T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞERLENDİRMELER VE REZİDÜ CİSİMLERİ

AHMET ARICI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ
ANABİLİM DALI
Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. FİGEN ÖKE
2010
EDİRNE

T.C.

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞERLENDİRMELER VE REZİDÜ CİSİMLERİ

AHMET ARICI

YÜLSEK LİSANS TEZİ

CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ
ANABİLİM DALI

Tez yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. FİGEN ÖKE

2010

EDİRNE

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Değerlendirmeler ve Rezidü Cisimleri

Ahmet ARICI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ ANABİLİM DALI

Bu tez 25/10/ 2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Hülya İŞCAN
Üye

Yrd. Doç. Dr. Figen ÖKE
Danışman

Yrd. Doç. Dr. Şaban AKTAŞ
Üye

ÖZET

Bir K cismi üzerindeki v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine genişlemelerinin sınıflandırılmasının amaçlandığı bu çalışmada izlenen plan aşağıdaki biçimdedir.

I. Bölümde değerlendirmeler ve cisim genişlemeleri ile ilgili gerekli ön bilgiler yer almaktadır.

II. Bölümde değerlendirmelerin genişlemeleri ve genişlemelerin sayısı ile değerlendirmelerin rankı ele alınmıştır.

III. Bölümde bir K cismi üzerinde değer grubu toplamsal olan değerlendirmelerin $K(x)$ cismine genişlemeleri sınıflandırılmıştır.

SUMMARY

The plan of this study which aims to obtain a classification of extensions of a valuation v of a field K to K(x) is below:

In the Chapter I, basic knowledge for valuations and field extensions is given.

In the Chapter II, extensions of valuations and rank of a valuation are studied.

In the Chapter III, extensions of a valuation on a field K to K(x) are classified.

ÖNSÖZ

Bana, kendisi ile böyle bir çalışma imkanı tanıyan ve bu çalışmanın tamamlanmasında yardımını ve rehberliğini esirgemeyen değerli hocam Yrd.Doç.Dr. Figen ÖKE'ye derin saygı ve şükranlarımı sunarım.

Bakta bölüm bakkanımız, değerli hocam, Prof.Dr. Hülya IŞıCAN olmak üzere üzerimde emeği bulunan bölümümüzün tüm değerli hocalarına ve asistanlarına sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET é é é

GİRİŞ

Bir değişkenli cebirsel fonksiyonlar teorisi ve cebirsel sayılar teorisi arasındaki ilişki değerlendirme teorisinin ortaya çıkmasına neden olmuştur. Dedekind ve Weber'in cebirsel fonksiyonlar aritmetik yaklaşımları, Riemann yüzeyinin bir noktasında kuvvet serisi açılımlarının elde edilmesi problemini ortaya çıkarmıştır. Hensel böyle bir yaklaşımı p-adik sayılar teorisinde yapmış ve kuvvet serisi açılımlarının cebirsel sayılar ve cebirsel fonksiyonlar teorisinde sık sık ortaya çıkan kongrüans sistemlerinin özelliklerini açıklamakta yardımcı olacağını göstermiştir.
Hensel 1908 yılında yayınladığı "Theorie Der Algebraischen Zahlen" adlı kitabında değerlendirme teorisi alanındaki çalışmalara taban oluşturan indirgenebilirlik (reducibilitiy) lemmasına yer vermiştir. Hensel'in bu çalışmaları daha sonra Chevalley, Krull ve Ostrowski tarafından geliştirilmiştir.

Bir cismin değerlendirmesi o cismin üzerinde bir Hausdorff topolojisi tanımladığından değerlendirme teorisi cebirsel topolojinin bir dalı olarak da göz önüne alınmaktadır.

Bu çalışmada bir K cisminin değer grubu toplamsal olan değerlendirmelerinin $K(x)$ cismine genişlemelerinin sınıflandırılması amaçlanmıştır.
Rezidül transandant genişlemeler 1967 yılında Nagata tarafından ele alınmış ve bu konudaki çalışmaları daha sonraki çalışmalara ışık tutmuştur. 1980'li yıllarda Ohm, Popescu, Alexandru ve Zaharescu tarafından bu konuda önemli aşamalar kaydedilmiştir. Bir K cisminin değer grubu toplamsal olan değerlendirmelerin $K(x)$ cismine rezidül transandant genişlemeleri ve bu genişlemeleri belirleyen çiftler konusu Alexandru, Popescu ve Zaharescu tarafından çalışılmış ve çalışmaları 1988 yılında yayınlanmıştır. Yine aynı grup 1991 yılında bir K cisminin değer grubu toplamsal olan değerlendirmelerin $K(x)$ cismine rezidül transandant genişlemelerini tanımlayan minimal çiftleri belirlemeye çalışmıştır. Sözü edilen bu çalışmalar tezin III. bölümünde yer almaktadır.

1. BÖLÜM

ÖN BİLGİLER

Bu bölümün birinci kısmında değerlendirmeler ile ilgili ön bilgiler, ikinci kısmında ise cisim genişlemeleri ile ilgili ön bilgiler yer almaktadır.

1.1.Değerlendirmeler

1.1.1. Tanım: G çarpımsal (veya toplamsal) değişmeli bir grup, $<$ (veya $>$) G üzerinde bir sıra bağıntısı olsun. Her $\alpha, \beta, \gamma \in G$ için

i) $\alpha < \beta, \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$ (veya $\alpha > \beta, \beta > \gamma \Rightarrow \alpha > \gamma$)

ii) $\alpha < \beta, \alpha = \beta, \beta < \alpha$ (veya $\alpha > \beta, \alpha = \beta, \beta > \alpha$)

hallerinden yalnız biri sağlanır.

iii) $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha.\gamma < \beta.\gamma$ (veya $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$)

koşulları gerçekleniyorsa G grubuna üzerindeki $<$ (veya $>$) bağıntısı ile tam sıralı bir grup denir.

1.1.2.Tanım: K bir cisim, G çarpımsal (veya toplamsal) tam sıralı bir grup olsun.

$v: K \to G \cup \{0\}$ (veya $v: K \to G \cup \{\infty\}$)

biçiminde tanımlanan dönüşüm her $a, b \in K$ için

i) $v(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ (veya $v(a) = \infty \Leftrightarrow a = 0$)

ii) $v(a.b) = v(a).v(b)$ (veya $v(a.b) = v(a) + v(b)$)

iii) $v(a+b) \le \max\{v(a), v(b)\}$ (veya $v(a+b) \ge \min\{v(a), v(b)\}$)

koşullarını gerçekliyorsa v dönüşümüne K cismi üzerinde bir değerlendirme adı verilir.

1.1.3.Tanım: 1.1.2. tanımındaki iii) koşulu yerine $v(a+b) \le v(a)+v(b)$ ifadesi sağlanıyorsa v değerlendirmesine Arşimetsel değerlendirme, aksi halde Arşimetsel olmayan değerlendirme denir.

1.1.4.Tanım: 1.1.2. Tanımındaki G sıralı grubuna v değerlendirmesinin değer grubu denir.

2.3.1.Tanım: G bir sıralı grup, H G nin bir alt grubu olsun. $x \in H$ ve $y \in G$ için $x^{-1} \le y \le x$ iken $y \in H$ oluyorsa H, G nin isolated alt grubudur denir.
G nin kendisinden farklı isolated alt gruplarının sayısına G sıralı grubunun rankı denir ve $rankG$ biçiminde gösterilir.

2.3.2.Tanım: K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi, G v nin değer grubu olsun. v değerlendirmesinin rankı G sıralı grubunun rankıdır ve $rankv$ biçiminde gösterilir.

1.1.5.Tanım: K bir cisim olsun. $v: K \to IR^{+} \cup \{0\}$ dönüşümü her a, $b \in K$ için

i) $v(a) \ge 0$, $v(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

ii) $v(a.b) = v(a).v(b)$

iii) $v(a+b) \le v(a) + v(b)$

koşullarını gerçekliyorsa v dönüşümü K cisminin rankı 1 olan değerlendirmesi veya K cisminin mutlak değeri olarak adlandırılır.

1.1.6.Tanım: K bir cisim, v K cismi üzerinde bir değerlendirme olsun. Her $a \in K^*$ için $v(a)=1$ (veya $v(a)=0$) oluyorsa v ye K cisminin <u>aşikar değerlendirmesi</u> denir.

1.1.7.Önerme: K bir cisim, v K cismi üzeride değer grubu çarpımsal (veya toplamsal) olan bir değerlendirme olsun. Aşağıdaki ifadelerin gerçeklendiği v değerlendirmesinin tanımından kolayca görülür.

i) $v(-1)=1$ (veya $v(-1)=0$)

ii) $a,b \in K$, $v(a) \neq v(b)$ ise $v(a+b)=\max\{v(a),v(b)\}$ dir.
(veya $v(a+b)=\min\{v(a),v(b)\}$ dir)

iii) $1 \leq i \leq n$ için $a_i \in K$ ise

$v(\sum_{i=1}^{n} a_i) \leq \max_i(v(a_i))$ dir. (veya $v(\sum_{i=1}^{n} a_i) \geq \min_i \{v(a_i)\}$ dir)

iv) $1 \leq i \leq n$ için $a_i \in K$ ve $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ ise en az bir $i \neq j$ için $v(a_i)=v(a_j)$ dir.

1.1.8.Tanım: K ve F iki cisim ve F cismi cebirsel kapalı olsun.

$$\varphi: K \to F \cup \{\infty\}$$

dönüşümü

i) $\varphi^{-1}(F)=V$ bir halkadır.

ii) φ nin V halkasına kısıtlanışı $\varphi|_V$ aşikar olmayan bir homomorfizmadır

iii) $a \in K$ için $\varphi(a) = \infty$ ise $\varphi(a^{-1}) = 0$

koşullarını gerçekliyorsa φ dönüşümüne K cisminin bir <u>place</u> adı verilir.

<u>1.1.9.Tanım:</u> K bir cisim, V K cisminin bir alt halkası olsun. $a \in K^*$ iken $a \in V$ veya $a^{-1} \in V$ oluyorsa V halkasına K cisminin bir <u>değerlendirme halkası</u> denir.

<u>1.1.10.Tanım:</u> K bir cisim; V, K cisminin bir değerlendirme halkası olsun.

$P = \{ a \in V \mid a^{-1} \notin V \}$

kümesi V değerlendirme halkasının tek <u>maksimal idealidir.</u>

$$U = \{ a \in V \mid a^{-1} \in V \}$$

kümesi bir gruptur ve bu kümeye V değerlendirme halkasının <u>birim grubu</u> adı verilir.

<u>Not:</u> K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi ve G v nin değer grubu olsun.

G çarpımsal bir grup ise;

$$V = \{ a \in K \mid v(a) \le 1 \},\ P = \{ a \in K \mid v(a) < 1 \},\ U = \{ a \in V \mid v(a) = 1 \}$$

biçimindedir.

G toplamsal bir grup ise;

$$V = \{ a \in K \mid v(a) \ge 0 \},\ P = \{ a \in V \mid v(a) > 0 \},\ U = \{ a \in K \mid v(a) = 0 \}$$

biçimindedir.

1.1.11.Tanım: K bir cisim, v K cismi üzerinde bir değerlendirme, V v nin değerlendirme halkası, P, V nin tek maksimal ideali ise V/P kümesi bir cisimdir ve bu cisme v değerlendirmesinin rezidü cismi adı verilir.

1.1.12. Tanım: A tek türlü asal çarpanlarına ayrılabilen bir bölge ve K A nın kesir cismi olsun. $\mu \in A$ birimsel eleman ve p ler A nın asal elemanları olmak üzere herhangi bir $x \in A$ elemanı

$$x = \mu \prod_{p} p^{\alpha}$$

olarak yazılır. $c \in IR$, $0 < c < 1$ olmak üzere

değer grubu çarpımsal ise $\quad v_p(x) = c^{\alpha}$

değer grubu toplamsal ise $\quad v_p(x) = \alpha$

biçiminde tanımlanan dönüşüm değerlendirme tanımındaki koşulları gerçekler. Bu dönüşüm A nın kesir cismi olan K ya tek şekilde genişletilir. Bu değerlendirmeye K cisminin p-adik değerlendirmesi adı verilir.

1.1.13.Tanım: $p \in Q$ asal bir sayı olsun. $a, b \in Z, b \neq 0$, $p \nmid a$, $p \mid b$ ve $n \in Z$ olmak üzere herhangi bir $x \in Q$ elemanı

$$x = p^{n} \frac{a}{b}$$

biçiminde yazılır. Bu yazılıştaki $n \in Z$ elemanına x elemanın p ye göre mertebesi denir ve $ord_p x$ ile gösterilir.

1.1.14.Örnek: $p \in Q$ asal bir sayı olsun. Her $x \in Q$ için

$$v_p(x) = ord_p x$$

biçiminde tanımlanan v_p, Q cisminin değer grubu toplamsal olan bir değerlendirmesidir.

1.1.15.Örnek: $p \in Q$ asal bir sayı olsun. $c \in R$, $0 < c < 1$ olmak üzere

Her $x \in Q$ için

$$v_p(x) = c^{ord_p(x)}$$

biçiminde tanımlanan v_p, Q cisminin değer grubu çarpımsal olan bir değerlendirmesidir. Örneklerde verilen değerlendirmeler Q cisminin $p-adik$ değerlendirmeleridir.

1.1.16.Tanım: $p \in Q$ asal bir sayı ve v_p Q cisminin $p-adik$ değerlendirmesi olsun. Q cisminin v_p değerlendirmesine göre tamlanışına $p-adik$ sayılar cismi adı verilir ve Q_p ile gösterilir.

1.1.17.Teorem: v_p Q cisminin $p-adik$ değerlendirmesi olsun.

$a_j \in Z$, $0 \le a_j \le p-1$ ve $n \in Z$ $v_p(\alpha) = v_p\left(p^n\right)$ eşitliğini sağlayan bir eleman olmak üzere her $\alpha \in Q_p$ elemanı

$$\alpha = \sum_{j=n}^{\infty} a_j p^j$$

formunda yazılır. (Bachman, 1964)

$\alpha \in Q_p$ elemanının bu biçimdeki yazılışına α elemanının kanonik gösterimi veya kanonik açılımı adı verilir.

1.1.18.Tanım: F bir cisim, $K = F(x)$ katsayıları F de olan rasyonel fonksiyon cismi, v $F(x)$ in bir değerlendirmesi ve v nin F cismine kısıtlanışı aynı değerlendirme olsun.

$v(x) = 1$ ise;

v $F(x)$ cisminin aynı değerlendirmesidir.

$v(x) < 1$ ise;

$p(x) \in F(x)$ asal polinom, $a(x), b(x) \in K[x], b(x) \neq 0$, $p(x) \nmid a(x)$, $p(x) \nmid b(x)$ olmak üzere herhangi bir $h(x) \in F(x)$ elemanı

$$h(x) = p(x)^n \frac{a(x)}{b(x)}$$

biçiminde yazılsın. $c = v(p(x))$, $0 < c < 1$ olmak üzere

$$v(h(x)) = c^n$$

biçiminde tanımlanan v değerlendirmesine $p(x) - adik$ değerlendirme denir.

$v(x) > 1$ ise;

herhangi bir $h(x) \in F(x)$ elemanı $f(x)$, $g(x) \in F[x]$, $g(x) \neq 0$ olmak üzere

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

yazılsın. $c = v(x)$, $c > 1$ olmak üzere

$$v(h(x)) = c^{\deg f - \deg g}$$

biçiminde tanımlanan v değerlendirmesine sonsuzdaki asal ile tanımlanmış değerlendirme denir.

1.1.19.Tanım: K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi olsun. v değerlendirmesi K cismi üzerinde bir Hausdorff topolojisi tanımlar. Her $a \in K$ için a nın komşuluklarının temel sistemi $\mu > 0$ olmak üzere tüm

$$U(a,\mu) = \{ b \in K \mid v(a-b) < \mu \}$$

kümeleri ile verilir.

1.1.20.Tanım: K bir cisim, v_1 ve v_2 K nın iki değerlendirmesi olsun. v_1 ve v_2 nin K üzerinde tanımladığı topolojiler aynı ise v_1 ve v_2 değerlendirmeleri denktir denir ve $v_1 \sim v_2$ biçiminde gösterilir.

1.1.21.Teorem: v_1 ve v_2 K cisminin iki farklı değerlendirmesi olsun.

Aşağıdaki ifadeler denktir.

i) $v_1 \sim v_2$

ii) $\forall a \in K$ için $v_1(a) < 1 \Rightarrow v_2(a) < 1$

iii) $\forall a \in K$ için $\exists s \in R^+ \ni v_1(a) = (v_2(a))^s$ (Çallıalp, 1986)

1.1.22.Teorem: v, Q cismi üzerinde aşikar olmayan bir değerlendirme olsun.

i) $v(b) \le 1$ olacak şekilde bir $b > 1$ tamsayısı varsa, her $a \in Z$ için $v(a) \le 1$ dir. Bu durumda v değerlendirmesi, p asal sayı olmak üzere, v_p $p-adik$ değerlendirmesine denktir.

ii) $v(b) > 1$ olacak şekilde bir $b > 1$ tamsayısı varsa öyle bir $0 < s \le 1$ gerçel sayısı vardır ki, her $a \in Z^+$ için $v(a) = a^s$ dir. Bu durumda v değerlendirmesi adi mutlak değere denktir. (Çallıalp, 1986)

1.1.23.Sonuç: Q cismi üzerindeki herhangi bir değerlendirme ya aşikar değerlendirmeye, ya $p-adik$ değerlendirmeye ya da adi mutlak değere denktir.

1.1.24.Teorem: K bir cisim, v_1 ve v_2 K cisminin aşikar olmayan iki değerlendirmesi, T_{v_1} ve T_{v_2} K cismi üzerinde sırasıyla v_1 ve v_2 değerlendirmeleriyle belirlenen topolojiler ve $a \in K$ olsun.

i) $\exists \alpha \in R^+$ için $v_2 = v_1^{\alpha}$

ii) $T_{v_1} = T_{v_2}$

iii) $T_{v_2} \subseteq T_{v_1}$

iv) $v_1(a) < 1 \Rightarrow v_2(a) < 1$

v) $v_1(a) \leq 1 \Rightarrow v_2(a) \leq 1$

vi) $v_1(a) > 1 \Rightarrow v_2(a) > 1$

vii) $v_1(a) \geq 1 \Rightarrow v_2(a) \geq 1$

ifadeleri denktir. (Weiss, 1963)

1.1.25.Tanım: K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi olsun. K cisminde alınan her Cauchy dizisi v değerlendirmesinin belirlediği topolojiye göre K cisminin bir elemanına yakınsıyorsa K cismi v değerlendirmesine göre tamdır denir.

1.1.26.Teorem: K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi olsun. $\tilde{K}$ cismi v değerlendirmesiyle tam ve K cismi $\tilde{K}$ cismi içinde yoğun olacak şekilde bir $\tilde{K}$ cismi vardır. Bu $\tilde{K}$ cismine K cisminin v değerlendirmesine göre tamlanışı adı verilir. (Bachman, 1964)

1.1.27.Teorem: K bir cisim v K cisminin bir değerlendirmesi ve $\tilde{K}$, K cisminin v değerlendirmesine göre tamlanmışı ise $char\,\tilde{K} = charK$ ve $v(\tilde{K}) = v(K)$ dır. (Bachman, 1964)

1.2.Cisim Genişlemeleri

1.2.1.Tanım: K ve L iki cisim olsun. $K \subseteq L$ oluyorsa L ye K nın bir genişlemesidir denir ve L/K biçiminde gösterilir.

1.2.2.Tanım: K ve L iki cisim olsun. $L = K(\alpha)$ olacak biçimde bir $\alpha \in L$ varsa L cismine K cisminin bir basit genişlemesi denir.

1.2.3.Tanım: L/K bir cisim genişlemesi olsun. L nin K üzerinde vektör uzayı olarak boyutuna L nin K üzerindeki derecesi denir ve $[L:K]$ ile gösterilir.
Eğer $[L:K] < \infty$ ise L K nın sonlu genişlemesidir veya L/K sonlu genişlemedir denir.

1.2.4.Tanım: L/K bir cisim genişlemesi ve $\alpha \in L$ olsun. $f(\alpha) = 0$ olacak şekilde en az bir $f(x) \in K[x], f(x) \neq 0$ polinomu varsa α elemanı K cismi üzerinde cebirseldir denir ve $\alpha\ ceb/K$ ile gösterilir.

1.2.5.Tanım: L/K bir cisim genişlemesi olsun. Her $\alpha \in L$ için $\alpha\ ceb/K$ ise L/K cebirsel genişlemedir denir.

1.2.6.Tanım: L/K bir cisim genişlemesi olsun. $\overline{K} = \{a \in L \mid a\ ceb/K\}$ cismine K cisminin L cismi içindeki cebirsel kapanışı adı verilir.

1.2.7.Tanım: K bir cisim olsun. K nın kendisinden başka cebirsel genişlemesi yoksa K ya cebirsel kapalı cisim adı verilir.

1.2.8.Tanım: L/K bir cisim genişlemesi ve $\alpha \in L$ olsun. α, K cismi üzerindeki minimal polinomunun bir basit kökü ise α elemanı K cismi üzerinde ayrılabilirdir denir ve $\alpha \; ayr/K$ ile gösterilir.

1.2.9.Tanım: L/K bir cisim genişlemesi olsun. Her $\alpha \in L$ elemanı K cismi üzerinde ayrılabilir ise L K cisminin bir ayrılabilir genişlemesidir denir.

1.2.10.Tanım: L/K bir cisim genişlemesi olsun. $K_{ayr} = \{a \in L \mid a \; ayr/K\}$ cismine K cisminin L cismi içindeki ayrılabilir kapanışı adı verilir.

1.2.11.Tanım: K cisminin tüm genişlemeleri ayrılabilir ise K cismine mükemmel cisim denir.

1.2.12.Tanım: L/K bir cisim genişlemesi , $\alpha \in L$ olsun. α elemanının K cismi üzerindeki minimal polinomu $L[x]$ içinde doğrusal çarpanlarına ayrılabiliyorsa α elemanı K cismi üzerinde normaldir denir.

Her $\alpha \in L$ elemanı K cismi üzerinde normal ise L/K normal genişlemedir denir.

1.2.13.Tanım: L, K cisminin normal ve ayrılabilir bir genişlemesi ise L cismine K cisminin bir Galois genişlemesidir denir.

1.2.14.Tanım: L K cisminin bir Galois genişlemesi olsun. L nin K cismini sabit bırakan otomorfizmalarının kümesi bileşke işlemine göre bir gruptur ve bu gruba L nin K cismi üzerindeki Galois grubu denir.

1.2.15.Tanım: L, K cisminin sonlu bir genişlemesi, $a \in L$ ve $p(x) = Irr(a, K)$ olsun. Eğer $p(x) = (x-a)^m$, $m > 1$ ise a elemanına K cismi üzerinde tamamıyla ayrılamaz denir. L, K cisminin bir genişlemesi olsun. Her $a \in L$ elemanı K cismi üzerinde tamamıyla ayrılamaz ise L, K cisminin tamamıyla ayrılamaz genişlemesidir denir. $[K_{ayr} : K]$

derecesine L cisminin K cismi üzerindeki ayrılabilirlik derecesi, $[L:K_{ayr}]=[L:K]_i$ derecesine ise L cisminin K cismi üzerindeki ayrılamazlık derecesi denir.

1.2.16.Tanım: K F cisminin sonlu bir genişlemesi, F nin K cismi içindeki ayrılabilirlik derecesi n, ayrılamazlık derecesi $[K:F]_i$ olsun. $\sigma_1,.....,\sigma_n$ K nın F-otomorfizmaları olmak üzere $a\in K$ elemanının F üzerindeki normu

$$N_{K/F}(a)=\left[\prod_{i=1}^{n}\sigma_i(a)\right]^{[K:F]_i}$$

ve traceği

$$T_{K/F}(a)=[K:F]_i\sum_{i=1}^{n}\sigma_i(a)$$

biçiminde tanımlanır.

2. BÖLÜM

DEĞERLENDİRMELERİN GENİŞLEMELERİ VE GENİŞLEMELERİN SAYISI

Bu bölümde verilen bir değerlendirmenin genişlemelerinin belirlenmesi amaçlanmaktadır. Birinci kısımda değerlendirmelerin genişlemeleri, ikinci kısımda ise genişlemelerin sayısıyla ilgili çalışmalar yer almaktadır.

2.1.Değerlendirmelerin Genişlemeleri

2.1.1.Teorem: K bir cisim olsun. K cismi üzerindeki değerlendirmeler, değerlendirme halkaları ve placeleri arasında bire-bir bir eşleme vardır.

Kanıt: K ve F iki cisim, F cebirsel kapalı ve $\varphi : K \to F \cup \{\infty\}$ K cisminin bir placei olsun. $V = \varphi^{-1}(F)$ alınırsa $a \in K$ ∋ $a \notin V \Rightarrow \varphi(a) = \infty$ olacağından $\varphi(a^{-1}) = 0$ olur. Buradan $a^{-1} \in V$ bulunur. O halde $V = \varphi^{-1}(F)$ kümesi K cisminin placeine karşılık gelen değerlendirme halkasıdır.

V K cisminin bir değerlendirme halkası, P V nin maksimal ideali olsun. Her $a \in K$ için

$$\varphi(a) = \begin{cases} \infty, & a \notin V \text{ ise} \\ a + P, & a \in V \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $\varphi : K \to V/P \cup \{\infty\}$ dönüşümü K cisminin V değerlendirme halkasına karşılık gelen placeidir.

Son olarak V K cisminin bir değerlendirme halkası, P V nin maksimal ideali ve U da birim grubu olsun. K^*/U bölüm grubu sıralı bir gruptur. Her $a \in K$ için

$$v(a)=\begin{cases} aU, & a \in K^* \ ise \\ 0, & a = 0 \ \ ise \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan v K cisminin değer grubu K^*/U olan bir değerlendirmesidir. Öyleyse bu değerlendirme K cisminin V değerlendirme halkasına karşılık gelen değerlendirmesidir.

2.1.2.Teorem: K bir cisim, A K'nın bir alt halkası, F cebirsel kapalı bir cisim ve $f : A \to F$ akikar olmayan bir homomorfizma olsun. $\varphi|_A$, φ nin A ya kısıtlanışı olmak üzere $\varphi|_A = f$ olacak şekilde K cisminin bir φ placeği vardır. (Bachman, 1964)

2.1.3.Teorem: K bir cisim, v K nin bir değerlendirmesi ve L K cisminin keyfi bir genişlemesi olsun. Bu durumda v değerlendirmesi L cismine genişletilebilir.

Kanıt: F cebirsel kapalı bir cisim olmak üzere

$$\varphi : K \to F \cup \{\infty\}$$

K cisminin v değerlendirmesine karşılık gelen placeği olsun. φ nin V_K değerlendirme halkasına kısıtlanışı

$$\varphi|_{V_K} : V_K \to F$$

ise 2.1.2. teoremine göre $\varphi|_{V_K}$ L cisminin bir placeğine genişletilebilir. Öyleyse 2.1.1. teoremine göre K cisminin v değerlendirmesi L cisminin bir değerlendirmesine genişletilebilir.

2.1.4.Teorem: K ve L iki cisim, v K cisminin rankē1 olan bir deĵerlendirmesi olsun. K cismi v deĵerlendirmesi ile tam ve L K cisminin n. dereceden bir geniĸlemesi ise v deĵerlendirmesi, L cisminin rankē1 olan w deĵerlendirmesine tek ĸekilde geniĸletilir.

N L cisminin K cismi üzerindeki normu olmak üzere w deĵerlendirmesi, her $x \in L$ için

$$w(x) = \sqrt[n]{v(N(x))}$$

biçiminde tanēmlanēr.

Kanēt: $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ kümesi L cisminin K cismi üzerindeki bir tabanē olsun. Her $x \in L, \alpha_i \in K, 1 \le i \le n$ için

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$$

yazēlabilir. Her $x \in L$ için

$\|x\|_0 = \max_i \{v(\alpha_i)\}$ biçiminde tanēmlanan $\|.\|_0$ dönüĸümü L üzerinde bir norm tanēmlar ve $\|.\|_0$ ile v birbirine denktir. (Bachman, 1964)

$v(x) < 1 \Rightarrow v(x^r) \to 0$ olur. $\|.\|_0$ ile v nin denkliĵinden $\|x\|_0 \to 0$ olur. O halde $1 \le i \le n$ için

$$x^r = \alpha_{r_1} x_1 + \alpha_{r_2} x_2 + ... + \alpha_{r_n} x_n$$

yazēlērsa

$$\lim_{r \to \infty} v(\alpha_{r_n}) = 0$$

dēr. Öyleyse $\lim_{r \to \infty} v(N(x))^r = 0$ olur. Her $x \in L$ için

$$v(x)<1 \Rightarrow v(N(x))<1$$

$$v(x)>1 \Rightarrow v(N(x))>1$$

$$v(x)=1 \Rightarrow v(N(x))=1$$

olduğu kolayca görülür. Son olarak $y = N(x)/x^n \in L$ olsun. Bu durumda;

$$N(y)=\frac{N(N(x))}{N(x^n)}=\frac{N(x)^n}{N(x)^n}=1$$

ve

$$v(y)=1$$

olur. Öyleyse

$$v\left(\frac{N(x)}{x^n}\right)=1 \Rightarrow v(N(x))=v(x)^n$$

dir. Bu durumda her $x \in L$ için w,

$$w(x)=\sqrt[n]{v(N(x))}$$

biçiminde tek şekilde tanımlanır.

2.1.5.Örnek: R $|.|$ mutlak değer değerlendirmesi ile tamdır. $|.|$ nın C kompleks sayılar cismine w genişlemesi her $a+ib \in C$ için

$$w(a+ib)=\sqrt{|N(a+ib)|}=\sqrt{a^2+b^2}$$

biçimindedir.

2.1.6.Önerme: L K cisminin bir genişlemesi, v K nin bir değerlendirmesi, w v değerlendirmesinin L cismine bir genişlemesi olsun. V_v v değerlendirmesinin değerlendirme halkası, P_v V_v nin maksimal ideali ve U_v V_v nin birim grubu. V_w w değerlendirmesinin değerlendirme halkası, P_w V_w nin maksimal ideli ve U_w V_w nın birim grubu ise

$$V_v = K \cap V_w , P_v = K \cap P_w , U_v = K \cap U_w$$

biçimindedir. (Bachman, 1964)

2.1.7.Tanım: L K cisminin bir genişlemesi, v K nin bir değerlendirmesi, w v değerlendirmesinin L cismine bir genişlemesi olsun. G_v ve G_w sırasıyla v ve w değerlendirmelerinin değer grupları, k_v ve k_w rezidü cisimleri ise $e = e(w/v) = [G_w : G_v]$ indeksi dallanma indeksi, $f = f(w/v) = [k_w : k_v]$ derecesi rezidü derecesi olarak adlandırılır. Eğer $e(w/v) = 1$ ise w değerlendirmesine v değerlendirmesi üzerinde dallanmamıştır denir.

2.1.8.Teorem: L K cisminin n. dereceden bir genişlemesi, v K nin bir değerlendirmesi, w v nin L cismine bir genişlemesi olsun. e dallanma indeksi ve f rezidü derecesi olmak üzere

$$e.f \leq n$$

dir.

Kanıt: φ K cisminin v değerlendirmesine, ψ L cisminin w değerlendirmesine karşılık gelen placeleri olsun.

$x_1, x_2, ..., x_i \in V_w, y_1, y_2, ..., y_j \in K^*$ olmak üzere $\psi(x_1), \psi(x_2), ..., \psi(x_i)$ elemanlarõ k_v cismi üzerinde doğrusal bağõmsõz olsun. $y_1 G_v, y_2 G_v, ..., y_j G_v$ G_w içinde farklõ kalan sõnõflarõnõ göstersin. Bu durumda $\{x_\eta . y_\mu | 1 \le \eta \le i, 1 \le \mu \le j\}$ kümesinin L cismi üzerinde doğrusal bağõmsõz olduğu gösterilirse $e.f \le n$ elde edilir. $1 \le \eta \le i$ için

$$v(a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_i x_i) = \max_\eta v(a_\eta)$$

ise x_i lerin seçiliğinden her η için $a_\eta = 0$ olacaktõr. $c_{\eta_\mu} \in L$ olmak üzere

$$\sum_{\eta,\mu} c_{\eta_\mu} x_\eta y_\mu = 0 \qquad (5)$$

olsun. 2.1.(5) denklemi

$$\sum_\mu \left(\sum_\eta c_{\eta_\mu} x_\eta \right) y_\mu = 0 \qquad (6)$$

biçiminde yazõlabilir. $v\left(\sum_\eta c_{\eta_\mu} x_\eta \right) v(y_\mu) = 0$ ise

$$v\left(\sum_\mu \left(\sum_\eta c_{\eta_\mu} x_\eta \right) y_\mu \right) = \max_\mu \left(\sum_\eta c_{\eta_\mu} x_\eta \right) v(y_\mu) = 0$$

olur. Bu da 2.1.(6) ile çelişir. O halde

$$v\left(\sum_{\eta} c_{\eta_\mu} x_\eta\right) v\left(y_\mu\right) = 0$$

ve

$$v\left(\sum_{\eta} c_{\eta\mu} x_\eta\right) = 0$$

dır. Buradan

$$0 = v\left(\sum_{\eta} c_{\eta_\mu} x_\eta\right) = \max_{\eta,\mu} \left(v\left(c_{\eta_\mu}\right)\right) = 0$$

olur. Bu durumda $1 \le \eta \le i,\ 1 \le \mu \le j$ için $c_{\eta_\mu} = 0$ olacağından $\left\{x_\eta . y_\mu \middle| 1 \le \eta \le i, 1 \le \mu \le j\right\}$ kümesi L cismi üzerinde doğrusal bağımsızdır.

2.1.9.Teorem: L K cisminin sonlu bir genişlemesi, v K cisminin rankı 1 olan bir değerlendirmesi olsun. Bu durumda v L cisminin rankı 1 olan bir değerlendirmesine genişletilebilir.

Kanıt: Teorem 2.3.1 den K üzerindeki v değerlendirmesi L cismine genişletilebilir. v nin L cismine genişlemesi w olsun. v nin değer grubu G_v w nın değer grubu G_w ise $G_v \subseteq G_w$ ve $G_v \subseteq R$ dir. 2.1.6. teoremden $\left[G_w : G_v\right] = e$ sonludur ve v^e değerlendirmesi L cismi üzerinde w değerlendirmesine denktir. Her $a \in L$ için

$$w(a)^e \in G_v \subseteq R$$

dir. Bu durumda $\left(v^e\right)^{1/e}$ v ye denk bir değerlendirmedir.

2.1.10.Teorem: L K cisminin $n.$ dereceden bir genişlemesi, v K nin bir değerlendirmesi ve $w_1, w_2, \ldots$ v değerlendirmesinin L cismine farklı genişlemeleri olsun. $e_1, e_2, \ldots$ ve $f_1, f_2, \ldots$ sırasıyla dallanma indeksleri ve rezidü dereceleri ise

$$\sum_k e_k f_k \le n$$

dir. (Bachman, 1964)

2.1.11.Teorem: K bir cisim v K nin bir Arkimetsel değerlendirmesi olsun. Bu durumda K cismi C compleks sayılar cisminin bir alt cismine izomorftur ve v değerlendirmesi adi mutlak değerin bir kuvveti biçimindedir.

Kanıt: K cismi üzerindeki v Arkimetsel değerlendirmesi ile tam bir cisim olsun. i, $x^2+1=0$ denkleminin kökü olmak üzere $K(i)$ cismi gözönüne alınırsa, v değerlendirmesi $K(i)$ cisminin bir w değerlendirmesine tek şekilde genişletilir. 2.1.4. teoremden her $\alpha = a+ib \in K(i)$ için

$$w(\alpha) = \sqrt{v(N(\alpha))} = \sqrt{a^2+b^2}$$

biçimindedir.

K herhangi bir cisim ve v K cisminin Arkimetsel değerlendirmesi ise $charK = 0$ dır. (Bachman, 1964) Bu durumda K nın ilkel cismi Q rasyonel sayılar cismine izomorftur ve v değerlendirmesinin Q ya kısıtlanışı adi mutlak değerdir. $\breve{K}$ K cisminin v değerlendirmesine göre tamlanışı olsun.
$\breve{K}$ üzerindeki değerlendirme $\breve{K}(i)$ ye tek şekilde genişletilebilir. Bu değerlendirmeye göre $\breve{K}(i)$ de tam cisimdir. (Bachman, 1964) O halde $\breve{K}(i)$ cismi değişmeli Banach cebiridir ve $\breve{K}(i) = C$ dir (Bachman, 1964). Öyleyse K cismi C nin bir alt cismine izomortur.

2.1.12.Tanım: K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi, L K cisminin bir genişlemesi ve $(v_i')_{i\in\breve{e}}$ v değerlendirmesinin L cismine genişlemelerinin bir ailesi olsun. v

nin L cismine genişlemesi olan her değerlendirme bir tek v_i değerlendirmesine denk ise $(v_i')_{i\in\bar{e}}$ ailesi v nin genişlemelerinin tam sistemi olarak adlandırılır.

2.1.13.Tanım: K bir cisim, L K cisminin cebirsel bir genişlemesi v K cisminin bir değerlendirmesi olsun. v nin L cismine bir tek genişlemesi varsa v ye Henselian değerlendirme adı verilir.

2.1.14.Tanım: K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi olsun. v değerlendirmesinin değer grubu sonsuz devirli grup ise v ye ayrık değerlendirme adı verilir.

2.1.15.Örnek: $p\in Q$ asal sayı olsun. Q nun v_p $p-adik$ değerlendirmesi ayrık değerlendirmedir.

2.1.16.Teorem: K bir cisim, L K nin bir genişlemesi, v K nin bir değerlendirmesi ve w v nin L cismine bir genişlemesi olsun. v ayrık değerlendirme ise w da ayrık değerlendirmedir.

Kanıt: G_v v nin G_w w nın değer grubu olsun. 2.1.9.teoremden e dallanma indeksi, f rezidü derecesi ve $[L:K]=n$ olmak üzere $e.f\le n$ dir. O halde $G_w^e\subseteq G_v$ dir. Bu durumda $A\subseteq G_v$ olmak üzere her $\alpha\in L$ için

$$\lambda: G_w \to A \qquad w(\alpha)^e \to v(\alpha)$$

biçiminde tanımlanan dönüşüm bir izomorfizmadır. Öyleyse G_w da sonsuz devirli bir grubun bir alt grubuna izomorftur; yani w da ayrık değerlendirmedir.

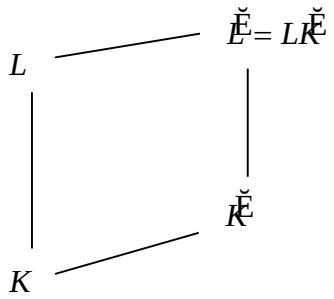
2.1.17.Teorem: F bir cisim, v F nin ayrık değerlendirmesi olsun. F cismi v değerlendirmesine göre tam ve K F nin n. dereceden bir genişlemesi ise

$$e.f = n$$

dir. Bu durumda K cismine yerel cisim adı verilir. (Bachman, 1964)

2.2. Bir Değerlendirmenin Genişlemelerinin Sayısı

2.2.1.Teorem: L K cisminin sonlu bir genişlemesi, v K cisminin rankı 1 olan değerlendirmesi ve w v değerlendirmesinin L cismine bir genişlemesi olsun. L cisminin w ya göre tamlanışı $\hat{L}$, K cisminin v ye göre tamlanışı $\hat{K}$ ise $\hat{L} = L\hat{K}$ dır.
(Bachman,1964)



2.2.2.Teorem: K F cisminin sonlu bir geniklemesi, v F cisminin rankı 1 olan değerlendirmesi, $\bar{F}$ F cisminin v değerlendirmesine göre tamlanışı ve $\bar{F}$ $\bar{F}$ nın cebirsel kapanışı olsun. v değerlendirmesinin K cismine genişlemeleri ile K cisminin $\bar{F}$ cismi içine gömmeleri arasında bire-bir bir eşleme vardır.

Kanıt: v değerlendirmesinin $\bar{F}$ cismine genişlemesi ise $\bar{F}$ cismine tek şekilde genişletilir. Eğer K cismi $\bar{F}$ cismi içine bir $F-izomorfizma$ ile gömülürse v K cismine genişletilebilir.

$$\lambda : K \to K_1 \subseteq \bar{F}$$

F yi sabit bırakan bir dönüşüm, v_1 $\bar{F}$ değerlendirmesinin K_1 cismine kısıtlanışı olsun. Her $\beta \in K$ için

$$v_1'(\beta) = v_1(\lambda(\beta))$$

tanımlansın. v_1' K cisminin bir değerlendirmesidir, v_1' v değerlendirmesinin bir genişlemesidir ve bu değerlendirme K nın $\bar{F}$ cismi içine λ gömmesi ile belirlenmiştir.

$$\lambda_1 : K \to K_1 \subseteq \bar{F}$$

$$\lambda_2 : K \to K_2 \subseteq \bar{F}$$

dönüşümleri K cisminin F cismi içine iki gömmesi, σ $\bar{F}$ nın $\bar{F}-otomorfizmasıdır$ ve $\sigma\lambda_1 = \lambda_2$ yani λ_1 ve λ_2 gömmeleri eşlenik olsun. Her $\beta \in K$ için

$$v_1'(\beta) = v_1(\lambda(\beta)) = v_2(\sigma\lambda_1(\beta)) = v_2(\lambda_2(\beta)) = v_2'(\beta)$$

dır. O halde K cisminin $\overline{F}$ cismi içine iki eşlenik gömmeleri K cismi üzerinde aynı değerlendirmeyi tanımlar.

Tersine $v_1' = v_2'$ olsun.

$$\lambda_3 = \lambda_2 \lambda_1^{-1} : K_1 \to K_2$$

dönüşümü F cismini sabit bırakır. O halde λ_3 ün

$$K_1 \overline{F} \to K_2 \overline{F}$$

$\overline{F}$ – izomorfizmasına genişletildiği gösterilmelidir.

$\{\alpha_n\}$ K_1 cisminde bir Cauchy dizisi ve $\lim \alpha_n = \alpha \in K_1 F$ olsun. $v_1' = v_2'$ olduğundan

$$\begin{aligned} v_2(\lambda_3(\alpha_n) - \lambda_3(\alpha_m)) &= v_2(\lambda_3(\alpha_n - \alpha_m)) \\ &= v_2\left(\lambda_2 \lambda_1^{-1}(\alpha_n - \alpha_m)\right) \\ &= v_2'\left(\lambda_1^{-1}(\alpha_n - \alpha_m)\right) \\ &= v_1'\left(\lambda_1^{-1}(\alpha_n - \alpha_m)\right) \\ &= v_1(\alpha_n - \alpha_m) \end{aligned}$$

elde edilir. Öyleyse $\{\lambda_3(\alpha_n)\}$ de $K_2 \overline{F}$ da bir Cauchy dizisidir ve $\lim(\lambda_3(\alpha_n)) \in K_2 \overline{F}$ dır.

$$\overline{\lambda_3} : K_1 F \to K_2 F$$

bir $\overline{F}$ izomorfizma olmak üzere $\lim(\lambda_3(\alpha_n)) = \overline{\lambda_3}(\alpha)$ biçimindedir. Öyleyse $\overline{\lambda_3}$ $\overline{F}$ cisminin $\overline{F}$ – otomorfizmasına genişletilebilir.

2.2.3.Teorem: F bir cisim, $K = F(\alpha)$ F cisminin sonlu ayrılabilir bir genişlemesi, v F cisminin rankı 1 olan değerlendirmesi ve $f(x) = Irr(\alpha, F)$ olsun. Bu durumda v değerlendirmesinin K cismine $f(x)$ polinomunun $K[x]$ halkasındaki asal çarpanlarının sayısına kadar genişlemesi vardır. (Bachman, 1964)

2.2.4.Örnek: θ, $x^3 - 3 = 0$ denkleminin bir kökü olmak üzere $K = Q(\theta)$ ve $|.|$ adi mutlak değer olsun. R de

$$x^3 - 3 = \left(x - \sqrt{3}\right)\left(x^2 + \sqrt[3]{3}x + \left(\sqrt[3]{3}\right)^2\right)$$

yazılır. Öyleyse $j = \dfrac{-1 + \sqrt{3}\,i}{2}$ olmak üzere Q nun $\mathbb{C}$ içine

$$\lambda_1 : Q(\theta) \to Q\left(\sqrt[3]{3}\right) \subseteq \mathbb{C}$$

$$\lambda_2 : Q(\theta) \to Q\left(\sqrt[3]{3}\,j\right) \subseteq \mathbb{C}$$

gömmeleri tanımlanır. Bu durumda $|.|$ nın $Q(\theta)$ cismine λ_1 ve λ_2 gömmeleriyle belirlenen iki genişlemesi vardır.

2.2.5.Teorem: F bir cisim, K F nin sonlu ayrılabilir bir genişlemesi, v F cisminin rankı 1 olan değerlendirmesi, E F cisminin K yi kapsayan normal bir genişlemesi, G E nin Galois grubu, U G nin F cismini sabit bırakan bir alt grubu olsun. S E'nin F'nin üzerindeki Galois grubu ve $\mu_i \in G$ ler K cisminin $\overline{F}$ cismi içine gömmelerine karşılık gelen otomorfizmalar olmak üzere $G = \bigcup_{i=1}^{r} S\mu_i U$ olsun. Bu durumda v değerlendirmesinin K cismine genişlemelerinin sayısı G yi oluşturan farklı

kalan sēnēflarēnēn sayēsē kadardēr ve bu geniкlemeler $1 \le i \le r$, her $\alpha \in K$ elemanē için $w_i(\alpha) = v_i(\mu_i(\alpha))$ biçimindedir. (Bachman, 1964)

<u>2.2.6.Sonuç:</u> F bir cisim, K F nin sonlu ayrēlabilir bir geniкlemesi, v F cisminin rankē 1 olan deĵ erlendirmesi, E F cisminin K yi kapsayan normal bir geniкlemesi, G E nin Galois grubu ve $\mu_i \in G$ ler K cisminin F cismi içine gömmelerine karкēlēk gelen otomorfizmalar olsun. Her $\alpha \in K$ için K nēn F üzerindeki <u>traceôi</u>

$$T_{K/F}(\alpha) = \sum_i T_{\mu_{K}(K)\check{E}/\check{E}}(\mu_{K}(\alpha))$$

ve K nēn F üzerindeki <u>normu</u>

$$N_{K/F}(\alpha) = \prod_i N_{\mu_i(K)\check{E}/\check{E}}(\mu_i(\alpha))$$

biçimindedir.

3.BÖLÜM

K CİSMİNİN DEĞERLENDİRMELERİNİN K(x) CİSMİNE GENİŞLEMELERİ

K bir cisim, F K cisminin bir genişlemesi, v K cisminin bir değerlendirmesi, k_v v değerlendirmesinin rezidü cismi olsun. k_w rezidü cismi k_v cisminin transandant bir genişlemesi olacak biçimde verilen bir w değerlendirmesi v değerlendirmesinin bir rezidül transandant genişlemesidir. Bu bölümde K cisminin v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine rezidül transandant ve rezidül cebirsel genişlemelerinin incelenmesi amaçlanmaktadır. v değerlendirmesinin değer grubu G_v nin toplamsal olmasıdurumunda Alexandru V. , Popescu N., Zaharescu A. tarafından 1988 yılında yapılan çalışmalar incelenmiştir. Birinci kısımda rezidül transandant genişlemelerle ilgili ikinci kısımda da rezidül cebirsel genişlemelerle ilgili çalışmalara yer verilmiştir. Her iki kısımda da önce K cisminin cebirsel kapalı olmasıdurumunda sonrada herhangi bir cisim olmasıdurumunda yapılan çalışmalar yer almaktadır.

3.1. K Cisminin Değerlendirmelerinin K(x) Cismine Rezidül Transandant Genişlemeleri

3.1.1.Tanım: K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi olsun. Her $F = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \in K[x]$ polinomu için

$$w(F) = \inf_i \left(v(a_i)\right)$$

biçiminde tanımlanan w değerlendirmesi v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine Gauss genişlemesi olarak adlandırılır. Bu durumda $w(x) = 0$ ve $x^* \; trans / k_v$ olmak üzere $k_w = k_v(x^*)$ biçimindedir.

3.1.2.Lemma: K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi, G_v v nin değer grubu, G' G_v yi alt grup kabul eden bir sıralı grup ve $\gamma \in G'$ ise v değerlendirmesi $i \in \mathrm{I}$ olmak üzere her $P = \sum_i a_i x^i \in K[x]$ için

$$w(P) = \inf_i \ (v(a_i) + i\gamma)$$

biçiminde tanımlanan $K(x)$ cisminin w değerlendirmesine genişletilir.

Kanıt: $P = \sum_i a_i x^i, Q = \sum_i b_i x^i \in K[x]$ olsun.

$$w(P) = \inf_i \ (v(a_i) + i\gamma),\ w(Q) = \inf_i \ (v(b_i) + i\gamma)$$

olarak tanımlandığından

$$w(P) = v(a_t) + t\gamma \quad \text{ve} \quad w(Q) = v(b_s) + s\gamma$$

olacak biçimde bir $t,\ s \in Z$ vardır.

$$w(P) = \infty \Leftrightarrow P = 0 \qquad (1)$$

olduğu kolayca görülür. $c_i = a_i + b_i$ olmak üzere $P + Q = \sum c_i x^i$ yazılacağından

$$w(P+Q) = \inf_i \ (v(c_i) + i\gamma)$$

dır ve w nın tanımından bir $k \in \mathrm{I}$ için

$$w(P+Q) = v(c_k) + k\gamma$$

biçiminde olduğu görülür. Buradan

$$\begin{aligned} w(P+Q) &= v(a_k + b_k) + k\gamma \\ &\geq \inf\left(v(a_k), v(b_k)\right) + k\gamma \\ &= \inf\left(v(a_k) + k\gamma, v(b_k) + k\gamma\right) \\ &\geq \inf\left(v(a_t) + t\gamma, v(b_s) + s\gamma\right) \\ &= \inf\left(w(P), w(Q)\right) \end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$w(P+Q) \geq \inf\left(w(P), w(Q)\right) \qquad (2)$$

dur. $c_i = \sum a_m b_n$ olmak üzere $PQ = \sum_i c_i x^i$ olduğundan

$$w(PQ) = \inf_i \left(v(c_i) + i\gamma\right)$$

ve w nün tanımından $c = \sum a_\alpha b_\beta$ olmak üzere

$$w(PQ) = w\left(cx^{k+s}\right) = v(c) + (k+s)\gamma$$

olur. v değerlendirmesinin özellikleri de kullanılarak

$$\begin{aligned} w(PQ) &= v(a_k b_s) + (k+s)\gamma \\ &= v(a_k) + v(b_s) + k\gamma + k\gamma \\ &= w(P) + w(Q) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$w(PQ) = w(P) + w(Q) \qquad (3)$$

olur. 3.2.(1), (2), (3) ifadesinden w nün $K(x)$ cisminin bir değerlendirmesi olduğu görülür.

3.1.3.Örnek: v Q rasyonel sayılar cisminin değer grubu toplamsal olan $p-adik$ değerlendirmesi olsun. $G_v = Z, G' = R$ ve $\gamma = \sqrt{5} \in R$ olarak alınırsa $P = \sum_i a_i x^i \in Q[x]$ için

$$w(P) = \inf_i \left(v(a_i) + i\sqrt{5}\right)$$

biçiminde tanımlanan w, $Q(x)$ cisminin bir değerlendirmesidir.

3.1.4.Önerme: K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi, G_v v nin değer grubu, G' G_v yi alt grup kabul eden bir sıralı grup, $n \in Z$, $n\gamma \in G_v$ iken $n = 0$ olan $\gamma \in G'$ ise $w(x) = \gamma$ olacak şekilde v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir tek w genişlemesi vardır. k_w ve k_v aynıdır ayrıca w nün değer grubu $G_v + Z\gamma$ biçimindedir.

Kanıt: $P = \sum_i a_i x^i \in K[x]$ olsun.

$$w(a_i x^i) = v(a_i) + i\gamma$$

olacağından $a_i x^i$ $(a_i \neq 0)$ lerin w altında farklı değerler aldığı görülür. O halde w değerlendirmesi her $P = \sum_i a_i x^i \in K[x]$ için

$$w(P) = \inf_i \left(v(a_i) + i\gamma\right)$$

biçiminde tek şekilde tanımlanır. w nın değer grubunun $G_w = G_v + Z\gamma$ olduğu, tanımından açıktır.

$R \in K(x)$ ve $R \neq 0$ ise $a \in K^*, n \in N, u \in K(x), w(u) > 0$ olmak üzere

$$R = ax^n (1+u)$$

yazılabilir. O halde

$$w(R) = v(a) + n\gamma$$

olacaktır.

$$w(R) = 0 \Leftrightarrow v(a) = 0.n = 0$$

dır. Bu durumda R ve a birbirine denk olacağından k_w ve k_v cisimlerine aynı gözüyle bakılabilir.

3.1.5.Önerme: K bir cisim, v K nın bir değerlendirmesi, G_v v nin değer grubu, k_v de rezidü cismi olsun. Bu durumda v değerlendirmesi $w(x) = 0$, $x^* = t$ $trans / k_v$ olacak şekilde $K(x)$ cisminin bir w değerlendirmesine tek şekilde genişletilir. Ayrıca $G_w = G_v$ ve $k_w = k_v(t)$ dir.

Kanıt: $P = \sum_i a_i x^i \in K[x]$ için

$$w(P) = \inf_i \ (v(a_i))$$

biçiminde tanımlanan w K cisminin bir değerlendirmesidir ve $G_w = G_v$ dir. O halde $w(x) = 0$ olur. P polinomu her $i \in I$ için $v(a_i) \geq 0$ ve en az bir $k \in I$ için $v(a_k) = 0$ sağlanacak şekilde K^* ın uygun bir elemanı ile bölünsün. Bu durumda $w(x) = 0 \Rightarrow P \in V_w$ dır.

t *trans*$/k_v$ ve her $i \in I$ için $\overline{a_i} \neq \overline{0}$ olduğundan

$$\sum_i \overline{a_i} t^i \neq \overline{0}$$

olur. O halde

$$w(P) = 0 = \inf_i \left(v(a_i)\right)$$

olacaktır.

$$\sum_i \overline{a_i} t^i = \overline{0} \Rightarrow \left(w\left(\sum_i a_i x^i\right) > 0, v(a_i) > 0 \right) \Rightarrow \overline{a_i} = 0$$

dır. Öyleyse $x = t$ k_v cismi üzerinde transandanttır. $R \in K(x)$ elemanı

$$R = c\left(\sum_i a_i x^i\right) / \left(\sum_i b_i x^i\right)$$

yazılırsa

$$R = c\left(\sum_i \overline{a_i} t^i\right) / \left(\sum_i \overline{b_i} t^i\right)$$

olacağından

$$k_w = k_v(t)$$

olduğu görülür.

3.1.6: K bir cisim, v K nın bir değerlendirmesi, x K cismi üzerinde transandant olan bir eleman ve w v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine rezidül transandant genişlemesi, v nin rezidü cismi k_v ve w nın rezidü cismi k_w olsun. Nagata v değerlendirmesinin rankı sonlu ayrık bir değerlendirme olması durumunda k_w cisminin k_v nin sonlu cebirsel bir genişlemesinin basit transandant bir genişlemesi olduğunu göstermiştir. (Nagata, 1967) Daha sonra Ohm v değerlendirmesi üzerindeki rankının sonlu ve ayrık değerlendirme olması koşulu olmasa da k_w cisminin k_v nin sonlu cebirsel bir genişlemesinin basit transandant bir genişlemesi olduğunu göstermiştir. (Ohm.1983)

3.1.7.Önerme: K bir cisim, v K nın bir değerlendirmesi, $f \in K[x]$, $f \notin K$, $P = a_0 + a_1 f + a_2 f^2 + ... + a_n f^n \in K[f]$ olsun. Bu durumda $K(f)$ cismi üzerinde

$$w_f(P) = \inf_i \left(v(a_i)\right)$$

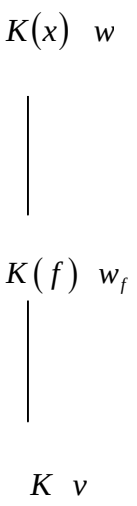
biçiminde tanımlanan w_f bir değerlendirmedir. (Alexandru, Popescu, Zaharescu, 1988)

3.1.8.Önerme: w_f v değermesinin $K(f)$ cismine rezidül transandant genişlemesidir. w w_f değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir genişlemesi ise w değerlendirmesi de v nin rezidül transandant genişlemesidir.

Kanıt: 3.1.5. önermeden kolayca görülür.

3.1.9.Önerme: v K cisminin bir değerlendirmesi, w v nin $K(x)$ cismine rezidül transandant genişlemesi olsun. Bu durumda w değerlendirmesi $K(f)$ cismi üzerinde

v, f ve infimum ile tanımlanan w_f değerlendirmesinin $K(x)$ cismine genişlemesi olacak biçimde bir $f \in K[x]$ polinomu vardır. (Alexandru, Popescu, Zaharescu, 1988)



K cisminin v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine rezidül transandant genişlemelerini, önce K cisminin cebirsel kapalı olmasıdurumunda inceleyelim.

3.1.10.Önerme: w v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine rezidül transandant genişlemesi olsun. Bu durumda w değerlendirmesi v, infimum ve $f = ax - b$ $(a \neq 0)$ doğrusal polinomu ile tanımlanmaktadır.
(Alexandru, Popescu, Zaharescu, 1988)

3.1.11.Önerme: $f_i = a_i x - b_i \in K[x]$ $(i = 1,2)$ olmak üzere $w_i = w_{f_i}$ $K(x)$ cismi üzerinde v, f_i ve infimum ile tanımlanan değerlendirmeler olsun. Aşağıdakiler denktir:

i) $w_1 = w_2$

ii) $c,\ d \in V_v$, $v(c) = 0$ olmak üzere $f_2 = cf_1 + d$ biçimindedir.

iii) $w_1(f_2) = 0$, $\overline{f_2}$ *trans*$/k_v$

iv) $v(a_1) = v(a_2)$ ve $v(a_1 b_2 - a_2 b_1) \geq v(a_1)$ (Alexandru, Popescu, Zaharescu, 1988)

3.1.12.Önerme: $f = a\prod_{i=1}^{n}(x - x_i) \in K[x],\ f \notin K$ olsun. w, w_f nin $K(x)$ cismine bir genişlemesi ise $f_i = \dfrac{x - x_i}{c_i}$ olmak üzere $w = w_f$ olacak şekilde f polinomunun bir x_i kökü ve bir $c_i \in K$ elemanı vardır. (Alexandru, Popescu, Zaharescu, 1988)

3.1.13.Lemma: K bir cisim, v K nın bir değerlendirmesi, $f = a\prod_{i=1}^{n}(x - x_i) \in K[x],\ f \notin K$, w_f v nin $K(f)$ cismine bir genişlemesi, w, w_f nin $K(x)$ cismine bir genişlemesi, $\gamma_i = w(x - x_i) = v(c_i)$, $c_i \in K$, $1 \leq i \leq n$ ve $\gamma_{i_0} = \sup_i(\gamma_i)$ olsun.

Eğer $f_i = \dfrac{x - x_i}{c_i}$ ise w $K(x)$ cismi üzerinde v, f_i ve infimum ile tanımlanan bir değerlendirmedir. Tersine $f_i = \dfrac{x - x_i}{c_i}$ olmak üzere $w = w_f$ ise $\gamma_i = \gamma_{i_0}$ dır.

(Alexandru, Popescu, Zaharescu, 1988)

3.1.14.Lemma: K bir cisim, v K nın bir değerlendirmesi, $f = a\prod_{i=1}^{n}(x - x_i) \in K[x],\ f \notin K$, w_f v nin $K(f)$ cismine bir genişlemesi, w w_f nin $K(x)$ cismine bir genişlemesi, $f_i = \dfrac{x - x_i}{c_i}$ iken $w = w_{f_i}$ olsun.

a) Aşağıdaki ifadeler denktir:

i) $w = w_{f_i}$, $f_i = \dfrac{x - x_i}{c_i}$

ii) $v(x - x_i) \geq \sup(v(c_1), v(c_i))$

iii) $v(c_1) = v(c_i)$

b) $v(c_i) < v(c_1)$ ise $v(c_i) = \gamma_i = v(x_i - x_1)$ dir. (Alexandru, Popescu, Zaharescu, 1988)

3.1.15.Teorem: K bir cisim, v K nın bir değerlendirmesi, $f = a\prod_{i=1}^{n}(x - x_i) \in K[x]$ olsun. Her $1 \leq i \leq n$ için w_i , $K(x)$ cismi üzerinde v, $\dfrac{x - x_i}{d_i}$ ve infimum ile tanımlanan bir değerlendirme ve w_i w_0 ın genişlemesi olacak biçimde bir $d_i \in K$ elemanı vardır. Tersine w_0 ın $K(x)$ cismine her genişlemesi w_i değerlendirmesine denktir.

Kanıt: $f \in K[x]$ polinomu x_i noktasında Taylor serisine açılırsa $1 \leq j \leq n$ için $h_j = \dfrac{f^{(j)}(x_i)}{j!}$ olmak üzere

$$f(x) = (x - x_i)h_1 + (x - x_i)^2 h_2 + \ldots + (x - x_i)^n h_n$$

ve $d_i \in K^*$ için

$$f(x) = d_i h_1\left(\frac{x - x_i}{d_i}\right) + d_i^2 h_2\left(\frac{x - x_i}{d_i}\right)^2 + \ldots + d_i^n h_n\left(\frac{x - x_i}{d_i}\right)^n$$

elde edilir. w_i, $K(x)$ cismi üzerinde v, $\frac{x-x_i}{d_i}$ ve infimum ile tanımlanan bir değerlendirme olsun.

$$w\ (f)=0=w_i(f)=\inf\left(v(h_j)+j\,v(d_i)\right)$$

olacağından $1\le i\le j$ için

$$v(d_i)=-\inf\left(\frac{v(h_j)}{j}\right) \qquad (4)$$

elde edilir ve bu ifadeden $d_i\in K^*$ elemanı tanımlanır; ancak bu tanımlanış tek türlü olmayabilir. $d_i\in K^*$ elemanı 3.15.(4) ifadesindeki gibi tanımlanmış ise $K(x)$ cismi üzerinde v, $\frac{x-x_i}{d_i}$ ve infimum ile tanımlanan değerlendirmenin w_0 ın genişlemesi olduğu kolayca görülür.

3.1.16.Tanım: 3.15.(4). ifadesinde tanımlanan $\gamma_i=v(d_i)\in G_v$ elemanına f polinomu ve f in x_i köküne karşılık gelen mertebe, w_i ye de f polinomu ve f in x_i köküne karşılık gelen değerlendirme adı verilir.

3.1.17.Önerme: K bir cisim, v K nın bir değerlendirmesi, $f\in K[x]$, $f\notin K$, x_1, x_2 f polinomunun kökleri, w_1, w_2 sırasıyla x_1, x_2 ve f polinomuna karşılık gelen değerlendirmeler ve γ_1, γ_2 mertebeleri olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

i) $w_1=w_2$

ii) $\gamma_1=\gamma_2$ ve $v(x_1-x_2)\ge\gamma$

iii) $\gamma_1 = w_2(x - x_1)$ ve $\gamma_2 = w_1(x - x_2)$ (Alexandru, Popescu, Zaharescu, 1988)

3.1.18.sonuç: K bir cisim, v K nın bir değerlendirmesi, $f = a\prod_{i=1}^{n}(x - x_i) \in K[x]$, her $1 \le i \le n$ için w_i f polinomu ve f in x_i köküne karşılık gelen değerlendirme olsun.

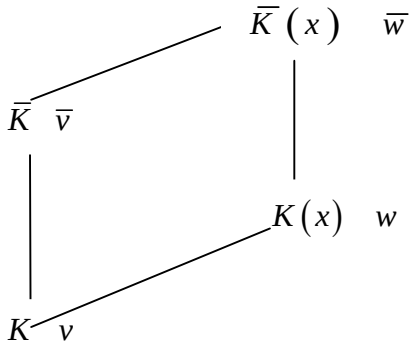
i) $w_1 = w_2 = ... = w_r$ ve her $i \ge r$ için $w_1 = w_i$ ise k_{w_1} / k_{w_0} r. dereceden bir genişlemedir.

ii) $w_1', w_2', ..., w_t'$ w_0 ın $K(x)$ cismine genişlemelerinin tam sistemi ise

$$\sum_j e(w_j / w_0) f(w_j / w_0) = [K(x) : K(f)]$$

dir. (Alexandru, Popescu, Zaharescu, 1988)

Şimdi K nın herhangi bir cisim olması durumunda K cisminin v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine rezidül transandant genişlemelerini belirleyelim.



$\overline{K}$, K cisminin cebirsel kapanışı ve $\bar{v}$, v değerlendirmesinin $\overline{K}$ cismine genişlemesi olsun. w v nin $K(x)$ cismine rezidül transandant genişlemesi, f k_w cismi içindeki görüntüsü k_v cismi üzerinde transandant olan bir polinom ve $\overline{w}$ w nın $\overline{K}(x)$ cismine genişlemesi olsun.

$k_{\bar{v}}$ k_v nin bir cebirsel genişlemesi olduğundan f $k_{\bar{v}}$ cismi üzerinde transandanttır. Bu durumda $\overline{w}$, $\bar{v}$ nin rezidül transandant genişlemesi olacaktır.

3.1.13. teoremine göre $\bar{v}(d)$, f polinomu ve f in bir a köküne karşılık gelen mertebe olmak üzere, w değerlendirmesi v, $\frac{x-a}{d}$ ve infumum ile tanımlanan bir değerlendirme olacak şekilde bir $d \in K$ elemanı vardır. Bir $g \in K[x]$ polinomu a noktasında Taylor serisine açılacak olursa

$$g(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{g^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j$$

olur. Bu durumda $\gamma = \overline{w}(x-a) = \bar{v}(d)$ olmak üzere

$$w(g)=\bar{w}(g)=\inf\left(v\left(\frac{g^{(j)}(a)}{j!}\right)+j\gamma\right) \qquad (5)$$

olarak tanımlanır.

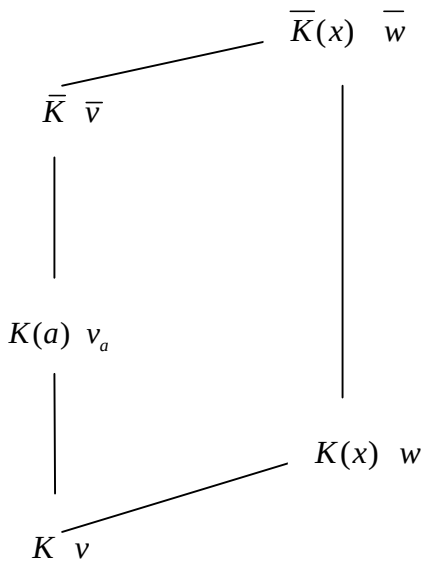
3.1.19.Teorem: w, v nin $K(x)$ cismine bir rezidül transandant genişlemesi olsun. Bu durumda w değerlendirmesi 3.1.18.(5) ifadesindeki gibi tanımlanacak şekilde bir $f\in K[x]$ polinomu ve f nin bir a kökü vardır. Tersine $f\in K[x]$ ve a f nin bir kökü olsun. γ, f ve a ya karşılık gelen mertebe olmak üzere 3.1.18.(5) ifadesinde tanımlanan w değerlendirmesi v nin rezidül transandant genişlemesidir. (Alexandru, Popescu, Zaharescu, 1988)

3.1.20.Tanım: $r\in K(x)$, $r\notin K$ olsun. $\deg r=[K(x):K(r)]$ biçiminde tanımlanır. $h,g\in K[x]$, $g\neq 0$ olmak üzere $r=\frac{h}{g}$ biçiminde yazılırsa $\deg r=[K(x):K(r)]=\max\{\deg h,\deg g\}$ biçimindedir. (Ohm,1985)

3.1.21.Tanım: $\deg(w/v)=\min\left\{n\,\middle|\,\exists r\in V_w, r^{*}\,trans/k_v, \deg r=n\right\}$

olarak tanımlanır.

3.1.22.Önerme: $\bar{K}$ K cisminin cebirsel kapanışı, $\bar{v}$ v değerlendirmesinin $\bar{K}$ ye genişlemesi olsun. $\bar{w}$ w nın $\bar{K}(x)$ cismine genişlemesi ise $\bar{w}$ v nin de genişlemesi olacak şekilde w değerlendirmesin $\bar{K}(x)$ cismine bir $\bar{w}$ genişlemesi vardır.
(Alexandru, Popescu, Zaharescu, 1988)



3.1.23.Önerme: K bir cisim, v K nın bir değerlendirmesi, w v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir genişlemesi olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

i) w, v nin rezidül transandant genişlemesidir.

ii) $\overline{w}$, $\overline{v}$ nin rezidül transandant genişlemesidir.

iii) $G_{\overline{v}} = G_{\overline{w}}$ dir. (Alexandru, Popescu, Zaharescu, 1988)

3.1.24.Önerme: K bir cisim, v K nın bir değerlendirmesi w, v nin $K(x)$ cismine rezidül transandant genişlemesi olsun.

Aşağıdaki ifadeler denktir:

i) w infimum, v, $a \in K$ ve $\delta \in G_v$ ile tanımlanmıştır.

ii) $e(w/v) = f(w/v) = 1$ dir. (Alexandru, Popescu, Zaharescu, 1988)

3.1.25.Tanım: $\overline{K}(x)$ cisminin $\overline{w}$ değerlendirmesi $\overline{w}(x-a)=\delta$ olmak üzere $\bar{v}$, infimum, $a\in\overline{K}$ ve $\delta\in G_{\bar{v}}$ ile tanımlanmak olsun. $(a,\delta)\in\overline{K}\times G_{\bar{v}}$ çiftine w değerlendirmesini tanımlayan çift adı verilir.

3.1.26.Tanım: K bir cisim, v K nın bir değerlendirmesi, w v nin $K(x)$ cismine $(a,\delta)\in\overline{K}\times G_{\bar{v}}$ çiftiyle tanımlanan bir genişlemesi olsun. $\bar{v}(a-b)<\delta$ sağlayan her $b\in\overline{K}$ için $[K(b):K]<[K(a):K]$ oluyorsa $(a,\delta)\in\overline{K}\times G_{\bar{v}}$ çiftine K cismi üzerinde minimal çift denir.

3.1.27.Tanım: $K\subseteq K_1\subseteq\overline{K}$, $\bar{v}$ nin K_1 cismine kısıtlanışı v_1, v_1 değerlendirmesinin değer grubu G_{v_1} olsun. $e=e(\gamma,K_1)$ ile $e.\gamma\in G_{v_1}$ olan en küçük doğal sayı gösterilsin.

3.1.28.Önerme: v K cisminin bir değerlendirmesi, w v nin $K(x)$ cismine bir genişlemesi olsun. Bu durumda $\overline{w}$ yi tanımlayan, aşağıdaki koşulları sağlayan bir $(a,\delta)\in\overline{K}\times G_{\bar{v}}$ çifti vardır.

i) $[K(a):K]=n$ ise her $g(x)\in K[x]$, $\deg g\le n$ için

$$w(g(x))=\bar{v}(g(a))$$

dir.

ii) $f(x)=Irr(a,K)$ için $w(f(x))=0$ ve $e=e(\gamma,K(a))$ olsun.

$\deg I<n$, $r=f^e/h$ için $w(r)=0$ ve $r\,trans/k_v$ olacak şekilde bir $h(x)\in K[x]$ polinomu vardır.

iii) v_1 , $\bar{v}$ nin $K(a)$ cismine kısıtlanışı ise

$$\deg(w/v) = n.e(\gamma, K(a)), e(w/v) = e(v_1/v).e(\gamma, K(a))$$

olur.

iv) k_{v_1} cismi ve k_v nin k_w cismi içindeki cebirsel kapanışına aynı gözüyle bakılabilir ve

$$f(w/v) = f(v_1/v)$$

dir. (Alexsandru, Popescu, Zaharescu)

3.1.29.Sonuç: $d(w/v) \geq f(w/v).e(w/v)$

dir.

3.1.30.Sonuç: $r^* trans / k_{v_1}$ olmak üzere,

$$k_w = k_{v_1}(r^*)$$

dır.

3.1.31.Sonuç: $K(x)$ cisminin w değerlendirmesi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

i) $h(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + ... + a_m r^m \in K[r]$ ise

$$w(h(r)) = \inf_i (v(a_i))$$

dir.

ii) $g(x) \in K[x]$, $\deg g < n$ ise

$$w(g(x)) = \bar{v}(g(a))$$

olur.

iii) $g(x) \in K[x]$, $\deg g < n.e$ ise $\deg g_i < n$, $0 \le i \le e$ olmak üzere

$$g(x) = g_0(x) + g_1(x) f(x) + g_2(x) f^2(x) + \ldots + g_{e-1}(x) f^{e-1}(x)$$

olarak tek şekilde yazılır ve

$$w(g(x)) = \inf_i \left(v(g(a)) + i\gamma \right)$$

biçimindedir.

iv) $u \in K(x)$ elemanı için $\deg t_i < n.e$, $1 \le i \le n$ olmak üzere

$$u = \left(t_0(x) + t_1(x) r + t_2(x) r^2 + \ldots + t_s(x) r^s \right) / h(r)$$

biçiminde yazılırsa

$$w(u) = \inf_i \left(w(t_i(x)) - w(h(r)) \right)$$

dir.

<u>3.1.32.Sonuç:</u> v Henselien ve $char k_v = 0$ ise

$$\deg(w/v) = f(w/v) e(w/v)$$

olur.

3.1.33.Sonuç:

i) v nin rankē 1 ve $chark_v = 0$

ii) v nin rankē 1 ve v ayrēk deĵerlendirme olmasē durumunda

$$\deg(w/v) = f(w/v)e(w/v)$$

dir.

3.1.34.Tanēm: v, K cisminin bir deĵerlendirmesi, w v deĵerlendirmesinin $K(x)$ cismine $(a,\delta) \in \overline{K} \times G_{\overline{v_0}}$ minimal çiftiyle tanēmlanan rezidül transandant geniklemesi olsun. $\overline{v}$, f, δ, v_a, γ, e, h, r, r^* daha önce tanēmlandēklarē gibi olmak üzere $r^* = Y$ ve $G = u_0 + u_1 Y + u_2 Y^2 + \ldots + Y^m \in k_{v_a}[Y]$ monik polinomunu alalēm.

$w(g) = me\gamma$, $\deg g = me \deg f$, $(g/h^m)^* = G$ özelliĵini saĵlayan $g \in K[x]$ polinomuna G polinomunun liftingi denir. Ayrēca $G \neq Y$ asal bir polinom ise g liftingi de asaldēr.

3.2. K Cisminin Deĵerlendirmelerinin K(x) Cismine Rezidül Cebirsel Geniklemeleri

3.2.1.Tanēm: v K cisminin bir deĵerlendirmesi, w v deĵerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir geniklemesi olsun. k_w k_v cisminin bir cebirsel geniklemesi ise w v deĵerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir rezidül cebirsel (r.c) geniklemesidir denir.

3.2.2.Tanēm: w, v deĵerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir rezidül cebirsel geniklemesi ve G_w / G_v grubunun her elemanēnēn mertebesi sonlu ise w, v deĵerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir rezidül cebirsel torsion (r.c.t) geniklemesi olarak adlandērēlēr. Bu burumda

$$G_{v_0} \subseteq G_w \subseteq G_{\overline{v_0}}$$

sağlanır.

3.2.3.Tanım: K cebirsel kapalı bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi olsun. v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine rezidül transandant genişlemeleri arasında

$$w_1 \le w_2 \Leftrightarrow \forall\, f \in K[x] \text{ için } w_1(f(x)) \le w_2(f(x))$$

biçiminde bir sıralama bağıntısı tanımlanır.

$(a_1, \delta_1),\ (a_2, \delta_2) \in \overline{K} \times G_{\overline{v_0}}$ w_1 ve w_2 değerlendirmelerini tanımlayan minimal çiftler olsun. $w_1 \le w_2$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\delta_1 \le \delta_2$ ve $v_0(a_1 - a_2) \ge \delta_1$ olmasıdır.

Benzer şekilde $w_1 < w_2 \Leftrightarrow w_1 \le w_2$ ve $\exists\, f \in K[x]$ için $w_1(f(x)) < w_2(f(x))$ olmasıdır.

3.2.4.Tanım: I iyi sıralı sonsuz bir küme ve $(w_i)_{i \in I}$ v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine rezidül transandant genişlemelerinin bir kümesi olmak üzere $i, j \in I$, $i < j$ için $w_i < w_j$ oluyorsa $(w_i)_{i \in I}$ kümesine v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine rezidül transandant genişlemelerinin bir <u>sıralı sistemi</u> denir.

3.2.5.Tanım: $(w_i)_{i \in I}$, v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine rezidül transandant genişlemelerinin bir sıralı sistemi olsun. Her $f \in K[x]$ için

$$w(f) = \sup_i w_i(f(x))$$

biçiminde tanımlanan w, v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir genişlemesidir ve $(w_i)_{i \in I}$ <u>sıralı sisteminin limiti</u> olarak adlandırılır.

$(w_i)_{i\in I}$ sıralı sisteminin limiti olan w, v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine rezidül transandant genişlemesi olmayabilir.

3.2.6.Teorem: $(w_i)_{i\in I}$, v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine rezidül transandant genişlemelerinin bir sıralı sistemi olsun. $(w_i)_{i\in I}$, sıralı sisteminin limiti olan w nun v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir rezidül transandant genişlemesi olması için gerekli ve yeterli koşul her $i \in I$ için $\overline{v}(a - a_i) \geq \delta_i$ olacak biçimde bir $a \in K$ elemanın bulunmasıdır. Buna göre $(w_i)_{i\in I}$ sıralı sisteminin limitinin v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir rezidül cebirsel genişlemesi olması için gerekli ve yeterli koşul her $a \in K$ için $w_i(x - a) < \delta_i$ sağlayan bir $i \in I$ elemanının olmasıdır. (Alexsandru,Popescu, Zaherescu, 1990)

3.2.7.Teorem: K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi ve w, v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir r.c.t genişlemesi olsun. Bu durumda v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine r.t. genişlemelerinin bir $(w_i)_{i\in I}$ sıralı sistemi vardır ve aşağıdaki özellikler gerçeklenir;

1) $(a_i, \delta_i) \in \overline{K} \times G_{\overline{v}}$ w_i değerlendirmesini tanımlayan minimal çift ve $v_i = \overline{v}\big|_{K(a_i)}$ olmak üzere $i, j \in I$, $i < j$ için $w_i < w_j$, $k_{v_i} \subseteq k_{v_j}$ ve $G_{v_i} \subseteq G_{v_j}$ dir.

2) $w = \sup_i w_i$, $k_w = \bigcup_i k_{v_i}$ ve $G_w = \bigcup_i G_{v_i}$ sağlanır.

Kanıt: $f_i = Irr(a_i, K)$, $n_i = \deg f_i, i \in I$ olsun. $i < j$ için $\overline{w_i} < \overline{w_j}$ olduğundan $w_i \leq w_j$ dir. $w_i = w_j$ olursa (a_i, δ_i), (a_j, δ_j) minimal çiftleri için $\delta_i = \delta_j$ bulunur. Oysa bu $\overline{w_i} < \overline{w_j}$ oluşuyla çelişir. Dolayısıyla $\delta_i < \delta_j$ dir. Her $i \in I$ için (a_i, δ_i) w_i değerlendirmesini tanımlayan minimal çift olduğundan $i < j$ için $n_i \leq n_j$ ve $\overline{v}(a_i - a_j) \geq \delta_i$ sağlanır.

Bu durumda $(w_i)_{i\in I}$ kümesi v_0 değerlendirmesinin $K(x)$ cismine rezidül transandant genişlemelerinin bir sıralı sistemidir.

$c \in K(a_i)$ ise $c = f(a_i)$ olacak biçimde bir $f \in K[x]$, $\deg f < n_i$ polinomu vardır.

(a_i, δ_i) w_i değerlendirmesini tanımlayan minimal çift olduğundan

$$\overline{v}(f(a_j)) = v_i(c)$$

ve

$$c^* = f(a_j)^*$$

olduğu görülür. Buradan $i < j$ için $k_{v_i} \subseteq k_{v_j}$ ve $G_{v_i} \subseteq G_{v_j}$ olduğu sonucu elde edilir.

$\overline{w} = \sup_i \overline{w_i}$ olduğundan $w = \sup_i w_i$ olduğu görülür; ayrıca w v değerlendirmesinin rezidül transandant genişlemesi değildir.

$f \in K[x]$, $\deg f < n_i$ için

$$\overline{w}(f(x)) = \overline{v}(f(a_i))$$

olduğundan

$$\bigcup_i k_{v_i} \subseteq k_w \text{ ve } \bigcup_i G_{v_i} \subseteq G_w$$

olduğu görülür.

$r(x) = f(x)/g(x) \in K(x)$ olsun. Benzer incelemelerle

$$\overline{v}(r(a_i)) = w(r(x))$$

olduğu görülür. Bu da

$$\bigcup_i k_{v_i} = k_w \text{ ve } \bigcup_i G_{v_i} = G_w$$

sonucunu verir.

3.2.8.Tanım: w, K cisminin v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir rezidül cebirsel genişlemesi olsun. G_w / G_v torsion grup değilse w, v değerlendirmesinin serbest rezidül cebirsel (s.r.c.) genişlemesi olarak adlandırılır.

v, K cismin bir değerlendirmesi ve w, v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir s.r.c. genişlemesi olsun. w aşağıdaki gibi tanımlanır:

w, v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine s.r.c. olduğundan $rankw = rankv + 1 = 2$ dir. Bu durumda G_v değer grubunun akikar olmayan bir H isolated alt grubu vardır. O_w halkasının da $M_{w_1} \subset M_w$ sağlayan, sıfırdan farklı M_{w_1} ve M_w asal idealleri vardır.

$\varphi : G_v \to G_v / H$ doğal homomorfizma olsun. $w_1 = \varphi v$ $K(x)$ cisminin rankı 1 olan bir değerlendirmesidir. w_1 değerlendirmesinin değerlendirme halkası O_{w_1}, O_v halkasının M_{w_1} idealinin tümleyenine göre kesir halkasıdır. O_v halkasının maksimal ideali M_{w_1} dir.

w_2, k_{w_1} rezidü cisminin O_w / M_{w_1} halkasına karşılık gelen değerlendirmesi olsun. Bu durumda $w = w_1 \circ w_2$ bileşke değerlendirmesidir.

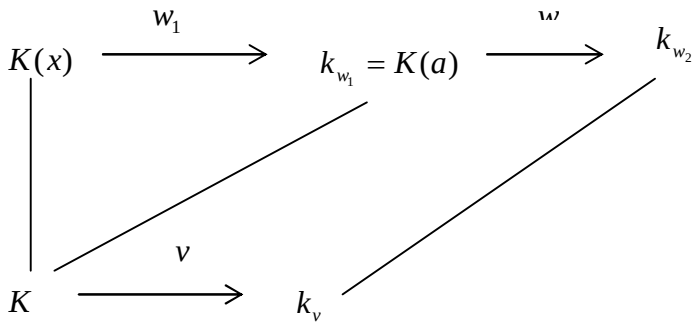
$$O_{w_1} \cap K = K \text{ ya da } O_{w_1} \cap K = O_v$$

durumları incelenerek w_1 tanımlanır.

Not1: v, K cisminin bir değerlendirmesi ve w, w_1 3.2.8.tanımındaki gibi tanımlansın. $O_{w_1} \cap K = K$ ise w_1 değerlendirmesi K cismi üzerinde akikardır.

w_1, asal, monik bir $f \in K[x]$ polinomuyla tanımlanmış ise $G_{w_1} = Z$ ve a, f polinomunun uygun bir kökü olmak üzere $k_{w_1} = K(a)$ biçimindedir.

w_1, sonsuzdaki asal ile belirlenmiş ise $k_{w_1} = K$ dır. Bu durumda tüm kavramlar $f(x) = x$ durumuyla aynı olacağından bu çalışma boyunca w_1, $K(x)$ cisminin K cismi üzerinde akikar bir değerlendirmesi ise w_1 değerlendirmesinin bir $f \in K[x]$ asal monik polinomuyla tanımlandığı durumun incelenmesi yeterli olacaktır.



Her $F \in K[x]$ polinomu

$$F = F_0 + F_1 f + F_2 f^2 + ... + F_n f^n,\ F_i \in K[x],\ \deg F_i < \deg f,\ i = 0,1,2,.....,n$$

olarak tek şekilde yazılır ve w değerlendirmesi

$$w(F) = \inf_i \left(i, v'\left(F_i(a)\right)\right)$$

biçiminde tanımlanır. Bu durumda v', v değerlendirmesinin $k_{w_1} = K(a)$ cismine bir genişlemesidir.

Başka bir ifadeyle w değerlendirmesi, $F_f = F / f^{w_1(F)}$ ve $w_1(f) = 1$ olamak üzere

$$w(F) = \inf_i \left(w_1(F), v'\left(F_f^{\,*}\right) \right)$$

olarak tanımlanır. Bu biçimde tanımlanan w değerlendirmesi v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine birinci tip s.r.c. genişlemesi olarak adlandırılır.

Not2: v, K cisminin bir değerlendirmesi, w ve w_1 3.2.9.tanımındaki gibi olsun. $O_{w_1} \cap K = O_v$ ise w_1, v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir genişlemesidir. k_{w_1} cisminin M_{w_1} değerlendirme halkasına karşılık gelen değerlendirmesi k_v cismi üzerinde akşikar olduğundan w_1, v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir rezidül transandant genişlemesidir. Bu durumda w_1 bir $(a,\delta) \in \overline{K} \times QG_v$ minimal çiftiyle tanımlanmıştır. f, γ, e, h, v_a, r, $r^* = Y$ daha önce tanımlandıklarıgibi olsunlar. w_2, k_v cismi üzerinde akşikar olduğundan bir $G(Y) \in k_{v_a}[Y]$ asal, monic polinomuyla tanımlanmıştır. $g \in K[x]$, $G(Y)$ asal polinomunun asal liftingi olmak üzere w aşağıdaki gibi tanımlanır: Her $F \in K[x]$ polinomu

$$F = F_0 + F_1 g + F_2 g^2 + \ldots + F_n g^n,\ F_i \in K[x],\ \deg F_i < \deg g,\ i = 0,1,\ldots,n$$

yazılır.

$$w(g) = \left(w_1(g), 1 \right) \in QG_v \times Q$$

ve

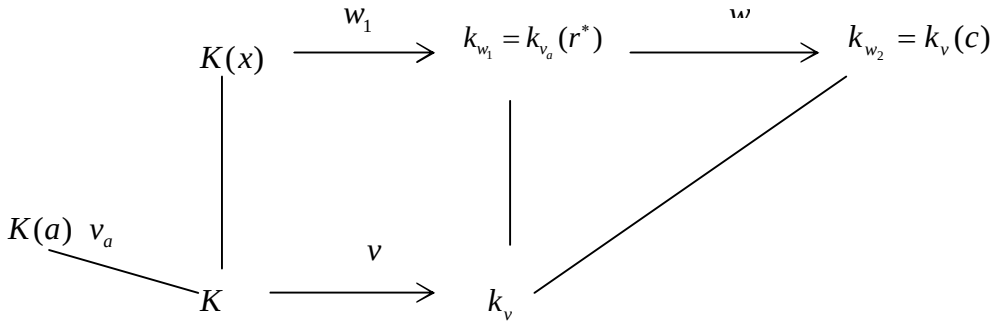
$$\begin{aligned} j : QG_v &\to QG_v \times Q \\ \alpha &\to (\alpha, 0) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$w(F) = \inf_i \left(j\left(w_1(F_i)\right) + iw(g) \right)$$

olarak tanımlanır. Bu biçimde tanımlanan w değerlendirmesine v değerlendirmesinin ikinci tip s.r.c. genişlemesi adı verilir.

$n = \deg g(Y)$ olsun. $\left(g/h\right)^* = G(Y)$, k_v üzerinde transandant olduğundan $g(Y)$ polinomunun $\overline{v}(b-a) \le \delta$ sağlayan bir kökü vardır. $\deg F < \deg f$ olan her $F \in K[x]$ polinomu için $F(b)^* = F(a)^*$ dır ve $\left(F(b)^* / h(b)\right)^* = c$ $G(Y)$ polinmunun bir köküdür. Bu durumda v_b, v değerlendirmesinin $K(b)$ cismine bir genişlemesi olmak üzere $k_w = k_{v_b} = k_{v_a}(c)$ olduğu görülür. (Popescu, Vraciu, 1992)



3.2.11.Teorem: K bir cisim, v K cisminin rankı r olan bir değerlendirmesi ve $K(x_1, x_2, x_3 \ldots x_s)$ K cismi üzerinde s değişkenli rasyonel fonksiyon cismi olsun. v, v değerlendirmesinin $K(x_1, x_2, x_3 \ldots x_s)$ cismine bir genişlemesi ise $rank v \le r + s$ dir. (Khanduja, Garg, 1990)

KAYNAKLAR

[1].Alexsandru, V. Popescu, N. Zaharescu A., 1988. A Theorem of Characterization of Residual Transcendental Extensions of Valued Fields, J.Math. Kyoto Univ,28-4 (579,592)

[2].Bachman G. 1964. Introduction to p-adic Numbers and Valuation Theory Academic Pres, New York and London

[3].Bourbaki N.1969 Commutative Algebra, Addison Wesley Publishing Company, New York.

[4].Çallıalp Fethi, 1986. Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Samsun.

[5].Joseph J. Rotman, 1978. The Theory of Groups, 470 Atlantic Avenue, Boston

[6]Khanduja S. K., Garg (chandigargh) U, 0n rank of extensions of valuations, Colloquium Mathematicum LIX (1990),25-29.

[7].Mc. Carthy P.J. 1966. Algebraic Extension of Fields. Blaisdell Publishing Company, London

[8].Nagata M.1967. A Theorem on Valuation Rings and its Applications. Nagaya Math. J. 29.(85-91)

[9].Nagata M.1977. Field Theory. Chelsea Publishing Company, New York and Basel

[10].Ohm J. 1983. The Ruled Residue Theorem for Simple Trascendental Extensions of Valued Fields. Proceeding of the American Mathematical Society 89 (16,18)

[11]Popescu N, Vraciu C, On the extension of a valuations of a field K to K(x) I Ren. Sem. Mat.Univ.Padova, 87 (1992),151-168.

[12].Popescu N. 1986. On a problem of Nagata in valuation theory, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 31. (639,641)

[13].Weiss E.1963. Algebraic Number Theory, Chelsea Publishing Company New York

ÖZGEÇMİŞ

27.01.1983 tarihinde Mersin'in Silifke ilçesinde doğdum. İlk ve orta öğretimi Silifke'de tamamladıktan sonra 2003 yılında Trakya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandım. 2007 yılında Trakya Üniversitesinden mezun oldum ve aynı yıl yüksek lisansa başladım. Şu an özel bir dershanede matematik öğretmeni olarak görev yapmaktayım.