T.C.

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$SO(1,2)$ GRUBUYLA BAĞLANTILI CASIMIR OPERATÖRÜ

YASEMİN IŞIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tez Danışmanı: Doç. Dr. MEHMET SEZGİN

EDİRNE - 2017

T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Murat YURTCAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin yüksek lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Hülya İŞCAN
Anabilim Dalı Başkanı (V.)

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Mehmet SEZGİN
Tez Danışmanı

Bu tez, tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından Matematik Anabilim Dalında bir yüksek lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

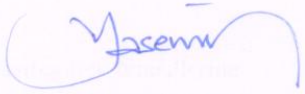
Jüri Üyeleri	İmza
Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV	
Doç. Dr. Mehmet SEZGİN	
Doç. Dr. Deniz AĞIRSEVEN	

Tarih: 31/07/2017

T.Ü. FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI YÜKSEK LİSANS PROGRAMI
DOĞRULUK BEYANI

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin kaynak gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

31/07/2017



Yasemin IŞIK

Yüksek Lisans Tezi

SO(1,2) Grubuyla Bağlantılı Casimir Operatörü

T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

ÖZET

Bu çalışmanın birinci bölümünde, simetri kavramına yer verilmiştir. Grup ve Lie grubu tanımları yapılarak, Lie gruplarının cebirsel ve topolojik yapıları ile ilgili temel özelliklerden bahsedilmiş ve bazı Lie grubu örnekleri verilmiştir.

İkinci bölümde, grubun genel temsil yapısı tanıtılmış ve özel olarak regüler ve kuasiregüler temsil tanımları yapılmıştır. Grubun temsilinin sonsuz küçük operatörleri ve bu operatörlerin oluşturduğu Casimir operatörü tanımlanmıştır.

Üçüncü bölümde ise $SO(1,2)$ grubunun regüler ve kuasiregüler temsillerine karşılık gelen J_0, J_1, J_2 sonsuz küçük operatörleri verilmiştir. Bu operatörler yardımıyla $SO(1,2)$ grubunun

$$C = {J_0}^2 - {J_1}^2 - {J_2}^2$$

Casimir operatörleri elde edilmiştir. $-\sigma(\sigma+1)$ özdeğer olmak üzere, Casimir operatörleri bir f fonksiyonuna etki ettirilerek, elde edilen özdeğer-özfonksiyon problemlerinin çözümleri araştırılmıştır. Daha sonra Schrödinger denklemleri elde edilerek, $SO(1,2)$ grubuna bağlı fiziksel sistemlerin dalga fonksiyonları verilmiştir.

Yıl : 2017

Sayfa Sayısı : 44

Anahtar Kelimeler : Lie Grubu, Regüler ve Kuasiregüler Temsil, Casimir Operatörü

Master's Thesis

The Casimir Operator Related to the Group $SO(1,2)$

Trakya University Institute of Natural Sciences

Department of Mathematics

ABSTRACT

In the first chapter of this study, the concept of the symmetry and definitions of group and Lie group are given. The basic properties of algebric and topological structures of Lie groups are mentioned and some Lie group examples are given.

In the second chapter, the concept of group representation is introduced. The definitions of regular and quasi-regular representations are given. Infinitesimal operators of group representation and Casimir operator which these infinitesimal operators form are introduced.

In third chapter, infinitesimal operators J_0, J_1, J_2 corresponding to regular and quasi-regular representations of $SO(1,2)$ group are given. Using these J_0, J_1, J_2 infinitesimal operators, Casimir operators of $SO(1,2)$

$$C = {J_0}^2 - {J_1}^2 - {J_2}^2$$

are obtained. The solutions to the eigenvalue-eigenfunction problems which are obtained by applying Casimir operators on a function f, where $-\sigma(\sigma+1)$ is eigenvalue, are invastigated. Then Schrödinger equations are obtained, wave functions of physical systems corresponding to $SO(1,2)$ group are given.

Year : 2017

Number of Pages : 44

Keywords : Lie groups, Regular and Quasiregular Representation, Casimir Operator

ÖNSÖZ

Tez çalışmalarım süresince, bana her türlü desteği sağlayan sayın hocam Doç. Dr. Mehmet SEZGİN'e, bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım değerli bölüm hocalarıma ve maddi destekleri ile bilimin ve bilim insanının destekçisi olan TÜBİTAK BİDEB'e teşekkürlerimi sunarım.

Yasemin IŞIK

İÇİNDEKİLER

ÖZET i
ABSTRACT ii
ÖNSÖZ iii
BÖLÜM 1 - GİRİŞ 1
1.1. Grup 3
1.2. Lie Grubu 6
BÖLÜM 2 - GRUBUN TEMSİLİ VE CASİMİR OPERATÖRÜ 14
2.1. Temsil Tanımı 15
2.2. Regüler ve Kuasiregüler Temsil 17
2.3. Sonsuz Küçük Operatörler 17
2.4. Casimir Operatörü 18
BÖLÜM 3 - $SO(1,2)$ GRUBUNUN CASİMİR OPERATÖRLERİ 21
3.1. Regüler Temsilin Sonsuz Küçük Operatörleri ve Casimir Operatörü 21
3.2. Kuasiregüler Temsilin Sonsuz Küçük Operatörleri ve Casimir Operatörü 33
SONUÇLAR 40
KAYNAKLAR 41
ÖZGEÇMİŞ 43
TEZ İLE İLGİLİ BİLİMSEL FAALİYETLER 44

BÖLÜM 1

GİRİŞ

J. L. Lagrange, 1770'de yaptığı bir çalışmada ilk kez yüksek dereceden polinomların köklerinin varlığı ve yapısı, köklerin nasıl elde edileceği gibi konularla ilgilenmiş ve bir $f(x)$ polinomunun köklerinin permütasyonlarının önemini keşfetmiştir. Daha sonra Evariste Galois ilk defa 1830'da grup yapısından bahsetmiş ve her polinomu, polinomun köklerinin bir permütasyon grubuyla eşleştirmiştir. Böylece grup teorisinin temelleri atılmış, sonraki yıllarda teori büyük gelişmeler göstererek, matematik ve diğer bilimlerde büyük bir uygulama alanı haline gelmiştir.

19. yüzyılın başlarında Galois'nın cebirsel denklemleri çözmek için grup teoriyi kullanması Norveçli bilim adamı Marius Sophus Lie'yi de kendi çalışması için benzer bir tekniğe yönlendirmiştir. Sonlu grupların, sonlu dereceden denklemlerin çözülebilirliğine karar vermede kullanılması, sonsuz grupların da (örneğin; bir veya birden fazla, reel ya da kompleks değişkene bağlı gruplar) adi veya kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü ile ilişkisi olabileceği görülmüştür. Bunun üzerine Lie, adi diferansiyel denklemleri çözmede kullanılan karmaşık teknikleri bir düzene koymak için simetri dönüşümlerinin sürekli bir grubu fikrini ortaya koymuş ve çalışmalarını bu fikir üzerine kurarak Lie teorisini geliştirmiştir.

Cebirsel denklemlerin çözümünde sonlu gruplardan faydalanılırken, diferansiyel denklemlerin çözümlerinde Lie gruplarından faydalanılmaktadır. Günlük hayattaki birçok problemin matematiksel ifadesi olan diferansiyel denklemlerin çözümleri araştırılırken bu problemlerin geometrik yapıları ve simetri özelliklerine başvurulur. Lie grubu ve Lie cebiri teorisinde kullanılan temel yöntemler ise bu simetri yapısına dayanmaktadır. Bu nedenle teori, uzun yıllardır matematiğin birçok alanında kullanılmıştır [7,14].

Lie gruplarının bilim dünyasına tanıtılmasından bu yana teori büyük gelişme göstermiştir. Lie grupları üzerine yapılan önemli çalışmaların birisi grubun temsilidir. Grup temsili, soyut cebirsel yapıların, cebirsel işlemler yardımı ile, somut yapılar haline getirilmesini sağlamaktadır. Bu nedenle özellikle fizikte ve mühendislikte birçok uygulama alanına sahiptir. Kuantum mekaniği bu uygulama alanlarından birisidir. Örneğin, simetrileri bilinen fiziksel bir sistemin kuantum mekaniğinde ifade edilmesinde Lie grubu temsillerinin önemi büyüktür. Böyle bir kuantum sisteminin Hamiltonyeni, sistemin simetri grubuna bağlı ikinci dereceden Casimir operatör ile ifade edilir. Dolayısı ile bu bağlantı, çözüme dair herhangi bir işlem gerektirmeksizin Schrödinger denkleminin dalga fonksiyonu, potansiyeli ve enerjisini elde etmeye olanak sağlamaktadır [12].

Lie grubu alanındaki önemli çalışmalardan bir diğeri ise, özel fonksiyonlar ile grup temsilleri arasında kurulan ilişkidir. Bu alanda yapılan ilk çalışmalar Elie Cartan'a aittir. Daha sonra Eugene Wigner'in önemli çalışmaları olmuş ancak Vilenkin'in çalışmaları bu alanda dönüm noktası haline gelmiştir [15].

Bugün Lie grupları matematiğin birçok dalında ve fizik, mühendislik gibi matematik temelli bilimler üzerinde oldukça büyük bir etkiye sahiptir. Lie teorisinin, sürekli simetri gruplarının uygulamaları bugün cebirsel topoloji, diferansiyel geometri, özel fonksiyonlar, kontrol teori, klasik mekanik, kuantum mekaniği gibi çok geniş bir alana yayılmıştır. Özellikle son iki yüzyılda Lie grupları ve temsilleri alanında yapılan çalışmaların sayısında büyük bir artış olmuştur [5,7,12].

Bu çalışma, $SO(1,2)$ Lie grubu üzerine yapılmıştır. Regüler ve kuasiregüler temsil, önemli iki grup temsil örneğidir. $SO(1,2)$ grubunun bu iki temsili tanımlanarak sonsuz küçük operatörleri ve bu operatörlere bağlı Casimir operatörleri elde edilmiştir. Bu Casimir operatörler bir f fonksiyonuna etki ettirilerek elde edilen özdeğer-özfonksiyon probleminin çözümleri araştırılmıştır. Ayrıca Casimir operatörün Schrödinger denklemi ile olan bağlantısı kullanılarak $SO(1,2)$ Lie grubuna karşılık gelen fiziksel sistemlerin dalga fonksiyonları elde edilmiştir.

1.1. Grup

Simetri kavramı, genel manada nesnelerin bir takım özelliklerini koruyan matematiksel ifadeler arasında yapılan eşlemeleri ifade etmektedir. Bu kavramı anlamak için kullanılan en açık örnekler geometrik nesnelerdir. Örneğin bir kareyi ele alalım. Eğer kare $90°$ döndürülürse, ilk kare ile aynı doğrultularda yine benzer bir kare elde edilecektir. Kareyi $180°$ ya da $270°$ ($90°$ nin tam katları) döndürmekle yine aynı sonuç elde edilir. Ancak kareyi $60°$ gibi bir derece ile döndürmek, aynı kareyi farklı doğrultularda elde etmek demektir. Yani kare üzerinde $90°$ ve katları ile yapılan döndürmeler kareden karenin üzerine yapılan eşlemelerin bir kümesini oluşturur. Başka bir deyişle bir kare belirli döndürmeler altında simetriktir.

Şimdi de daireyi örnek alalım. Bir daire kendi düzleminde döndürülürse yine aynı daire elde edilir. Fakat bu örnekte daire hangi açı ile döndürülürse döndürülsün yine aynı daire elde edilir. Dolayısıyla dairenin tüm dönmeleri, dairenin simetrilerinin bir kümesini oluşturur.

Simetri kavramı, benzer şekilde cebirsel ifadelere de uygulanabilir. $y = x^2$ ya da $y = \sin x$ gibi cebirsel denklemeler de simetrilere sahiptir. $x \to -x$ dönüşümü $y = x^2$ nin grafiğini yine kendisine eşlemektedir. Aynı durum $x \to x + 2\pi$ dönüşümü altında $y = \sin x$ ifadesi için geçerlidir.

Grup yapısı, yukarıda örnekleri verilen simetrileri matematik dilinde ifade etmek için kullanılır. Bir yapının simetrisi, bu yapının invaryant olma özelliğine sahip olması ile ilişkilidir ve bu özelliği taşıyan dönüşümler bir grup yapısı oluşturur. Grup yapısının temeli Galois teorisine dayanmaktadır. Yukarıda kısaca bahsetmeye çalıştığımız cebirsel denklemlerin simetrilerini tanımlamak için grup teoriyi ilk olarak Galois kullanmıştır. Grup teorisinin temeli cebirsel denklemlerin çözümlerini araştırmaya dayansa da günümüzde teorik ve uygulamalı alanlarda pek çok gelişme göstermiş ve birçok farklı alanda çalışma olanağı sağlamıştır.

G boş olmayan bir küme olsun. $G \times G$ 'den G'ye tanımlı bir fonksiyona G'de bir ikili işlem denir. $\cdot$ işlemi G kümesi üzerinde tanımlı bir ikili işlem olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $(G, \cdot)$ cebirsel yapısına grup denir.

i. $\forall\, a, b \in G$ için $a \cdot b \in G$'dir. (Kapalılık özelliği)

ii. $\forall\, a, b, c \in G$ için $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$'dir. (Birleşme özelliği)

iii. $\forall a \in G$ için $a \cdot e = e \cdot a = a$ olacak şekilde bir $\exists e \in G$ vardır. (Birim eleman özelliği)

iv. $\forall a \in G$ için $a \cdot b = b \cdot a = e$ olacak şekilde bir $\exists b \in G$ vardır. (Ters eleman özelliği)

Burada (iii) şartındaki e elemanı grubun birim (etkisiz) elemanı olup (iv) şartındaki b elemanına a'nın tersi denir ve $b = a^{-1}$ ile ifade edilir. Eğer bir grup, $\forall a, b \in G$ için $a \cdot b = b \cdot a$ özelliğini sağlıyorsa böyle gruplara değişmeli (Abelyen) grup denir.

G bir grup ve H, G'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer H, G grubunun grup işlemi ile bir grup oluşturuyor ise H kümesine G'nin bir alt grubudur denir ve $H \leq G$ ile gösterilir.

$\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi ve $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi toplama işlemine göre birer değişmeli gruptur. $(\mathbb{Z},\cdot)$ bir grup değilken, $(\mathbb{Q}\backslash\{0\},\cdot)$, $(\mathbb{R}\backslash\{0\},\cdot)$, $(\mathbb{C}\backslash\{0\},\cdot)$ birer değişmeli gruptur.

G sonlu bir küme ise $(G,\cdot)$ grubuna sonlu bir grup denir ve kümenin eleman sayısı grubun mertebesini verir.

$GL(n,\mathbb{R})$ kümesi $n \times n$ tipinde, determinantı sıfırdan farklı gerçel değerli matrisler kümesidir ve

$$GL(n,\mathbb{R}) = \left\{ A = (a_{ij})_{n\times n} \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{R},\ i,j = 1,2,\dots,n,\ \det A \neq 0 \right\}$$

ile gösterilir. Bu küme bilinen matris çarpımı işlemi ile bir grup ifade eder ve n. mertebeden genel lineer grup olarak adlandırılır. $SL(n,\mathbb{R})$ ise $n \times n$ tipinde, determinantı bire eşit gerçel değerli matrisler kümesidir ve

$$SL(n,\mathbb{R}) = \{\ A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det A = 1\ \}$$

gösterilir. $SL(n,\mathbb{R})$ kümesi matris çarpımı işlemi ile özel lineer grubu oluşturur. $SL(n,\mathbb{R})$ grubu $GL(n,\mathbb{R})$'nin bir alt grubudur.

S boş olmayan bir küme, $A(S)$ ise S'den S'ye tanımlı tüm bire-bir ve örten fonksiyonların kümesi olmak üzere, $A(S)$ kümesi bilinen fonksiyon bileşkesi işlemi ile bir gruptur. $A(S)$ kümesinin elemanlarına permütasyon denir ve bileşke işlemi ile permütasyon grubunu oluşturur. Eğer $S = \{1,2,\dots,n\}$ ise bu gruba n. dereceden simetrik grup denir ve S_n ile gösterilir. S_n grubu, $n!$ elemanlı bir gruptur.

G çarpımsal bir grup ve A ile B de G 'nin iki alt kümesi olsun. $AB = \{ ab \mid a \in A, b \in B\}$ kümesine A ile B kümelerinin çarpımı denir. Özel olarak, $A = \{a\}$ ise $\{a\}B = aB$ ile gösterilir.

G bir grup ve $H \leq G$ olsun. G'de $\equiv$ bağıntısını,

$$a \equiv b \ (mod\ H) \quad \Leftrightarrow \quad ab^{-1} \in H$$

ile tanımlayalım. $H \leq G$ alt grubuna göre yukarıda tanımlanan $\equiv$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısına göre bir $a \in G$ elemanının sınıfı $\bar{a} = Ha = \{ ha \mid h \in H \}$ alt kümesidir. Ha kümesine H alt grubuna göre a'nın sağ denklik sınıfı denir. Benzer şekilde,

$$a \equiv b \ (mod\ H) \quad \Leftrightarrow \quad a^{-1}b \in H$$

ile tanımlı $\equiv$ bağıntısı da bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısına göre bir $a \in G$ elemanının sınıfı $aH = \{ ah \mid h \in H \}$ alt kümesidir. aH kümesine H alt grubuna göre a'nın sol denklik sınıfı denir.

N, G'nin bir alt grubu olsun. $\forall a \in G$ için $aN = Na$ ise N'ye normal (invaryant) alt grup denir ve $N \lhd G$ ile gösterilir.

N normal alt grup olsun. G'nin N grubuna göre sağ denklik sınıfı kümesi bölüm grubu olarak adlandırılır ve

$$G/N = \{ gN \mid g \in G\}$$

ile gösterilir.

Bir G grubunun has hiçbir normal alt grubu yoksa G'ye basit grup denir. Mertebesi asal olan gruplar basit gruplardır.

$(G,\cdot)$ ve $(H,*)$ iki grup olmak üzere $f : G \to H$ ile tanımlanan f fonksiyonu grup işlemini koruyorsa, yani $\forall\, a, b \in G$ olmak üzere

$$f(a \cdot b) = f(a) * f(b)$$

ise f fonksiyonuna G'den H'ye tanımlı bir homomorfizma denir. Eğer f, bire-bir ve örten bir fonksiyon ise f fonksiyonuna bir izomorfizma ve G ile H gruplarına birbirine izomorftur denir [7,8,13].

1.2. Lie Grubu

Cebirsel ifadelerin çözümlerinin simetrileri olduğu gibi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin de simetrileri vardır ve bu özellik denklemlerin çözümlerini bulmada kullanılmaktadır.

Sophus Lie'nin diferansiyel denklemlerin çözümleri için ortaya attığı Lie teorisi ilk dönemlerde sürekli gruplar olarak adlandırılmıştır. Ancak Lie gruplarının aynı zamanda manifold yapısına da sahip olmaları, bu alanda çalışan bilim adamlarını Lie grupları için daha soyut tanımlar geliştirmeye yöneltmiştir. Bu nedenle teori, analiz, geometri ve cebir gibi matematiğin birden fazla alanını bir araya getirmekte ve diferansiyel denklemler ve manifoldlar üzerine yapılan çalışmalarda büyük önem arz etmektedir. Lie grupları köken olarak diferansiyel denklemlerin çözümünü araştırmaya dayansa da, günümüzde birçok farklı alanda uygulama alanına sahiptir.

G boş olmayan bir küme olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa, G bir Lie grubudur.

i. G bir grup,

ii. G türevlenebilir bir manifold,

iii. G grubu üzerinde tanımlanan grup işlemi

$$f : G \times G \to G, \quad f(g,h) = g \cdot h, \quad g,h \in G$$

ve ters işlemi

$$i : G \to G, \quad i(g) = g^{-1}, \quad g \in G$$

sonsuz kez türevlenebilirdir.

$G = \mathbb{R}^n$ olsun. Üzerinde tanımlanan $(x,y) \mapsto x + y$ grup işlemi ve $x \mapsto -x$ ters işlemin her ikisi de sonsuz kez türevlenebilir olup $\mathbb{R}^n$ manifold yapısına sahiptir. Dolayısıyla $\mathbb{R}^n$, n parametreli değişmeli Lie gruplarına bir örnektir.

Matematiğin birçok alanında, fen bilimlerinde ve mühendislik alanlarında karşılaşılan Lie gruplarının birçoğu matris gruplarıdır. Bu alanlarda sıklıkla karşılaşılan matris gruplarına birkaç örnek verelim:

$\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı genel lineer gruplar $GL(n,\mathbb{R})$, $GL(n,\mathbb{C})$ Lie gruplarının temel örnekleridir. Özel lineer gruplar olan $SL(n,\mathbb{R})$, $SL(n,\mathbb{C})$ grupları da birer Lie grubudur.

Bilinen çarpma işlemi altında sıfırı içermeyen reel sayılar kümesi $\mathbb{R}^*$, $GL(1,\mathbb{R})$ kümesine izomorftur. Dolayısıyla bir Lie grubu olarak kabul edilir. Benzer şekilde $\mathbb{C}^*$,

$GL(1,\mathbb{C})$ kümesine izomorf bir Lie grubudur. Bilinen toplama işlemi altında reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$ dönüşümü ile $GL(1,\mathbb{R})^+$ (pozitif determinanta sahip 1×1 tipinde reel matrisler) kümesine izomorf olup bir Lie grubudur.

A, $n \times n$ tipinde kompleks değerli bir matris ve A^*, A matrisinin adjointi olmak üzere,

$$A^* A = I$$

ise A matrisine üniter matris denir. Tüm $n \times n$ tipindeki üniter matrisler grubu $U(n)$ ile ifade edilir. Tüm $A \in U(n)$ için

$$\det(A^* A) = \det I$$

$$|\det A|^2 = 1$$

olur yani, $\det A = \pm 1$ olmak üzere $U(n)$ grubu, $GL(n,\mathbb{C})$ grubunun bir alt grubudur. Determinantı bir olan üniter matrisler grubu $SU(n)$ ile ifade edilir.

$\mathbb{R}^{2n}$ uzayında, anti simetrik bilineer form,

$$B[x,y] = \sum_{k=1}^{n} x_k y_{n+k} - x_{n+k} y_k$$

ile tanımlanır. B bilineer formunu koruyan $2n \times 2n$ tipindeki A matrislerinin (öyle ki $B[Ax,Ay] = B[x,y]$, $\forall x,y \in \mathbb{R}^{2n}$) kümesi reel simplektik grup $Sp(n,\mathbb{R})$'yi oluşturur. $Sp(n,\mathbb{R})$ grubu da $GL(n,\mathbb{R})$ grubunun bir alt grubudur. Reel uzayda tanımlanan bu bilineer forma benzer bir form $\mathbb{C}^{2n}$'de de tanımlanabilir. Bu bilineer formu sağlayan $2n \times 2n$ tipindeki kompleks değerli matrisler grubu ise kompleks simplektik grup olarak adlandırılır ve $Sp(n,\mathbb{C})$ ile ifade edilir. $2n \times 2n$ tipindeki kompleks değerli bir A matrisi $Sp(n,\mathbb{C})$ grubunun bir elemanıdır ancak ve ancak, $J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$A^t J A = J.$$

Kompakt simplektik grup $Sp(n)$,

$$Sp(n) = Sp(n,\mathbb{C}) \cap U(2n)$$

ile tanımlanır. Kompleks ve kompakt simplektik gruplar da birer Lie grubu örnekleridir.

A, $n \times n$ tipinde reel değerli bir matris olmak üzere, A matrisini oluşturan sütun vektörler ortonormal vektör, yani $\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$ Kronecker delta olmak üzere

$$\sum_{l=1}^{n} A_{lj}A_{lk} = \delta_{jk}\,, \qquad 1 \le j,k \le n$$

ise, A matrisine ortogonal matris denir. Bu tanıma denk bir ifade ile eğer $A^tA = I$ ise A ortogonal bir matristir. Burada

$$\det(A^t\,A) = \det I$$

$$|\det A|^2 = 1$$

yani, tüm A matrisleri için $\det A = \pm 1$ olur. Bu sonuç, her ortogonal matrisin tersinir olduğunu söyler. Bir ortogonal matrisin tersi de ortogonal olup, iki ortogonal matrisin çarpımı da ortogonaldir.

$n \times n$ tipindeki reel değerli ortogonal matrislerin kümesi, bilinen matris çarpımı işlemi altında ortogonal grup $O(n,\mathbb{R})$'yi oluşturur ve

$$O(n,\mathbb{R}) = \{\ A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid\ A^t = A^{-1}\ \}$$

ile ifade edilir.

Determinantı bir olan $n \times n$ tipindeki reel değerli ortogonal matrislerin kümesi ise özel ortogonal grup $SO(n,\mathbb{R})$'yi oluşturur ve

$$SO(n,\mathbb{R}) = \{\ A \in O(n,\mathbb{R}) \mid \det A = 1\ \}$$

ile ifade edilir. Açık olarak $SO(n,\mathbb{R})$ grubu, $O(n,\mathbb{R})$ grubunun bir alt grubudur.

Geometrik olarak $O(n,\mathbb{R})$ grubunun elemanları hem dönmeler hem de dönme ve yansımaların birleşimleridir. $SO(n,\mathbb{R})$ grubunun elemanları ise yalnızca dönmeleri içerir.

p ve q pozitif tam sayılar olmak üzere $\mathbb{R}^{p+q}$ uzayını ele alalım. $\mathbb{R}^{p+q}$ uzayı üzerinde, $[\cdot,\cdot]_{p,q}$ bilineer form olmak üzere,

$$[x,y]_{p,q} = x_1y_1 + \cdots + x_py_p - x_{p+1}y_{p+1} - \cdots - x_{p+q}y_{p+q}$$

şeklinde bir simetrik bilineer form tanımlayalım. Bu bilineer formu koruyan $(p+q)\times(p+q)$ tipindeki reel değerli A matrislerinin kümesi genelleştirilmiş ortogonal grup $O(p,q;\mathbb{R})$'yi oluşturur ve pseudo-ortogonal grup olarak bilinir.

$O(p,q)$ grubu, $GL(n,\mathbb{R})$ grubunun bir alt grubu olup bir Lie grubudur. i. sütun vektörü

$$A^{(i)} = \begin{pmatrix} A_{1i} \\ A_{2i} \\ \vdots \\ A_{ni} \end{pmatrix}$$

olmak üzere, A matrisi $(p+q)\times(p+q)$ tipinde reel genelleştirilmiş ortogonal bir matristir ancak ve ancak

$$\left[A^{(l)},A^{(j)}\right]_{p,q}=0\,, \qquad l\neq j$$
$$\left[A^{(l)},A^{(j)}\right]_{p,q}=1\,, \qquad 1\leq l\leq p$$
$$\left[A^{(l)},A^{(j)}\right]_{p,q}=-1\,, \qquad p+1\leq l\leq p+q.$$

Genelleştirilmiş ortogonal matrisler grubunun bir başka gösterimi ise, $I=\mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{p\ tane},\underbrace{-1,\dots,-1}_{q\ tane})$ ve $n=p+q$ olmak üzere,

$$O(p,q;\mathbb{R})=\{\ A\in GL(n,\mathbb{R})\mid AIA^{t}=I\ \}$$

şeklindedir. Determinantı bir olan $(p+q)\times(p+q)$ tipindeki reel değerli ortogonal matrislerin kümesi ise özel genelleştirilmiş ortogonal grup $SO(p,q;\mathbb{R})$,

$$SO(p,q;\mathbb{R})=\{\,A\in O(p,q)\mid \det A=1\,\}$$

ile tanımlanır. p, q pozitif tam sayıları özel olarak $p=1,\ q=2$ alınarak oluşturulan, $I=\mathrm{diag}(1,-1,-1)$ olmak üzere,

$$SO(1,2)=\{\ A\in O(1,2)\mid \det A=1\ \}$$

özel genelleştirilmiş ortogonal grubu da bir pseudo-ortogonal grup olup, fizikte çok önemli bir yere sahiptir.

Lie grupları oldukça özel, önemli ve kullanışlı gruplardır. Sebebi ise Lie teorisi temelinin cebir ve geometri gibi matematiğin çok önemli iki büyük alanına dayanıyor olmasıdır. Lie gruplarının cebirsel özellikleri grup yapısına sahip olmalarından, geometrik özellikleri ise grup işlemini topolojik bir uzayın noktalarını kullanarak tanımlamaktan gelmektedir. Lie grup yapısının sağlamlığı ise grup işleminin ve tersi işleminin türevlenebilir olmasından kaynaklanır [7,8].

Üstel fonksiyon klasik Lie matris gruplarını, bir takım lineer koşulları sağlayan matrisler kümesi şeklinde ifade etmeyi sağlamaktadır. Bu tür matris kümeleri keyfi reel lineer bileşimler altında kapalıdır. Bu nedenle böyle kümelere vektör uzayı olarak bakılır. Bu matris kümeleri bilinen matris çarpımı altında kapalı değildir. Ancak eğer A,B gibi iki matris anti simetrik, anti Hermityen vb. ise $AB-BA$ ifadesi de anti simetrik, anti Hermityen vb.'dir. Bir matris kümesi vektör uzayı olması yanında bir işlem altında kapalı ise bu küme bir Lie cebiri oluşturur.

$X,\ n\times n$ tipinde reel veya kompleks değerli bir matris olsun.

$$e^X = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^m}{m!}$$

ifadesine X matrisinin üsteli denir. Üstel fonksiyonun matematiğin birçok dalında kullanım alanı vardır. Lie teorisinde bir matrisin üsteli, bir Lie cebirine karşılık gelen Lie grubunu tanımlamada karşımıza çıkar ve Lie cebirlerinden, karşılık geldikleri Lie gruplarına bilgi aktarımını sağlayan bir mekanizma görevi görür.

Grubun özellikleri kendisine karşılık gelen cebirin özellikleriyle yakından ilişkilidir. Her bir Lie grubuna karşılık bir Lie cebiri, her Lie alt grubuna karşılık bir Lie alt cebiri, her Lie normal alt grubuna karşılık Lie cebirinde bir ideal vardır.

G bir Lie matris grubu olsun. Tüm t reel değerleri için, $e^{tX} \in G$ olacak şekilde tüm X matrisleri kümesi G Lie matris grubuna karşılık gelen Lie cebirini oluşturur ve $\mathfrak{g}$ ile gösterilir.

Bir Lie cebiri, komütatör olarak adlandırılan

$$[.,.] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

bilineer işlemi altında aşağıdaki koşulları sağlayan bir vektör uzayıdır. $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere

i. $[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z]$

ii. $[X, Y] = -[Y, X]$

iii. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

dir. (ii) koşuluna anti simetri, (iii) koşuluna ise Jacobi özdeşliği koşulu denir. (ii) koşulu aynı zamanda $\forall X \in \mathfrak{g}$ için $[X, X] = 0$ anlamına gelir.

Şimdi temel bazı Lie gruplarına karşılık gelen Lie cebiri örnekleri verelim.

Eğer X, $n \times n$ tipinde reel değerli bir matris ise e^{tX} tersinirdir. Dolayısı ile $GL(n; \mathbb{R})$ grubunun Lie cebiri, $n \times n$ tipindeki tüm reel değerli matrisler uzayıdır ve $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$ ile gösterilir. Benzer bir yaklaşımla $GL(n; \mathbb{C})$ grubunun Lie cebiri, $n \times n$ tipindeki tüm kompleks değerli matrisler uzayıdır ve $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{C})$ ile gösterilir.

$\mathbb{K}$, $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere, $SL(n; \mathbb{K})$ grubunun Lie cebiri, $n \times n$ tipinde izi sıfır olan matrisler uzayıdır ve $\mathfrak{sl}(n; \mathbb{R})$ ile gösterilir. $O(n; \mathbb{R})$ ortogonal matrisler grubunun Lie cebiri $\mathfrak{o}(n; \mathbb{R})$, $X^T = -X$ koşulunu sağlayan tüm $n \times n$ tipindeki reel değerli matrisler uzayıdır. $SO(n; \mathbb{R})$ grubu, $O(n; \mathbb{R})$ ile aynı cebire sahiptir. Kompleks değerli ortogonal Lie grupları için de benzer bir yaklaşım yapılabilir.

$O(p,q)$ ve $SO(p,q)$ pseudo-ortogonal grupları aynı cebire sahiptirler. Bu cebir $I = \text{diag}(1,-1,-1)$ olmak üzere, $IX^TI = -X$ koşulunu sağlayan tüm X matrisler uzayıdır ve gruplara göre cebirleri sırası ile $\mathfrak{o}(p,q)$, $\mathfrak{so}(p,q)$ ile gösterilir.

$\mathfrak{g}$ sonlu boyutlu bir Lie cebiri ve $X_1, X_2, \dots, X_n$, $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin bir tabanı olsun. $i,j = 1,2,\dots,n$ değerleri için, tüm $[X_i, X_j]$ komütasyon bağıntıları

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ijk} X_k$$

ile verilir. Bu ifadedeki c_{ijk} sabitlerine, $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin (seçilmiş tabanına göre) yapı sabitleri denir ve $\mathfrak{g}$ üzerindeki işlemi tanımlar [8].

$\{X_1, X_2, X_3\}$, $\mathfrak{so}(3;\mathbb{R})$ cebirinin tabanı olmak üzere, komütasyon bağıntıları

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_3, X_1] = X_2$$

şeklinde olup, $c_{123} = c_{231} = c_{312} = 1$ olduğu görülür.

$\mathfrak{so}(1,2)$ cebiri için komütasyon bağıntıları

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_3] = -X_1, \quad [X_3, X_1] = X_2$$

şeklinde olup, $c_{123} = 1$, $c_{231} = -1$, $c_{312} = 1$ olur [5].

Lie gruplarının cebirsel özellikleri grup aksiyomlarına dayanır. Bu bölümün başında grup yapısına değinildiği için Lie gruplarının topolojik özelliklerinden bahsedeceğiz.

Bir Lie grubunun geometrik yapısı, grubun her bir elemanını topolojik bir uzayın bir noktası ile eşleştirilme, yani

$$\phi : g_i \mapsto g(t)$$

fikrine dayanır. İşte bu şekilde Lie grubunun elemanlarını parametrize eden topolojik uzaya grubun manifoldu denir. Manifold, her küçük bir aralıkta (komşulukta) Euclidean uzay gibi davranan bir uzaydır. Örneğin; $S^2 \subset \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ birim yuvarının yüzeyindeki her bir nokta bir komşuluğa sahiptir öyle ki bu komşuluk $\mathbb{R}^2$'nin bir parçasıymış gibi gözükür. Topolojik anlamda, S^2 ve $\mathbb{R}^2$ uzayları bölgesel olarak denktir ancak global olarak farklı iki uzaydır.

G bir Lie grubu olsun. Eğer

i. A_m, G'de bir matris dizisi ve A_m, A gibi bir matrise yakınsıyorsa, A matrisi G'nin içindedir,

ii. Her $A \in G$ ve $1 \le i,j \le n$ için $|A_{ij}| \le C$ olacak şekilde bir C sabiti vardır

koşulları sağlanıyorsa G kompakttır. Tüm $n \times n$ tipindeki kompleks değerli matrisler kümesi $M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere yukarıda verilen iki koşul, G, $M_n(\mathbb{C})$'nin kapalı ve sınırlı bir altkümesi ise kompakt olduğunu söyler.

$GL(n,\mathbb{K})$, $SL(n,\mathbb{K})$, $p \geq 1$, $q \geq 1$ olmak üzere $O(p,q)$, $SO(p,q)$ ve $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$ grupları kompakt olmayan gruplar iken, $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$ ve $Sp(n)$ grupları kompakt gruplara birer örnektir.

G bir Lie grubu ve A, B de G'de birer matris olsun. $a \leq t \leq b$ için $A(a) = A$, $A(b) = B$ olmak üzere G içinde A'dan B'ye tanımlı sürekli bir $A(t)$ yolu varsa G'ye bağlantılıdır denir. Bağlantılı olmayan bir Lie grubu, bileşenler olarak adlandırılan grubun parçalarına ayrıştırılabilir. Bir bileşenin iki elemanı sürekli bir yol ile birleştirebilirken, farklı bileşenlerin elemanları birleştirilemez.

$n \geq 1$ olmak üzere $GL(n,\mathbb{C})$ ve tüm $SL(n,\mathbb{K})$ grupları, ayrıca $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$ grupları bağlantılı iken $GL(n,\mathbb{R})$, $O(p,1)$, $SO(p,1)$ bağlantılı olmayan Lie gruplarına örnektir.

G bağlantılı bir Lie grubu olsun. G'deki her döngü gruptaki bir noktaya büzüştürülebiliyor ise G'ye basit bağlantılı grup denir.

$SU(2)$ grubu topolojik olarak üç boyutlu yuvar $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ olarak düşünülebilir. S^3 yuvarı basit bağlantılı olduğundan $SU(2)$ grubu da basit bağlantılıdır.

Basit bağlantılı olma koşulu oldukça önemlidir. Eğer G basit bağlantılı bir grup ise, G'nin temsili ve G'nin Lie cebrinin temsili arasında kendiliğinden birebir bir uygunluk, benzerlik vardır.

$SL(n,\mathbb{C})$, $SU(n)$, $Sp(n)$ grupları basit bağlantılı gruplara, $GL(n,\mathbb{C})$, $n \geq 2$ için $GL(n,\mathbb{R})^+$ ve $SL(n,\mathbb{R})$ grupları, $n \geq 3$ için $SO(n)$, $U(n)$ grupları ise basit bağlantılı olmayan gruplara örnektir.

İki Lie grubu birbirine izomorf ise bu gruplara karşılık gelen Lie cebirleri de birbirine izomorftur. Ancak iki Lie cebiri birbine izomorf olmasına rağmen bu cebirlere karşılık gelen Lie grupları izomorf olmayabilir. Örneğin, $\mathfrak{so}(1,2)$ ve $\mathfrak{su}(1,1)$ birbirlerine izomorf olmalarına rağmen $SO(1,2)$ ve $SU(1,1)$ grupları izomorf değildir.

Her Lie grubuna karşılık tek bir Lie cebiri vardır, ancak her bir Lie cebiri için birbirinden farklı birden fazla Lie grubu bulunabilir [7,8].

$\mathfrak{g}$, bir Lie cebiri olsun. Bu durumda $\mathfrak{g}$ cebirine karşılık gelen (veya cebiri, $\mathfrak{g}$ cebirine izomorf olan) basit bağlantılı tek bir $\bar{G}$ grubu bulunur. Bu basit bağlantılı $\bar{G}$ grubuna, $\mathfrak{g}$ cebire karşılık gelen, basit bağlantılı olmayan diğer G Lie gruplarının evrensel örtü grubu denir. Örneğin, $SO(1,2) \cong U(1) \cong S^1$ grupları basit bağlantılı gruplar değildir ve $\mathbb{R}$ basit bağlantılı olup, bu grupların evrensel örtü grubudur. Bir başka örnek ise, bağlantılı olmasına rağmen basit bağlantılı olmayan $SO(3)$ grubudur. $SU(2)$ grubu basit bağlantılı olup bu iki gruba karşılık gelen Lie cebirleri izomorftur. $SU(2)$ grubu, $SO(3)$ grubunun evrensel örtü grubudur [17].

BÖLÜM 2

GRUBUN TEMSİLİ VE CASİMİR OPERATÖRÜ

Temsil teorisinin geçmişi 19. yüzyıla kadar uzanır. Bir temsil, soyut cebirsel bir yapıyı ve elemanlarını matrisler ve cebirsel işlemler yardımı ile daha somut bir şekilde ifade etmeyi sağlamaktadır. Dolayısı ile teori, soyut cebir problemlerini hakkında daha fazla bilgi sahibi olunan lineer cebir problemlerine dönüştürmede kullanılan önemli bir yöntem haline gelmiştir.

Üstel fonksiyon, herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ için

$$t \longrightarrow e^{at}, \quad t \in \mathbb{R}$$

şeklinde $(\mathbb{R}, +)$ grubundan, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ grubuna tanımlı bir homomorfizmadır. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*$ şeklinde tanımlanabilecek farklı homomorfizaların varlığını inceleyelim. Daha genel bir yaklaşım olması için f'nin türevlenebilir olduğunu kabul edelim. f bir homomorfizma ise $\forall\, t, u \in \mathbb{R}$ için

$$f(t+u) = f(t).f(u) \tag{2.1}$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitliğin u'ya göre türevi alınır ve u yerine sıfır yazılırsa, $a = f'(0)$ olmak üzere

$$f'(t) = f(t).a$$

elde edilir. Bu denklemin genel çözümü $f(t) = Ce^{at}$'dir. f'nin homomorfizma olması $f(0) = 1$ yani $C = 1$ olmasını gerektirir.

Sonuç olarak $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}^*$'ye tanımlı türevlenebilir tüm grup homomorfizmalarının bir üstel fonksiyon ile ifade edildiği görülür. Bu sonuç, üstel fonksiyonun matematikte önemli bir rol oynamasının sebeplerinden biridir.

Eğer (2.1) denklemi herhangi bir $(G, .)$ grubu için genelleştirilecek olursa, $g_1, g_2 \in G$ olmak üzere, G grubu üzerinde tanımlı f fonksiyonunun

$$f(g_1.g_2) = f(g_1).f(g_2) \tag{2.2}$$

denklemini sağlaması beklenir. Ancak f fonksiyonunun skaler olması

$$f(g_1.g_2) = f(g_1).f(g_2) = f(g_2).f(g_1) = f(g_2.g_1) \tag{2.3}$$

sonucunu doğuracağından değişmeli olmayan gruplar için böyle fonksiyonlar bulmak güçtür. Bu nedenle (2.2) denklemi için yeterli sayıda çözüm elde etmek amacıyla, skaler fonksiyonlar yerine değerleri matrisler ya da lineer dönüşümler olan fonksiyonlar tercih etmek uygun olur. Matris çarpımı değişmeli olmadığından denkleme yeterli sayıda çözüm bulmak olanaklı hale gelir. Bu sonuca dayanarak, $T(g)$, G grubundan bir V lineer uzayının lineer dönüşümleri kümesine tanımlı bir fonksiyon olmak üzere

$$T(g_1 g_2) = T(g_1)T(g_2)$$

denkleminin çözümleri incelenir. İşte bu çözümler G grubunun temsili olarak adlandırılmaktadır [9,10].

2.1. Temsil Tanımı

V reel veya kompleks bir vektör uzayı, $GL(V)$ ise V vektör uzayından kendisine tanımlı tersinir tüm lineer dönüşümlerin uzayını ifade etsin. Bir G grubunun temsili

$$\begin{aligned} T: \quad G &\longrightarrow GL(V) \\ g &\longmapsto T(g) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan bir homomorfizma ile ifade edilir. Basit bir ifade ile bir temsil, G grubunun her bir elemanına, vektör uzayının bir lineer dönüşümünü karşılık getirmenin matematiksel ifadesidir.

$T(g)$'nin üzerine etki ettiği vektör uzayı V, temsil uzayı olup temsilin boyutu bu uzayının boyutuna eşittir. Temsil bir homomorfizma olduğundan E, $GL(V)$'de birim dönüşüm olmak üzere,

$$T(g_1 g_2) = T(g_1)T(g_2), \quad T(g)^{-1} = T(g^{-1}), \quad T(e) = E, \quad g_1, g_2, e \in G$$

koşulları sağlanmalıdır. Eğer T temsili bire-bir bir homomorfizma ise birebir temsil, tüm $g \in G$ için $T(g) = E$ ise aşikar temsil olarak adlandırılır.

Eğer $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ veya $\mathbb{R}$ olmak üzere T temsili,

$$\begin{aligned} T: \quad G &\longrightarrow GL(n, \mathbb{K}) \\ g &\longmapsto T(g) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan bir homomorfizma ise bu temsil G grubunun n boyutlu matris temsilini ifade eder.

Vektör uzayı V olmak üzere, bir G grubu birden fazla temsile sahip olabilir. $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, V vektör uzayının bir tabanı ise, seçilen her bir taban için farklı bir temsil oluşturulabilir. T ve T', n boyutlu iki matris temsili olmak üzere

$$T'(g) = S\,T(g)S^{-1}$$

koşulunu sağlayacak bir $S \in GL(n, \mathbb{K})$ olması halinde bu iki temsil denktir ($T \cong T'$).

D_4 dihedral grubu bir $ABCD$ karesinin simetrileri grubudur. d'ler dönmeleri, x, y, z, t ise yansımaları ifade etmek üzere bu grup,

$$D_4 = \{e, d, d^2, d^3, x, y, z, t\}$$

ile ifade edilir. $g \in D_4$ olmak üzere, kareyi yine kendisine taşıyan

$$A(g) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

şeklinde tanımlanan bu fonksiyon tanımlayalım. Bu durumda

$$T : D_4 \longrightarrow GL(2, \mathbb{R})$$
$$g \longmapsto A(g)$$

fonksiyonu $\mathbb{R}$ vektör uzayı üzerinde D_4'ün iki boyutlu bir temsilini ifade eder öyle ki

$$e \mapsto \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ d \mapsto \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ d^2 \mapsto \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ d^3 \mapsto \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$
$$x \mapsto \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ y \mapsto \begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ z \mapsto \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ t \mapsto \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Başka bir temsil örneği verelim. $C_4 = \{e, \mu, \mu^2, \mu^3\}$ devirli grubunu ele alalım, öyle ki $\mu^4 = e$ olsun.

$$I = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad M = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad M^2 = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad M^3 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

matrisleri, $M^4 = I$ olmak üzere $GL(2, \mathbb{R})$ grubunun bir alt grubunu oluşturur. Bu grup,

$$\mu \longrightarrow M$$

dönüşümü ile C_4 devirli grubuna izomorftur, öyle ki $\mu^2 \longrightarrow M^2, \mu^3 \longrightarrow M^3, e \longrightarrow I$. Dolayısı ile bu dönüşüm C_4 grubunun bir temsilini oluşturur.

W, V'nin bir alt vektör uzayı olsun. $\forall g \in G,\ x \in W$ için, $T(g)(x) \in W$ ise W'ya alt temsil denir. Eğer bir temsilin 0 ve V aşikar alt temsilleri dışında bir alt temsili yoksa temsil indirgenemez, aksi halde indirgenebilirdir denir [6,8,9,10,18,19].

Standart temsil yanında, adjoint, üniter, regüler temsil gibi birçok temsil örneği vardır. Bu çalışmada regüler ver kuasiregüler temsil ele alınacaktır.

2.2. Regüler ve Kuasiregüler Temsil Tanımı

M keyfi bir küme olsun. M kümesinden kendisine tanımlı birebir fonksiyonlara dönüşüm denir. Bir g altında, kümenin bir x elemanının görüntüsünü gx ile ifade edelim. G bir grup olmak üzere, bu grubun her bir elemanı M'de x'den gx'e tanımlı bir dönüşüm ile ilişkilendirilirse aşağıdaki koşulları sağlamak şartı ile G grubuna M'nin dönüşüm grubu denir:

1. Birim eleman $e \in G$, M üzerindeki birim dönüşüm ile ifade edilir: $ex \equiv x$.
2. $g_1, g_2 \in G$ ise $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$'dir.

G, M kümesinin dönüşüm grubu ve L, M kümesinin elemanlarını, bir K lineer uzayına taşıyan $f(x)$ fonksiyonlarının lineer uzayı olsun. Bu durumda

$$T(g)f(x) = f(g^{-1}x), \qquad g \in G,\ x \in M,\ f \in L$$

şeklinde bir temsil tanımlanabilir. Her G grubu, grup ile aynı elemanlara sahip bir M kümesinin dönüşüm grubu olabileceğinden, özel olarak $g \to g_0 g$ dönüşümü tanımlanırsa temsil

$$T_l(g_0)f(g) = f({g_0}^{-1}g)$$

veya

$$T_r(g_0)f(g) = f(g g_0)$$

halini alır. Bu temsiller sırası ile sol ve sağ regüler temsil olarak adlandırılır. Aksi ifade edilmediği sürece regüler temsil ile sağ regüler temsil kastedilecektir.

H, G'nin bir normal alt grubu olsun. $x \in G/H$ olmak üzere

$$T(g)f(x) = f(xg)$$

ile tanımlı temsile ise kuasiregüler temsil denir. Örneğin $SO(2)$ grubu, $SO(1,2)$ grubunun normal bir alt grubudur ve $SO(1,2)/SO(2)$ bölüm grubu üç boyutlu hiperboloide izomorftur [3,9].

2.3. Sonsuz Küçük Operatörler

$(G, .)$ bir grup olmak üzere,

$$g : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (G, .)$$
$$t \quad \longmapsto g(t)$$

şeklinde her reel sayıyı grubun bir elemanı ile eşleyelim. Eğer tüm $t, s \in \mathbb{R}$ için

$$g(t + s) = g(t).g(s) \qquad (2.3.1)$$

ise $g(t)$, G grubunun bir parametreli alt grubunu oluşturur. (2.3.1) eşitliğinden $g(0) = e$ ve $g(-t) = g^{-1}(t)$ olduğu görülür.

Euclid uzayında dönmeler grubunun bir alt grubu olan sabit bir eksen etrafında dönmeler, yine aynı uzayda hareketler grubunun bir alt grubu olan sabit bir yöndeki paralel dönüşümler bu grupların bir parametreli alt gruplarıdır.

Bir parametreli bir alt grubun teğet matrisi

$$j = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - e}{t} = \left. \frac{dg(t)}{dt} \right|_{t=0}$$

ifadesi ile verilir. Bir matris grubunda, birim matrisin birim yuvara homomorfik olan bir komşuluğu var ise böyle gruplara lineer Lie grupları denir. Lineer Lie grupları için bir parametreli alt grupların teğet matrisleri bir lineer uzay oluşturur. X, Y bu uzayın herhangi iki matrisi olmak üzere, bu iki matrisin komütatörü

$$[X, Y] = XY - YX$$

şeklinde tanımlanır ve bu komütatör de bu uzayın bir elemanıdır. Böyle lineer uzaylara Lie cebiri denir. Dolayısıyla her bir G Lie grubuna karşılık gelen bir $\mathfrak{g}$ Lie cebiri bulunmaktadır.

$g(t)$, G grubunun bir parametreli bir alt grubu, $T(g)$ bu alt gruba karşılık gelen temsil olmak üzere

$$J = \left. \frac{d\, T\big(g(t)\big)}{dt} \right|_{t=0}$$

ile tanımlı teğet matrisine, $g(t)$ bir parametreli alt grubuna karşılık gelen T temsilinin sonsuz küçük operatörü denir [9].

2.4. Casimir Operatörü

Fizik gibi matematiğin bazı uygulama alanlarında, problemlerin belirli dönüşümler altında invaryant olmaları, bu problemlerin çözümleri için büyük kolaylıklar sağlamaktadır. Bu nedenle invaryant operatörler matematiğin uygulamalarında büyük bir öneme sahiptir. Temsil teorisinin sağladığı bir diğer önemli sonuç ise, invaryant operatörlerin incelenmesine olanak sağlamasıdır.

Matematiksel fizikte karşılaşılan birçok diferansiyel operatör invaryant olma özelliğine sahiptir. Örneğin, Laplace operatörü

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Euclid uzayındaki hareketler altında invaryanttır [9].

Alman fizikçi Casimir'in 1931'de $so(3)$ cebirini kullanarak yaptığı invaryant operatör çalışmaları ardından Lie cebirleri için tanımlanan operatörler Casimir operatör adını almıştır.

Eğer bir C operatörü, bir $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin tüm elemanları ile komüte oluyor

$$[C, X_i] = 0, \qquad \forall\, X_i \in \mathfrak{g}$$

ise böyle operatörler invaryant ya da Casimir operatör olarak adlandırılır. Farklı derecelerde Casimir operatörleri tanımlanabilir. Eğer Casimir operatör,

$$C_p = \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} f^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} X_{\alpha_1} X_{\alpha_2} \dots X_{\alpha_p}$$

şeklinde p tane X_i cebir elemanın çarpımından oluşuyorsa, bu Casimir operatörü p. derecedendir denir.

Bir Lie grubunun ikinci dereceden Casimir operatörü, sonsuz küçük operatörler yardımıyla da ifade edilebilir. g^{ab} metrik tensörün tersi, J sonsuz küçük operatör olmak üzere Casimir operatör,

$$C = g^{ab} J_a J_b$$

ile verilir. Her bir sonsuz küçük operatör ile Casimir operatörün komütasyon bağıntısı sıfırı verir yani

$$[C,\ J_i] = 0\,.$$

Örnek olarak, $SO(3)$ grubu için $g^{ab} = \mathrm{diag}\,(1,1,1)$ olmak üzere Casimir operatör,

$$C = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$$

ile tanımlanır. Benzer şekilde $SO(1,2)$ grubu için $g^{ab} = \mathrm{diag}\,(1,-1,-1)$ olup Casimir operatör,

$$C = J_1^2 - J_2^2 - J_3^2$$

ile tanımlanır [4,5].

Bir $\mathfrak{g}$ Lie cebiri birden fazla Casimir operatöre sahip olabilir. Örnek olarak $SL(2,C)$ verilebilir. $SL(2,C)$ grubuna karşılık gelen cebiri $sl(2,C)$, 6 boyutlu bir cebirdir. $i = 1,2,3$ olmak üzere L_i, N_i 'ler cebirin sonsuz küçük operatörleri olmak üzere $SL(2,C)$ grubu,

$$C = N_i N_i - L_i L_i , \qquad C = N_i L_i$$

şeklinde ikinci dereceden iki Casimir operatöre sahiptir.

Bağımsız Casimir operatörlerinin sayısı $\mathfrak{g}$ cebirinin rankına eşittir. Ayrıca C, $\mathfrak{g}$ cebiri ile komüte oluyor ise, yani C, $\mathfrak{g}$ cebirin bir Casimir operatörü ise, a keyfi bir sayı olmak üzere aC ve C^2 de Casimir operatördür [5].

BÖLÜM 3

$SO(1,2)$ GRUBUNUN CASİMİR OPERATÖRÜ

3.1. Regüler Temsilin Sonsuz Küçük Operatörleri ve Casimir Operatörü

$SO(1,2)$ grubunun regüler temsili, $g_0, g \in SO(1,2)$ olmak üzere

$$T(g_0)f(g) = f(gg_0)$$

ile tanımlanır. $k \in SO(2),\ a \in SO(1,1),\ \varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi)\ , \alpha \in [0, \infty)$ olmak üzere, Cartan açılımı yardımı ile grubun bir $g(\varphi_1, \alpha, \varphi_2)$ elemanı,

$$g(\varphi_1, \alpha, \varphi_2) = k(\varphi_1)a(\alpha)k(\varphi_2)$$

ile verilir. Böylece $g(\varphi_1, \alpha, \varphi_2)$,

$$g(\varphi_1, \alpha, \varphi_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ 0 & -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\alpha & 0 & \sinh\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh\alpha & 0 & \cosh\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \\ 0 & -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh\alpha & -\sinh\alpha\sin\varphi_2 & \sinh\alpha\cos\varphi_2 \\ \sinh\alpha\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \cosh\alpha\sin\varphi_1\sin\varphi_2 & \cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cosh\alpha\sin\varphi_1\cos\varphi_2 \\ \sinh\alpha\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cosh\alpha\cos\varphi_1\sin\varphi_2 & -\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \cosh\alpha\cos\varphi_1\cos\varphi_2 \end{pmatrix}$$

ile ifade edilebilir [3]. Grubun bir parametreli alt grubuna karşılık gelen sonsuz küçük operatörler

$$J = \frac{d}{dt}\, T\big(g(t)\big)\Big|_{t=0}$$

formülü ile verilmişti. Bu durumda regüler temsilin operatörleri,

$$J\, f(g) = \frac{d}{dt}\, T\big(g(t)\big)f(g)\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\, f\big(\, gg(t)\big)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\, f(g')\Big|_{t=0}$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial \varphi_1'}\frac{d\varphi_1'}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \alpha'}\frac{d\alpha'}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \varphi_2'}\frac{d\varphi_2'}{dt}\right]_{t=0}$$

ile ifade edilir. Şimdi $SO(1,2)$ grubunun bir parametreli altgrubunun elemanları olan

$$k(t)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos t & \sin t\\ 0 & -\sin t & \cos t\end{pmatrix},\ a(t)\begin{pmatrix}\cosh t & 0 & \sinh t\\ 0 & 1 & 0\\ \sinh t & 0 & \cosh t\end{pmatrix},\ h(t)\begin{pmatrix}\cosh t & \sinh t & 0\\ \sinh t & \cosh t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

elemanlarına karşılık gelen sonsuz küçük operatörleri bulalım.

İlk olarak $k(t)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos t & \sin t\\ 0 & -\sin t & \cos t\end{pmatrix}$ matrisine karşılık gelen

$$J_0=\left[\frac{\partial}{\partial\varphi_1'}\frac{d\varphi_1'}{dt}+\frac{\partial}{\partial\alpha'}\frac{d\alpha'}{dt}+\frac{\partial}{\partial\varphi_2'}\frac{d\varphi_2'}{dt}\right]_{t=0} \tag{3.1.1}$$

operatörünü elde edelim. Üstel matris ifadesi yardımıyla,

$$k(t)\ =\ I\ +\ t\frac{dk(t)}{dt}\bigg|_{t=0}\ +\ \ldots$$

$$=\ I\ +\ t\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}+\ \ldots$$

dir. $k(t)$ grubun bir elemanı olan $g(\varphi_1,\alpha,\varphi_2)$ ile çarpılarak,

$$g'=\ g\,k(t)\ =gI+g\,t\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}+\cdots$$

$$=g+t\begin{pmatrix}g_{00} & g_{01} & g_{02}\\ g_{10} & g_{11} & g_{12}\\ g_{20} & g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}+\cdots$$

$$=g+t\begin{pmatrix}0 & -g_{02} & g_{01}\\ 0 & -g_{12} & g_{11}\\ 0 & -g_{22} & g_{21}\end{pmatrix}+\cdots$$

g' elemanı elde edilir. Burada

$$g\,k(t)=g+t\left[\frac{\partial g}{\partial\varphi_1{}'}\frac{d\varphi_1{}'}{dt}+\frac{\partial g}{\partial\alpha'}\frac{d\alpha'}{dt}+\frac{\partial g}{\partial\varphi_2{}'}\frac{d\varphi_2{}'}{dt}\right]\Bigg|_{t=0}+\cdots$$

olup $t=0$'da $\varphi_1{}'=\varphi_1,\ \alpha'=\alpha,\ \varphi_2{}'=\varphi_2$ olacağından

$$g\,k(t)=g+t\left[\frac{\partial g}{\partial\varphi_1}\frac{d\varphi_1{}'}{dt}+\frac{\partial g}{\partial\alpha}\frac{d\alpha'}{dt}+\frac{\partial g}{\partial\varphi_2}\frac{d\varphi_2{}'}{dt}\right]\Bigg|_{t=0}+\cdots$$

dır. $g(\varphi_1,\alpha,\varphi_2)$ matrisinin $g_{01}=-\sinh\alpha\sin\varphi_2$ bileşenini ele alalım. $g_{01}\longrightarrow -g_{02}$ olduğundan

$$\frac{\partial g_{01}}{\partial\varphi_1}=0,\quad \frac{\partial g_{01}}{\partial\alpha}=-\cosh\alpha\sin\varphi_2,\quad \frac{\partial g_{01}}{\partial\varphi_2}=-\sinh\alpha\cos\varphi_2$$

olup

$$-\cosh\alpha\sin\varphi_2\frac{d\alpha'}{dt}-\sinh\alpha\cos\varphi_2\frac{d\varphi_2{}'}{dt}=-\sinh\alpha\cos\varphi_2 \tag{3.1.2}$$

dir. Benzer şekilde $g_{02} = \sinh\alpha\cos\varphi_2$ bileşenini ele alalım. $g_{02} \longrightarrow g_{01}$ olduğundan

$$\frac{\partial g_{02}}{\partial \varphi_1} = 0, \quad \frac{\partial g_{02}}{\partial \alpha} = \cosh\alpha\cos\varphi_2, \quad \frac{\partial g_{02}}{\partial \varphi_2} = -\sinh\alpha\sin\varphi_2$$

olup

$$\cosh\alpha\cos\varphi_2\frac{d\alpha'}{dt} - \sinh\alpha\sin\varphi_2\frac{d{\varphi_2}'}{dt} = -\sinh\alpha\sin\varphi_2 \tag{3.1.3}$$

dir. Son olarak $g_{10} = \sinh\alpha\sin\varphi_1$ bileşenini ele alalım. $g_{10} \longrightarrow 0$ olduğundan

$$\frac{\partial g_{10}}{\partial \varphi_1} = \sinh\alpha\cos\varphi_1, \quad \frac{\partial g_{10}}{\partial \alpha} = \cosh\alpha\sin\varphi_1, \quad \frac{\partial g_{10}}{\partial \varphi_1} = 0$$

olup

$$\sinh\alpha\cos\varphi_1\frac{d{\varphi_1}'}{dt} + \cosh\alpha\sin\varphi_1\frac{d\alpha'}{dt} = 0 \tag{3.1.4}$$

dir. (3.1.2) ve (3.1.3) eşitliklerinden yok etme yöntemi ile,

$$\cos\varphi_2 \;/\; -\cosh\alpha\sin\varphi_2\frac{d\alpha'}{dt} - \sinh\alpha\cos\varphi_2\frac{d{\varphi_2}'}{dt} = -\sinh\alpha\cos\varphi_2$$

$$+ \quad \sin\varphi_2 \;/\; \cosh\alpha\cos\varphi_2\frac{d\alpha'}{dt} - \sinh\alpha\sin\varphi_2\frac{d{\varphi_2}'}{dt} = -\sinh\alpha\sin\varphi_2$$

$$-\sinh\alpha\frac{d{\varphi_2}'}{dt} = -\sinh\alpha$$

$$\frac{d{\varphi_2}'}{dt} = 1 \tag{3.1.5}$$

bulunur. Bu değer (3.1.2)' de yerine yazılarak

$$-\cosh\alpha\sin\varphi_2\frac{d\alpha'}{dt} - \sinh\alpha\cos\varphi_2\,(1) = -\sinh\alpha\cos\varphi_2$$

$$\frac{d\alpha'}{dt} = 0 \tag{3.1.6}$$

bulunur. Son olarak (3.1.6) değeri (3.1.4) eşitliğinde yerine yazılarak

$$\sinh\alpha\cos\varphi_1\frac{d{\varphi_1}'}{dt} + \cosh\alpha\sin\varphi_1\,(0) = 0$$

$$\frac{d{\varphi_1}'}{dt} = 0 \tag{3.1.7}$$

bulunur. Elde edilen

$$\frac{d{\varphi_1}'}{dt} = 0, \quad \frac{d\alpha'}{dt} = 0, \quad \frac{d{\varphi_2}'}{dt} = 1$$

sonuçları (3.1.1) sonsuz küçük operatör ifadesinde yerlerine yazılarak

$$J_0 = \frac{\partial}{\partial \varphi_2}$$

bulunur.

İkinci olarak $a(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh t & 0 & \cosh t \end{pmatrix}$ matrisine karşılık gelen

$$J_1 = \left[\frac{\partial}{\partial \varphi_1'} \frac{d\varphi_1'}{dt} + \frac{\partial}{\partial \alpha'} \frac{d\alpha'}{dt} + \frac{\partial}{\partial \varphi_2'} \frac{d\varphi_2'}{dt} \right]_{t=0} \tag{3.1.8}$$

operatörünü elde edelim. Üstel matris ifadesi yardımıyla,

$$a(t) = I + t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \ldots$$

ve g' elemanı

$$g' = g\, a(t) = gI + g\, t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \cdots$$

$$= g + t \begin{pmatrix} g_{02} & 0 & g_{00} \\ g_{12} & 0 & g_{10} \\ g_{22} & 0 & g_{20} \end{pmatrix} + \cdots$$

elde edilir. $g(\varphi_1, \alpha, \varphi_2)$ matrisinin $g_{00} = \cosh \alpha$ bileşenini ele alalım. $g_{00} \longrightarrow g_{02}$ olduğundan

$$\frac{\partial g_{00}}{\partial \varphi_1} = 0, \quad \frac{\partial g_{00}}{\partial \alpha} = \sinh \alpha, \quad \frac{\partial g_{00}}{\partial \varphi_2} = 0$$

olup

$$\sinh \alpha \frac{d\alpha'}{dt} = \sinh \alpha \cos \varphi_2 \tag{3.1.9}$$

dir. Buradan

$$\frac{d\alpha'}{dt} = \cos \varphi_2 \tag{3.1.10}$$

bulunur. Benzer şekilde $g_{01} = -\sinh \alpha \sin \varphi_2$ bileşenini ele alalım. $g_{01} \longrightarrow 0$ olduğundan

$$\frac{\partial g_{01}}{\partial \varphi_1} = 0, \quad \frac{\partial g_{01}}{\partial \alpha} = -\cosh \alpha \sin \varphi_2, \quad \frac{\partial g_{01}}{\partial \varphi_2} = -\sinh \alpha \cos \varphi_2$$

olup

$$-\cosh \alpha \sin \varphi_2 \frac{d\alpha'}{dt} - \sinh \alpha \cos \varphi_2 \frac{d{\varphi_2}'}{dt} = 0 \tag{3.1.11}$$

dir. (3.1.10) ifadesi (3.1.11)'de yerine yazılarak

$$-\cosh\alpha\sin\varphi_2\,(\cos\varphi_2)\;-\sinh\alpha\cos\varphi_2\frac{d{\varphi_2}'}{dt}\;=\;0$$

$$\frac{d{\varphi_2}'}{dt}=\;-\coth\alpha\sin\varphi_2 \qquad (3.1.12)$$

bulunur. Son olarak $g_{10}=\sinh\alpha\sin\varphi_1$ bileşenini ele alalım. $g_{10}\longrightarrow g_{12}$ olduğundan

$$\frac{\partial g_{10}}{\partial\varphi_1}=\sinh\alpha\cos\varphi_1,\quad \frac{\partial g_{10}}{\partial\alpha}=\cosh\alpha\sin\varphi_1,\quad \frac{\partial g_{10}}{\partial\varphi_2}=0$$

olup

$$\sinh\alpha\cos\varphi_1\frac{d{\varphi_1}'}{dt}+\cosh\alpha\sin\varphi_1\frac{d\alpha'}{dt}$$

$$=\;\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\cosh\alpha\sin\varphi_1\cos\varphi_2 \qquad (3.1.13)$$

dir. (3.1.10) ifadesi (3.1.13)'de yerine yazılarak

$$\sinh\alpha\cos\varphi_1\frac{d{\varphi_1}'}{dt}+\cosh\alpha\sin\varphi_1\,(\cos\varphi_2)\;=\;\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\cosh\alpha\sin\varphi_1\cos\varphi_2$$

$$\frac{d{\varphi_1}'}{dt}=\;\frac{\sin\varphi_2}{\sinh\alpha} \qquad (3.1.14)$$

bulunur. Elde edilen

$$\frac{d{\varphi_1}'}{dt}=\frac{\sin\varphi_2}{\sinh\alpha},\quad \frac{d\alpha'}{dt}\;=\cos\varphi_2,\quad \frac{d{\varphi_2}'}{dt}=-\coth\alpha\sin\varphi_2$$

sonuçları (3.1.8) sonsuz küçük operatör ifadesinde yerlerine yazılarak

$$J_1=\cos\varphi_2\frac{\partial}{\partial\alpha}\;+\;\frac{\sin\varphi_2}{\sinh\alpha}\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\;-\coth\alpha\sin\varphi_2\frac{\partial}{\partial\varphi_2}$$

bulunur.

Son olarak $h(t)=\begin{pmatrix}\cosh t & \sinh t & 0\\ \sinh t & \cosh t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ matrisine karşılık gelen

$$J_2=\left[\frac{\partial}{\partial\varphi_1'}\frac{d\varphi_1'}{dt}\;+\;\frac{\partial}{\partial\alpha'}\frac{d\alpha'}{dt}\;+\;\frac{\partial}{\partial\varphi_2'}\frac{d\varphi_2'}{dt}\right]_{t=0} \qquad (3.1.15)$$

operatörünü elde edelim. Üstel matris ifadesi yardımıyla,

$$h(t)\;=\;I\;+\;t\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\;\ldots$$

ve g' elemanı

$$g'=\;g\,h(t)\;=gI+g\,t\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\cdots$$

$$= g + t\begin{pmatrix} g_{01} & g_{00} & 0 \\ g_{11} & g_{10} & 0 \\ g_{21} & g_{20} & 0 \end{pmatrix} + \cdots$$

elde edilir. $g(\varphi_1, \alpha, \varphi_2)$ matrisinin $g_{00} = \cosh\alpha$ bileşenini ele alalım. $g_{00} \longrightarrow g_{01}$ olduğundan

$$\frac{\partial g_{00}}{\partial \varphi_1} = 0, \quad \frac{\partial g_{00}}{\partial \alpha} = \sinh\alpha, \quad \frac{\partial g_{00}}{\partial \varphi_2} = 0$$

olup

$$\sinh\alpha \frac{d\alpha'}{dt} = -\sinh\alpha \sin\varphi_2 \tag{3.1.16}$$

dir. Buradan

$$\frac{d\alpha'}{dt} = -\sin\varphi_2 \tag{3.1.17}$$

bulunur. Benzer şekilde $g_{01} = -\sinh\alpha \sin\varphi_2$ bileşenini ele alalım. $g_{01} \longrightarrow g_{00}$ olduğundan

$$\frac{\partial g_{01}}{\partial \varphi_1} = 0, \quad \frac{\partial g_{01}}{\partial \alpha} = -\cosh\alpha \sin\varphi_2, \quad \frac{\partial g_{01}}{\partial \varphi_2} = -\sinh\alpha \cos\varphi_2$$

olup

$$-\cosh\alpha \sin\varphi_2 \frac{d\alpha'}{dt} - \sinh\alpha \cos\varphi_2 \frac{d{\varphi_2}'}{dt} = \cosh\alpha \tag{3.1.18}$$

dir. (3.1.17) değeri (3.1.18)'de yerine yazılarak

$$-\cosh\alpha \sin\varphi_2 (-\sin\varphi_2) - \sinh\alpha \cos\varphi_2 \frac{d{\varphi_2}'}{dt} = \cosh\alpha$$

$$\frac{d{\varphi_2}'}{dt} = -\coth\alpha \cos\varphi_2 \tag{3.1.19}$$

bulunur. Son olarak $g_{10} = \sinh\alpha \sin\varphi_1$ bileşenini ele alalım. $g_{10} \longrightarrow g_{11}$ olduğundan

$$\frac{\partial g_{10}}{\partial \varphi_1} = \sinh\alpha \cos\varphi_1, \quad \frac{\partial g_{10}}{\partial \alpha} = \cosh\alpha \sin\varphi_1, \quad \frac{\partial g_{10}}{\partial \varphi_2} = 0$$

olup

$$\sinh\alpha \cos\varphi_1 \frac{d{\varphi_1}'}{dt} + \cosh\alpha \sin\varphi_1 \frac{d\alpha'}{dt} = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cosh\alpha \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \tag{3.1.20}$$

dir. (3.1.17) değeri (3.1.20)'de yerine yazılarak

$$\sinh\alpha \cos\varphi_1 \frac{d{\varphi_1}'}{dt} + \cosh\alpha \sin\varphi_1 (-\sin\varphi_2) = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cosh\alpha \sin\varphi_1 \sin\varphi_2$$

$$\frac{d\varphi_1{}'}{dt} = \frac{\cos\varphi_2}{\sinh\alpha} \tag{3.1.21}$$

bulunur. Elde edilen

$$\frac{d\varphi_1{}'}{dt} = \frac{\cos\varphi_2}{\sinh\alpha}, \quad \frac{d\alpha'}{dt} = -\sin\varphi_2, \quad \frac{d\varphi_2{}'}{dt} = -\coth\alpha\cos\varphi_2$$

sonuçları $(3.1.15)$ sonsuz küçük operatör ifadesinde yerlerine yazılarak

$$J_2 = -\sin\varphi_2\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\cos\varphi_2}{\sinh\alpha}\frac{\partial}{\partial\varphi_1} - \coth\alpha\cos\varphi_2\frac{\partial}{\partial\varphi_2}$$

bulunur. Bu durumda $SO(1,2)$ grubunun regüler temsilinin sonsuz küçük operatörleri

$$J_0 = \frac{\partial}{\partial\varphi_2},$$

$$J_1 = \cos\varphi_2\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\sin\varphi_2}{\sinh\alpha}\frac{\partial}{\partial\varphi_1} - \coth\alpha\sin\varphi_2\frac{\partial}{\partial\varphi_2},$$

$$J_2 = -\sin\varphi_2\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\cos\varphi_2}{\sinh\alpha}\frac{\partial}{\partial\varphi_1} - \coth\alpha\cos\varphi_2\frac{\partial}{\partial\varphi_2}$$

olur. Bu operatörler komütasyon bağıntılarını sağlamaktadır.

Şimdi $SO(1,2)$ grubunun regüler temsiline karşılık gelen Casimir operatörü bulalım. $SO(1,2)$ grubunun sonsuz küçük operatörlere bağlı Casimir operatörü

$$C = {J_0}^2 - {J_1}^2 - {J_2}^2$$

ile ifade edilir [5]. Burada

$$\begin{aligned} {J_0}^2 &= J_0.J_0 \\ &= \frac{\partial}{\partial\varphi_2}.\frac{\partial}{\partial\varphi_2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial{\varphi_2}^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {J_1}^2 &= J_1.J_1 \\ &= \left[\cos\varphi_2\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\sin\varphi_2}{\sinh\alpha}\frac{\partial}{\partial\varphi_1} - \coth\alpha\sin\varphi_2\frac{\partial}{\partial\varphi_2}\right].\left[\cos\varphi_2\frac{\partial}{\partial\alpha}\right. \\ &\qquad \left. + \frac{\sin\varphi_2}{\sinh\alpha}\frac{\partial}{\partial\varphi_1} - \coth\alpha\sin\varphi_2\frac{\partial}{\partial\varphi_2}\right] \end{aligned}$$

$$= \cos^2\varphi_2 \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \frac{\cos\varphi_2 \sin\varphi_2 \cosh\alpha}{\sinh^2\alpha}\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + \frac{\cos\varphi_2 \sin\varphi_2}{\sinh\alpha}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\varphi_1}$$
$$+ \frac{\cos\varphi_2 \sin\varphi_2}{\sinh^2\alpha}\frac{\partial}{\partial\varphi_2} - \cos\varphi_2 \coth\alpha \sin\varphi_2 \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\varphi_2}$$
$$+ \frac{\sin\varphi_2 \cos\varphi_2}{\sinh\alpha}\frac{\partial^2}{\partial\varphi_1\partial\alpha} + \frac{\sin^2\varphi_2}{\sinh^2\alpha}\frac{\partial^2}{\partial{\varphi_1}^2} - \frac{\sin^2\varphi_2 \coth\alpha}{\sinh\alpha}\frac{\partial^2}{\partial\varphi_1\partial\varphi_2}$$
$$+ \coth\alpha \sin^2\varphi_2 \frac{\partial}{\partial\alpha} - \coth\alpha \sin\varphi_2 \cos\varphi_2 \frac{\partial^2}{\partial\varphi_2\partial\alpha}$$
$$- \frac{\coth\alpha \sin\varphi_2 \cos\varphi_2}{\sinh\alpha}\frac{\partial}{\partial\varphi_1} - \frac{\coth\alpha \sin^2\varphi_2}{\sinh\alpha}\frac{\partial^2}{\partial\varphi_2\partial\varphi_1}$$
$$+ \coth^2\alpha \sin\varphi_2 \cos\varphi_2 \frac{\partial}{\partial\varphi_2} + \coth^2\alpha \sin^2\varphi_2 \frac{\partial^2}{\partial{\varphi_2}^2}$$

$${J_2}^2 = J_2.J_2$$
$$= \left[-\sin\varphi_2 \frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\cos\varphi_2}{\sinh\alpha}\frac{\partial}{\partial\varphi_1} - \coth\alpha \cos\varphi_2 \frac{\partial}{\partial\varphi_2}\right].\left[-\sin\varphi_2 \frac{\partial}{\partial\alpha}\right.$$
$$\left. + \frac{\cos\varphi_2}{\sinh\alpha}\frac{\partial}{\partial\varphi_1} - \coth\alpha \cos\varphi_2 \frac{\partial}{\partial\varphi_2}\right]$$
$$= \sin^2\varphi_2 \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\sin\varphi_2 \cos\varphi_2 \cosh\alpha}{\sinh^2\alpha}\frac{\partial}{\partial\varphi_1} - \frac{\sin\varphi_2 \cos\varphi_2}{\sinh\alpha}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\varphi_1}$$
$$- \frac{\sin\varphi_2 \cos\varphi_2}{\sinh^2\alpha}\frac{\partial}{\partial\varphi_2} + \sin\varphi_2 \coth\alpha \cos\varphi_2 \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\varphi_2}$$
$$- \frac{\cos\varphi_2 \sin\varphi_2}{\sinh\alpha}\frac{\partial^2}{\partial\varphi_1\partial\alpha} + \frac{\cos^2\varphi_2}{\sinh^2\alpha}\frac{\partial^2}{\partial{\varphi_1}^2} - \frac{\cos^2\varphi_2 \coth\alpha}{\sinh\alpha}\frac{\partial^2}{\partial\varphi_1\partial\varphi_2}$$
$$+ \coth\alpha \cos^2\varphi_2 \frac{\partial}{\partial\alpha} + \coth\alpha \cos\varphi_2 \sin\varphi_2 \frac{\partial^2}{\partial\varphi_2\partial\alpha}$$
$$+ \frac{\coth\alpha \cos\varphi_2 \sin\varphi_2}{\sinh\alpha}\frac{\partial}{\partial\varphi_1} - \frac{\coth\alpha \cos^2\varphi_2}{\sinh\alpha}\frac{\partial^2}{\partial\varphi_2\partial\varphi_1}$$
$$- \coth^2\alpha \cos\varphi_2 \sin\varphi_2 \frac{\partial}{\partial\varphi_2} + \coth^2\alpha \cos^2\varphi_2 \frac{\partial^2}{\partial{\varphi_2}^2}$$

olmak üzere Casimir operatör,

$$C = \frac{\partial^2}{\partial {\varphi_2}^2} - \Big[(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \left(\frac{\sin^2\varphi_2}{\sinh^2\alpha} + \frac{\cos^2\varphi_2}{\sinh^2\alpha}\right)\frac{\partial^2}{\partial {\varphi_1}^2}$$
$$- \left(\frac{\coth\alpha\sin^2\varphi_2}{\sinh\alpha} + \frac{\coth\alpha\cos^2\varphi_2}{\sinh\alpha}\right)\frac{\partial^2}{\partial\varphi_2\partial\varphi_1}$$
$$+ (\coth\alpha\cos^2\varphi_2 + \coth\alpha\sin^2\varphi_2)\frac{\partial}{\partial\alpha}$$
$$- \left(\frac{\coth\alpha\sin^2\varphi_2}{\sinh\alpha} + \frac{\coth\alpha\cos^2\varphi_2}{\sinh\alpha}\right)\frac{\partial^2}{\partial\varphi_2\partial\varphi_1}$$
$$+ (\coth^2\alpha\sin^2\varphi_2 + \coth^2\alpha\cos^2\varphi_2)\frac{\partial^2}{\partial {\varphi_2}^2}\Big]$$

$$C = \frac{\partial^2}{\partial {\varphi_2}^2} - \Big[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \left(\frac{1}{\sinh^2\alpha}\right)\frac{\partial^2}{\partial {\varphi_1}^2} - \left(\frac{\coth\alpha}{\sinh\alpha}\right)\frac{\partial^2}{\partial\varphi_2\partial\varphi_1} + (\coth\alpha)\frac{\partial}{\partial\alpha}$$
$$- \left(\frac{\coth\alpha}{\sinh\alpha}\right)\frac{\partial^2}{\partial\varphi_2\partial\varphi_1} + (\coth^2\alpha)\frac{\partial^2}{\partial {\varphi_2}^2}\Big]$$

$$C = -\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \coth\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{1}{\sinh^2\alpha}\left(\frac{\partial^2}{\partial {\varphi_1}^2} - 2\cosh\alpha\frac{\partial^2}{\partial\varphi_1\partial\varphi_2} + \frac{\partial^2}{\partial {\varphi_2}^2}\right) \quad (3.1.22)$$

$$[C,\ J_i] = 0, \quad i = 1,2,3$$

olarak bulunur. $-\sigma(\sigma+1)$, $SO(1,2)$ grubunun Casimir operatörüne karşılık gelen özdeğer olmak üzere [3], bu Casimir operatörü bir $f(\alpha,\varphi_1,\varphi_2)$ fonksiyonuna etki ettirilirse

$$C\,f(\alpha,\varphi_1,\varphi_2) = -\sigma(\sigma+1)f(\alpha,\varphi_1,\varphi_2)$$

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \coth\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{1}{\sinh^2\alpha}\left(\frac{\partial^2}{\partial {\varphi_1}^2} - 2\cosh\alpha\frac{\partial^2}{\partial\varphi_1\partial\varphi_2} + \frac{\partial^2}{\partial {\varphi_2}^2}\right)\right] f(\alpha,\varphi_1,\varphi_2)$$
$$= -\sigma(\sigma+1)f(\alpha,\varphi_1,\varphi_2)$$

kısmi diferansiyel denklemi elde edilir. Bu aslında bir özdeğer-özfonksiyon denklemidir. Bu denklemi çözmek için değişkenlerine ayırma yöntemi kullanılabilir. $f(\alpha,\varphi_1,\varphi_2) = A(\alpha)e^{im\varphi_1}e^{in\varphi_2}$ şeklinde bir çözüm arayalım. Burada $f(\alpha,\varphi_1,\varphi_2)$ çözümünün tek değerli olması gerektiğinden, özel olarak $m,n = 0,\pm1,\pm2,\ldots$ seçilir. Önerilen çözüm ve türevleri denklemde yerine yazılarak düzenlenirse,

$$\frac{d^2A}{d\alpha^2} + \coth\alpha\frac{dA}{d\alpha} - \frac{(m^2 - 2mn\cosh\alpha + n^2)}{\sinh^2\alpha}A = \sigma(\sigma+1)A \quad (3.1.23)$$

denklemi elde edilir. (3.1.23) denklemini bilinen bir denkleme indirgemek için

$$A(\alpha) = \left(\cosh\frac{\alpha}{2}\right)^{-m-n}\left(\sinh\frac{\alpha}{2}\right)^{n-m}W(\alpha) \quad (3.1.24)$$

dönüşümü yapılım. Bu durumda

$$\frac{dA}{d\alpha} = \left(\cosh\frac{\alpha}{2}\right)^{-m-n}\left(\sinh\frac{\alpha}{2}\right)^{n-m}\left[\frac{dW}{d\alpha} + \left(\frac{-m-n}{2}\right)\frac{\sinh(\alpha/2)}{\cosh(\alpha/2)} + \left(\frac{n-m}{2}\right)\frac{\cosh(\alpha/2)}{\sinh(\alpha/2)}\ W(a)\right],$$

$$\frac{d^2A}{d\alpha^2} = \left(\cosh\frac{\alpha}{2}\right)^{-m-n}\left(\sinh\frac{\alpha}{2}\right)^{n-m}\left[\frac{d^2W}{d\alpha^2} + \left[(m-n)\frac{\sinh(\alpha/2)}{\cosh(\alpha/2)} + (n-m)\frac{\cosh(\alpha/2)}{\sinh(\alpha/2)}\right]\frac{dW}{d\alpha} + \left[\frac{(m-n)(-m-n-1)}{4}\frac{\sinh^2(\alpha/2)}{\cosh^2(\alpha/2)} + \frac{(n-m)(n-m-1)}{4}\frac{\cosh^2(\alpha/2)}{\sinh^2(\alpha/2)} + \frac{m^2-n^2-m}{2}\right]\ W(a)\right]$$

türevleri (3.1.23) denkleminde yerlerine yazılarak

$$\frac{d^2W}{d\alpha^2} + \left[\left(-m-n+\frac{1}{2}\right)\frac{\sinh(\alpha/2)}{\cosh(\alpha/2)} + \left(n-m+\frac{1}{2}\right)\frac{\cosh(\alpha/2)}{\sinh(\alpha/2)}\right]\frac{dW}{d\alpha} + \left[\frac{(-m-n)^2}{4}\frac{\sinh(\alpha/2)}{\cosh(\alpha/2)} + \frac{(n-m)^2}{4}\frac{\cosh(\alpha/2)}{\sinh(\alpha/2)} - \frac{(m^2-2mn\cosh\alpha+n^2)}{\sinh^2\alpha} + \frac{(2m^2-2n^2-4m)}{4} - \sigma(\sigma+1)\right]W = 0 \qquad (3.1.25)$$

denklemi elde edilir. (3.1.25) denkleminde

$$z = -\sinh^2\frac{\alpha}{2} \qquad (3.1.26)$$

dönüşümü yapalım. Bu durumda

$$\frac{dW}{d\alpha} = -\sqrt{-z}\sqrt{1-z}\frac{dW}{dz},$$

$$\frac{d^2W}{d\alpha^2} = -z(1-z)\frac{d^2W}{dz^2} + \left(z-\frac{1}{2}\right)\frac{dW}{dz}$$

türevleri (3.1.25) denkleminde yerlerine yazılarak

$$z(1-z)\frac{d^2W}{dz^2} + [\ 1+n-m-(2-2m)z\ ]\frac{dW}{dz} - [m^2-m-\sigma(\sigma+1)]\,W = 0 \qquad (3.1.27)$$

denklemi elde edilir. (3.1.27) denklemi,

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + [\ c-(a+b+1)z\ ]\frac{du}{dz} - abu = 0 \qquad (3.1.28)$$

Hipergeometrik denkleminin aynısıdır. Hipregeometrik denklemin çözümü hipergeometrik fonksiyonlar ile verilir. c_1, c_2 keyfî sabitler olmak üzere hipergeometrik denklemin $z = 0$ civarındaki regüler çözümü

$$W(z) = c_1 W_1(z) + c_2 W_2(z)$$

şeklindedir. Burada

$$W_1(z) = F(\ a\ ,\ b\ ;\ c\ ;\ z\ )$$

$$W_2(z) = z^{1-c}\, F(\ a+1-c,\ b+1-c\ ;\ 2-c\ ;\ z)$$

dir [11]. $W_1(z)$ ve $W_2(z)$, hipergeometrik denklemin lineer bağımsız iki çözümüdür ve denklemin çözümü olarak bu iki çözümden biri seçilebilir. (3.1.27) denkleminde

$$a = -m-\sigma\ ,\ \ b = -m+\sigma+1,\ \ c = 1+n-m$$

dir. Bu durumda $n \geq m$ koşulu ile (3.1.27) denkleminin çözümü

$$W(z) = c_1 W_1(z)$$

$$W(z) = c_1 F(\ -m-\sigma\ ,\ \ -m+\sigma+1\ ;\ 1+n-m\ ;\ z\ ) \qquad (3.1.29)$$

şeklindedir. (3.1.26) dönüşümü dikkate alındığında (3.1.29) çözümü

$$W(\alpha) = c_1 F\left(\ -m-\sigma\ ,\ \ -m+\sigma+1\ ;\ 1+n-m\ ;\ -\sinh^2\frac{\alpha}{2}\right) \qquad (3.1.30)$$

halini alır. Sonuç olarak (3.1.24) dönüşümünden (3.1.23) diferansiyel denklemin genel çözümü

$$A(\alpha) = c_1 \left(\cosh\frac{\alpha}{2}\right)^{-m-n} \left(\sinh\frac{\alpha}{2}\right)^{n-m} F\left(-m-\sigma\ , -m+\sigma+1\ ;\ 1+n-m\ ;\ -\sinh^2\frac{\alpha}{2}\right) \qquad (3.1.31)$$

olarak elde edilir.

Zamandan bağımsız bir boyutlu Schrödinger denklemi,

$$\left[-\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]\psi = E\,\psi$$

ile verilir. Burada

$$H = -\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

operatörü Hamiltonyen veya enerji operatörünü, $V(x)$ fonksiyonu sistemin potansiyelini ve E parametresi ise sistem enerjisini ifade eder. Kuantum mekaniği üzerine yapılan ilk çalışmalardan bu yana, tam olarak çözülebilen kuantum mekaniği problemleri sayısı oldukça azdır. Bu nedenle tam bir çözüm elde etmek amacıyla birçok yaklaşım metodu

geliştirilmiştir. Geliştirilen bu yöntemlerin birçoğu sistemlerin simetrileri, daha özel bir ifade ile Lie cebiri, özelliklerine dayanmaktadır. Bu nedenle Lie grupları ve cebirleri teorisi bu alanda büyük bir öneme sahiptir. Bu yaklaşıma göre Schrödinger denkleminin Hamiltonyeni, Lie cebirinin Casimir operatörü ile ilişkilendirilir.

$so(1,2)$ Lie cebiri tam olarak çözülebilen potansiyellerin bir ailesini oluşturur. Bu nedenle (3.1.23) denklemi bir dönüşüm yardımı ile Schrödinger denklemine indirgenerek sistemin potansiyeli ve enerji özdeğeri elde edilebilir. (3.1.23) denkleminde

$$A(\alpha) = (\sinh\alpha)^{-1/2}\ \psi(\alpha) \tag{3.1.32}$$

dönüşümü yapılırsa

$$\frac{dA}{d\alpha} = \sinh\alpha\frac{dA}{dz},$$

$$\frac{d^2A}{d\alpha^2} = \sinh^2\alpha\ \frac{d^2A}{dz^2} + \cosh\alpha\frac{dA}{dz}$$

olup denklem

$$-\frac{d^2\psi}{d\alpha^2} + \left[\frac{m^2 + n^2 + 1/4 - 2mn\cosh\alpha}{\sinh^2\alpha} + \left(\sigma+\frac{1}{2}\right)^2\right]\psi = 0 \tag{3.1.33}$$

Schrödinger denklemi halini alır. Burada $\hbar = 2m = 1$ olmak üzere,

$$V(\alpha) = \frac{m^2 + n^2 + 1/4 - 2mn\cosh\alpha}{\sinh^2\alpha}$$

$$E = -\left(\sigma+\frac{1}{2}\right)^2$$

olduğu görülür. (3.1.32) dikkate alınarsa, Schrödinger denklemin çözümü olan dalga fonksiyonu, c_1 normalizasyon sabiti olmak üzere

$$\psi(\alpha) = c_1(\sinh\alpha)^{1/2}A(\alpha)$$

yani

$$\psi(\alpha) = c_1\left(\cosh\frac{\alpha}{2}\right)^{-m-n}\left(\sinh\frac{\alpha}{2}\right)^{n-m+\frac{1}{2}}F\left(-m-\sigma,\ -m+\sigma+1\ ;\ 1+n-m\ ;\ -\sinh^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

olarak elde edilir.

3.2. Kuasiregüler Temsilinin Sonsuz Küçük Operatörleri ve Casimir Operatörü

$SO(1,2)$ grubunun $T(g)$ kuasiregüler temsilini ele alalım. $SO(1,2)$ grubu, $x = (x_0,\ x_1,\ x_2) \in$ H olmak üzere

$$\mathrm{H}\ :\ [x,x] = {x_0}^2 - {x_1}^2 - {x_2}^2 = 1$$

hiperboloidi üzerinde geçişlidir. Kuasiregüler temsil, $g_0 \in SO(1,2),\ \ x \in$ H olmak üzere,

$$T(g_0)f(x) = f(xg_0)$$

ile tanımlanır. Burada f fonksiyonu, hiperboloid üzerinde karesi integrallenebilir bir fonksiyondur. Şimdi

$$k(t)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos t & \sin t\\ 0 & -\sin t & \cos t\end{pmatrix},\ a(t)\begin{pmatrix}\cosh t & 0 & \sinh t\\ 0 & 1 & 0\\ \sinh t & 0 & \cosh t\end{pmatrix},\ h(t)\begin{pmatrix}\cosh t & \sinh t & 0\\ \sinh t & \cosh t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

elemanlarına karşılık gelen sonsuz küçük operatörleri bulalım.

İlk olarak $k(t) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos t & \sin t\\ 0 & -\sin t & \cos t\end{pmatrix}$ matrisinin sonsuz küçük operatörünü elde edelim. $x = (x_0,\ x_1,\ x_2) \in$ H olmak üzere, $g' = ({x_0}',\ {x_1}',\ {x_2}')$ elemanı

$$\begin{aligned} g' = x\,k(t) &= (x_0,\ x_1,\ x_2)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos t & \sin t\\ 0 & -\sin t & \cos t\end{pmatrix}\\ &= (x_0,\ x_1\cos t - x_2\sin t,\ x_1\sin t + x_2\cos t)\\ &= ({x_0}',\ {x_1}',\ {x_2}') \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Grubun bir parametreli alt grubuna karşılık gelen kuasiregüler temsilin sonsuz küçük operatörleri,

$$\begin{aligned} J\,f(x) &= \frac{d}{dt}\,T\big(g(t)\big)f(x)\Big|_{t=0}\\ &= \frac{d}{dt}\,f\big(\,xg(t)\big)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\,f(g')\Big|_{t=0}\\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x_0'}\frac{dx_0'}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_1'}\frac{dx_1'}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2'}\frac{dx_2'}{dt}\right]_{t=0} \end{aligned}$$

ile ifade edilir. Burada

$$x_0' = x_0, \qquad x_1' = x_1\cos t - x_2\sin t\,, \qquad x_2' = x_1\sin t + x_2\cos t$$

olmak üzere,

$$\left.\frac{dx_0'}{dt}\right|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{dx_1'}{dt}\right|_{t=0} = -x_2\ , \quad \left.\frac{dx_2'}{dt}\right|_{t=0} = x_1$$

bulunur. Bu durumda

$$J_0\, f(x) = -x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1'} + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2'}$$

dir. $t = 0$'da $x_0' = x_0,\ x_1' = x_1,\ x_2' = x_2$ olup $k(t)$'ye karşılık gelen operatör,

$$J_0 = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

olarak elde edilir.

İkinci olarak $a(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh t & 0 & \cosh t \end{pmatrix}$ matrisini ele alalım. $x = (x_0,\ x_1,\ x_2) \in \mathrm{H}$ olmak üzere, $g' = (x_0',\ x_1',\ x_2')$ elemanı,

$$\begin{aligned} g' = x\, a(t) &= (x_0,\ x_1,\ x_2)\begin{pmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh t & 0 & \cosh t \end{pmatrix} \\ &= (x_0 \cosh t + x_2 \sinh t,\ x_1,\ x_0 \sinh t + x_2 \cosh t) \\ &= (x_0',\ x_1',\ x_2') \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$x_0' = x_0 \cosh t + x_2 \sinh t, \quad x_1' = x_1, \quad x_2' = x_0 \sinh t + x_2 \cosh t$$

olmak üzere,

$$\left.\frac{dx_0'}{dt}\right|_{t=0} = x_2, \quad \left.\frac{dx_1'}{dt}\right|_{t=0} = 0\ , \quad \left.\frac{dx_2'}{dt}\right|_{t=0} = x_0$$

bulunur. Bu durumda

$$J_1\, f(x) = x_2 \frac{\partial f}{\partial x_0'} + x_0 \frac{\partial f}{\partial x_2'}$$

olup $a(t)$'ye karşılık gelen operatör,

$$J_1 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_0 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

olarak elde edilir.

Son olarak $h(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 \\ \sinh t & \cosh t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisi için,

$$g' = x\, h(t) = (x_0,\ x_1,\ x_2)\begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 \\ \sinh t & \cosh t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (x_0 \cosh t + x_2 \sinh t,\ \ x_0 \sinh t + x_1 \cosh t,\ \ x_2)$$
$$= (x_0{}',\ x_1{}',\ x_2{}')$$

dır. Burada

$$x_0' = x_0 \cosh t + x_2 \sinh t\,, \qquad x_1' = x_0 \sinh t + x_1 \cosh t\,, \qquad x_2' = x_2$$

olmak üzere,

$$\left.\frac{dx_0'}{dt}\right|_{t=0} = x_1, \quad \left.\frac{dx_1'}{dt}\right|_{t=0} = x_0\ , \quad \left.\frac{dx_2'}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

bulunur. Bu durumda

$$J_2\, f(x) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_0{}'} + x_0 \frac{\partial f}{\partial x_1{}'}$$

olup $h(t)$'ye karşılık gelen operatör,

$$J_2 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_0 \frac{\partial}{\partial x_1}$$

olarak elde edilir.

Hiperboloid üzerinde $x_0 = \sqrt{1 + {x_1}^2 + {x_2}^2}$ olmak üzere, x_0 bağımlı değişken olsun. Bu durumda sonsuz küçük operatörler

$$J_0 = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2},$$
$$J_1 = x_0 \frac{\partial}{\partial x_2},$$
$$J_2 = x_0 \frac{\partial}{\partial x_1}$$

halini alır. Bu operatörler komütasyon bağıntılarını sağlar. Şimdi $SO(1,2)$ grubunun kuasiregüler temsiline karşılık gelen Casimir operatörü bulalım.

Burada,

$${J_0}^2 = J_0 . J_0$$
$$= \left[-x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\right] . \left[-x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\right]$$
$$= -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\left[-x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\right] + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\left[-x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\right]$$
$$= -x_2 \left(-x_2 \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\right) + x_1 \left(-\frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + x_1 \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}\right)$$

$$= {x_1}^2 \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} + {x_2}^2 \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - 2\, x_1 x_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} ,$$

$${J_1}^2 = J_1 . J_1$$

$$= x_0 \frac{\partial}{\partial x_2} . \; x_0 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$= x_0 \left(\frac{\partial x_0}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + x_0 \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} \right)$$

$$= x_0 \left(\frac{x_2}{\sqrt{1 + {x_1}^2 + {x_2}^2}} \frac{\partial}{\partial x_2} + x_0 \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} \right)$$

$$= x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + {x_0}^2 \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} ,$$

$${J_2}^2 = J_2 . J_2$$

$$= x_0 \frac{\partial}{\partial x_1} . \; x_0 \frac{\partial}{\partial x_1}$$

$$= x_0 \left(\frac{\partial x_0}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + x_0 \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} \right)$$

$$= x_0 \left(\frac{x_1}{\sqrt{1 + {x_1}^2 + {x_2}^2}} \frac{\partial}{\partial x_1} + x_0 \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} \right)$$

$$= x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + {x_0}^2 \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2}$$

olmak üzere Casimir operatör,

$$C = {x_1}^2 \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} + {x_2}^2 \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - 2\, x_1 x_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$
$$- {x_0}^2 \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - {x_0}^2 \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2}$$

olarak bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılarak

$$C = - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \left[x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right]^2 - x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} , \qquad (3.2.1)$$

$$[C, \; J_i] = 0, \quad i = 1,2,3$$

Casimir operatörü olarak elde edilir. $SO(1,2)$ grubunun homojen uzayı olan hiperboloid, pseudo küresel koordinatlarda $0 \leq \alpha < \infty , 0 \leq \varphi < 2\pi$ olmak üzere

$$x_0 = \cosh\alpha\ ,\quad x_1 = \sinh\alpha\sin\varphi\ ,\quad x_2 = \sinh\alpha\cos\varphi$$

parametrik formunda verilir [12]. Burada

$$dx_1 = \cosh\alpha\sin\varphi\, d\alpha\ +\ \sinh\alpha\cos\varphi\, d\varphi$$
$$dx_2 = \cosh\alpha\cos\varphi\, d\alpha\ -\ \sinh\alpha\sin\varphi\, d\varphi$$

olup bu iki eşitlikten

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x_1} = \frac{\sin\varphi}{\cosh\alpha}\ ,\ \frac{\partial\alpha}{\partial x_2} = \frac{\cos\varphi}{\cosh\alpha}\ ,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = \frac{\cos\varphi}{\sinh\alpha}\ ,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = -\frac{\sin\varphi}{\sinh\alpha}$$

bulunur. Böylece

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial\alpha}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\cosh\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\cos\varphi}{\sinh\alpha}\frac{\partial}{\partial\varphi},$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial\alpha}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\cosh\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{\sin\varphi}{\sinh\alpha}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

olup, Casimir operatör bu parametrizasyona göre tekrar hesaplanırsa

$$C = -\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \coth\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{1}{\sinh^2\alpha}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

elde edilir. $-\sigma(\sigma+1)$ özdeğer olmak üzere, Casimir operatörü bir $f(\alpha,\varphi)$ fonksiyonuna etki ettirilirse

$$C\,f(\alpha,\varphi) = -\sigma(\sigma+1)f(\alpha,\varphi)$$
$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \coth\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{1}{\sinh^2\alpha}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] f(\alpha,\varphi) = -\sigma(\sigma+1)f(\alpha,\varphi)$$

kısmi diferansiyel denklemi elde edilir. Bu kısmi diferansiyel denklemi değişkenlerine ayırma yöntemi ile çözelim. $f(\alpha,\varphi) = A(\alpha)e^{im\varphi}$; $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ şeklinde bir çözüm arayalım. Önerilen çözüm ve türevleri denklemde yerine yazılarak düzenlenirse,

$$\frac{d^2A}{d\alpha^2} + \coth\alpha\frac{dA}{d\alpha} - \frac{m^2}{\sinh^2\alpha}\ A = \sigma(\sigma+1)\,A \qquad (3.2.2)$$

denklemi elde edilir. (3.2.2) denkleminde

$$z = \cosh\alpha \qquad (3.2.3)$$

dönüşümü yapalım. Bu durumda

$$\frac{dA}{d\alpha} = \sinh\alpha\frac{dA}{dz},$$
$$\frac{d^2A}{d\alpha^2} = \sinh^2\alpha\ \frac{d^2A}{dz^2} + \cosh\alpha\frac{dA}{dz}$$

türevleri (3.2.2) denkleminde yerlerine yazılarak

$$(1-z^2)\frac{d^2A}{dz^2} - 2z\frac{dA}{dz} + \left[\sigma(\sigma+1) - \frac{m^2}{1-z^2}\right]A = 0 \qquad (3.2.4)$$

denklemi elde edilir. (3.2.4) denklemi asosiye Legendre denklemidir. Asosiye Legendre denkleminin çözümü Legendre polinomları ile verilir. c_3, c_4 keyfî sabitler olmak üzere asosiye Legendre denklemin çözümü

$$A(z) = c_3\, P_\sigma^m(z) + c_4\, Q_\sigma^m(z)$$

şeklindedir [11]. $P_\sigma^m(z)$ ve $Q_\sigma^m(z)$, asosiye Legendre denklemin lineer bağımsız iki çözümüdür ve denklemin çözümü olarak bu iki çözümden biri seçilebilir. Bu durumda denkleminin çözümü $|1-z| < 2$ olmak üzere

$$A(z) = c_3\, P_\sigma^m(z)$$

$$= c_3 \frac{1}{\Gamma(1-m)} \cdot \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{m}{2}} F\left(-\sigma, \sigma+1\,; 1-m\,; \frac{1}{2}-\frac{1}{2}z\right) \qquad (3.2.5)$$

dir [11]. (3.2.3) dönüşümü dikkate alındığında (3.2.2) diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$A(\alpha) = c_3\, P_\sigma^m(\cosh\alpha)$$

$$= c_3 \frac{1}{\Gamma(1-m)} \cdot \left(\frac{\cosh\alpha+1}{\cosh\alpha-1}\right)^{\frac{m}{2}} F\left(-\sigma, \sigma+1\,; 1-m\,; \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cosh\alpha\right) \qquad (3.2.6)$$

olarak elde edilir.

Regüler temsilde yapıldığı gibi, (3.2.2) denklemi de bir dönüşüm altında Schrödinger denklemine indirgenerek sistemin potansiyel ve enerji özdeğeri elde edilebilir. (3.2.2) denkleminde

$$A(\alpha) = (\sinh\alpha)^{-1/2}\, \psi(\alpha) \qquad (3.2.7)$$

dönüşümü yapılırsa

$$\frac{dA}{d\alpha} = (\sinh\alpha)^{-1/2}\frac{d\psi}{d\alpha} - \frac{1}{2}(\sinh\alpha)^{-1/2}\cosh\alpha\ \psi,$$

$$\frac{d^2A}{d\alpha^2} = (\sinh\alpha)^{-1/2}\frac{d^2\psi}{d\alpha^2} - (\sinh\alpha)^{-3/2}\cosh\alpha\frac{d\psi}{d\alpha} + \left(\frac{3}{4}(\sinh\alpha)^{-5/2}\cosh^2\alpha\right)\psi$$

olup denklem

$$-\frac{d^2\psi}{d\alpha^2} + \left[\frac{m^2-1/4}{\sinh^2\alpha} + \left(\sigma+\frac{1}{2}\right)^2\right]\psi = 0 \qquad (3.2.8)$$

Schrödinger denklemi halini alır. Burada $\hbar = 2m = 1$ olmak üzere,

$$V(\alpha) = \frac{m^2-1/4}{\sinh^2\alpha}$$

$$E = -\left(\sigma + \frac{1}{2}\right)^2$$

olduğu görülür. (3.2.7) dikkate alınarsa, Schrödinger denklemin çözümü olan dalga fonksiyonu, c_3 normalizasyon sabiti olmak üzere

$$\psi(\alpha) = c_3(\sinh\alpha)^{1/2}A(\alpha)$$

yani

$$\psi(\alpha) = c_3\,(\sinh\alpha)^{\frac{1}{2}}\,P_\sigma^m(\cosh\alpha)$$

$$= c_3\frac{1}{\Gamma(1-m)}\,(\sinh\alpha)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\cosh\alpha+1}{\cosh\alpha-1}\right)^{\frac{m}{2}}\,F\left(-\sigma,\sigma+1\,;1-m\,;\,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cosh\alpha\right)$$

olarak elde edilir.

SONUÇLAR

Bazı özel Lie gruplarının temsilleri, matematik, fizik ve diğer alanlarda büyük ilgi görmektedir. $SO(1,2)$ grubunun regüler ve kuasiregüler temsil sırasıyla

$$T(g_0)f(g) = f(gg_0), \qquad g_0, g \in SO(1,2)$$

$$T(g_0)f(x) = f(xg_0), \qquad x \in \mathrm{H}$$

şeklinde ifade edilir. Bu çalışmada, $SO(1,2)$ grubunun regüler ve kuasiregüler temsilinin Casimir operatörleri

$$C = -\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \coth\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{1}{\sinh^2\alpha}\left(\frac{\partial^2}{\partial{\varphi_1}^2} - 2\cosh\alpha\frac{\partial^2}{\partial\varphi_1\partial\varphi_2} + \frac{\partial^2}{\partial{\varphi_2}^2}\right)$$

$$C = -\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \coth\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{1}{\sinh^2\alpha}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

şeklinde elde edilmiştir. Görüldüğü gibi grubun kuasiregüler temsilinin Casimir operatörü, regüler temsilin Casimir operatörüne göre daha sadedir.

KAYNAKLAR

[1] Y. A. Verdiyev, ***Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces of*** $\boldsymbol{SO(1,2)}$, (Hadronic Press, USA, 1988).

[2]A. Kirillov, Jr., ***Introduction to Lie Groups and Lie Algebras***, (Cambridge University Press, New York, 2008).

[3] N. Ja. Vilenkin, A. U. Klimyk, ***Representations of Lie Groups and Special Functions, Vol I-II***, (Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1991).

[4] A. M. Perelomov, V. S. Popov, ***Casimir Operator for Semisimple Lie Groups***, Math USSR, Vol. 2, No. 6, (1968)

[5] Francesco Iachello, ***Lie Algebras and Applications***, (Springer, Berlin, 2006).

[6] M. A. Naimark, ***Linear Representations of The Lorentz Group***, (Pergaman Press, London, 1964).

[7] Robert Gilmore, ***Lie Groups, Physics and Geometry***, (Cambridge University Press, New York, 2008).

[8] Brian C. Hall, ***Lie Groups, Lie Algebras and Representations***, (Springer, New York, 2003).

[9] N. J. Vilenkin, ***Special Functions and the Theory of Group Representations***, (American Mathematical Society, USA, 1968).

[10] Ernest B. Vinberg, ***Linear Representations of Groups***, (Springer, Berlin, 2010).

[11] H. Bateman, ***Higher Transcendental Functions, Vol I***, (McGraw Hill Book Company, USA, 1953).

[12] G. A. Kerimov, ***On Integrable Systems Related to Semisimple Lie Groups,*** Turk J Phy, 24, 385-396, (2000).

[13] F. Çallıalp, ***Çözümlü Soyut Cebir Problemleri***, (İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul, 1996).

[14] Joseph J. Rotman, ***An Introduction to the Theory of Groups, 4th ed.***, (Springer, USA, 1995).

[15] G. Dattoli, M. Richetta, G. Schettini, A. Torre, ***Lie Algebraic Methods and Solutions of Linear Partial Differential Equations,*** J. Math. Phys, Vol 31, No 12, 2856-2863, (1990).

[16] https://sites.math.washington.edu/~morrow/336_14/papers/zachary.pdf

[17] http://www.th.physik.uni-bonn.de/nilles/people/luedeling/ grouptheory/data/ grouptheorynotes.pdf

[18] http://wwwf.imperial.ac.uk/~epsegal/repthy/Group%20Representation%20theory %202014.pdf

[19] http://math.sfsu.edu/federico/Clase/RepTh/smith.pdf

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Yasemin IŞIK
Doğum Yeri	:	Bursa
Doğum Tarihi	:	11.01.1993
Medeni Durumu	:	Bekar

Eğitim ve Akademik Durumu

İlköğretim	:	Selçuk Hatun İlköğretim Okulu
Lise	:	Bursa Anadolu Kız Lisesi
Lisans	:	Fatih Üniversitesi
Yabancı Dil	:	İngilizce, Korece

İş Tecrübesi

9 Şubat 2015 tarihinden bu yana Trakya Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktayım.

TEZ İLE İLGİLİ BİLİMSEL FAALİYETLER

Katıldığı Kongre	:	4th International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics, 11-15 May, 2017, Kusadasi, Aydin, TURKEY
Bildiri Adı	:	The Generators of Regular, Quasi-regular Representations and Casimir Operators (Sözlü Bildiri)
Düzenleyen Kuruluş	:	Istanbul Commerce University, TÜBA