ =0,1** **υ =0,2**

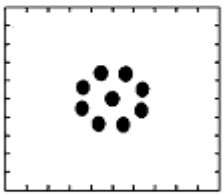
$K_0(r/r_o)$



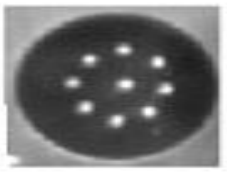
Şekil-3.10:N=6 parçacık için, kısa ve uzun erimli etkileşmeler altında yoğunluk dağılımlarının anyon parametresine bağlı olarak deneysel ve teorik çalışmalarla (υ =0) karşılaştırılması.



A.I.Mese (2011) [3]



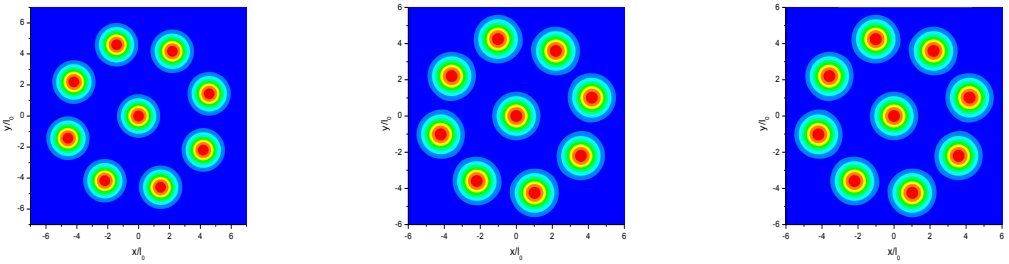
Apolinario (2005) [19]



Saint Jean (2002) [20]

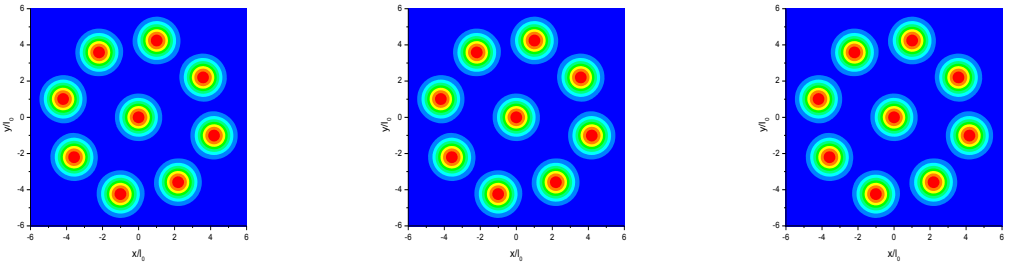
υ =0 **υ =0,1** **υ =0,2**

$Log(r/r_o)$

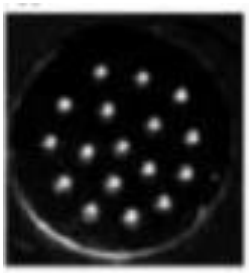


υ =0 **υ =0,1** **υ =0,2**

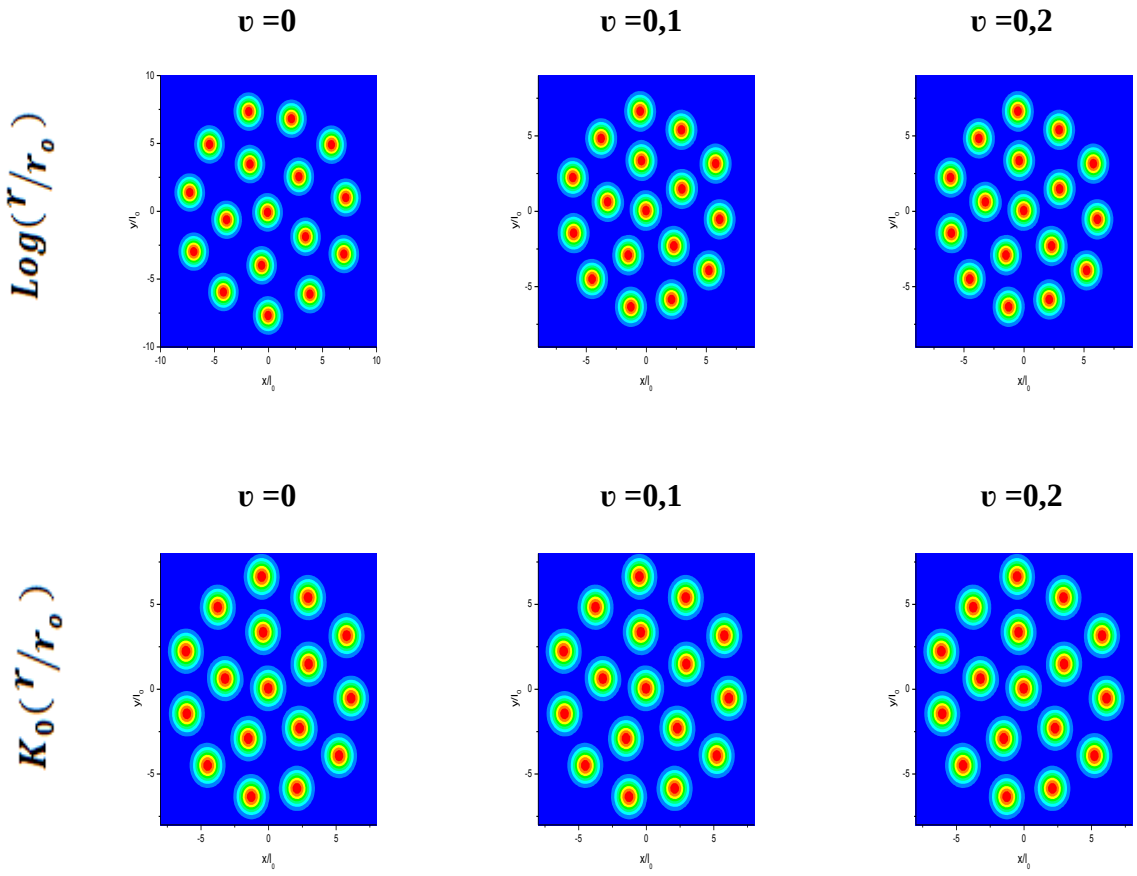
$K_0(r/r_o)$



Şekil-3.11:N=9 parçacık için, kısa ve uzun erimli etkileşmeler altında yoğunluk dağılımlarının anyon parametresine bağlı olarak deneysel ve teorik çalışmalarla (υ =0) karşılaştırılması.



Saint Jean (2002) [20]



Şekil-3.12:N=17 parçacık için, kısa ve uzun erimli etkileşmeler altında yoğunluk dağılımlarının anyon parametresine bağlı olarak deneysel çalışma ile (υ =0) karşılaştırılması.

3.2.Sonuçlar

Bu tez çalışmasında iki boyutlu sistemler için bozonlar arası Coulomb etkileşmesi ifadesi üç boyutta Poisson denklemi çözülerek iki boyutta indirgendiğinde uzun erimli$K_o(r)$ birinci dereceden Bessel fonksiyonunu ve kısa erimli log(r) etkileşme potansiyeli kullanılarak sonuçlar elde edilmiştir. İki boyutta harmonik olarak tuzaklanan bir bozonik sistemin taban durum enerjilerinin ve yoğunluk dağılımlarının parçacık sayısına bağlı olarak değişimi Gaussian dalga fonksiyonu kullanılarak varyasyon metodu kullanılarak hesaplanmıştır. $K_o(r)$ birinci dereceden Bessel fonksiyonu etkileşme potansiyeli kısa erimli ve uzun erimli etkileşmelerde geçerlidir. Parçacıklar için kullanılan yöntemle elde edilen sonuçlar literatürde bulunan benzer yöntemlerle yapılan çalışmalarla karşılaştırıldığında parçacıkların yoğunluk dağılımlarının bazı parçacık sayılarında farklılık gösterildiği bulunmuştur. Bunun nedeni kısa erimli ve uzun erimli potansiyel etkileşmelerinin yanlış kullanılmasıdır. Bose-Einstein yoğuşması ile ilgili deneysel çalışmalarda kısa erimli etkileşmelerin log(r) bir davranış sergilendiği gözlenmiştir[20]. Örneğin; Şekil 3.10, Şekil 3.11 ve Şekil 3.12 parçacık sayısına göre parçacıklar arasındaki taban durumunda kısa erimli ve uzun erimli etkileşmelerin yoğunluk dağılımları bozon limiti civarında ele alınarak literatürde bulunan deneysel ve teorik çalışmalar karşılaştırılmıştır. Yapılan karşılaştırılmada elde edilen sonuçlar literatürde bulunan sonuçlarla tutarlılık göstermektedir. Fakat Şekil 3.10'da 6 parçacık için bulduğumuz sonuçların (Apolinario 2005) tarafından yapılan teorik ve (Saint Jean 2002) tarafından yapılan deneysel sonuçlarla kıyaslandığında kısa erimli sonuçların farklı olduğu görülmektedir. Bunun nedeni; bu kişilerin çalışmalarında etkileşmeler kısa ve uzun erimli olarak ayrılmamış sadece kısa erimli etkileşmeleri tanımlayan log(r) etkileşme potansiyeli kullanılmıştır. Ancak log(r) ifadesi uzun erimli etkileşmelerde kullanmak çok doğru değildir. Çünkü bu etkileşme ifadesi BEY gibi kısa erimli etkileşmelerde tanımlı olduğu deneysel sonuçlardan görülmektedir. Bu çalışmadaki bir diğer farklılık kullanılan çözüm yöntemidir. Literatürdeki çalışmalar genellikle Moleküler Dinamik ya da Monte Carlo yöntemleriyle yapılmıştır. İki boyutta uzun erimli etkileşmeler için $K_o(r)$ kullanmak daha gerçekçidir. Bu çalışmadaki sonuçlar ise

tek parçacık dalga fonksiyonu Gaussian formunda tanımlanıp varyasyon yöntemiyle elde edilmiştir.

Bir sonraki adımda ise, parçacıklar arasındaki etkileşme potansiyel enerjileri karşılaştırılmıştır. Yani kısa erimli ve uzun erimli etkileşmeler arasındaki enerji değişimi Şekil 3.2'de ifade edilmiş ve bazı kritik noktadaki parçacık sayıları belirtilmiştir. Şekil 3.2'de açıkça görüldüğü gibi uzun erimli $K_o(r)$ etkileşme enerjisi kısa erimli log(r) etkileşme enerjisinden daha büyük olduğu görülmektedir.

Bir sonraki aşamada parçacık sayısının anyonik parametreye göre değişimi incelenmiş ve Şekil 3.6, Şekil 3.7, Şekil 3.8 ve Şekil 3.9'da yoğunluk dağılımları gösterilmiştir. Anyonik parametrenin (υ) değişmesine rağmen parçacıkların şekillenimleri değişmemiştir. Ayrıca anyonik parametreye göre taban durumdaki enerjinin değiştiği sonuçlarda gözlenmiştir.

Sonuç olarak, bu tez iki boyutlu anyonik sistemlerde Wigner kristali oluşumunda etkileşmelerin öneminin açıklanmasına yönelik bir katkı olarak değerlendirilebilir. Elde edilen sonuçların ileride yapılabilecek olan Wigner kristali oluşmasında anyon parametresinin ve etkileşmelerin önemini daha iyi anlamaya bir temel olabilir. Ayrıca anyonik parametrenin değişimi daha geniş bir aralıkta incelenebilir. Örneğin, anyonik parametre fermiyonik limit durumunda incelendiğinde ve kesirli kuantum Hall etkisini anlamamızda yardımcı olabileceği düşünülmektedir. Bu konunun anlaşılması kuantum bilgisayarı kavramının temelini oluşturacağı öngörülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] E. P. Wigner***, On the interaction of elektrons in metals***, Phys. Rev. 46, 1002 (1934)

[2] A.I. Mese, P. Capuzzi, Z. Akdeniz, S.E. Okan ve M.P. Tosi, ***Coulomb crystallites from harmonically confined charged bosons in two dimensions***, J.Phys:Cond. Matt. 20, 335222 (2008)

[3] A.I. Mese, P. Capuzzi, S. Aktas, Z. Akdeniz ve S.E. Okan, ***Condensation of two-dimensional harmonically confined bosons with Bessel-type interactions***, Phys. Rev. A 84, 043604 (2011)

[4] www.kuark.org/2013/10/bose-einstein-yoğunlaşması

[5] Serpil Sucu, Trakya Üniversitesi, ***Düşük Boyutlarda Tuzaklanmış Soğuk Atomik Gazlar***, Doktora Tezi (2011)

[6] Eileen Nuget, ***Novel Traps For Bose-Einstein Condensates***, St. Catherine's College Universty of Oxford, England (2009)

[7] M. P. Tosi, ***Introduction to the theory of Bose-Einstein Condensation***, Scuola Normale Superiore di Pisa (2003)

[8] D. S. Durfee and W. S. Ketterle, ***Experimental studies of Bose-Einstein condensation***, Opt. Express, 2:299–313, Optical Society of America (1998)

[9] B. Anderson, D. Scherer, C. Weiler, and T. Neely, ***College of Optical Sciences***, University of Arizona

[10] J. K. Jain***, Theory of the fractional quantum Hall effect***, *Phys. Rev. B*, 41, 7653 (1990)

[11] F. Wilzcek, ***Magnetic Flux, Angular Momentum and Statistics***, *Phys. Rev. Lett*. 48, 1144-1146 (1982)

[12] F. Wilzcek, ***Quantum Mechanics of Fractional-Spin Particles***, Phys. Rev. Lett. 49,957-959 (1982)

[13] Ezawa, ***Quantum Hall Effects: Field Theoretical Approach and Related Topics***, World Scientific Publishing Company, Singapore(2008)

[14] A. Lopez and E. Fradkin***, Fractional Quantum Hall Effect and Chern-Simons Gauge Theories***, Phys. Rev. B. 44,5246 (1991)

[15] B. Abdullaev, U. Rössler and M. Musakhanov, ***Approximate formula of for the ground state enerry of anyons in 2D parabolic well***, Phys. Rev. B 76, 075403 (2007)

[16] Nelson D.R and Seung H.S, ***Theory of Melted Flux Liquids***, Phys. Rev. B, 39 9153 (1989)

[17] D. R. Hartree***, The Wave Mechanics of an Atom with a Non-Coulomb Central Field***, Proc.Cambridge Philos. Soc., 24, 89-110 (1928)

[18] J.C. Slater***, Note on Hartree's Method***, Phys. Rev. *Lett*. 35, 210, (1930)

[19] S. W. S. Apolinario, B. Partoens and F. M. Peeters, ***Structure and spectrum of anisotropically confined two-dimensional clusters with logarithmic interaction***, Physical Review E 72, 046122 (2005)

[20] M Saint Jean and C Guthmann, ***Macroscopic two-dimensional Wigner asymmetric Islands***, J. Phys.: Condens. Matter 14, 13653–13660 (2002)

[21] L. J. Campbell and R. M. Ziff, ***Vortex patterns and energies in a rotating superfluid***, Phys. Rev. B. 20***,*** 1886 (1979)

[22] Lai Ying-Ju and I. Lin, ***Packings and defects of strongly coupled two-dimensional Coulomb clusters: Numerical simulation***, Phys. Rev. E, 60 4743 (1999)

[23] F. Bolton, U. Rössler, ***Classical model of a Wigner crystal in a quantum dot***, Superlattices and Microstructures 13,139 (1993)

[24] V. Bedanov and F. M. Peeters, ***Ordering and phase transitions of charged particles in a classical finite two-dimensional system***, Phys. Rev. B. 49,2667 (1994)

[25] V. A. Schweigert, F. M. Peeters and P. Singha Deo, ***Vortex Phase Diagram for Mesoscopic Superconducting Disks***, Phys. Rev. Lett., 81,2783 (1998)

[26] M. Saint Jean, C. Even and C. Guthmann, ***Macroscopic 2D Wigner Islands***, Europhys. Lett., 55 (1), pp. 45–51 (2001)

[27] Romanovsky I, Yannouleas C and Landman U, ***Crystalline Boson İn Harmonic Traps: Beyond the Gross- Pitaevskii Mean Field*** , Phys. Rev.Lett., 93,230405, (2004)

[28] F. Dalfovo, S. Giorgini, Lev P. Pitaevskii ve S. Stingari, ***Bosons in Anisotropic Traps: Ground State and Vortices***, Rev. Mod. Phys. 71, 463 (1999)

[29] H. Uncu, D. Tarhan, E. Demiralp ve O. E. Mustecaplioglu, ***Bose-Einstein condensate in a harmonic trap with an eccentric dimple potential***, Laser Physics, 18, 331-334 (2008)

[30] C. C. Grimes ve G. Adams, ***Evidence for a Liquid-to-Crystal Phase Transition in a Classical, Two-Dimensional Sheet of Electrons,*** Phys. Rev. Lett. 42, 795 (1979)

[31] J. K. Jain, ***Composite-fermion approach for the fractional quantum Hall effect,***
Phys. Rev. Lett. 63, 199 (1989)

[32] H. Fertig ve M. Shayegan, ***In Perspectives in Quantum Hall Effects***, Edited by S. Das Sarma and A. Pinczuk, Wiley, New York (1997)

[33] H. Fukuyama, P. M. Platzman ve P. W. Anderson, ***Two-dimensional electron gas in a strong magnetic field,*** Phys. Rev. B 19, 5211 (1979)

[34] S. Bravyi ve B. M. Tarhal***, A no-go theorem for a two-dimensional self-correcting quantum memory based on stabilizer codes,*** New J. Phys. 11,043029 (2009)

[35] C. Manuel ve R. Tarrach, ***Contact Interactions of Anyons***, Phys. Lett. B, 268, 222 (1991)

[36] A.W.W. Ludwig, D. Poilblanc, S. Trebst ve M. Troyer, ***Two-dimensional quantum liquids from interacting non-Abelian anyons,*** New J.Phys.13,045014 (2011)

[37] D.H. Lee ve M. P. A. Fisher, ***Anyon superconductivity and the fractional quantum Hall effect***, Phys. Rev. Lett. 63, 1442 (1989)

[38] R. B. Laughlin, ***Anomalous Quantum Hall Effect: An Incompressible Quantum Fluid with Fractionally Charged Excitations,*** Phys. Rev. Lett. 50, 1395 (1983)

[39] Han Zhu, Yong P. Chen, P. Jiang, L. W. Engel, D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, ***Observation of a Pinning Mode in a Wigner Solid with v=1/3 Fractional Quantum Hall Excitations,*** Phys. Rev. Lett. 105, 126803 (2010)

[40] Charlotte Gils, Eddy Ardonne, Simon Trebst, Andreas WW Ludwig, Matthias Troyer and Zhenghan Wang, ***Collective States of Interacting Anyons, Edge States, and the Nucleation of Topological Liquids,*** , Phys. Rev. Lett. 103, 070401 (2009)

[41] J.Shabani, T. Gokmen, Y. T. Chiu and M. Shayegan, ***Evidence for Developing Fractional Quantum Hall States at Even Denominator 1/2 and 1/4 Fillings in Asymmetric Wide Quantum Wells,*** Phys. Rev. Lett. 103,256802 (2009)

[42] J. Shabani, Y. Liu and M. Shayegan, ***Fractional Quantum Hall Effect at High Fillings in a Two-Subband Electron System,*** Phys. Rev. Lett. 105,246805,
633 (2010)

[43] C. J. Pethick and H. Smith, **Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases**, Cambridge Uni. Press (2002)

ÖZGEÇMİŞ

22 Eylül 1990 tarihinde Malatya'da doğdum. İlköğretimi Kartal Marmara İlkokulu'nda, ortaöğrenimimi Selimiye Ortaokulu'nda ve lise öğrenimimi Üsküdar Halide Edip Adıvar Anadolu Lisesinde tamamladıktan sonra Eylül 2007 yılında Trakya Üniversitesi Fizik Bölümü'nde lisans eğitimime başladım ve Haziran 2012 yılında mezun oldum. Aynı yılın Eylül ayında Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Fizik Anabilim Dalı Katı Hal Fiziği Ana Bilim Dalında yüksek lisans öğrenimime başladım.