T.C.

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TOPOLOJİK D-UZAYLARI ÜZERİNE

ELİF ERKUŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Figen ÖKE

EDİRNE-2024

Elif ERKUŞ'un hazırladığı **"Topolojik D-uzayları üzerine"** başlıklı bu tez, tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından **MATEMATİK** Anabilim Dalında bir **Yüksek lisans tezi** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri (Ünvan, Ad, Soyad) İmza

Prof. Dr. Figen ÖKE …….

Prof. Dr. Mustafa TELCİ ……..

Dr. Öğr. Üyesi Ramazan EKMEKÇİ …….

Tez Savunma Tarihi: 13/08/2024

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

İmza

Prof. Dr. Figen ÖKE

Tez Danışmanı ……

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Muharrem Tolga SAKALLI

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

T. Ü. FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

DOĞRULUK BEYANI

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında, tüm verilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini, kullanılan verilerde tahrifat yapılmadığını, tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını, kullanılan tüm literatür bilgilerinin bilimsel normlara uygun bir şekilde kaynak gösterilerek ilgili tezde yer aldığını ve bu tezin tamamı ya da herhangi bir bölümünün daha önceden Trakya Üniversitesi ya da farklı bir üniversitede tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

13 / 08 / 2024

Elif ERKUŞ

Yüksek Lisans Tezi

Topolojik D-uzayları Üzerine

T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

ÖZET

Bu tez çalışmasında, topolojik uzaylarda belirli örtü özelliklerini taşıyan ve çeşitli topolojik yapıların anlaşılmasına katkıda bulunan önemli bir kavram olan D-uzayları incelenmektedir. Bu çalışma, D-uzaylarının temel özelliklerini, bu uzayların çeşitli topolojik yapılarla ilişkilerini ve bu kapsamda elde edilen sonuçları ele almaktadır. Ayrıca, D-uzaylarının belirli topolojik oyunlardaki katkıları da incelenmektedir.

Yıl : 2024

Sayfa Sayısı : 36

Anahtar Kelimeler : D-uzayı, Topolojik uzaylar, Örtü özellikleri, Topolojik oyunlar

Master's Thesis

On Topological D-Spaces

Trakya University Institute of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

ABSTRACT

This thesis examines D-spaces, an important concept in topological spaces characterized by specific covering properties and contributing to the understanding of various topological structures. The study addresses the fundamental properties of D-spaces, their relationships with different topological structures, and the results obtained within this context. Additionally, the contributions of D-spaces to certain topological games are also investigated.

Year 2024

Number of Pages : 36

Keywords : D-spaces, Topological spaces, Covering properties, Topological games

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmanın yürütülmesi sırasında bana yol gösteren, tüm bilgi birikiminden faydalandığım, öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyduğum tez danışmanım sayın Prof. Dr. Figen ÖKE'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Tez konusunun belirlenmesi ve başlangıç aşamasında desteğini esirgemeyen Dr. Öğr. Üyesi Ali Emre EYSEN'e teşekkürlerimi sunarım. Her zaman desteğiyle yanımda olan, anlayış ve sabrı ile bu sürecin daha anlamlı hale gelmesini sağlayan sevgili eşim Murat ALÖZKAN'a teşekkür ederim. Ayrıca, çalışma sürecinde yardımlarını esirgemeyen tüm dostlarıma teşekkür ederim. Trakya Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimine teşekkür ederim.

Elif ERKUŞ

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

TEŞEKKÜR ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **viii**

BÖLÜM 1 ..... **1**

GİRİŞ **1**

BÖLÜM 2 ..... **3**

ÖN BİLGİLER **3**

BÖLÜM 3 ..... **7**

D-UZAYLARI **7**

BÖLÜM 4 ..... **21**

TOPOLOJİK OYUNLARDA D-UZAYLARI **21**

BÖLÜM 5 ..... **24**

SONUÇ VE ÖNERİLER **24**

KAYNAKLAR **25**

ÖZGEÇMİŞ **28**

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\forall$	: Her
$\exists$	: Vardır
$\leq$	: Küçük eşit, Sıralama bağıntısı
$\in$	: Elemanıdır
$\notin$	: Elemanı değildir
$\emptyset$	: Boş küme
$A \cap B$	: A kesişim B
$A \cup B$	: A birleşim B
$A \subseteq B$	: B, A kümesini kapsar
$A \setminus B$	: A fark B
$\mathcal{P}(X)$	: X kümesinin kuvvet kümesi
τ	: Topolojik yapı, açıklar ailesi
(X, τ)	: Topolojik uzay
$N(x) - N_x$	: x noktasının komşuluğu
$\mathcal{N}(x) - \mathcal{N}_x$	: x'in komşuluklar ailesi
$\mathcal{N}_\tau(x)$	: τ topolojisine göre x noktasının komşuluk ailesi
$\mathcal{B}$	: Topolojik uzayın tabanı
$\mathcal{B}(x)$	: Topolojik uzayın x noktasındaki komşuluk tabanı
$\mathcal{R}$	: Denklik bağıntısı
$\mathcal{R}^{-1}$	: Ters Bağıntı
$f(X)$	: Görüntü Kümesi
$f^{-1}(X)$	: Ters görüntü kümesi
GLS	: Genelleştirilmiş sol ayrık uzay
$\preccurlyeq$	: İyi sıralama bağıntısı
ω	: $\omega = \{0, 1, \dots, n \dots\}$ kardinal sayıdır
$[X]^{<\omega}$	: X'in tüm sonlu alt kümelerinin kümesi

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Topoloji, matematiğin en soyut ve aynı zamanda en temel dallarından biri olarak, uzayların ve bu uzaylar arasındaki sürekli dönüşümlerin genel özelliklerini inceler. Topolojik uzaylar, matematiksel analiz, cebirsel topoloji ve geometrik analiz gibi farklı alanlarda derinlemesine incelenmiş ve farklı özelliklerine göre sınıflandırılmıştır. D-uzayları, bu sınıflandırma çerçevesinde özel bir konuma sahiptir ve belirli topolojik özelliklere sahip olmaları nedeniyle dikkate değer bir inceleme alanı sunar.

Topolojide D-uzayları kavramı, 20. yüzyılın sonlarına doğru önemli bir araştırma alanı olarak ortaya çıkmıştır. Bu kavram, Eric Karel van Douwen ve E.A. Michael tarafından önerilmiş ve ilk olarak 1979 yılında van Douwen ve Washek Frantisek Pfeffer tarafından Pacific Journal of Mathematics'te yayınlanan bir makalede detaylı olarak ele alınmıştır (Pfeffer & van Douwen , 1979). D-uzayları, topolojik uzayların belirli özelliklerini koruyan ve belirgin özelliklere sahip bir sınıfı temsil eder. D özelliği bir tür örtü özelliğidir; düzenli ve T_1-uzayı olan kompakt uzayların D-uzayı olduğu ve düzenli ve T_1-uzayı olan sayılabilir kompakt D-uzayının kompakt olduğu açıkça gösterilebilir. Özellikle, her Lindelöf ve düzenli topolojik uzayın bir D-uzayı olup olmadığı sorusu, topoloji alanında derinlemesine incelenen ve "D-uzayı problemi" olarak bilinen önemli bir problem olarak öne çıkar.

D-uzayı problemi, küme teorisi topolojisinde en önemli yirmi problem arasında yer almakta ve bu uzayların topolojik ve küme teorik özelliklerinin anlaşılmasına yönelik çalışmalara rehberlik etmektedir. Bu bağlamda, D-uzaylarının tanımlanması ve bu uzayların özelliklerinin incelenmesi hem teorik hem de uygulamalı matematiksel çalışmalar için önemli bir zemin sunmaktadır.

Topolojik oyunlar, çeşitli matematiksel problemlerin çözümünde kullanılan stratejileri ve bu stratejilerin etkinliğini artırma yollarını araştırmak için geliştirilmiş bir yöntemdir. Topolojide matematiksel stratejiler ve oyun teorisinde kullanılan yöntemler, D-uzaylarının belirli yönlerinin modellenmesinde önemli rol alır.

Bu tezde, üçüncü bölümde D-uzaylarının tanımı, özellikleri ve bu uzayların diğer topolojik yapılarla olan ilişkileri ele alınacaktır. Bu kapsamda, D-uzaylarının çeşitli topolojik yapıların analizindeki rolü ve bu yapıların D-uzayları ile olan ilişkileri araştırılacaktır. Ayrıca, D-uzayı probleminin küme teorisi topolojisindeki yeri ve bu problemin çözümüne yönelik literatürdeki yaklaşımlar incelenecektir. Amacımız, D-uzaylarının topolojideki önemini vurgulamak ve bu kavramın matematiksel araştırmalar için sunduğu olanakları ortaya koymaktır. Dördüncü bölümde topolojik oyunlarda D-uzaylarının rolü, Menger oyunu, Yıldız oyunu ve Ponag oyunu tanımlanarak, bu matematiksel oyunlarla ilişkisi incelenecektir.

BÖLÜM 2

ÖN BİLGİLER

Tanım 2.1. X boştan farklı bir küme ve τ, X'in alt kümelerinden oluşan bir aile olsun. τ aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, bu aileye X kümesi üzerinde bir **topoloji** ve τ'nun her elemanı, X kümesi üzerinde bir **açık küme** olarak adlandırılır.

i. $\emptyset, X \in \tau$

ii. $\forall i \in I$ için $V_i \in \tau$ ise $\bigcup_{i\in I} V_i \in \tau$. (I bir indis kümesi)

iii. $\forall i = 1,2,\dots,n$ için $V_i \in \tau$ ise $\bigcap_{i\in I} V_i \in \tau$.

Verilen özellikler sağlanıyorsa X'e bir **topolojik uzay** denir ve (X,τ) ikilisi şeklinde gösterilir. (Bülbül, 2014)

Tanım 2.2. (X,τ) topolojik uzayı için, $K \subseteq X$ kümesinin tümleyeni açık bir küme ise K kümesi bu uzayda **kapalı küme** olarak adlandırılır. (Yüksel, 2015)

Tanım 2.3. (X,τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{A}$, X kümesinin alt kümelerinden oluşan bir aile olmak üzere, $\mathcal{A}$'nın elemanlarının birleşimi X kümesine eşit veya X kümesini kapsıyorsa $\mathcal{A}$ ailesine **X kümesinin örtüsü** denir. $\mathcal{A}$ ailesi X'in bir örtüsü olmak üzere;

i. Eğer $\mathcal{A}$ ailesinin her elemanı X'in açık alt kümeleri ise $\mathcal{A}$ ailesine X'in **açık örtüsü** denir.

ii. $\mathcal{A}$ ailesinin eleman sayısı, sonlu ise $\mathcal{A}$ ailesine **sonlu örtü**, sayılabilir ise $\mathcal{A}$ ailesine **sayılabilir örtü** denir.

iii. Eğer $\mathcal{A}$ ailesinin $\mathcal{A}'$ alt ailesi, X'in bir örtüsü oluyorsa $\mathcal{A}'$ ailesine **alt örtü** denir.

(Bülbül, 2014)

Tanım 2.4. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X'in her açık $\mathcal{A}$ örtüsü, X'i örten sonlu bir alt aileye sahipse, bu uzay **kompakt topolojik uzay** olarak adlandırılır. (Bülbül, 2014)

Tanım 2.5. (X, τ) topolojik uzay ve $H \subseteq X$ olsun. Eğer (H, τ_H) alt uzayı kompakt uzay ise H kümesine (X, τ) topolojik uzayının **kompakt alt kümesi** denir. (Bülbül, 2014)

Tanım 2.6. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X'in sayılabilir her açık örtüsünün sonlu elemanlı bir alt ailesi de bu uzayı örtüyorsa, (X, τ) uzayına **sayılabilir kompakt uzay** denir. (Yüksel, 2015)

Tanım 2.7. Bir (X, τ) topolojik uzayı için eğer bu uzayın her açık örtüsü sayılabilir bir alt örtüye sahip ise (X, τ) topolojik uzayı **Lindelöf uzay** olarak adlandırılır. (Bülbül, 2014)

Tanım 2.8. Bir (X, τ) topolojik uzayı için $x \in X$ ve N, X'in bir alt kümesi olsun. x'i eleman olarak bulunduran, N'nin bir T açık alt kümesi varsa, N altkümesine bu topolojik uzayda x noktasının **komşuluğu** denir. x noktasının tüm komşuluklarından oluşan aile $\mathcal{N}(x)$ olarak gösterilir ve bu aileye x'in **komşuluklar ailesi** denir. (Bülbül, 2014)

Tanım 2.9. Bir (X, τ) topolojik uzayında $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ olsun. Eğer bu uzayın her noktası için, o noktayı eleman olarak bulunduran bir komşuluk $\mathcal{G}$'nin yalnızca sonlu sayıda elemanıyla kesişiyorsa, $\mathcal{G}$ ailesine **yerel sonlu aile** denir. (Bülbül, 2014)

Ara Teorem 2.1. Bir (X, τ) topolojik uzayında $\mathcal{G}$, X içindeki boş olmayan alt kümelerden oluşan yerel sonlu bir aile olarak tanımlansın. $\forall\, G \in \mathcal{G}$ için $\exists\, x \in G$ seçilerek oluşturulan $D = \{\, x : G \in \mathcal{G} \,\}$ kümesi kapalı ve ayrık kümedir. (Efeoğlu, 2021)

Tanım 2.10. X bir küme, $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{U}$ bu kümenin iki örtüsü olsun. Eğer $\mathcal{A}$'nın her bir A elemanı için, A'yı kapsayan $\mathcal{U}$'nun bir U elemanı varsa, bu $\mathcal{A}$ ailesine $\mathcal{U}$'nun bir **incelmişi**, eğer $\mathcal{A}$ kümesinin elemanları açık kümeler ise, $\mathcal{A}$ ailesine $\mathcal{U}$'nun bir **açık incelmişi** denir. (Bülbül, 2014)

Tanım 2.11. (X, τ) Hausdorff uzayı olsun. Eğer bu uzayın her açık örtüsü yerel sonlu ve açık bir incelmişe sahipse, (X, τ) uzayına **parakompakt uzay** denir. (Bülbül, 2014)

Tanım 2.12. (X, τ) ve (Y, τ') topolojik uzayları için $f: (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau')$ fonksiyonu tanımlansın.

i. $\forall\, x \in X$, $\forall\, U \in \mathcal{N}_{\tau'}(f(x))$ için $f(V) \subseteq U$ olacak şekilde $\exists\, V \in \mathcal{N}_{\tau}(x)$ bulunuyorsa, f fonksiyonuna **sürekli fonksiyon** denir.

ii. Eğer (X, τ) uzayının her açık kümesi U için f(U), (Y, τ') uzayında açık bir küme ise f fonksiyonuna **açık fonksiyon** denir.

iii. Eğer (X,τ) uzayının her kapalı kümesi K için f(K), (Y,τ') uzayında kapalı bir küme ise f fonksiyonuna **kapalı fonksiyon** denir.

Uyarı 2.1. f'in sürekli fonksiyon olması durumunda bu fonksiyon, açık kümelerin ters görüntüsünü açık kümelere, kapalı kümelerin ters görüntüsünü de kapalı kümelere götürür. (Bülbül, 2014)

Tanım 2.13. (X,τ) ve $(Y,\mathcal{V})$ topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ dönüşümü tanımlansın. Eğer f, kapalı, sürekli, örten ve $\forall y \in Y$ için $f^{-1}(y)$'nin X üzerinde kompakt küme olduğu bir dönüşüm ise f'ye **mükemmel dönüşüm** denir. (Burke D. K., Perfect Maps, 2003)

Tanım 2.14. (X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere, bu uzayın birbirinden farklı her iki elemanı için bu elemanların her birinin diğer elemanı bulundurmayan bir komşuluğu varsa, (X,τ) uzayı **T_1-uzayı (veya Fréchet uzayı)** olarak adlandırılır. (Yüksel, 2015)

Teorem 2.1. (X,τ) topolojik uzayı bir T_1-uzayıdır.$\Leftrightarrow \forall y \in X$ için $\{y\}$ tek nokta kümesi kapalıdır. (Bülbül, 2014)

Tanım 2.15. (X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere, bu uzayın birbirinden farklı her iki elemanı için bu elemanların, arakesiti boş olacak şekilde birer komşulukları varsa, (X,τ) uzayı **T_2-uzayı (veya Hausdorff uzayı)** olarak adlandırılır. (Yüksel, 2015)

Tanım 2.16. Bir (X,τ) topolojik uzayı için $D \subseteq X$ olsun**.** $\forall x \in D$ için $N(x) \cap D = \{x\}$ olacak biçimde bir $N(x) \in \mathcal{N}(x)$ açık kümesi varsa D'ye X'in **ayrık bir alt kümesi** adı verilir. (Bülbül, 2014)

Tanım 2.17. Bir (X,τ) topolojik uzayı için, bu uzayın her kapalı alt kümesi K ve $x \notin K$ noktası için, $x \in U$, $K \subseteq V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak biçimde U ve V açık kümeleri varsa, bu uzaya **regüler (düzenli) uzay** denir. (Bülbül, 2014)

Tanım 2.18. Bir (X,τ) topolojik uzayı için eğer X kümesi, sayılabilir sayıda kompakt kümeyle örtülebiliyorsa, (X,τ) topolojik uzayına **σ-kompakt uzay** denir. (Munkres, 2000)

Tanım 2.19. X ve Y herhangi iki küme ve $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$ olsun. Eğer $\mathcal{R} = \{(x,y) : x\mathcal{R}y\} \subseteq X \times Y$ sağlanıyorsa $\mathcal{R}$ alt kümesine X'ten Y'ye **bağıntı** denir. (Yüksel, 2015)

Tanım 2.20. X'ten Y'ye bir $\mathcal{R}$ bağıntısı tanımlansın. $\mathcal{R}^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in \mathcal{R}$ olacak şekilde $\mathcal{R}^{-1}$ bağıntısına $\mathcal{R}$'nin **ters bağıntısı** denir. (Yüksel, 2015)

Tanım 2.21. X bir topolojik uzay ve $\mathcal{R}$, X üzerinde bir ikili bağıntı olsun.

$\forall x \in X$ için $x\mathcal{R}x$ sağlanıyorsa, bu bağıntıya **yansımalı bağıntı** denir.

$\forall x, z \in X$ için $x\mathcal{R}z$ ve $z\mathcal{R}x$ olduğunda $x = z$ sağlanıyorsa, bu bağıntıya **antisimetrik bağıntı** denir.

$\forall x, z, y \in X$ için $x\mathcal{R}z$ ve $z\mathcal{R}y$ olduğunda $x\mathcal{R}y$ sağlanıyorsa, bu bağıntıya **geçişli bağıntı** denir. (Bülbül, 2014)

Tanım 2.22. Antisimetrik, geçişli ve yansımalı olan bağıntılara **sıralama bağıntısı** denir.

Eğer bir $\preccurlyeq$ sıralamasında her $x, z \in X$ için $x \preccurlyeq z$ ya da $z \preccurlyeq x$ ilişkilerinden biri doğru oluyorsa, bu bağıntıya **tam sıralama** denir.

$\preccurlyeq$ ilişkisi X üzerinde bir tam sıralama bağıntısı olsun. Eğer X'in boştan farklı her alt kümesinin bir en küçük elamanı mevcutsa bu sıralamaya **iyi sıralama** denir. (Bülbül, 2014)

BÖLÜM 3

D-UZAYLARI

Tanım 3.1. (X,τ) bir topolojik uzay ve $N(x)$, $\forall x \in X$ için x'in bir açık komşuluğu olsun. $X = \bigcup\{N(x)|x \in D\}$ olacak şekilde X'in kapalı ve ayrık bir D alt kümesi bulunuyorsa bu uzaya bir **D-uzayı** denir. (Pfeffer & van Douwen , 1979)

Önerme 3.1. Düzenli ve T_1-uzayı olan her kompakt uzay bir D-uzayıdır.

Kanıt: $\forall x \in X$ için $N(x)$, x'in bir komşuluğu olmak üzere $\{N(x): x \in X\}$ örtüsü verilsin. (X,τ) topolojik uzayı kompakt olduğundan bu uzayın $\{N(x): x \in X\}$ açık örtüsünün $i = 1,2,\dots,n$ için $x_i \in X$ olacak biçimde $\{N(x_i): i = 1,2,\dots,n\}$ sonlu bir alt örtüsü vardır. $D = \{\{x_i\}: i = 1,2,\dots,n\} \subseteq X$ sonlu tek nokta kümeleri için tüm uzaylar düzenli ve T_1-uzayı olarak kabul edildiğinden tek nokta kümeleri kapalı ve kapalı kümelerin sonlu birleşimi kapalı olacağından D kümesi kapalıdır. Ayrıca D kümesi sonlu ve tek nokta kümeleri kapalı olduğundan ayrık kümedir. O halde $\bigcup\{N(x_i): \{x_i\} \in D\} = X$ olacak biçimde kapalı ve ayrık bir $D \subseteq X$ alt kümesi vardır. Böylelikle her kompakt uzay bir D-uzayıdır. (Fleissner & Stanley, 2001)

Önerme 3.2. (X,τ) topolojik uzayı, kapalı D alt uzaylarının sayılabilir bir birleşimiyse, X bir D-uzayıdır.

Kanıt: $X = \bigcup_{n<m} F_n$ olsun. Burada F_n, (X,τ) uzayının kapalı bir D alt uzayı ve $\{\mathcal{U}(x) : x \in X\}$ bir komşuluğu olsun. F_1'in kapalı bir ayrık alt kümesi olarak D_1 seçilsin. $\mathcal{D}_1 = \{\mathcal{U}(x) : x \in D_1\}$, F_1'i örter. O halde $\{\mathcal{U}(x) : x \in F_2 \setminus \bigcup D_1\}$, $F_2 \setminus \bigcup \mathcal{D}_1$'i kapsar. $F_2 \setminus \bigcup \mathcal{D}_1$'in kapalı ve ayrık bir alt kümesi D_2 seçilsin. $\mathcal{D}_2 = \{\mathcal{U}(x) : x \in D_2\}$, $F_2 \setminus \bigcup \mathcal{D}_1$'i örter. $D_2^{\#} = D_1 \cup D_2$, $F_1 \cup F_2$'nin kapalı ve ayrık alt kümesi olsun, o halde $D_2^{\#} = D_1 \cup D_2$, $F_1 \cup F_2$'yi örter. Böylelikle $\{\mathcal{U}(x) : x \in F_n \setminus \bigcup D_{n-1}^{\#}\}$, $F_n - \bigcup D_{n-1}^{\#}$'i kapsar. $F_n \setminus \bigcup D_{n-1}^{\#}$'in kapalı ve ayrık bir alt kümesi D_n olsun. Buradan $D_n^{\#} = \{\mathcal{U}(x) : x \in D_n\}$,

$F_n \setminus \cup D_{n-1}^{\#}$'i örter. Dikkat edilecek olursa $D_n^{\#} = D_{n-1}^{\#} \cup D_n$, $F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n$'i örter. $D = \cup_{n<m} D_n$ alınırsa, buradan D 'nin $\{\mathcal{U}(x) : x \in D\}$ X'i örtecek biçimde X kümesinin kapalı ve ayrık bir alt kümesi olduğu görülür. (Borges & Wehrly, 1991)

Önerme 3.3. Bir D uzayının kapalı her alt kümesi de D-uzayıdır.

Kanıt: $\forall x \in X$ için $N_A(x)$, x noktasının (A, τ_A) uzayında bir açık komşuluğu olsun. $\forall x \in X$ için $N_A(x) = N(x) \cap A$ olacak biçimde x noktasının (X, τ) uzayında bir $N(x)$ açık komşuluğu vardır. A kümesi kapalı olduğundan $\forall x \in X \setminus A$ için $X \setminus A$ kümesi x noktasının (X, τ) uzayında bir açık komşuluğudur. $\forall x \in X$ için $\widetilde{N}(x) = \begin{cases} N(x), x \in A \\ X \setminus A, x \notin A \end{cases}$ olsun. Bu durumda $\forall x \in X$ için $\widetilde{N}(x)$, x noktasının (X, τ) uzayındaki bir açık komşuluğudur. (X, τ) topolojik uzayı bir D-uzayı olduğundan; $\widetilde{\{N(x) : x \in D\}} = \widetilde{\{N(x) : x \in D \cap A\}} \cup \widetilde{\{N(x) : x \in D \setminus A\}} = \{N(x) : x \in D \cap A\} \cup \{X \setminus A\}$, X'in bir açık örtüsü olacak şekilde kapalı ve ayrık olan bir $D \subseteq X$ alt kümesi vardır. Buradan $\{N(x) : x \in D \cap A\}$ ailesi A'yı örter. Bundan dolayı $\{N(x) \cap A : x \in D \cap A\} = \{N_A(x) : x \in D \cap A\}$ ailesi de A'yı örter. Diğer taraftan $D \cap A$ kümesi (A, τ_A) alt uzayı da kapalı ve ayrık olduğundan (A, τ_A) bir D-uzayıdır. (Borges & Wehrly, 1991)

Önerme 3.4. Düzenli ve T_1-uzayı olan sayılabilir kompakt her D-uzayı kompakttır.

Kanıt: (X, τ) sayılabilir kompakt bir D-uzayı olsun. Bu uzayın kompakt olduğunu göstermek için $\forall x \in X$ için $N(x)$, x noktasının bir açık komşuluğu olmak üzere X'in $\{N(x) : x \in X\}$ açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü olduğunu göstermek yeterlidir. (X, τ) bir D-uzayı olduğundan, $\{N(x) : x \in D\}$ kümesi bu uzayın örtüsü olacak biçimde X'in kapalı ve ayrık bir D alt kümesi vardır. Eğer D kümesi sonlu ise bu uzay kompakttır. Öyleyse D kümesinin sonlu olmadığı kabul edilsin. O halde D kümesinin sayılabilir sonsuz bir D_0 alt kümesi vardır. D ayrık olduğundan D_0 alt kümesi de ayrıktır. $\forall x \in D_0$ için $N(x) \cap D_0 = \{x\}$ olacak biçimde x noktasının bir $N(x)$ açık komşuluğu vardır. Ayrıca D_0'ın her elemanı D_0'ın kapanışının da bir elemanı olduğundan D_0 kapalıdır. Bu durumda $\{X \setminus D_0\} \cup \{N(x) : x \in D_0\}$ kümesi X'in sayılabilir bir açık örtüsüdür. Ancak bu örtünün sonlu bir alt örtüsü yoktur. Bu ise X'in sayılabilir kompakt olmasıyla çelişir. O halde D kümesi sonsuz olamaz. (Scott, Schlather, Becker, Cihak, & Azarel, 2012)

Tanım 3.2. X bir küme ve $\mathcal{U}$, bu kümenin bir örtüsü olsun. Eğer her $U \in \mathcal{U}$ için $\mathcal{U} \setminus \{U\}$ ailesi X'i örtmüyorsa, $\mathcal{U}$, X kümesinin bir **minimal örtüsü** olarak adlandırılır. (Howard & Tachtsis, 2014)

Her açık örtüsünün minimal açık incesi olan topolojik uzaylara **indirgenemez uzay** denir. (Gruenhage, 2011)

Teorem 3.1. Bir (X, τ) topolojik uzayı için $\mathcal{U}$, bu uzayın bir açık örtüsü olarak alınsın. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(i) $\mathcal{U}$'nun bir minimal açık incesi vardır.

(ii) Kapalı ve ayrık bir D kümesi ve her $d \in D$ için $d \in \theta(d)$ olacak şekilde bir $\theta: D \longrightarrow \mathcal{U}$ fonksiyonu varsa $\{\theta(d) : d \in D\}$ ailesi X'i örter. (Gruenhage, 2011)

Sonuç 3.1. D-uzayları indirgenemez uzaylardır.

Kanıt: (X, τ) bir D-uzayı ve $\mathcal{U}$ bu uzayın bir açık örtüsü olsun. Bu durumda $\forall x \in X$ için $x \in U_x$ olacak biçimde $U_x \in \mathcal{U}$ seçerek $N: X \longrightarrow \tau$, $x \in N(x) = U_x$ biçiminde bir fonksiyon tanımlanabilir. (X, τ) bir D-uzayı olduğundan; $N(D) = \{N(x) : x \in D\}$ ailesi X'i örtecek şekilde kapalı ve ayrık bir D kümesi vardır. O halde $\theta: D \longrightarrow \mathcal{U}$, $\theta(d) = N(d)$ olmak üzere $d \in \theta(d)$ ve $\{\theta(d) : d \in D\}$ ailesi X'in bir örtüsü olduğundan (X, τ) indirgenemez uzaydır. (Gruenhage, 2011)

İndirgenemez uzaylar kalıtsal olarak D-uzayı değildir. Örneğin, 2^{ω_1} uzayından herhangi bir noktanın çıkarılması indirgenemez bir uzay verir. (Larson, 2006) Ancak bu uzaylar D-uzayı değildir, çünkü bu uzay ω_1'in kapalı bir kopyasını içerir. (Aurichi, Junqueira, & Larson, 2010)

Not: Open Problems in Topology II'deki makalelerinde M. Hrusak ve J.T. Moore küme teorisi topolojideki yirmi temel problemin kapsamlı bir listesini sunmaktadır. Bunlar arasında Problem 14 (Hrusak & Moore, 2007), Lindelöf uzaylarının D uzayı olup olmadığı sorusunu ele alır ve Van Douwen'e atfedilir. Lindelöf uzaylarının D-uzayı olup olmadığı bilinmemektedir. Bir Lindelöf uzayının D-uzayı olduğunu gösterirken ortaya çıkan zorluk, örtüyü aşağıdaki gibi istenilen biçimde düzenleyememektir.

X bir Lindelöf uzayı ve $\forall x \in X$ için $N(x)$, x'in bir açık komşuluğu olmak üzere $\{N(x) : x \in X\}$ açık örtüsü verilsin. X Lindelöf olduğundan verilen bu örtü $\{N(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$

biçiminde sayılabilir olarak alınabilir. Bu örtü aşağıdaki gibi düzenlenebilirse X'in bir D-uzayı olacağı gösterilebilir.

"$\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \notin \bigcup_{i<n} N(x_i)$ ise $D = \{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$ kapalı ve ayrık bir küme olmak üzere $\{ N(x_n) : n \in D \}$ ailesi X'i örter." D'nin kapalı ve ayrık olduğu göstermek için $\{\{x_n\} : n \in \mathbb{N}\}$ ailesinin yerel sonlu olması yeterlidir. $x \in X$ ise $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ için $x \in N(x_{n_0})$'dır. Bu durumda $\forall n > n_0$ için $x_n \notin N(x_{n_0})$ olduğundan $\{\{x_n\} : \{x_n\} \cap N(x_{n_0}) \neq \emptyset, n \in \mathbb{N}\}$ ailesi sonludur. (Gruenhage, 2011)

Not: Parakompakt uzayların da D-uzayı olup olmadığı bilinmiyor. Ancak aşağıda belirtilen ekstra özellik olsaydı parakompakt bir uzayın bir D-uzayı olduğu söylenebilirdi.

X bir parakompakt uzay ve $\forall x \in X$ için $N(x)$, x noktasının bir açık komşuluğu olmak üzere $\{N(x) : x \in X\}$ açık örtüsü verilsin. X kompakt bir uzay olduğundan $\mathcal{U}$ bu örtünün yerel sonlu açık bir incesi olsun. $\forall U \in \mathcal{U}$ için $U \subset N(x_u)$ olacak şekilde $\exists x_u \in U$ olsaydı, $D = \{ x_u : U \in \mathcal{U} \}$ ailesi X'i örterdi. $\forall U \in \mathcal{U}$ için $x_u \in U$ olduğundan $U \subset N(x_u)$'dur. Buradan $\mathcal{U}$ ailesi X'i örttüğünden $\{N(x_u) : U \in \mathcal{U}\}$ ailesi X'i örter. $D = \{ x_u : U \in \mathcal{U} \}$ kümesinin kapalı ve ayrık olduğunu göstermek için $\mathcal{D} = \{\{x_u\} : U \in \mathcal{U}\}$ ailesinin yerel sonlu olduğunu göstermek yeterlidir. $\mathcal{U}$ ailesi yerel sonlu olduğundan $\forall x \in X$ noktasının $\{U \in \mathcal{U} : U \cap U_x \neq \emptyset\}$ ailesi sonlu olacak biçimde bir U_x açık komşuluğu vardır. Bu durumda $\{\{x_u\} : \{x_u\} \cap U_x \neq \emptyset, U \in \mathcal{U}\}$ ailesi de sonlu olacağından $\mathcal{D}$ ailesi yerel sonludur. (Gruenhage, 2011)

Önerme 3.5. Bir D-uzayının mükemmel bir dönüşüm altındaki ters görüntüsü de bir D-uzayıdır.

Kanıt: Y bir D-uzayı olmak üzere, $f: X \longrightarrow Y$ bir mükemmel dönüşüm olsun. $\forall x \in X$ için U_x, x noktasının bir açık komşuluğu olmak üzere $\{U_x : x \in X\}$ ailesi verilsin. $\forall x \in X$ için $f^{-1}(f(x))$, X'in kompakt bir alt kümesi olduğundan $f^{-1}(f(x)) \subset U_{x_1} \cup \dots U_{x_{i(x)}}$ olacak biçimde $x_1, \dots, x_{i(x)} \in f^{-1}(f(x))$ vardır. f fonksiyonu kapalı olduğundan Y uzayının bir açık alt kümesinin ters görüntüsü biçiminde, $f^{-1}(f(x)) \subset U_x^* \subset U_{x_1} \cup \dots U_{x_{i(x)}}$ olacak biçimde bir U_x^* açık kümesi mevcuttur. $\varphi: Y \longrightarrow X$, $\varphi(x) \in f^{-1}(y)$ biçiminde olsun. $\forall y \in Y$ için $V_y = f(U_{\varphi(y)}^*)$, y noktasının bir açık komşuluğudur. Y bir D-uzayı olduğundan $\{V_y : y \in D\}$ ailesi Y'yi örtecek şekilde, Y'nin kapalı ve ayrık bir D alt kümesi vardır.

$D^* = \left\{\{ x_1, \dots, x_{i(x)}\} : y \in D, x = \varphi(y)\right\}$ alınırsa D^*'ın kapalı ve ayrık olduğu görülür. $\{U_x : x \in D^*\}$ ailesinin de X'i kapsadığı kolayca görülür. (Borges & Wehrly, 1991)

Önerme 3.6. Bir D-uzayının kapalı ve sürekli bir fonksiyon altındaki görüntüsü de bir D-uzayıdır.

Kanıt: X bir D-uzayı, $f: X \longrightarrow Y$ kapalı, sürekli ve örten bir fonksiyon olarak tanımlansın. Y'nin bir D-uzayı olduğunu göstermek için $\forall y \in Y$ için U_y, y noktasının bir açık komşuluğu olsun. $\forall y \in Y$ için $\{U_y : y \in Y\}$ ve $\forall x \in f^{-1}(y)$ için $V_x = f^{-1}(U_y)$ olsun. Dolayısıyla $\forall x \in X$ için $\{V_x : x \in X\}$ x noktasının bir açık komşuluğudur. X bir D-uzayı olduğundan $\{V_x : x \in D\}$ ailesi X'in bir örtüsü olacak biçimde X kümesinin kapalı ve ayrık bir D alt kümesi vardır. D', D'nin $\forall y \in Y$ için $D' \cap f^{-1}(y)$ tek nokta kümesi olacak biçimde bir alt kümesi olsun. Dolayısıyla $\{V_x : x \in D'\}$ ailesi X'i örter. D', X kümesinin kapalı ve ayrık bir alt kümesidir. $D'' = f^{-1}(D')$, Y'nin kapalı ve ayrık bir alt kümesidir. Bu durumda $\{U_y : y \in D''\}$, Y'yi örter. (Borges & Wehrly, 1991)

Teorem 3.2. $f: X \to Y$ fiber-ayrık bir fonksiyon olsun. Eğer Y bir D-uzayı ise X de D-uzayı özelliğine sahiptir. (Buradaki topolojik uzaylar T_1-uzayıdır.)

Kanıt: Y bir D-uzayı olmak üzere, her $x \in X$ için $N(x)$, x noktasının bir açık komşuluğu olsun ve $\{ N(x) : x \in X \}$ komşuluklar ailesinin alınsın. Her $y \in Y$ için $N(y) = Y \setminus f(X \setminus \cup\{N(x) : x \in f^{-1}(x)\})$ ve dolayısıyla $N(y)$, Y'nin bir açık komşuluğu ve örtüsüdür. O halde Y'nin $Y = \cup\{N(y) : y \in D_{N(y)}\}$ olacak şekilde kapalı ve ayrık bir $D_{N(y)}$ alt kümesi vardır. f fonksiyonu bir fiber dönüşüm olduğundan $D_{N(x)} = f^{-1}(D_{N(y)})$ eşitliği sağlanır. Tek nokta kümelerinin kapalı olmasından dolayı $D_{N(x)}$ kümesi kapalıdır ve her $x \in D_{N(x)}$ için $N(x) \cap D_{N(x)} = \{x\}$ olacağından $D_{N(x)}$ ayrıktır. $X = \cup\{ N(x) : x \in D_{N(x)}\}$ olur. O halde X bir D-uzayıdır.

Önerme 3.7. σ-kompakt Hausdorff uzayı D-uzayıdır.

Kanıt: X, σ-kompakt bir uzay olsun. Bu durumda $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$, X'i örtecek şekilde kompakt kümelerin artan bir (K_n) dizisi vardır. $\forall x \in X$ için $N(x)$, x noktasının bir açık komşuluğu olsun. $\{N(x) : x \in K_0\}$, K_0'ın açık örtüsüdür. K_0 kompakt bir küme olduğundan $\{N(x) : x \in F_0\}$, K_0'ı örtecek şekilde $\exists F_0 \subset K_0$ sonlu kümesi vardır. $K_1 \setminus \cup_{x \in F_0} N(x)$, K_1 kompakt kümesinin kapalı bir alt kümesi olduğundan kompakttır.

$\{N(x) : x \in K_1 \setminus (\cup_{x\in F_0} N(x))\}$ ailesi $K_1 \setminus \cup_{x\in F_0} N(x)$ kompakt kümesinin bir açık örtüsüdür. $\exists F_1 \subset K_1 \setminus \cup_{x\in F_0} N(x)$ sonlu kümesi vardır ki, $K_1 \setminus \cup_{x\in F_0} N(x) \subset \cup_{x\in F_1} N(x)$, $K_1 \subset \cup_{x\in F_0\cup F_1} N(x)$'dir. $\{N(x) : x \in K_2 \setminus \cup_{x\in F_0\cup F_1} N(x)\}$ ailesi $K_2 \setminus \cup_{x\in F_0\cup F_1} N(x)$ kompakt kümesinin bir açık örtüsüdür. $\exists F_2 \subset K_2 \setminus \cup_{x\in F_0\cup F_1} N(x)$ sonlu kümesi vardır ki $K_2 \subset \cup_{x\in F_0\cup F_1\cup F_2} N(x)$ olur. Daha genel bir ifade ile $j > 1$ için $\exists F_j \subset K_j \setminus \cup_{x\in F_0\cup F_1\cup\ldots\cup F_{j-1}} N(x)$ sonlu kümesi için $K_j \subset \cup_{x\in F_0\cup F_1\cup\ldots\cup F_j} N(x)$'dir. $D = \cup_{j=0}^{\infty} F_j$ alınsın, $X = \cup_{x\in D} N(x)$ olacak biçimde D kümesinin olduğu söylenebilir. Diğer taraftan $t \in X$ olsun. $m = \min\{j : t \in K_j\}$, $t \notin K_0, \ldots, t \notin K_{m-1}, t \in K_m, t \in K_{m+1}, \ldots. t \in K_m \subset V = \cup_{x\in F_0\cup F_1\cup\ldots\cup F_m} N(x)$, x'in bir komşuluğudur. $F_{m+1} \subset K_{m+1} \setminus \cup_{x\in F_0\cup F_1\cup\ldots\cup F_m} N(x)$, $F_{m+2} \subset K_{m+2} \setminus \cup_{x\in F_0\cup F_1\cup\ldots\cup F_{m+1}} N(x)$,…. Buradan genelleyerek $F_{m+1} \cap V = \emptyset$, $F_{m+2} \cap V = \emptyset$, $F_{m+3} \cap V = \emptyset$, … olacağından $\{\{x\}: \{x\} \cap V \neq \emptyset, x \in D\}$ ailesi yerel sonludur. $\{\{x\}: x \in D\}$ ailesi yerel sonlu bir aile olduğundan D kümesi kapalı ve ayrıktır. Örneğin, $(\mathbb{R},\tau_d)$ öklid topolojisi $\mathbb{R}$ üzerinde bir D-uzayıdır. Açıklamak gerekirse, ardışık tam sayılardan oluşan $C = \{[n, n+1] : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}$ kümesi alınsın. Heine-Borel teoremine göre C'nin her elemanı kompakttır. $\mathbb{R}$'nin her elemanı C'nin elemanlarından en az birinde bulunur. $\mathbb{R} = \cup C$ sayılabilir sayıda kompakt alt kümenin birleşimi şeklinde yazabildiğinden. $\mathbb{R}$ σ-kompakttır. O halde $\mathbb{R}$, bir D-uzayıdır. (Pastor, Habič, & Silva, 2011)

Tanım 3.3. X bir topolojik uzay, $\mathcal{C}$ açık kümelerden oluşan bir aile ve $x \in X$ olsun. $\cup\{C \in \mathcal{C} : x \in C\}$ kümesini belirtmek için $st(x, \mathcal{C})$ kullanılacaktır. Her $x \in X$ için $\{st(x, \mathcal{C}_n) : n \in \omega\}$ yerel bir taban olacak şekilde $(\mathcal{C}_n)_{n\in\omega}$ açık örtüler dizisi mevcutsa, X'in **geliştirilebilir uzay** olduğunu söylenir. (Aurichi L. F., 2010)

Teorem 3.3. Her geliştirilebilir uzay D-uzayıdır.

Kanıt: X geliştirilebilir bir uzay ve $(\mathcal{C}_n)_{n\in\omega}$, her $x \in X$ için $\{st(x, \mathcal{C}_n) : n \in \omega\}$ yerel bir taban olacak şekilde bir örtü dizisi olsun. $(V_x)_{x\in X}$, X uzayının bir açık komşuluğu olsun. $\forall n \in \omega$ için $X_n = \{ x \in X: st(x, \mathcal{C}_n) \subset V_x \}$ olsun. $X = \cup_{n\in\omega} X_n$ olduğundan bu küme boş küme değildir. Her $n \in \omega$ için aşağıdaki özellikleri sağlayan $D_n \subset X_n$ tanımlansın:

a-) D_n kapalı ve ayrık

b-) $V_{D_n} \cup \cup_{k<n} V_{D_k} \supset X_n$

$X_n \setminus \bigcup_{k<n} V_{D_k}$ alınsın ve d_ε, $(X_n \setminus \bigcup_{k<n} V_{D_k}) \setminus V_{E_\varepsilon}$ kümesinin en küçük elemanı olsun, burada $E_\varepsilon = \{d_n : n < \varepsilon\}$ dir. D_n kümesi bu tür d_ε'ların kümesi olarak tanımlansın. $y \in X$ olsun. $y \in C$ olan bir $C \in \mathcal{C}_n$ alınsın. $d_\varepsilon \in C$ olduğu varsayılarak. $y \in st(d_\varepsilon, \mathcal{C}_n)$ olduğuna dikkat edilirse $y \in V_{d_\varepsilon} \cap C$ ve $V_{d_\varepsilon} \cap C \cap D_n = \{d_\varepsilon\}$ olduğu görülür. O halde D_n ayrık bir küme ve tek nokta kümeleri kapalı olduğundan kapalı bir kümedir. Böylece $D = \bigcup_{n\in\omega} D_n$'nin $V_D = X$ olur ve bu nedenle kapalı bir ayrık küme olduğu gösterilebilir. O halde geliştirilebilir uzay D uzayıdır. (Aurichi L. F., 2010)

Tanım 3.4. X bir topolojik uzay olmak üzere, φ bu topolojik uzaydaki kapalı kümelerin σ −yerel sonlu bir ailesi ve $\mathcal{K}$, X'in kompakt alt kümelerinden oluşan bir örtü olsun. Herhangi bir $K \subset \mathcal{K}$ elemanını içeren $\mathcal{U}$ açık kümesi için $K \subseteq \Gamma \subseteq \mathcal{U}$ olacak biçimde bir $\Gamma \in \varphi$ bulunabiliyorsa, X güçlü Σ uzayıdır. (Buzyakova, 2002)

Teorem 3.4. Her güçlü Σ uzayı bir D uzayıdır.

Kanıt: $\mathcal{K}$ ve φ güçlü bir Σ uzayı tanımındaki aileler olsun. φ'yi $\bigcup\{\varphi_n\}$ olarak temsil edilsin, burada her φ_n, X de yerel sonlu kapalı kümeler ailesidir ve $\varphi_n \subseteq \varphi_{n+1}$dir. α bazı sıra sayıları olmak üzere $\varphi_n = \{\Gamma_\alpha^n\}$ olarak numaralandırılsın. $\mathcal{N}$, X de bir komşuluk olmak üzere, $X = \bigcup_{d\in D} \mathcal{N}(d)$ olacak şekilde X de kapalı ve ayrık bir D alt kümesi bulunması gerekli. Kapalı ve ayrık D_n alt kümeleri için $D = \bigcup D_n$ şeklinde tanımlansın.

Adım 0: $D_0 \neq \emptyset$ olacak biçimde, D_m'nin tüm $0 < m < n$ için tanımlandığı varsayılsın.

Adım n: Tekrarlayan şekilde adımlar devam etsin. $D_n = \bigcup D_\alpha^n \cup D_{n-1}$ olacak şekilde sonlu kümeleri D_α^n olarak tanımlanacaktır.

Alt adım 0: $D_0^n \neq \emptyset$ olacak biçimde, D_β^n'in tüm $0 < \beta < \alpha$ için tanımlandığı varsayılsın.

Alt adım α: Tekrarlayan şekilde adımlar devam etsin. $\mathcal{U} = \{\mathcal{N}(d) : d \in (\bigcup_{\beta<\alpha} D_\beta^n) \cup D_{n-1}\}$ olsun. Aşağıdaki gereksinimleri sağlayan ilk $\Gamma \in \varphi_n$ olsun.

Gereksinim R_α^n: $\mathcal{U}$ tarafından tam olarak kapsanmayan $K \in \mathcal{K}$ vardır ve $\mathcal{K} \setminus \mathcal{U} \subseteq \Gamma \setminus \mathcal{U} \subseteq \mathcal{N}(x_1) \cup \mathcal{N}(x_2) \cup \ldots \cup \mathcal{N}(x_k)$ olacak şekilde $x_1, x_2, \ldots, x_k \in K \setminus \mathcal{U}$ vardır. Böyle bir Γ yoksa, alt adım durur. $D_\alpha^n = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ alınır. $D_n = (\bigcup D_\alpha^n) \cup D_{n-1}$ alınsın. X de D_n'in kapalı ve ayrık olduğunu göstermek gerekir. Herhangi bir $x \in X$ için x'i $D_n \setminus \{x\}$ den bir komşulukla ayırmak gerekir. $\varphi_n' = \{\Gamma_\beta : \Gamma_\beta$ bazı α'lar için R_α^n gereksinimini sağlayan φ_n deki ilk değerdir$\}$. $\varphi_n' \subseteq \varphi_n$ olduğundan, φ_n' yerel sonludur. Bu nedenle φ_n'

de yalnızca sonlu sayıda elemanla kesişen bir x komşuluğu vardır ve bu nedenle yalnızca sonlu sayıda D_α^n kümesi vardır. D_α^n sonlu olduğundan, x, $(\bigcup D_\alpha^n) \setminus \{x\}$ in kapanışında değildir ve x, $D_{n-1} \setminus \{x\}$'den ayrılabilirdir çünkü $D_{n-1} \setminus \{x\}$ varsayım gereği kapalı ve ayrıktır. $D = \bigcup D_n$ için $X = \bigcup_{d\in D} \mathcal{N}(d)$ olur. Aksini varsayılsın. O halde $K' = K \setminus \bigcup_{d\in D} \mathcal{N}(d) \neq \emptyset$ olacak biçimde bir K vardır. K' kompakt olduğundan, $K' \subseteq \mathcal{N}(x_1) \cup \mathcal{N}(x_2) \cup \ldots \cup \mathcal{N}(x_k)$ olacak şekilde $x_1, x_2, \ldots, x_k \in K'$ vardır. Şimdi $K'' = K \setminus \mathcal{N}(x_1) \cup \mathcal{N}(x_2) \cup \ldots \cup \mathcal{N}(x_k)$ kompakt kümesi alınacak olursa. Amaç, $K'' \subseteq \bigcup_{d\in D_n} \mathcal{N}(d)$ olacak şekilde en küçük n değerini belirlemektir. Daha sonra, $K \subseteq \Gamma \subseteq \mathcal{N}(x_1) \cup \mathcal{N}(x_2) \cup \ldots \cup \mathcal{N}(x_k) \cup (\bigcup_{d\in D_n} \mathcal{N}(d))$ olacak biçimde böyle bir Γ'yi içeren ilk φ_ℓ seçilecektir. $m = \max\{n, \ell\}$ olarak tanımlansın. O zaman $\varphi_\ell \subseteq \varphi_{m+1}$ ve dolayısıyla $\Gamma \in \varphi_{m+1}$ olduğu sonucuna varılır. n ve ℓ nin belirli değerleri göz önüne alındığında, Γ'nin $m+1$ adımının 1.alt adımından başlayarak gereksinimi karşıladığı görülebilir. Bu nedenle Γ, φ_{m+1}'de gereksinimi karşılayacak ilk eleman olur. Sonuç olarak, Γ'nin $(\bigcup_{d\in D} \mathcal{N}(d))$ tarafından kapsandığı ve dolayısıyla $K \subseteq (\bigcup_{d\in D} \mathcal{N}(d))$'dir. Keyfi bir $x \in X$ alınsın. D'nin kapalı ve ayrık olduğunu göstermek için x'in $D \setminus \{x\}$'den x'in bir komşuluğu ile ayrılabileceğinin gösterilmesi yeterlidir. $x \in \bigcup_{d\in D_n} \mathcal{N}(d)$ olacak şekilde bir n vardır, bu da x'in $D \setminus D_n$'den $\bigcup_{d\in D_n} \mathcal{N}(d)$ ile ayrıldığı anlamına gelir. Ayrıca D_n kapalı ve ayrık olduğu için x, $D_n \setminus \{x\}$'den ayrılabilir. (Buzyakova, 2002)

Yardımcı Önerme 3.1. Bir (X, τ) topolojik uzayı için $\mathcal{N}$, bu topolojik uzayda bir komşuluk olarak alınsın. $\mathcal{N}(X)$ ailesinin nokta sayılabilir olduğu kabul edilsin. Dolayısıyla, X'in yerel sonlu bir alt kümesi $D \subset X$ bulunur ve $X = \bigcup_{d\in D} \mathcal{N}(d)$ şeklinde ifade edilir. (Arhangel'skii & Buzyakova, 2002)

Teorem 3.5. Nokta sayılabilir tabana sahip uzaylar D-uzayıdır.

Kanıt: (X, τ) topolojik uzayı için, $\mathcal{N}$ bu topolojik uzayda herhangi bir komşuluk ve $\mathcal{B}$ bu uzayın nokta sayılabilir bir tabanı olsun. O halde $\forall x \in X$ için $x \in \mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{N}(x)$ olacak şekilde $\mathcal{U}(x) \in \mathcal{B}$ seçilebilir. Bu durumda, $\mathcal{U}$, X üzerinde bir komşuluk ve $\mathcal{U}(X)$ nokta sayılabilir bir ailedir. Yardımcı Önerme 3.1.'e göre, $\mathcal{U}(D)$'nin X'i örttüğü X'in yerel sonlu bir alt kümesi $D \subset X$ vardır. Buradan $\mathcal{N}(D)$'nin X'i örttüğü açıkça görülür. (Arhangel'skii & Buzyakova, 2002)

Tanım 3.5. Bir $f : M \to X$ fonksiyonu için eğer bu fonksiyonun fiberi (nokta tersi) ayrılabilir ise tanımlanan dönüşüme **s-dönüşümü** denir. (Burke D. K., 2007)

Teorem 3.6. Metrik uzayların tüm açık sürekli s-görüntüleri D uzayıdır.

Kanıt: Nokta sayılabilir bir tabana sahip uzaylar, tam olarak metrik uzayların açık sürekli s-görüntüleri ile örtüşür. Bu bağlamda, Arhangel'skii ve Buzyakova'nın, nokta sayılabilir bir tabana sahip tüm uzayların D-uzayları olduğunu gösteren sonucundan hareketle (Arhangel'skii & Buzyakova, 2002), bu özelliklere sahip uzayların D-uzayı olduğu sonucuna doğrudan ulaşılmaktadır. (Burke D. K., 2007)

Not: Metrik uzayların açık sürekli görüntüleri D-uzayı olmayabilir. Birinci sayılabilir uzaylar, metrik uzayların açık sürekli görüntüleridir. Dolayısıyla herhangi birinci sayılabilir D uzayı olmayan "ω_1" örneği alınabilir. $\omega_1 = [0, \omega_1)$ uzayı sayılabilir kompakt fakat kompakt değildir. Sayılabilir kompakt uzayların kompakt olabilmesi için D uzayı olması yeterlidir. $\omega_1 = [0, \omega_1)$ uzayı kompakt olmadığından D uzayı olmadığını söyleyebiliriz. (Burke D. K., 2007)

Tanım 3.6. (X, τ) topolojik uzayı için **zayıf bir taban**, $\mathcal{B} = \bigcup\{B_x : x \in X\}$ şeklindeki alt kümeler ailesidir, burada her $x \in X$, $x \in \bigcap B_x$ için B_x sonlu kesişimler altında kapalıdır. $\mathcal{B}$, X üzerindeki topolojiyi şu şekilde belirler: Bir $U \subseteq X$ kümesi X de açık olması için gerek ve yeter koşul her $z \in U$ için $B \subseteq U$ olacak biçimde bir $B \subseteq \mathcal{B}_z$ olmasıdır. (Burke D. K., 2007)

Tanım 3.7. X bir topolojik uzay ve $d: X \times X \to [0, \infty)$ olarak tanımlansın. Her $(x, y) \in X \times X$ için $d(x, y) = d(y, x)$ ve $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ olduğunu varsayılsın. Boş olmayan her $A \subseteq X$ için, A'nın X'de kapalı olması için gerek ve yeter koşul her $x \in X \setminus A$ için $\inf\{d(x, z): z \in A\} > 0$ olmasıdır. Bu koşul sağlandığında X uzayı **simetrikleştirilebilir uzaydır** ve d fonksiyonunun X için **simetrik** olduğu söylenir. $x \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $B\left(x, \frac{1}{n}\right) = \{z \in X : d(x, z) < \frac{1}{n}\}$ olsun. Dikkat edilecek olursa, simetrikleştirilebilir uzaylar her zaman T_1-uzayıdır. d, X'in simetrik bir fonksiyonu olduğu durumda, $W \subseteq X$ alt kümesinin ancak ve ancak $(*)$ Her $x \in W$ için, $B\left(x, \frac{1}{n_x}\right) \subseteq W$ olacak şekilde en az bir $n_x \in \mathbb{N}$ varsa açık olduğu görülür. Genel olarak x'in $B\left(x, \frac{1}{n}\right)$'nin içinde olmadığı belirtilsin. $\{B\left(x, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\}$ ailesinin x'te zayıf bir taban olduğu düşünülebilir.

$(*)$ özelliğinden yararlanarak x'in X içindeki zayıf komşuluğu ile, bazı $k \in \mathbb{N}$ için $B\left(x, \frac{1}{n}\right) \subseteq V$ olacak şekilde $V \subseteq X$ kümesini kastedilecektir. (Burke D. K., 2007)

Teorem 3.7. Simetrikleştirilebilir uzaylar kalıtsal olarak D uzayıdır.

Kanıt: Bir (X, τ) topolojik uzayı için $X \subseteq Z$ alt kümesi alınsın. (Z, d) uzayının τ alt uzay topolojisine sahip simetrikleştirilebilir bir uzay olduğunu varsayılsın. X'in bir D uzayı olduğunu göstermek için $N(x)$, $x \in X$ noktasının açık komşuluğu olacak biçimde $\mathcal{N} = \{N(x) : x \in X\}$ açık komşuluklar ailesi tanımlansın. Simetrikleştirilebilir uzayların açık alt uzayları da simetrikleştirilebilir olduğundan her $x \in X$ için $N(x)$'in Z'de açık olur ve $Z = \cup\{N(x) : x \in X\}$ olarak ifade edilebilir. $X \subseteq \cup\{N(x) : x \in D\}$ olacak biçimde kapalı ve ayrık D alt kümesi bulunması yeterlidir. Her $x \in X$ için $B\left(x, \frac{1}{k_x}\right) \subseteq N(x)$ olacak şekilde $k_x \in \mathbb{N}$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $I(n) = \{x \in X : k_x = n\}$ olsun. $i < j$ için $y \in I(i), z \in I(j)$ olduğunda $y < z$ olduğunu kabul edelsin. $x \in I(n) \Leftrightarrow x = \min((I(n) \setminus \cup\{N(y) : i < n, y \in J(i)\}) \setminus \cup\{N(y) : y \in J(n), y < x\})$ ve $D = \cup_{n\in\mathbb{N}} J(n)$ olacak biçimde $J(n) \subseteq I(n)$ alınsın.

İddia 0: $D \subseteq X \neq$

İddia 1: $\mathcal{W} = \{U(x): x \in D\}$ kümesi X'i örter. Herhangi bir $y \in X$ için, $y \in I(m)$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{N}$ vardır. Eğer $y \in J(m)$ ise, y, $\cup \mathcal{W}$'nin bir alt kümesi olan $U(y)$ içinde bulunur. $y \notin J(m)$ ise, $y \in (\cup\{U(x): i < m, x \in J(i)\}) \cup (\cup\{U(z): x \in J(m), x < y\}) \subseteq \cup \mathcal{W}$ olur.

İddia 2: D, $\cup \mathcal{W}$'de (ve dolayısıyla X'te) kapalı bir ayrık kümedir.

Bu, herhangi bir $t \in D$ için $D \setminus \{t\}$'nin kapalı bir küme olduğunun gösterilmesinin bir sonucudur. Bu amaçla, $Z = W$ olduğunu varsayabilir ve x'in $Z \setminus (D \setminus \{t\})$'nin bir elemanı olduğu durumu ele alınabilir. $V \cap (D \setminus \{t\}) = \emptyset$ olacak şekilde x'in zayıf bir V komşuluğunun varlığını göstermek yeterlidir. m, $\mathbb{N}$'nin ilk elemanı olsun, öyle ki $J(m)$'nin $x \in U(y)$ olan bir ilk elemanı y olsun. $y < z$ olan tüm $z \in D$ için $z \notin U(y)$ olduğu gösterilebilir. Ayrıca, $z < y$ olan tüm $z \in D$ için, $B\left(z, \frac{1}{m}\right) \subseteq B\left(z, \frac{1}{k_z}\right) \subseteq U(z)$ ve $x \notin U(z)$ vardır bu da $z \notin B\left(x, \frac{1}{m}\right)$ anlamına gelir. Bu, $U(y) \cap B\left(x, \frac{1}{m}\right) \cap (D \setminus \{y\}) = \emptyset$ özelliği ile $U(y) \cap B\left(x, \frac{1}{m}\right)$'nin x'in zayıf bir komşuluğu olduğu anlamına gelir. Eğer

$t = y$ ise, kanıt tamamlanmıştır. Eğer $t \neq y$ ise, $y \in D$ olduğundan, $x \neq y$ ve $y \notin B\left(x, \frac{1}{j}\right)$ olacak şekilde $j \in \mathbb{N}$ vardır. Bu da $V \cap (D \setminus \{t\}) = \emptyset$ ile x'in zayıf komşuluğu olarak $V = B\left(x, \frac{1}{j}\right) \cap U(y) \cap B\left(x, \frac{1}{m}\right)$'yi verir. (Burke D. K., 2007)

Tanım 3.8. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X'in kapalı olmayan her A alt kümesi için bazı $z \in X \setminus A$ elemanına yakınsayan $(x_n)_{n\in\omega}$ dizisi A kümesi içinde mevcutsa X **sıralı uzay** olarak adlandırılır. (Burke D. K., 2007)

Tanım 3.9. (X, τ) bir topolojik uzay ve X sıralı bir uzay olmak üzere $x \in W \subseteq X$ ise, $\langle x_n \rangle_{n\in\omega}$, x'e yakınsadığında $\langle x_n \rangle_{n\in\omega}$, W'nin içinde bulunuyorsa ise W'ye x'in **zayıf komşuluğu** denir. (Burke D. K., 2007)

Tanım 3.10. Bir (X, τ) topolojik uzayı için X sıralı bir uzay ve $\mathcal{W}$, X kümesinin alt kümelerinden oluşan bir aile olsun. U'nun açık olduğu herhangi bir $x \in U \subseteq X$ için, $x \in \bigcap \mathcal{V}$, $\bigcup \mathcal{V}$, x'in zayıf bir komşuluğu ve $\bigcup \mathcal{V} \subseteq U$ olacak biçimde $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ alt ailesi bulunabiliyorsa, $\mathcal{W}$ ailesi bu topoloji için bir **w-sistemidir** denir. (Burke D. K., 2007)

Teorem 3.8. Nokta sayılabilir bir w-sistemine sahip sıralı uzay, bir D uzayıdır. (Burke D. K., 2007)

Tanım 3.11. (OPEN(G)) X bir topolojik uzay olsun. Her $x \in X$ için $\mathbf{W}(x) = \{ W(n, x) : n \in \mathbb{N} \}$, x'i eleman olarak bulunduran sayılabilir alt kümeler ailesi olsun ve $\mathcal{W} = \{ \mathbf{W}(x) : x \in X \}$ alınsın. $\mathcal{W}$ 'aşağıdaki koşulu sağlaması halinde (G) koşulunu sağladığını söylenir.

$x \in \mathcal{U}$ ve $\mathcal{U}$ açık bir kümesi alınsın. O zaman $y \in V$ olduğunda $s = s(x, y, U) \in \mathbb{N}$ için $x \in W(s, y) \subseteq U$ olacak şekilde, x 'i eleman olarak bulunduran $V = V(x, U)$ açık kümesi mevcuttur.

Eğer $\mathcal{W}$ ailesi açık (G) koşulunu sağlıyorsa, ayrılabilirlik ikinci sayılabilirlik anlamına gelir. X'in nokta-sayılabilir bir $\mathcal{B}$ tabanı varsa, X'in açık (G) koşulunu sağlayan $\mathcal{W}$ ailesine sahip olduğu gösterilebilir (burada $\mathbf{W}(x) = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ olarak tanımlanır). Ancak bunun tersinin geçerli olup olmadığı açık bir sorudur. (Collins, Reed, & Roscoe, 1990)

Tanım 3.12. X bir uzay ve $\mathcal{R}$, X üzerinde bir ikili bağıntı olsun, eğer $x \in \overline{A}$, bazı $y \in A$ için $x\mathcal{R}y$'yi gerektiriyorsa $\mathcal{R}$ bağıntısı **neredeyse iyi** olarak tanımlanır. (Eisworth, 2007)

Tanım 3.13. $\mathcal{N}$, X'in bir komşuluğu ve Z, X'in bir alt kümesi olsun. Her $x \in Z$ için $Z \subseteq \mathcal{N}(x)$ ise (eş değer olarak her $x, y \in Z$ için $x \in \mathcal{N}(y)$) Z alt kümesi $\boldsymbol{\mathcal{N}}$**-kapalıdır** denir. (Gruenhage, 2006)

Teorem 3.9. $\mathcal{N}$, X'in bir komşuluğu olsun ve $\mathcal{R}$ nin, X üzerinde neredeyse iyi olduğunu varsayılsın. Bu durumda herhangi bir $y \in X$ için $\mathcal{R}^{-1}(y) \setminus \mathcal{N}(y)$ kümesi sayılabilir $\mathcal{N}$-kapalı kümelerin bir birleşimi olarak ifade edilebilir. O halde $X = \mathcal{N}(D)$ olacak biçimde kapalı ve ayrık bir D kümesi vardır.

Kanıt: Her $x \in X$ noktasının sayılabilir bir $\mathcal{B}_x$ komşuluk tabanına sahip olması durumunda X uzayı açık (G) koşulunu sağlar. Bu durumda, $x \in \overline{A}$ ve $\mathcal{N}(x)$ x'in bir komşuluğu olduğunda, $x \in B \subseteq \mathcal{N}(x)$ olacak şekilde $a \in A$ ve $B \in \mathcal{B}_a$ vardır. (Gruenhage, 2006)

Teorem 3.10. Açık (G) koşulunu sağlayan her uzay bir D-uzayıdır.

Kanıt: X, açık (G) koşulunu sağlayan bir topolojik uzay ve $\mathcal{N}$, X üzerinde bir komşuluk olsun. O halde $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \in B \subseteq \mathcal{N}(x)$ olacak biçimde $B \in \mathcal{B}_y$ vardır. Bu $\mathcal{R}$ seçimi neredeyse iyidir çünkü X, açık (G) şartını sağlar. Ayrıca her $B \in \mathcal{B}_y$ için $B \subseteq \mathcal{N}(x)$ olan tüm $x \in B$ elemanlarından oluşan $C(B)$ kümesini alalım. $C(B)$ kümesi $\mathcal{N}$-kapalıdır ve $\mathcal{R}^{-1}(y) = \{C(B) : B \in \mathcal{B}_y\}$ eşitliği sağlanır. Teorem 3.9. gereği X bir D-uzayıdır. (Eisworth, 2007) (Collins, Reed, & Roscoe, 1990)

Tanım 3.14. $\mathbb{R}$'de $\mathcal{B} = \{[a, b): a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ ailesinin taban olduğu topoloji τ olmak üzere $(\mathbb{R}, \tau)$ topolojik uzayına **Sorgenfrey doğrusu**(**S**) denir. $\mathbb{R}^2$'de $\mathcal{B} = \{[a, b) \times [c, d) : a, b, c, d \in \mathbb{R}, a < b, c < d\}$ ailesinin taban olduğu topoloji φ olmak üzere $(\mathbb{R}^2, \varphi)$ topolojik uzayına **Sorgenfrey düzlemi**($\mathbf{S^2}$) denir. Burada $\varphi = \tau \times \tau$'dur. (Burke & Moore, 1997)

Tanım 3.15. Her başlangıç noktası kapalı olacak şekilde iyi sıralanabilen topolojik uzaylara **sol ayrık uzaylar** denir. (Scheidecker, 2017)

Tanım 3.16. Her $x \in X$ elemanı için $\{y \in X \mid x \preccurlyeq y\}$ kümesi X'te açık olacak biçimde bir $\preccurlyeq$ iyi sıralaması mevcutsa, X uzayının sol ayrık olduğu söylenilir. $\preccurlyeq$ bağıntısı, bir E kümesi üzerinde yansımalı (geçişli olması gerekmez) bir bağıntı ve $F \subseteq E$ olsun. $x \preccurlyeq m$ olan her $x \in F$ için $x = m$ ise $m \in F$'ye, F'nin $\preccurlyeq$**-minimal elemanı** denir. (Pfeffer & van Douwen , 1979)

Tanım 3.17. X uzayı, X üzerinde aşağıdaki iki koşulu sağlayan ve GLS-ilişkisi olarak adlandırılan bir $\preccurlyeq$ yansımalı ikili bağıntı varsa, **genelleştirilmiş sol ayrık uzay** (kısaca GLS) olarak adlandırılır:

a) Boş olmayan her kapalı alt kümesinin bir $\preccurlyeq$-minimal elemanı vardır.

b) $\{y \in X \mid x \preccurlyeq y\}$ kümesi her $x \in X$ için açıktır. (Pfeffer & van Douwen , 1979)

Teorem 3.11. Her T_1 uzayı olan GLS-uzayı D-uzayıdır.

Kanıt: X uzayı, $\preccurlyeq$ GLS bağıntısına sahip bir GLS uzayı ve N, X'in bir komşuluğu olsun. X için $\sigma(x) = \{y \in N(x): x \preccurlyeq y\}$ olacak biçimde yeni bir komşuluk tanımlansın. $x_\varepsilon \in X$ elemanını, her x_ε için $A_\varepsilon = X \setminus \bigcup\{\sigma(x_n) : n < \varepsilon\}$ kümesinin $\preccurlyeq$-minimali olacak şekilde alınsın. $A_\varepsilon \neq \emptyset$ ise böyle bir x_ε bulunabilir, çünkü A_ε kapalıdır. α, $A_\alpha \neq \emptyset$ olan sıralı sayı olsun, eğer $\varepsilon \neq n$ ise $x_\varepsilon \neq x_n$'dir. $D = \{x_\varepsilon : \varepsilon < \alpha\}$ alalım. O halde $\bigcup \sigma(D) = X \setminus A_\alpha = X$ olur. $\bigcup \sigma(D) = X$ olduğundan dolayı her $x \in D$ için $\sigma(x) \cap D = \{x\}$ sağlanıyorsa D kümesi kapalı ve ayrıktır. Bazı $\varepsilon, n < \alpha$ için $x_\varepsilon \in \sigma(x_n)$ olduğu durum ele alınacak olursa. Açıkça görülür ki $\varepsilon \leq n$ ve $x_n \leq x_\varepsilon$ ve $x_n, x_\varepsilon \in A_\varepsilon$'dur. Sonuç olarak x_ε, A_ε içinde $\preccurlyeq$-minimal olduğundan $x_n = x_\varepsilon$'dur. (Pfeffer & van Douwen , 1979)

Önerme 3.8. $\preccurlyeq$, X uzayında yansımalı ve geçişli bir ikili bağıntı olsun. O halde, X'teki boş olmayan her $\preccurlyeq$-zinciri K için, tüm $x \in K$ için $m \preccurlyeq x$ olan bir $m \in \overline{K}$ vardır. Sonuç olarak X'in boş olmayan her kapalı alt kümesinin bir $\preccurlyeq$-minimal elemanı vardır. (Pfeffer & van Douwen , 1979)

Teorem 3.12. S'nin her sonlu kuvveti bir D-uzayıdır.

Kanıt: H, Sorgenfrey doğrusunun yarısı olan $S \cap [0, \infty)$ kümesi olsun. H ve S'nin homeomorfik olduğu gösterilebilir. Çünkü her ikisi de $S \cap [0, 1)$'in sayılabilir sayıda benzer yapıya sahip alt kümeleri tarafından ayrık bir açık örtüye sahiptir. S yerine H ele alsın. n negatif olmayan bir tamsayı olsun. $x \in H^n$'in i'inci bileşeni $1 \leq i \leq n$ olacak şekilde x_i ile gösterilsin. Yansımalı ve geçişli bir ikili bağıntı $\preccurlyeq$, H^n üzerinde $x \preccurlyeq y$ ile tanımlanması için gerek ve yeterli koşul $x, y \in H^n$ olacak şekilde her $1 \leq i \leq n$ için $x_i \leq y_i$ koşulunu sağlamasıdır. Açıkça görülür ki her $x \in H^n$ için $\{y \in H^n: x \preccurlyeq y\}$ kümesi H^n içinde açıktır. $K \subseteq H^n$ bir $\preccurlyeq$-zinciri olsun ve $m \in H^n$ için $m_i = \inf\{x_i: x \in K\}$ olarak tanımlansın, burada x_i, K'nın birinci elemanıdır. Her $x \in K$ için $m \leq x$ olduğu

gösterilebilir. K bir $\preccurlyeq$-zinciri olduğundan, her $\varepsilon > 0$, $1 \leq i \leq n$ için $m_i \leq x_i \leq m_i + \varepsilon$ olacak şekilde bir $x \in K$ vardır. Sonuç olarak, $m \in \overline{K}$ dir. Önerme 3.8. nedeniyle $\preccurlyeq$'nin bir GLS-ilişkisi olduğu söylenebilir. O halde S'nin her sonlu kuvveti bir D-uzayıdır. (Pfeffer & van Douwen , 1979)

Tanım 3.18. Bir (X, τ) topolojik uzayı için $\mathcal{C}$, X kümesinin açık kümelerinden oluşan bir aile ve $x \in X$ olsun. $st(x, \mathcal{C})$ gösterimi $\cup \{C \in \mathcal{C} : x \in C\}$ kümesini belirtmek üzere her $x \in X$ için $\{st(x, \mathcal{C}_n) : n \in \omega\}$ yerel bir taban olacak şekilde bir açık örtüler dizisi $(\mathcal{C}_n)_{n\in\omega}$ varsa X, **geliştirilebilir bir uzaydır** denir. (Aurichi L. F., 2010)

Önerme 3.9. Her geliştirilebilir uzay D-uzayıdır.

Kanıt: X geliştirilebilir uzay ve $(\mathcal{C}_n)_{n\in\omega}$ bir açık örtü dizisi olsun. Her $x \in X$ için, $\{st(x, \mathcal{C}_n) : n \in \omega\}$ kümesi x için bir yerel taban oluşturur. x, X'nin keyfi bir elemanı olmak üzere, $\mathcal{N}_x$, X'in bir açık komşuluk ailesi olsun. Her $n \in \omega$ için $X_n = \{x \in X : st(x, \mathcal{C}_n) \subset N_x\}$ olsun. $X = \bigcup_{n\in\omega} X_n$ olacağından bu küme boş küme değildir. Her $n \in \omega$ için, aşağıdaki koşulları sağlayan bir $D_n \subset X_n$ alt kümesi tanımlansın:

a) D_n kapalı ve ayrık bir kümedir.
b) $N_{D_n} \cup \bigcup_{k<n} N_{D_k} \supset X_n$.

$X_n \setminus \bigcup_{k<n} N_{D_k}$ alalım ve d_ε, $(X_n \setminus \bigcup_{k<n} N_{D_k}) \setminus N_{E_\varepsilon}$ kümesinin en küçük elemanı olsun, burada $E_\varepsilon = \{d_n : n < \varepsilon\}$'dur. D_n kümesini bu tür d_ε'ların kümesi olarak tanımlansın. Bu kanıtın amacı D_n'nin kapalı bir ayrık küme olduğunu göstermektir. $y \in X$ olsun. $y \in C$ olacak şekilde $C \in \mathcal{C}_n$ alalım. Herhangi bir $d_\varepsilon \in C$ olduğunu varsayılsın. $y \in st(d_\varepsilon, \mathcal{C}_n)$ olduğuna dikkat edilecek olursa, buradan $y \in N_{d_\varepsilon} \cap C$ ve $y \in N_{d_\varepsilon} \cap C \cap D_n = \{d_\varepsilon\}$ olduğu görülür. $D = \bigcup_{n\in\omega} D_n$ alınırsa $N_D = X$ ve D kapalı ve ayrıktır. (Aurichi L. F., 2010)

BÖLÜM 4

TOPOLOJİK OYUNLARDA D-UZAYLARI

Tanım 4.1. Bir (X,τ) topolojik uzayı için $n \in \mathbb{N}$ olacak biçimde $\mathcal{U}_n$, bu topolojik uzayın açık örtülerinin herhangi bir dizisi olarak tanımlansın. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$'in X'in bir örtüsü olduğu sonlu bir $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{U}_n$ alt ailesi varsa (X,τ) topolojik uzayı **Menger** olarak adlandırılır ya da **Menger özelliğine** sahip olarak tanımlanır. (Hurewicz, 1926)

Tanım 4.2. Menger(X) Oyunu: A ve B oyuncular olsun. n'inci turda A oyuncusu, (X,τ) topolojik uzayının bir açık örtüsü olan $\mathcal{U}_n$'yi seçer, B oyuncusu ise buna karşılık olarak $\mathcal{U}_n$ örtüsünün sonlu bir $\mathcal{F}_n$ alt kümesini şeçer. Bu oyunun $\mathcal{U}_1, \mathcal{F}_1, \ldots \mathcal{U}_n, \mathcal{F}_n, \ldots$ karşılaşmaları için B oyuncusu tarafından seçilen kümelerin birleşimi, yani $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{F}_n$, X uzayını örtüyor ise B oyuncusu karşılaşmayı kazanır, eğer kazanmazsa A oyuncusu galip gelir. Alternatif olarak, eğer A oyuncusunun örtüsü sonlu birleşimler altında kapalıysa ve B oyuncusu $U_n \in \mathcal{U}_n$'i seçerse, $\bigcup_{n\in\omega} U_n = X$ ise B oyuncusu kazanır. (Gruenhage, 2010)

Teorem 4.1. Her Menger Uzayı D-uzayıdır.

Kanıt: (X,τ) Menger uzayında bir komşuluk olarak N alınsın. Menger(X) oyununda A oyuncusu başlangıç hamlesi olarak $\{N(x): x \in X\}$ ailesini alsın. B oyuncusu $\{N(x): x \in F_0\}$, $F_0 \in [X]^{<\omega}$karşılığını versin. $V_0 = \bigcup\{N(x): x \in F_0\}$ olmak üzere, A oyuncusu sonraki hamlesi için $\{V_0 \cup N(x): x \in X \setminus V_0\}$'i alsın. Devamında B oyuncusu $\{V_0 \cup N(x): x \in F_1\}$, $F_1 \in [X \setminus V_0]^{<\omega}$ karşılığını verir. A oyuncusunun bir sonraki hamlesi $\{V_1 \cup N(x): x \in X \setminus V_1\}$, $V_1 = \bigcup\{N(x): x \in F_1\} \cup V_0\}$ olsun ve A oyuncusu bu şekilde oyunu devam ettirsin. Oyun böyle devam ettiğinde A oyuncusu için uygun bir strateji geliştirilir. Fakat X, Menger uzayı olduğundan dolayı bu strateji galibiyet sağlayan bir strateji olarak kabul edilmez. Bu durumda, A oyuncusu bu stratejiyi kullanarak en az bir karşılaşmayı kaybetmek zorundadır. Öyleyse bu karşılaşma B oyuncusu tarafından

seçilen kümelerle $F_0, F_1, \ldots$ şeklinde belirtildiğinde $X = \bigcup_{n\in\omega} V_n = \bigcup\{N(x): x \in \bigcup_{n\in\omega} F_n\}$ eşitliği sağlanır ve her $n \in \omega$ için $F_n \subset V_n$ ve $F_{n+1} \cap V_n = \emptyset$ olacağından $D = \bigcup_{n\in\omega} F_n$, X kümesinin kapalı ve ayrık bir alt kümesidir. Dolayısıyla (X, τ) Menger uzayı bir D-uzayıdır. (Gruenhage, 2010)

Tanım 4.3. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X'in bir alt kümesi olan B kümesi, $B = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$ şeklinde sayılabilir sayıda U_i açık kümelerinin arakesiti olarak yazılabiliyorsa, B kümesine **G_δ-kümesi** denir. (Bülbül, 2014)

Tanım 4.4. Bir (X, τ) bir topolojik uzayı için $\mathcal{W}$, X kümesinin G_δ alt kümeleri tarafından oluşturulan bir örtüsü olsun. X'in her kompakt olan alt kümesi $\mathcal{W}$'nin bir elemanına dahilse, bu tür bir örtü **Alster örtüsü** olarak adlandırılır. X'in her Alster örtüsünün $X = \cup \mathcal{V}$ olacak biçimde sayılabilir $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ alt örtüsü varsa X'e bir **Alster uzayı** denir. (Aurichi & Dias, 2014)

Teorem 4.2. Her Alster uzayı Mengerdir.

Kanıt: $\{\mathcal{U}_n\}_{n<\omega}$ her biri sonlu birleşimler altında kapalı olan, X'in bir açık örtüler dizisi olsun. $\mathcal{G}$, $U_n \in \mathcal{U}_n$ olacak biçimde tüm $\bigcap_{n<\omega} U_n$'lerin kümesi olsun. K, X'in herhangi bir kompakt alt uzayı olarak alınsın. O halde her $n < \omega$ için K, bazı $U_n \in \mathcal{U}_n$'e dahildir ve buradan K'yı bulunduran $\exists G \in \mathcal{G}$ vardır. X'in Alster olduğu göz önüne alınırsa, $\mathcal{G}$'de öyle bir $\{H_k\}_{k<\omega}$ vardır ki $\bigcup_{k<\omega} H_k$, X'i örter. $U_{n_k} \in \mathcal{U}_n$ olduğu durumda $H_k = \bigcap_{n<\omega} U_{n_k}$ olsun. Sonuç olarak, $H_n \subseteq U_{n_n}$ olduğundan $\{U_{n_n}\}_{n<\omega}$ ailesi X'i örter. Böylece her $U_{n_n} \in \mathcal{U}_n$ olduğundan X Mengerdir. (Aurichi & Tall, 2011)

Tanım 4.5. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. N ve C oyuncuları arasında oynanan aşağıdaki oyun, **kısmi açık komşuluk atama oyunu (PONAG)** olarak adlandırılır. N oyuncusu, $Y_0 \subset X$ ve $\mathcal{N}_{Y_0} = X$ olacak biçimde X'in bir kısmi açık komşuluğu olan $(\mathcal{N}_x)_{x\in Y_k}$'i tanımlar. Sonra C oyuncusu X'in kapalı bir ayrık alt kümesi olan $D_0 \subset Y_0$ seçer. n'inci rauntta N oyuncusu $k < n$ için her $(\mathcal{N}_x)_{x\in Y_k}$ ile uyumlu bir açık komşuluk ataması olan $(\mathcal{N}_x)_{x\in Y_n}$ seçer ve oyun bu şekilde devam eder, öyle ki $X \setminus (\bigcup_{k<n} \mathcal{N}_{D_k})$, X'i örter. $(Y_n \cap \bigcup_{k<n} \mathcal{N}_{D_k}) = \emptyset$ olması gerekir. Oyuncu C daha sonra X'in kapalı bir ayrık alt kümesi olan $D_n \subset Y_n$ kümesini seçer. Eğer $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{N}_{D_n} = X$ oluyorsa oyunu C oyuncusu kazanır. (Aurichi L. F., 2010)

Önerme 4.1. $(D_n)_{n\in\omega}$, C oyuncusu tarafından kazanılan bir PONAG oyunundaki gibi olsun. O zaman $\bigcup_{n\in\omega} D_n$ kapalı bir ayrık kümedir.

Kanıt: $x \in X$ ve $n \in \omega$, x, $\bigcup_{d\in D_n} \mathcal{N}_d$'ye ait ilk eleman olsun. $\bigcup_{d\in D_n} \mathcal{N}_d$'nin x'i $\bigcup_{k>n} D_k$'daki her noktadan ayıran bir açık küme olduğuna dikkat edilmelidir. $\bigcup_{k\leq n} D_k$ kapalı ve ayrık bir küme olduğundan, x'in $\bigcup_{k\in\omega} D_k$'nın bir yığılma noktası olmadığı sonucuna varılır. O halde D-uzayı olmanın, N oyuncusunun kazanan bir stratejiye sahip olmamasıyla ilişkili olduğunu söylenebilir. (Aurichi L. F., 2010)

Önerme 4.2. Bir (X, τ) topolojik uzayı için eğer N oyuncusu PONAG oyunu için kazanan bir stratejiye sahip değilse, o zaman X bir D-uzayıdır.

Kanıt: (X, τ) bir D-uzayı olmadığı varsayılsın. $(\mathcal{N}_x)_{x\in X}$, X'in bir açık komşuluğu olsun. Dolayısıyla, eğer N oyuncusu her n'inci rauntta, $A = X \setminus \bigcup_{k<n} \mathcal{N}_{D_k}$ olacak biçimde $(\mathcal{N}_x)_{x\in A}$ şeklinde oynarsa C oyuncusu bu oyunda galip gelemez. (Aurichi L. F., 2010)

Tanım 4.5. Yıldız Oyunu: Bir (X, τ) topolojik uzayı için belirlenen şekilde C ve N oyuncuları arasında oynanan oyuna **yıldız oyunu** denir. Her ε'uncu rauntta, oyuncu C, o raunttan önce seçilen her x_α'den farklı olan x_ε'yi seçer. Daha sonra N oyuncusu $A_\varepsilon \subset X$'i seçer, $x_\varepsilon \in A_\varepsilon$ ve her $y \in A_\varepsilon$ için $y, x_\varepsilon \in \mathcal{N}_y$ olacak şekilde açık bir $\mathcal{N}_y$ kümesi seçer. Ayrıca, y bazı $n < \varepsilon$ için A_n'ye aitse, $\mathcal{N}_y$ daha önce seçilen aynı açık küme olmalıdır. Her raunt başında, aşağıdaki durumlar belirtilen sırayla gerçekleştirilir:

a) $\{x_n : n < \varepsilon\}$ için bir yığılma noktası olan ve $n < \varepsilon$ olan herhangi bir A_n'nin elemanı olmayan bir $x \in X$ olması durumunda, N'nin kaybettiği kabul edilir.
b) $\{x_n : n < \varepsilon\}$ kümesinin kapalı bir ayrık küme olmaması durumunda, C kaybeden olarak ilan edilir.
c) $\bigcup_{n<\varepsilon} \mathcal{N}_{x_n} = X$ olması durumunda, C kazanan ilan edilir. Aksi takdirde oyun devam eder. (Aurichi L. F., 2010)

Önerme 4.3. Bir (X, τ) topolojik uzayı için eğer N oyuncusu yıldız oyunu için kazanan bir stratejiye sahip değilse, o zaman X bir D-uzayıdır.

Kanıt: X'in bir D-uzayı olmadığını varsayılsın. Bunu sağlayan açık komşuluklar ailesi $(\mathcal{N}_x)_{x\in X}$ olarak belirlensin. Eğer N oyuncusu her ε raundunda $A_\varepsilon = \{y : x_\varepsilon \in \mathcal{N}_y\}$ kümesini seçerse, N oyuncusu oyunu kazanır. (Aurichi L. F., 2010)

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, van Douwen ve Washek Frantisek Pfeffer tarafından yayınlanan makaleden yola çıkılarak, bir tür kaplama özelliği olan D-uzayları ile ilgili araştırmalar ele alınmıştır. Bu araştırmalarda, D-uzaylarının çeşitli topolojik yapılar ile olan ilişkisi incelenmiştir. Özellikle, kompakt T_1-uzayları, kapalı D-alt uzaylarının sayılabilir birleşimi, D-uzaylarının kapalı alt kümeleri, indirgenemez uzaylar, σ-kompakt uzaylar, geliştirilebilir uzaylar, güçlü Σ uzayları, nokta sayılabilir tabana sahip uzaylar, simetrikleştirilebilir uzaylar, Açık(G)-koşulunu sağlayan uzaylar, GLS-uzayları, Sorgenfrey doğrusu'nun her sonlu kuvveti, dönüşümler ve topolojik oyunlar gibi konular üzerinde durulmuştur.

Bu çalışma ile ilgili kaynakları incelediğimizde, kalıtsal Lindelöf uzaylarının D-uzayı olduğunu gösteren bir kanıtın eksikliği ve D-uzayı olmayan meta-Lindelöf uzaylarının var olup olmadığı konusu, gelecekteki araştırmalar için önemli araştırma soruları olarak karşımıza çıkmaktadır.

Bu bağlamda, kalıtsal Lindelöf gibi güçlü kaplama özelliklerinin D-uzayı olmayı gerektirip gerektirmediği üzerine detaylı çalışmalar önerilmektedir. Bununla birlikte, parakompakt, metakompakt, metalindelöf, subparakompakt, submetakompakt, submetalindelöf gibi kaplama özelliklerinin, kalıtsal olarak eklenmesi durumunda bile D-uzayı olmayı ima edip etmediği bilinmemektedir. Bu sorular üzerine araştırma yapılabilir.

KAYNAKLAR

Arhangel'skii, A. V. (2005). D-spaces and covering properties. *Topology And İts Applications, 146*, 437-449.

Arhangel'skii, A. V., & Buzyakova, R. (2002). Addition theorems and D-spaces. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 43*(4), 653-663.

Aurichi, L. F. (2010). D-spaces, Topological games and Selection Principles. *Topology Proceedings, 36*, 107-122.

Aurichi, L. F., & Dias, R. (2014). Topological Games and Alster Spaces. *Canadian Mathematical Bulletin, 57*(4), 683-696.

Aurichi, L. F., & Tall, F. (2011, April 14). Lindelof spaces which are indestructible, productive, or D. *arXiv preprint arXiv:1104.2793*.

Aurichi, L., Junqueira, L., & Larson, P. (2010). D-spaces, irreducibility and trees. *Topology Proceedings, 35*, 73–82.

Borges, C. R., & Wehrly, A. C. (1991). A study of D-spaces. *Topology Proceedings, 16*, 7-15.

Burke, D. K. (2003). Perfect Maps. *Encyclopedia of General Topology*, 92-96.

Burke, D. K. (2007). Weak-bases and D-spaces. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 48*(2), 281-289.

Burke, D., & Moore, J. (1997). Subspaces of the Sorgenfrey line. *Topology and its Applications, 90*, 57-68.

Buzyakova, R. Z. (2002). On D-property of strong Σ spaces. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 43*(3), 493-495.

Bülbül, A. (2014). *Genel Topoloji* (4. Baskı). Ankara: Hacettepe Üniversitesi Yayınları.

Collins, P., Reed, G., & Roscoe, A. (1990). The Point-Countable Base Problem. G. M. Reed, & J. Van Mill (Ed.), *Open problems in topology içinde* (s. 237-249). Amsterdam: North-Holland.

Efeoğlu, G. (2021). Topolojik gruplarda yerel kompaktlık. *Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü*, Yüksek lisans tezi

Eisworth, T. (2007). On D-Spaces. Elliott Pearl (Ed.), *Open problems in topology II içinde* (s. 129-134). Elsevier Science B.V.

Fleissner, W. G., & Stanley, A. (2001). D-spaces. *Topology and its Applications, 114*(3), 261-271.

Gruenhage, G. (2006). A note on D-spaces. *Topology and its Applications, 153*(13), 2229-2240.

Gruenhage, G. (2010, May 31). Topological games. *Auburn University*.

Gruenhage, G. (2011). A survey of D-spaces. *Set Theory and Its Applications: Annual Boise Extravaganza in Set Theory içinde* (s. 13-28). American Mathematical Society.

Howard, P., & Tachtsis, E. (2014). On the minimal cover property in ZF. *Topology and its Applications, 173*, 94-106.

Hrusak, M., & Moore, J. T. (2007). Introduction: Twenty problems in set-theoretic topology. Elliott Pearl (Ed.), *Open Problems in Toplogy II içinde* (s. 111-114). Elsevier Science B.V.

Hurewicz, W. (1926). Über eine verallgemeinerung des Borelschen Theorems. *Mathematische Zeitschrift, 24*, 401-421.

Larson, P. B. (2006). Irreducibility of product spaces with finitely many points removed. *Topology Proceedings, 30*(1), 327-333.

Munkres, J. R. (2000). *Topology* (2. Baskı). Prentice Hall.

Pastor, K., Habič, M., & Silva, S. (2011, August 15). How to prove that sigma-compact space is D-space. Mathematics Stack Exchange. Erişim tarihi 3 Temmuz 2024, https://math.stackexchange.com/q/575800

Pfeffer, W. F., & van Douwen , E. K. (1979, December). Some properties of the Sorgenfrey line and related spaces. *Pacific Journal of Mathematics, 81*(2), 371-377.

Scheidecker, E. (2017). Properties of left-separated spaces and their unions. *University of Northern Iowa*, Doktora tezi.

Scott, B. M., Schlather, J., Becker, A., Cihak, M., & Azarel. (2012, March 30). How to prove that countably compact D-space is compact. Mathematics Stack Exchange. Erişim tarihi 5 Haziran 2024, https://math.stackexchange.com/q/126331

Yüksel, Ş. (2015). *Genel Topoloji* (8. Baskı). Konya: Eğitim Yayınevi.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Elif ERKUŞ

Eğitim Bilgileri

Lise	: Kırklareli Anadolu Lisesi	2015
Lisans	: Matematik, Trakya Üniversitesi, Fen Fakültesi	2020
Yüksek Lisans	: Matematik, Trakya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü	2024

İş Deneyimleri

2020-2021	: Edirne Dinamik Özel Öğretim Kursu, Matematik Öğretmeni
2021-2022	: Edirne Birebir Kişisel Gelişim Kursu, Matematik Öğretmeni
2022-2024	: Edirne Filiz Özel Öğretim Kursu, Matematik Öğretmeni