KÜRESEL KABUĞUN KUANTUM ELEKTRO MAGNETİK SIFIR NOKTA ENERJİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
FİZİK ANABİLİM DALI

FİLİZ KUZU

Tez Yöneticisi: Yrd.Doç.Dr. Mustafa ÖZCAN

EDİRNE - 2004

168128

T.C
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KABUĞUN KUANTUM ELEKTRO MAGNETİK SIFIR NOKTA ENERJİSİ

FİLİZ KUZU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
FİZİK ANABİLİM DALI

Tez yöneticisi: Yrd.Doç.Dr. Mustafa ÖZCAN

2004
EDİRNE

T.C
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KÜRESEL KABUĞUN KUANTUM ELEKTRO MAGNETİK SIFIR NOKTA ENERJİSİ

FİLİZ KUZU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
FİZİK ANABİLİM DALI

Bu tez 28 / 12 / 2004 tarihinde Aşağıdaki Jüri Tarafından Kabul Edilmiştir.

Doç.Dr.Ş.Erol Okan
(Üye)

Yrd.Doç.Dr.Mustafa Telci
(Üye)

Yrd.Doç.Dr.Mustafa Özcan
(Danışman)

ÖZET

Bu çalışmada a yarıçaplı ideal iletken bir küresel kabuğun elektro magnetik alan boşluk enerjisi tartışıldı. İlk olarak öz frekansların kompleks düzlemdeki kontur integrasyonu ve mod toplama metoduna göre küresel kabuk için Casimir enerjisi yeniden elde edildi. İkinci olarak kuantum boşluk enerjisi mod toplamı ile kontur integrali ve kesilim fonksiyonunun etkileri kullanılarak hesaplandı. Bu iki önemli teknikteki hesaplar ve aralarındaki ilişki tartışılmıştır.

SUMMARY

The quantum vacuum energy of the electromagnetic field for a conducting spherical shell of radius a is discussed. Firstly a simple method for calculating the Casimir energy for a sphere is reproduced by considering mode summation and contour integration in a complex plane of eigenfrequencies. Secondly we calculated the quantum vacuum-energy by using the mod sum method with the contour integration and studied the effects of cutoff functions.

We discussed the importance of this two cases calculation as well as its relation between those two calculating method.

TEŞEKKÜR

Tez yöneticiliğimi üstlenerek çalışmalarım sırasında çalışma ortamımı ve imkanlarını sağlayan, derin bilgi ve deneyimlerinden faydalandığım, aydınlatıcı bilgilerinin yanında manevi desteğini benden esirgemeyen sayın hocam Trakya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fizik bölümü Öğretim üyesi Dr. Mustafa ÖZCAN'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Çalışmamın her aşamasında bana destek olan sevgili aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa no

1.Giriş.....1

2.Küresel Kabuğun Casimir enerjisi.....11

Sonuç.....35

Kaynaklar.....36

Özgeçmiş.....37

I.GİRİŞ

Kuantum kuramının öndeyişlerinden birisi boş uzayın her santimetre küpünün büyük miktarda enerji içerdiğidir. Bu bize evrenin herhangi bir yerinde madde veya parçacığın olmamasının, hiçbir şeyin olmayacağı anlamına gelmediğini söyler.

1948 yılında ilk defa Hollandalı fizikçi H.B.G. Casimir aralarında çok az bir aralık olan yüksüz ideal iletken paralel levhanın birbirini çekeceğini söyledi ve bu etkiye Casimir etki adı verildi. Casimir etkisi geri plandaki elektromagnetik alanın kuantum sıfır noktası enerjisinden kaynaklanan ışınım basıncından ileri gelir. Gerçekte elektromagnetik alanın bazı dalga boyları levhalar arasına alınmaz, böylece boş uzayla karşılaştırıldığında enerji yoğunluğu azalır. Dengesizlik levhaların birbirine doğru itilmesini doğurur. Bu önemli sonuç yalnızca evrensel $\hbar$ ile c birimlerine ve levhaların geometrisine bağlı olup, elektrik yükü gibi değerlerden bağımsızdır.

Casimir etki 1958 yılında başka bir Hollandalı fizikçi Sparnaay tarafından deneyle doğrulandı. Bu etki gerçekti ve ciddiye alınması gerekiyordu. Sıfır-nokta enerjisi elektromagnetik alan dahil doğadaki tüm kuvvet alanlarında ortaya çıkar.

Casimir paralel levhaların birbirini çekmesinden yola çıkarak bu kuvvetlerin kararlı klasik elektron modelindeki Poincare kuvvetlerini dengeleyebileceğini düşündü. Casimir paralel levha durumundaki gibi bu elektron modelinde de çekici bir kuvvetin ortaya çıkmasını umuyordu. Ancak, 1968 yılında küre üzerinde yapılan çalışmada söz konusu olan kuvvetin pozitif yani itici kuvvet üreteceği Boyer tarafından bulunmuştur. Boyer hesaplamalarında herhangi bir fiziksel yasallığa bağlı kalmaksızın tamamen amaca yönelik, kesici frekanslara bağlı sonuçlar elde etmiştir. Bununla birlikte 1972 yılında küresel kabuk için Casimir enerjisi B.Davies tarafından hesaplanarak Boyer'in çalışmasındaki enerji işaretinin aynısı elde edilmiştir.

1978 yılında Jr., J. Schwinger ile K.A. Milton, ve L.L. DeRaad, yüksüz ideal iletken küresel kabuğun Casimir enerjisini Green fonksiyon formalizmi ile Boyerin hesaplama tekniklerinden tamamen bağımsız olarak pozitif ve büyüklüğünü,

$$E = 0.09235\frac{\hbar c}{2a} \qquad (a \text{ küresel kabuğun yarıçapı})$$

bulmuşlardır. 1970'lerden sonra Casimir enerjisi hesaplamalarında farklı teknikler kullanılmıştır. Bunlar Stress-Tensör metodu, Zeta fonksiyonu regularizasyon tekniği, Heat Kernel serileri ve kontur integrasyonu ile Mod toplama yöntemidir. Küre için yapılan teorik çalışmaların yenilenmesinin yanı sıra deneysel olarak küre-levha, deneyleri yapılmıştır Ancak küresel kabuk ile ilgili yapılmış bir deney yoktur. Casimir enerjisinin işareti geometriye, topolojiye, boyuta ve eğriselliğe bağlı olduğundan kullanılan hesaplama tekniklerinin çok dikkatli ve tutarlılığının tartışılması gerekir.

Casimir etki hesaplarındaki şüpheli nokta; bazı problemlerde farklı matematiksel teknikler kullanıldığında farklı sonuçların üretilmesidir. Doğanın ürettiği sonlu ifadeleri matematiksel olarak sonsuz ifadelerin içinden elde edecek yegane bir formulasyona sahip değiliz. Bu nedenle matematiksel olarak daha basitleştirilmiş yeni avantajlar üreten metotları göz önüne almak Casimir etki hesaplamalarında yeni ufuklar açmaktadır. Bu nedenleri göz önünde bulundurarak küresel kabuğun elektromagnetik alan kuantum boşluk enerjisini matematiksel olarak daha basitleştirilmiş bir teknikle yeniden göz önüne alacağız.

Öncelikle elektromagnetik alanın kaynaksız, boş uzayda kuantumlanmasının kısa bir tekrarını yapacağız. Yük ve akım yoğunluğu bulunmayan, kaynaksız boş uzayda Maxwell denklemleri,

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = 0 \tag{1.1}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \tag{1.2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1.3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{1.4}$$

ile ifade edilir. Bu denklemler kullanılarak elektrik ve magnetik alanın sağlamış olduğu dalga denklemleri bulunur.

$$\vec{\nabla}^2\vec{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0 \tag{1.5}$$

$$\vec{\nabla}^2\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=0 \tag{1.6}$$

Bu denklemlerin çözümü düzlem dalgaların çözümünü verir.

$$\vec{E}=\vec{\varepsilon}_1E_0e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \qquad ,\vec{B}=\vec{\varepsilon}_2B_0e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \tag{1.7}$$

Çözümlerin dalga denklemlerini sağlamaları için $\omega=|k|c$ olması gerektiği açıktır. O halde dalga denklemleri,

$$(\vec{\nabla}^2+k^2)\begin{Bmatrix}\vec{E}\\ \vec{B}\end{Bmatrix}=0 \tag{1.8}$$

şeklinde ortak Helmholtz denklemini sağlar. Yük dağılımlarının statik yani zamandan bağımsız olduğu durumlarda $\vec{\nabla}.\vec{A}=0$ (Coulomb Ayarı) koşulunu sağlayan vektör potansiyelleri ile çalışmak uygundur. Elektrik ve Magnetik alanın vektör potansiyeli ile ilişkisi

$$\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{1.9}$$

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \tag{1.10}$$

şeklindedir. Buna göre vektör potansiyelinin de sağladığı dalga denklemi ve çözümü bulunabilir.

$$\vec{\nabla}^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial^2 t}=0 \tag{1.11}$$

$$\vec{A}=A_0 e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} \tag{1.12}$$

Elektromagnetik alanın Hamiltonyeni elektrik ve magnetik alan vektör potansiyeli cinsinden ifade edilir. Vektör potansiyelini V hacmi, α polarizasyonu ve $\vec{\varepsilon}^{(\alpha)}$ ilerleme yönü k'ya dik bir polarizasyon vektörünü temsil etmek üzere genişletelim. Burada $\vec{\varepsilon}^{(\alpha)}\cdot k=0$ olması ayrıca Coulomb koşuluna uyar.

$$\varepsilon_k^{(\alpha)}.\varepsilon_k^{(\alpha')}=\delta_{\alpha\alpha'};\qquad \left\{\varepsilon_k^{(\alpha)}(\alpha=1,2);\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}\right\}$$

$$\vec{A}(r,t)=\left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_k}\right)^{1/2}\sum_k\sum_\alpha\left\{d_{k,\alpha}(0)\vec{\varepsilon}e^{i(k.r-\omega t)}+d^*{}_{k,\alpha}(0)\vec{\varepsilon}e^{-i(k.r-\omega t)}\right\} \tag{1.13}$$

Burada $d_{k,\alpha}(r,t)=d_{k,\alpha}(0)e^{-i\omega t}$ ve $d_{k,\alpha}{}^*(r,t)=d_{k,\alpha}(0)e^{-i\omega t}$ dır. Elektromagnetik alanın Hamiltonyeni,

$$H=\frac{1}{2}\int\left|\vec{E}\right|^2+\left|\vec{B}\right|^2 d^3r \tag{1.14}$$

dir. Vektör potansiyeli cinsinden Hamiltonyeni tekrar yazarsak,

$$H=\frac{1}{2}\int\{(\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}).(\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}*}{\partial t})+(\vec{\nabla}\times\vec{A}).(\vec{\nabla}\times\vec{A}^*)\}d^3r \tag{1.15}$$

olur ve,

$$\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right).\left(\frac{\partial \vec{A}^*}{\partial t}\right) = \frac{\omega^2}{c^2}\left\{d_{k,\alpha}d_{k,\alpha}{}^* - d_{k,\alpha}{}^2 e^{2i(kr-\omega t)} - (d_{k,\alpha}{}^*)^2 e^{-2i(kr-\omega t)} + d_{k,\alpha}{}^* d_{k,\alpha}\right\} \quad (1.16)$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{A}).(\vec{\nabla}\times\vec{A}^*) = -\vec{A}.\vec{\nabla}^2\vec{A}^*$$

$$= k^2\left\{d_{k,\alpha}d_{k,\alpha}{}^* + d_{k,\alpha}{}^2 e^{2i(kr-\omega t)} + (d_{k,\alpha}{}^*)^2 e^{-2i(kr-\omega t)} + d_{k,\alpha}{}^* d_{k,\alpha}\right\} \quad (1.17)$$

bulunur. Bu durumda Hamiltonyen,

$$H = \sum_k \sum_\alpha 2(\frac{\omega^2}{c^2}) d_{k,\alpha} d^*{}_{k,\alpha} \quad (1.18)$$

sonucunu verir. Bu sonuç birbirinden bağımsız harmonik salınıcıların toplam enerjisine benzemektedir. Bu benzerliği şu şekilde görebiliriz,

$$Q_{k,\alpha} = \frac{1}{c}(d_{k,\alpha} + d_{k,\alpha}{}^*) \quad (1.19)$$

$$P_{k,\alpha} = -\frac{i\omega}{c}(d_{k,\alpha} - d_{k,\alpha}{}^*) \quad (1.20)$$

olmak üzere Hamiltonyen bu benzerliklere dayandırılarak;

$$H = \sum_k \sum_\alpha \frac{1}{2}(P_{k,\alpha}{}^2 + \omega^2 Q_{k,\alpha}^2) \quad (1.21)$$

olarak bulunur. Böylelikle alan modları birbirleriyle etkileşmeyen harmonik salınıcılar topluluğudur diyebiliriz. Elektromagnetik alanların kuantumlanması P ve Q genliklerinin

$$\left[Q_{k,\alpha}, Q_{k'\!,\alpha'}\right] = \left[P_{k,\alpha}, P_{k',\alpha'}\right] = 0 \quad (1.22)$$

$$\left[Q_{k,\alpha}, P_{k',\alpha'}\right] = i\hbar\delta_{kk'}\delta_{\alpha\alpha'} \tag{1.23}$$

bağıntılarını sağlayan Hermitsel $\hat{Q}$ ve $\hat{P}$ işlemcileri ile yer değiştirilmeleri sonucunda gerçekleşir. $\hat{Q}$ ve $\hat{P}$ işlemcileri ile yaratıcı ve yok edici işlemciler arasındaki ilişki,

$$a_{k,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{Q}_{k,\alpha} + i\hat{P}_{k,\alpha}); \qquad a^{+}{}_{k,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{Q}_{k,\alpha} - i\hat{P}_{k,\alpha}) \tag{1.24}$$

ile ifade edilir. Yaratıcı ve yok edici işlemciler sıra değiştirme bağıntılarını sağlarlar.

$$\left[a_{k,\alpha}, a_{k',\alpha'}{}^{+}\right] = \delta_{k,k'}\delta_{\alpha\alpha'}; \quad \left[a_{k,\alpha}, a^{+}{}_{k',\alpha'}\right] = \left[a^{+}_{k,\alpha}, a^{+}_{k',\alpha'}\right] = 0 \tag{1.25}$$

Buna göre vektör potansiyelindeki katsayılar yaratıcı ve yok edici işlemciler cinsinden,

$$d_{k,\alpha} = c\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\,a_{k,\alpha}; \quad d^{*}{}_{k,\alpha} = c\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\,a^{+}{}_{k,\alpha} \tag{1.26}$$

şeklini alır. Bu durumda vektör potansiyeli,

$$\vec{A}(r,t) = \left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_k}\right)^{1/2}\sum_k\sum_\alpha\left\{a_{k,\alpha}\vec{\varepsilon}e^{i(k.r-\omega t)} + a^{+}{}_{k,\alpha}\vec{\varepsilon}e^{-i(k.r-\omega t)}\right\} \tag{1.27}$$

dır. Son halinde vektör potansiyeli artık bir işlemcidir. Kuantize edilen elektromagnetik alanın Hamiltonyeni,

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\int(\vec{B}.\vec{B} + \vec{E}.\vec{E})d^3r \\ &= \frac{1}{2}\sum_k\sum_\alpha\hbar\omega(a_{k,\alpha}{}^{+}a_{k,\alpha} + a_{k,\alpha}a_{k,\alpha}{}^{+}) \end{aligned} \tag{1.28}$$

olur. Sayı işlemcisi $n_{k,\alpha} = a_{k,\alpha}{}^{+} a_{k,\alpha}$ olmak üzere Hamilton işlemcisi,

$$H = \sum_{k}\sum_{\alpha}(n_{k,\alpha} + \frac{1}{2})\hbar\omega_k \qquad (1.29)$$

dır. Taban veya vakum durumda yani $n_{k,\alpha} = 0$ iken kuantize edilen alanın boşluk enerjisi.

$$E = \sum_{k}\frac{1}{2}\omega_k \qquad (1.31)$$

elde edilir. Burada ω_k, sistemin özfrekanslarını temsil eder. Bu öz frekanslar elektrik ve magnetik alanın uygun geometride sağladıkları $\hat{n}\times\vec{E}|_{r=a} = 0$ ve $\hat{n}\cdot\vec{B}|_{r=a} = 0$ sınır koşullarına ilişkin sınır değer problemi çözülerek elde edilir. Bu sınır koşulları sırasıyla elektrik alanın teğetsel bileşeni ile magnetik alanın normal bileşeninin ele alınan geometri yüzeyindeki sürekliliğini ifade eder. Yani iletken yüzeyin dışında dik bir elektrik alan ve teğetsel bir magnetik alan vardır. Elektrik ve magnetik alanın sağladığı dalga denklemi:

$$(\vec{\nabla}^2 + k^2)\Psi = 0 \qquad (1.32)$$

dır. Burada.

$$\Psi = \begin{Bmatrix}\vec{E}\\ \vec{B}\end{Bmatrix}$$

dır. Elektrik ve magnetik alanın sağladığı dalga denklemini a yarıçaplı bir küresel kabuk geometrisine uygulayalım. Helmholtz denklemi küresel koordinatlarda.

$$(\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{d}{dr}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d}{d\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{d^2}{d\varphi^2} + k^2)\Psi = 0 \qquad (1.33)$$

şeklinde ifade edilir. Değişkenlerine ayırma yöntemi ile $\Psi(r,\theta,\varphi,t) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)T(t)$ olmak üzere Helmholtz denklemini çözdüğümüzde radyal denklem $R(r) = \frac{1}{(kr)^{1/2}}U(r)$ şeklindeki bir tanımlama ile Bessel denklemine indirgenir.

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + \left[k^2r^2 - (\ell + 1/2)^2\right]\right\}U(r) = 0 \qquad (1.34)$$

R(r) için çözümü.

$$R_l(kr) = Aj_l(kr) + Bn_l(kr) \qquad (1.35)$$

dır. Burada j_l ve n_l küresel Bessel fonksiyonları olup I. Tür Bessel fonksiyonları arasındaki ilişkileri.

$$j_l(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}}J_{l+1/2}(kr) \qquad (1.36)$$

$$n_l(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}}N_{l+1/2}(kr) \qquad (1.37)$$

şeklindedir. Bu çözümün orijindeki ıraksak olmayan düzenli çözümü $r \to 0$ iken $j_\ell(kr)$ 'yi, $r \to \infty$ iken çözümü, $h_\ell(kr)$ 'yi verir. Burada $h_l(kr)$ Hankel fonksiyonudur ve,

$$h_l^{(1)}(kr) = j_l(kr) + in_l(kr) \qquad (1.38)$$

olarak ifade edilir. Buradan dalga fonksiyonunun karakteristik çözümü.

$$\Psi(r,\theta,\varphi,t) = R_l(kr)P_l(\cos\theta)e^{im\varphi}e^{-i\omega t} \qquad (1.39)$$

bulunur. Uzun ve ayrıntılı hesaplar sonucunda elektromagnetik alanın TE ve TM modları aşağıdaki şekilde elde edilir. TE için,

$$E_r = 0, \qquad B_r = -\frac{k}{i\omega r} n(n+1) Y_{\ell m}(\theta,\varphi) R_\ell(kr) e^{-i\omega t} \tag{1.40}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Y_{\ell m}(\theta,\varphi)}{\partial\varphi} R_\ell(kr)\, e^{-i\omega t}, \quad B_\theta = -\frac{1}{i\omega r}\frac{\partial Y_{\ell m}(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\frac{d}{dr}[krR_\ell(kr)]e^{-i\omega t} \tag{1.41}$$

$$E_\varphi = \frac{\partial Y_{\ell m}(\theta,\varphi)}{\partial\theta} R_\ell(kr) e^{-i\omega t}, \qquad B_\varphi = -\frac{1}{i\omega r\sin\theta}\frac{\partial Y_{\ell m}(\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\frac{d}{dr}[krR_\ell(kr)]e^{-i\omega t} \tag{1.42}$$

TM için.

$$E_r = -\frac{n(n+1)}{kr} Y_{\ell m}(\theta,\varphi) R_\ell(kr) e^{-i\omega t}, \quad B_r = 0 \tag{1.43}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{kr}\frac{\partial Y_{\ell m}(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\frac{d}{dr}[krR_\ell(kr)]e^{-i\omega t}, \qquad B_\theta = -\frac{k}{m\omega\sin\theta} R_\ell(kr) e^{-i\omega t} \tag{1.44}$$

$$E_\varphi = -\frac{im}{kr\sin\theta}\frac{d}{dr}[krR_\ell(kr)]e^{-i\omega t}, \qquad B_\varphi = \frac{k}{i\omega}\frac{\partial Y_{\ell m}(\theta,\varphi)}{\partial\theta} R_\ell(kr) e^{-i\omega t} \tag{1.45}$$

Sınır koşullarının uygulanması ile $\vec{r}\times E\big|_{r=a} = 0 \Rightarrow E_\theta = E_\varphi = 0$, ve $\vec{r}\cdot\vec{B}\big|_{r=a} = 0 \Rightarrow B_r = 0$ olması gerektiği açıktır. Buna göre (TE) durumunda modlar.

$$j_\ell(\omega a) = 0 \tag{1.46}$$

$$h_\ell(\omega a) = 0 \tag{1.47}$$

ile, (TM) durumunda ise modlar,

$$\frac{d}{dr}[rj_l(\omega r)]\Big|_{r=a} = 0 \tag{1.48}$$

$$\frac{d}{dr}[rh_l(\omega r)]\Big|_{r=a} = 0 \tag{1.49}$$

denklemleri ile tanımlanır.

Bu çalışmada; ikinci bölümde Elektromagnetik alanın küresel kabuk için kuantum boşluk enerjisi mod toplama metoduna göre ve öz frekansların kompleks düzlemdeki kontur integrasyonu ile yeniden elde edildi (Nesterenko V.V.ve Pirozhenko I.G. 1997). Ayrıca aynı problemi kesilim fonksiyonu göz önüne alarak frekansların dağılımı konusunda yeni iyileştirmeler elde edildi (Bowers M.E.ve Hagen C.R.1998).

II. KÜRESEL KABUĞUN CASİMİR ENERJİSİ

Yarıçapı a olan küresel kabuğun elektromagnetik alan kuantum boşluk enerjisini göz önüne alacağız (Nesterenko V.V.ve Pirozhenko I.G. 1997). a yarıçaplı küresel kabuğun Casimir enerjisi için geliştirilen metot öz frekansların kompleks düzlemdeki kontur integrasyonu aracılığıyla doğrudan mod toplamına dayanır.

Casimir enerjisi,

$$E = \frac{1}{2}\sum_{s}(\omega_s - \overline{\omega}_s) \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır. Burada ω_s elektro magnetik alanın a yarıçaplı iletken küre kabuğunda sağladığı sınır değer koşullarının ürettiği öz frekanslarıdır. $\overline{\omega}_s$ ise aynı geometride herhangi bir sınır olmadan geri planda seçilen referans boşluğun öz frekanslarıdır. Bu salınım frekanslarını hesaplamamız için önceden hesaplamış olduğumuz küre içinde ve dışındaki elektromagnetik alan bileşen denklemlerini kullanacağız. Salınımların enine elektrik TE ve enine magnetik TM olmak üzere iki modu vardır. TE modlarının frekanslarını tanımlayan denklemler,

$$j_\ell(\omega a) = 0 \tag{2.2}$$

$$h_\ell^{(1)}(\omega a) = 0 \tag{2.3}$$

ve TM modlarının öz frekanslarını tanımlayan denklemler,

$$\frac{d}{dr}\left[rj_\ell(\omega r)\right]\Big|_{r=a} = 0 \tag{2.4}$$

$$\frac{d}{dr}\left[rh_\ell^{(1)}(\omega r)\right]_{r=a} = 0 \tag{2.5}$$

şeklindedir. Burada, ℓ=1,2,...'dir. Bu denklemlerin kökleri ile pozitif Re$\omega_{n\ell}$>0, n=1,2,... olduğu göz önünde bulundurulmalıdır. (2.2) ve (2.4) denklemleri küre içindeki, (2.3) ve (2.5) denklemleri küre dışındaki elektro magnetik salınımların frekanslarını belirtir. (2.1) denklemi içindeki $\sum_{s}$ toplamı şu şekilde yazılabilir,

$$\frac{1}{2}\sum_{s}\omega_{s}=\frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{n\ell}=\sum_{\ell=1}^{\infty}(\ell+\frac{1}{2})S_{\ell} \qquad (2.6)$$

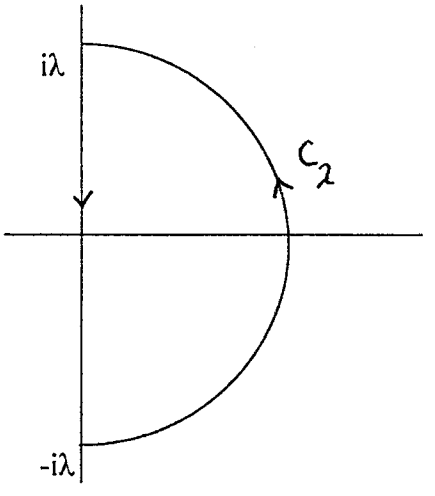
$S_{\ell}=\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{n\ell}$ ve (2.2)-(2.5) denklemlerinin her biri $S_{\ell}^{(\alpha)}$ üretir ve α=1....,4'dür. $S_{\ell}^{(\alpha)}$ kısmi toplamları için Cauchy Teoreminden faydalanarak integral gösterimini kullanabiliriz.

$$S_{\ell}^{(\alpha)}=\frac{1}{2\pi i}\oint z\frac{d}{dz}\ln f^{(\alpha)}(z,a)dz \qquad (2.7)$$

$f^{(\alpha)}$(ω.a). fonksiyonları,

$$f^{(\alpha)}(\omega,a)=0\ .\ (\alpha=1,...,4) \qquad (2.8)$$

şeklindedir. C konturu bu denklemlerin köklerini saat yönünün tersinde çevreler. C konturu sanal eksende [-iλ,iλ] ve λ yarıçaplıdır. λ sabit tutulduğunda (2.7) integrali bize göz önüne alınan frekansların toplamının değerini verir.



$$\oint_{C}=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\left\{\int_{C_\lambda}+\int_{i\lambda}^{-i\lambda}\right\}$$

Şekil.2.1.Kompleks düzlemdeki kontur integrali

ω argümanının negatif değerleri için $f^{(\alpha)}(\omega,a)$ fonksiyonları aşağıdaki koşulu sağlar,

$$f^{(\alpha)}(-\omega,a) = f^{(\alpha)}(\omega,a) \quad ; \qquad \omega\rangle 0 \tag{2.9}$$

C konturunun da katkısıyla (2.7) denklemi şu şekilde yazılabilir,

$$S_f^{(\alpha)} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} y\frac{d}{dy}\ln f^{(\alpha)}(iy,a)dy + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda} z\frac{d}{dz}\ln f^{(\alpha)}(z,a)dz \tag{2.10}$$

Enerji denklemindeki tanıma göre, Casimir enerjisinde sonlu bir ifade elde etmek amacıyla genel olarak, yukarıdaki ifadede Minkowski uzayının katkısını çıkartılarak $a\to\infty$ göz önüne alınır. Çıkarılan kısım $\bar{S}_f^{(\alpha)}$ ile temsil edilsin. $S_f^{(\alpha)}$ nin ilk kısmının kısmi integral yoluyla açılıp denklemin yeniden düzenlenmesiyle,

$$S_f^{(\alpha)} = -\frac{1}{2\pi} y\ln f^{(\alpha)}(iy,a)\Big|_{-\lambda}^{\lambda} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\ln f^{(\alpha)}(iy,a)dy + \frac{1}{2\pi}\int_{C_\lambda} z\frac{d}{dz}f^{(\alpha)}(z,a)dz \tag{2.11}$$

integrali alınmayan eşitliğin sağındaki ilk terim ihmal edilir.

$$\begin{aligned}\bar{S}_f^{(\alpha)} &= -\frac{1}{2\pi}\left(y\ln f^{(\alpha)}(iy,a\to\infty)\right|_{-\lambda}^{\lambda} \\ &+\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} dy\ln f^{(\alpha)}(iy,a\to\infty) + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda} z\frac{d}{dz}\ln f^{(\alpha)}(z,a\to\infty)dz\end{aligned} \tag{2.12}$$

Böylelikle Casimir Enerjisi tanımındaki $S_f^{(\alpha)} - \bar{S}_f^{(\alpha)}$ için, (2.9) koşulu ile,

$$S_f^{(\alpha)} - \bar{S}_f^{(\alpha)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dy\ln\left[\frac{f^{(\alpha)}(iy,a)}{f^{(\alpha)}(iy,a\to\infty)}\right] \tag{2.13}$$

olur. (2.13) denkleminde bulunan $f^{(a)}(iy,a)$ fonksiyonları öz frekans bağıntılarından hesaplanır. TE modlarının enerjiye katkılarını hesaplamak için önce (2.2) denklemini ele alalım. $j_\nu(\omega a)=0$ olmak üzere $J_\upsilon(z)$ ile Modife Bessel fonksiyonu $I_\upsilon(z)$ arasındaki ilişki $I_\upsilon(z)=i^{-\upsilon}J_\upsilon(iz)$ şeklinde olup, $I_\upsilon(z)$'nin asimptotik seriye genişletilmiş hali,

$$I_\upsilon(z)\cong\frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \tag{2.14}$$

şeklindedir. Buradan, $z\to ay$ olmak üzere,

$$\frac{f^{(1)}(iy,a)}{f^{(1)}(iy,a\to\infty)}=e^{-ay}\sqrt{2\pi ay}\,I_\upsilon(ay) \tag{2.15}$$

bulunur. (2.3) frekans denkleminden, $h_\nu^{(1)}(\omega a)=0$ olmak üzere, $h_\nu^{(1)}$ I. tür Hankel fonksiyonudur ve $K_\upsilon(z)$ Hankel fonksiyonunun modife Bessel fonksiyonudur. Aralarındaki ilişki aşağıdaki gibidir,

$$K_\upsilon(z)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{(\upsilon+1)}H_\upsilon(z) \tag{2.16}$$

$K_\upsilon(z)$ modife Bessel fonksiyonunun asimptotik seriye genişletilmiş şekli $K_\upsilon(z)\cong\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\;e^{-z}$ şeklindedir. Bu durumda,

$$\frac{f^{(2)}(iy,a)}{f^{(2)}(iy,a\to\infty)}=\sqrt{\frac{2ay}{\pi}}e^{ay}K_{\upsilon}(ay) \tag{2.17}$$

elde edilir. Böylelikle $\alpha=1$ ve $\alpha=2$ olmak üzere TE modlarının enerji denklemine katkısı

$$\sum_{\alpha=1}^{2}S_{\ell}^{(\alpha)}-\overline{S}_{\ell}^{(\alpha)}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\ln\left[2ayI_{\upsilon}(ay)K_{\upsilon}(ay)\right]dy \tag{2.18}$$

olarak bulunur. TM modlarının katkısını hesaplamak için diğer frekans denklemleri ele alınır. (2.4) denkleminden,

$$\begin{aligned}f^{(3)}&=\frac{d}{dr}\left[rj_{\ell}(iy,r)\right]\Big|_{r=a}\\&=0\end{aligned}$$

I' argumana göre türevi belirtmek üzere yukarıdaki denklemde Modife Bessel fonksiyonlarına göre türev açılırsa,

$$f^{(3)}=\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}r^{-\frac{1}{2}}I_{\ell+\frac{1}{2}}(yr)+\sqrt{\frac{\pi r}{2\omega}}I'_{\ell+\frac{1}{2}}(yr)\right]\Big|_{r=a} \tag{2.19}$$

şeklini alır. Değişken değişimi ve zincir kuralının uygulanması ile,

$$f^{(3)} = \frac{J_\upsilon(iy,a)}{2} + iayJ'_\upsilon(iay) \tag{2.20}$$

olarak elde edilir.Buradan,

$$\frac{f^{(3)}(iy,a)}{f^{(3)}(iy,a\to\infty)} = \frac{I_\upsilon(ay)/2 + ayI'_\upsilon(ay)}{\lim_{a\to\infty}\left[I_\upsilon(ay)/2 + ayI'_\upsilon(ay)\right]} \tag{2.21}$$

bulunur.

$$I_\upsilon(z) \cong \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \tag{2.22}$$

$$\lim_{a\to\infty}\left[I_\upsilon(ay)/2 + ayI'_\upsilon(ay)\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2iy}}i^\upsilon\sqrt{\frac{y}{2\pi}}e^{ay} \tag{2.23}$$

olduğuna göre,

$$\frac{f^{(3)}(iy.a)}{f^{(3)}(iy,a\to\infty)} = \sqrt{\frac{2\pi}{ay}}e^{-ay}\left[\frac{1}{2}I_\upsilon(ay) + ayI'_\upsilon(ay)\right] \tag{2.24}$$

şeklinde bulunur. TM modlarının katkısı için son olarak (2.5) denklemi ele alınır.

$$\frac{d}{dr}\left[rh_l^{(1)}(iy,r)\right]_{r=a} = 0$$

denklemi ele alınır. Hankel fonksiyonu ile modife Bessel fonksiyonu arasındaki ilişki $K_\upsilon(z) = \frac{\pi}{2}i^{\upsilon+1}H_\upsilon^{(1)}(iz)$ şeklindedir. Buna göre, $K_\upsilon(z)$ cinsinden,

$$f^{(4)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi i y}}\, i^{-\upsilon-1}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{r}}K_\upsilon(yr) + \frac{1}{\sqrt{r}}\frac{d}{dr}K_\upsilon(yr)\right]\Big|_{r=a} \tag{2.25}$$

ifade edilir.Buradan,

$$\frac{f^{(4)}(iy,a)}{f^{(4)}(iy,a\to\infty)} = \frac{\left[\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{a}}K_\upsilon(ya) + \sqrt{a}yK'_\upsilon(ya)\right]}{\sqrt{\frac{2}{\pi i y}}\, i^{-\upsilon-1}\lim_{a\to\infty}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{a}}K_\upsilon(ya) + \sqrt{a}yK'_\upsilon(ya)\right]} \tag{2.26}$$

Burada $\lim_{a\to\infty}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{a}}K_\upsilon(ya) + \sqrt{a}yK'_\upsilon(ya)\right] = -e^{-ay}\sqrt{\frac{2}{\pi i y}}\, i^{-\upsilon-1}\sqrt{\frac{\pi y}{2}}$ olduğuna göre,

$$\frac{f^{(4)}(iy,a)}{f^{(4)}(iy,a\to\infty)} = -\sqrt{\frac{2}{\pi a y}}e^{ay}\left[K_\upsilon(ay)/2 + ayK'_\upsilon(ay)\right] \tag{2.27}$$

bulunur. $\alpha = 3$ ve $\alpha = 4$ te bulduğumuz sonuçların toplamıyla TM modlarının katkısı elde edilir.

$$\sum_{\alpha=3}^{4}(S_l^{(\alpha)} - \overline{S}_l^{(\alpha)}) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dy \ln\left\{-\frac{2}{ay}\left[\frac{I_\upsilon(ay)}{2} + ayI'_\upsilon(ay)\right]\left[\frac{K_\upsilon(ay)}{2} + ayK'_\upsilon(ay)\right]\right\} \tag{2.28}$$

Buna göre enerji ifadesi

$$E = \frac{1}{\pi a}\sum_{l=1}^{\infty}(l+\frac{1}{2})\int_0^\infty \ln\left[\frac{f^{(1)}(iy,a)f^{(2)}(iy,a)f^{(3)}(iy,a)f^{(4)}(iy,a)}{f^{(1)}(iy,a\to\infty)f^{(2)}(iy,a\to\infty)f^{(3)}(iy,a\to\infty)f^{(4)}(iy,a\to\infty)}\right]dy \tag{2.29}$$

veya

$$E = \frac{1}{\pi a}\sum_{\ell=1}^{\infty}(\ell+\frac{1}{2})\int_0^{\infty} dy \ln\left\{1-[\sigma_\ell'(y)]^2\right\} \tag{2.30}$$

yazılabilir. Burada $\sigma'(y) = \frac{d\sigma_\ell}{dy}$ ve $\sigma_\ell(y) = yI_\upsilon(y)K_\upsilon(y)$ olmak üzere

$$1-[\sigma_\ell'(y)]^2 = -4I_\upsilon(y)K_\upsilon(y)\times\left[\frac{1}{2}I_\upsilon(y)+yI_\upsilon'(y)\right]\left[\frac{1}{2}K_\upsilon(y)+yK_\upsilon'(y)\right] \tag{2.31}$$

formundadır. Bu formun kullanılmasında modife Bessel fonksiyonların Wronskian ifadesinden yararlanılmıştır. $\sigma_\ell(y)$'nin $\upsilon = \ell+\frac{1}{2}$ sabit iken y'nin çok büyük değerlerindeki asimptotik yaklaşımı aşağıdaki gibidir,

$$\sigma_\ell(y) \cong \frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2}\frac{4\upsilon^2-1}{(2y)^2}+\ldots\right] \tag{2.32}$$

bu bağıntıdan anlaşıldığı gibi çok büyük y değerinde $\sigma_\ell(y) \cong \frac{1}{2}$ olup yakınsamaktadır. (2.30) denkleminde geçen toplamın uygulanması için öncelikle çok büyük ℓ değerinde şu integralin hesaplanması gerekir,

$$Q = \frac{\ell+1/2}{\pi}\int_0^{\infty} dy \ln\left\{1-[\sigma_\ell'(y)]^2\right\} \tag{2.33}$$

çok büyük υ değerlerinde modife Bessel fonksiyonları için z ile ilgili olarak $y \to \upsilon z$ dönüşümü yapılır. (2.32) denkleminde geçen $\sigma_\ell(y)$ ifadesinde υ sabit tutulup y sonsuza götürüldüğünde bu ifade sonlu bir sonuca eşit olur. Ancak υ'nün sabit olmadığı durumda $\sigma_\ell(y)$'yi hesaplamak için modife Bessel fonksiyonlarının uniform asimptotik yaklaşımları kullanılır.

$$I_\upsilon(\upsilon z)K_\upsilon(\upsilon z) \approx \frac{1}{2\upsilon}\frac{1}{(1+z^2)^{1/2}} \tag{2.34}$$

buna göre (2.33) denklemi yeniden düzenlenirse,

$$Q = \frac{\upsilon^2}{\pi}\int_0^{\infty} dz \ln\left\{1-\left[\sigma_t'\right]^2\right\} \tag{2.35}$$

olur. $\sigma_t(y) = yI_\upsilon(y)K_\upsilon(y)$ olduğuna göre buradan, $\sigma_t(y) \to \sigma_t(\upsilon z)$ dönüşümü yapılmak üzere,

$$\left[\sigma_t'(\upsilon z)\right]^2 = \frac{1}{4\upsilon^2(1+z^2)^3} \tag{2.36}$$

bulunur. Bu sonuç (2.35) denkleminde yerine yazılır.

$$Q_t \cong \frac{\upsilon^2}{\pi}\int_0^{\infty} dz \ln\left[1-\frac{1}{4\upsilon^2(1+z^2)^3}\right] \tag{2.37}$$

(2.37) denklemindeki logaritmik ifade $|x| < 1$ koşuluyla $\ln(1-x) \approx -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots$ kuvvet serisine açılarak

$$Q \cong -\frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty}\frac{dz}{(1+z^2)^3} \tag{2.38}$$

şekline getirilir. $z = \tan\theta$ dönüşümü kullanılarak,

$$Q \cong -\frac{3}{64} \qquad (\ \ell \to \infty) \tag{2.39}$$

sonucu bulunur. Bu sonuca göre, (2.30) denklemi $\sum_{\ell=1}^{\infty}(\ell+\frac{1}{2})^0$ 'dan dolayı ıraksar. Dolayısıyla bu denklemde enerji ifadesindeki ıraksak olan terimi ayrıştırmak amacıyla ifadeye bu kesir eklenip çıkartılır.

$$E=\frac{1}{a}\sum_{\ell=1}^{\infty}\overline{Q}_\ell-\frac{3}{64a}\sum_{\ell=1}^{\infty}(\ell+\frac{1}{2})^0 \tag{2.40}$$

$$\overline{Q}_\ell=Q_\ell+\frac{3}{64} \tag{2.41}$$

$\sum_{\ell=1}^{\infty}\overline{Q}_\ell$ toplamının $\ell\to\infty$ iken yakınsadığını görmek için modife Bessel fonksiyonlarının diğer uniform asimptotik değerleri açılır.

$$I_\upsilon(\upsilon z)\approx\sqrt{\frac{1}{2\pi\upsilon}}\frac{e^{\upsilon\tau}}{(1+z^2)^{1/4}}\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{U_k(t)}{\upsilon^k}\right\} \tag{2.42}$$

$$K_\upsilon(\upsilon z)\approx\sqrt{\frac{\pi}{2\upsilon}}\frac{e^{-\upsilon\tau}}{(1+z^2)^{1/4}}\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{U_k(t)}{\upsilon^k}\right\} \tag{2.43}$$

$$I_\upsilon(\upsilon z)K_\upsilon(\upsilon z)\cong \frac{1}{2\upsilon(1+z^2)^{1/2}}\left\{1+\frac{1}{\upsilon^2}(2U_2-U_1^2)+\frac{1}{\upsilon^4}(2U_4+U_2^2-2U_1U_3+Q(\frac{1}{\upsilon^6}...)\right\} \tag{2.44}$$

$t=(1+z^2)^{-1/2}$ olmak üzere U fonksiyonlarının t'ye bağlı değerleri aşağıdaki gibidir,

$$U_1(t)=\frac{1}{24}(3t+5t^3)$$

$$U_2(t)=\frac{1}{1152}(81t^2-462t^4+385t^6)$$

$$U_3(t)=\frac{1}{414720}(30375t^3-369603t^5+765765t^7-425425t^9)$$

$$U_4(t)=$$
$$\frac{1}{3993120}(4465125t^4-94121676t^6+349922430t^8-446185740t^{10}+185910725t^{12})$$

Bu verilere göre, $|x|\langle 1$ olmak koşuluyla $\ln(1-x)\cong -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-...$ yaklaşımı kullanılarak,

$$Q_t \cong -\frac{\upsilon^2}{\pi}\int_0^{\infty} dz\left[\left(\frac{1}{\upsilon^4}A^2+\frac{1}{\upsilon^8}B^2+\frac{1}{\upsilon^6}C^2\right)+...\right] \tag{2.48}$$

Burada,

$$A=\frac{d}{dt}\left(\frac{z}{2(1+z^2)}(2U_2-U_1^2)\right)$$

$$B=\frac{d}{dt}\left(\frac{z}{2(1+z^2)^{1/2}}(2U_4+U_2^2-2U_1U_3)\right)$$

$$C=2AB \tag{2.49}$$

şeklindedir. Buradan

$$A^2=\frac{1}{1152^2}\left\{72^2(t^6-6z^2t^8-9z^4t^{10})+432^2(t^{10}-10t^{12}z^2+25t^{14}z^4)\right\}$$
$$+\frac{1}{1152^2}\left\{51840(t^{10}-10z^2t^{12}+21z^4t^{14})-311040(t^{12}-12z^2t^{14}+35z^4t^{16})\right\} \tag{2.50}$$

dır. (2.50) ifadesinde geçen her bir terimin 0 ile ∞ aralığında integralinin alınmasıyla,

$$A^2 = -\frac{9\pi}{16384\upsilon^2} \tag{2.51}$$

bulunur. Buna göre,

$$Q_t = -\frac{9}{16384\upsilon^2} + \tilde{O}\left(\upsilon^{-4}\right) \tag{2.52}$$

bulunur. Enerji ifadesinde geçen son ıraksak toplam Hurwitz Zeta fonksiyonu ile tanımlanabilir. Genel olarak zeta fonksiyonu $\mathrm{Re}\, z \rangle 1$ olmak üzere,

$$\zeta(z,q) = \sum_{n=0}^{\infty} (q+n)^{-z} \tag{2.53}$$

şeklindedir. $q = \frac{1}{2}$ değerinde ise Riemann ζ fonksiyonunu elde edilir. Bu da.

$$\zeta(z,\frac{1}{2}) = (2^z - 1)\zeta(z) \tag{2.54}$$

şeklinde ifade edilir. Buna göre (2.40) enerji ifadesindeki ıraksak terim yukarıda tanımlanan ζ fonksiyonu tanımına göre şu şekilde yazılabilir,

$$\zeta(0,\frac{1}{2}) = \left(2^z - 1\right)\zeta(z) = 0 \tag{2.55}$$

bu sonuç ıraksak terimde yerine yazılırsa,

$$-\frac{3}{64a}\sum_{\ell=1}^{\infty}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^{0}=\frac{3}{64a} \tag{2.56}$$

elde edilir Sonuç olarak Casimir enerjisi için aşağıdaki ifade bulunur,

$$E=\frac{1}{a}\sum_{\ell=1}^{\infty}\overline{Q}+\frac{3}{64a} \tag{2.57}$$

Burada geçen $\overline{Q}_{\ell}$ terimi (2.41) ifadesinde tanımlanmıştı. (2.57) denkleminin sol tarafındaki toplamı aşağıdaki gibi yaklaşık olarak hesap edebiliriz,

$$\overline{Q}_{\ell}=-\frac{9}{16384\upsilon^{2}}+\tilde{O}(\upsilon^{-4}) \quad ; \quad \upsilon=\ell+\frac{1}{2} \tag{2.58}$$

$$-\frac{9}{16384\upsilon^{2}}\cong-\frac{9}{16384}[\zeta(2,\frac{1}{2})-4] \tag{2.59}$$

$\zeta(2,\frac{1}{2})$ için $z=1$ ve $m=1$ olmak üzere,

$$\zeta(2m)=\frac{2\pi^{2m-1}|B_{2m}|}{2m!} \quad ; \quad |B_{2}|=\frac{1}{6} \tag{2.60}$$

buradan,

$$\zeta(2,\frac{1}{2})=\frac{\pi^{2}}{2} \tag{2.61}$$

şeklinde bulunur. Bu durumda,

$$\sum_{\ell=1}^{\infty}\overline{Q} \cong -\frac{9}{2^{14}}\left(\frac{\pi^2}{2}-4\right) = -0{,}000514 \tag{2.62}$$

Böylelikle enerjiye büyük katkının ikinci terimden geldiği görülmektedir. Bu sonuçları Casimir enerjisinde yerine yazılırsa,

$$\frac{3}{64a} = \frac{1}{a}0{,}046875 \tag{2.63}$$

$$E \cong \frac{1}{a}(-0{,}000514) + \frac{1}{a}0{,}046875 \tag{2.64}$$

$$E \cong \frac{1}{a}0.046361 \tag{2.65}$$

bulunur. Böylelikle Casimir enerjisi hesaplanmış olur.

Buraya kadar yaptığımız çalışmada herhangi bir kesilim fonksiyonu kullanmaksızın ıraksak ifadeler zeta fonksiyonunun analitik sürekliliği ile ortadan kaldırılmıştır.

Şimdi ise iletken küresel kabuğun Casimir enerjisini kesilim fonksiyonu kullanarak yeniden ele alacağız (Bowers M.E., Hagen C.R.1998). Bu çalışmada sistemin öz frekanslarının toplanmasında Cauchy teoremine dayalı bir metot uygulanmıştır. Bu çalışmada ıraksak ifadelerin ortadan kaldırılmasında kesilim faktörü kullanılır. Kesilim faktörü ıraksamaya sebep olan öz frekansların katkılarını etkili bir şekilde bastıracak şekilde seçilir.

Elektromagnetik alanın kuantum enerjisi şu şekildedir.

$$E = \sum_{k,\alpha}\left(\frac{1}{2}+n_{k,\alpha}\right)\hbar\omega_k^{(\alpha)} \tag{2.66}$$

Burada $\omega_k^{(\alpha)} = |k|$ dır, ve $n_{k,\alpha}$ baş kuantum sayısını, k dalga sayısını, α polarizasyonu temsil eder. Kuantum taban durumunda Elektromagnetik alanın enerjisi

$$E = \sum_{k,\alpha} \frac{1}{2} \hbar \omega_k^{(\alpha)} \tag{2.67}$$

olur. Bu ıraksak ifade bir kesilim faktörünün kullanılmasıyla sonlu hale getirilebilir. Kürenin Casimir enerjisi hesaplanmasında her bir modun $2\ell+1$ katlı dejenere olduğu göz önüne alınmalıdır.

$$\mathrm{E_c} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\ell + \frac{1}{2} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1,2} \omega_{n,\ell}^{(\alpha)} \tag{2.68}$$

$\omega_{n,\ell}^{(\alpha)}$ öz frekansları sınır koşulları ile belirlenir. a yarıçaplı bir küre için TE modlarını veren öz frekans denklemleri $(\alpha = 1)$ için,

$$j_\ell(\omega a) = 0 \tag{2.69}$$

$$A_\ell j_\ell(\omega a) + B_\ell n_\ell(\omega a) = 0 \tag{2.70}$$

TM modlarını veren öz frekans denklemleri ise $(\alpha = 2)$ için,

$$\frac{d}{dr}\left[r j_\ell(\omega r) \right]_{r=a} = 0 \tag{2.71}$$

$$\frac{d}{dr}\left\{ r\left[C_\ell j_\ell(\omega r) + D_\ell n_\ell(\omega r) \right] \right\}_{r=a} = 0 \tag{2.72}$$

şeklindedir. Denklemlerde geçen j_ℓ, n_ℓ küresel Bessel fonksiyonlarıdır. $A_\ell, B_\ell, C_\ell, D_\ell$ katsayılarından ziyade bunların oranları küresel Bessel fonksiyonlarının çok büyük r değerinde düzgün asimptotik davranışlarından bulunabilir, buna göre $\frac{B_\ell}{A_\ell}$ ve $\frac{D_\ell}{C_\ell}$ oranlarına bakalım. Küresel Bessel fonksiyonların asimptotik değerleri aşağıdaki gibidir,

$$j_n(x) \approx \frac{1}{x}\sin(x-\frac{n\pi}{2}) \;;\; n_n(x) \approx -\frac{1}{x}\cos(x-\frac{n\pi}{2}) \tag{2.73}$$

Buna göre,

$$\frac{B_\ell}{A_\ell} = \tan(\omega a - \frac{\ell\pi}{2}) \tag{2.74}$$

$$\frac{D_\ell}{C_\ell} = -\cot(\omega a - \frac{\ell\pi}{2}) \tag{2.75}$$

Bu durumda (2.70) ve (2.72)denklemleri sırasıyla aşağıdaki şekli alırlar,

$$j_\ell(\omega a) + \tan(\omega a - \frac{\ell\pi}{2}) n_\ell(\omega a) = 0 \tag{2.76}$$

$$\frac{d}{dr}\left\{ r\left[j_\ell(\omega r) - \cot(\omega a - \frac{\ell\pi}{2}) n_\ell(\omega a)\right]\right\}\Big|_{r=a} = 0 \tag{2.77}$$

Yeterince büyük R için a→R ve $\delta_\ell = (\omega R - \frac{\ell\pi}{2})$ tanımlayalım. $\omega a \to z$ dönüşümü ile öz frekans denklemleri aşağıdaki şekli alır,

$$f_\ell^{(1)}(z) = j_\ell(z) \tag{2.78}$$

$$f_\ell^{(2)}(z) = \cos\delta_\ell(z)\left[j_\ell(z) + \tan\delta_\ell(z) n_\ell(z)\right] \tag{2.79}$$

$$f_\ell^{(3)}(z) = \frac{d}{dz}[z j_\ell(z)] \tag{2.80}$$

$$f_\ell^{(4)}(z) = \sin\delta_\ell(z)\frac{d}{dz}[z j_\ell(z)] - \cos\delta_\ell(z)\frac{d}{dz}[z n_\ell(z)] \tag{2.81}$$

Burada $\delta_\ell(z) = z(\frac{R}{a}) - \frac{\ell\pi}{2}$ olmak üzere diğer yararlı tanım bu frekansların çarpımıdır. Bunu şu şekilde gösterebiliriz.

$$f_\ell(z) = z^2 \prod_\alpha f_\ell(z) \tag{2.82}$$

z^2 faktörü ifadeyi sonlu hale getirmek amacıyla konulmuştur. z kompleks bir değişken olup $f_\ell(z)$ ise z in analitik bir fonksiyonudur. $f_\ell(z)$ ve $\phi(z)$ fonksiyonları için Cauchy teoremiyle bu fonksiyonların C konturu içinde analitik olduğunu söyleyebiliriz. $f_\ell(z)$ fonksiyonu $x_1, x_2, x_3 ... x_n$ noktalarında sıfırdır.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_c \phi(z)\frac{f_\ell'(z)}{f_\ell(z)}dz = \sum_i \phi(x_i) \tag{2.83}$$

Bu ifade Cauchy teoremiyle toplam ifadesi şeklinde yazılabilir.

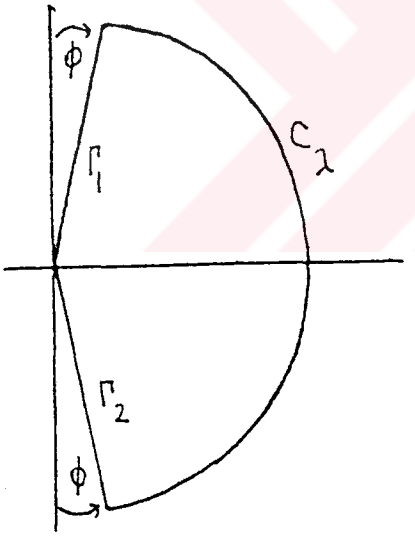
$$\phi(z) = z e^{-\alpha z} \qquad \text{(z,pozitif reel sayı olmak üzere)} \tag{2.84}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_c z e^{-\alpha z}\frac{f_\ell'(z)}{f_\ell(z)} = \sum_i z_i e^{-\alpha z_i} \tag{2.85}$$

Bulduğumuz bu denklem ve E_c'nin bir araya getirdiğimizde Casimir enerjisini buluruz.

$$E_c = \lim_{\sigma\to 0} \frac{1}{2\pi i a} \sum_{\ell=1}^{\infty} (\ell + \frac{1}{2}) \oint dz\, e^{-\sigma z} z \frac{d}{dz} \ln f_\ell(z) \qquad (2.86)$$

İntegral içersindeki $e^{-\sigma z}$ ifadesi yüksek frekansların katkısını etkili bir şekilde bastıran bir kesilim faktörüdür. Böyle bir faktör çoğunlukla paralel levha geometrisine dayanan hesaplamalarda kullanılır. (2.86) denklemini hesaplamak için özel bir integral konturu oluşturmamız gerekecektir. Bu C konturu çembersel C_λ segmenti ile Γ_1 ve Γ_2 düz çizgi segmentlerinden oluşur. Γ_1 ve Γ_2 segmentleri imajiner eksenle $\phi \neq 0$ olmak üzere bir ϕ açısı yaptığından bunların C_λ'ya katkıları kesilim faktöründen dolayı kısıtlıdır. Öte yandan enerji ifadesindeki logaritmik ifadeden dolayı sonuç cebirsel olarak büyür. Dolayısıyla C_λ ya katkı $\lambda \to \infty$ limitinde $\phi \neq 0$ şartıyla birlikte exponansiyel olarak yok olur.



Şekil 2.2. Kompleks düzlemdeki kontur integrali.

Casimir enerjisini hesaplamak için Γ_1, Γ_2 segmentlerinin katkıları bulunur. Γ_1, Γ_2 boyunca $\tan\delta_\ell$ sırasıyla i ve –i değerini alır.

Γ_1 segmenti için

$$z = \Gamma e^{i(\frac{\pi}{2}-\phi)} = iye^{-i\phi} \qquad (\Gamma \to y) \qquad (2.87)$$

$\alpha = 1$;

$$f^{(1)}{}_{\ell}(z) = j_{\ell}(z) \tag{2.88}$$

$$f_{\ell}^{(1)}(iye^{-i\phi}) = j_{\ell}(ye^{-i\phi}) = I_{\upsilon}(ye^{-i\phi}) \tag{2.89}$$

$\alpha = 2$;

$$f_{\ell}^{(2)}(iye^{-i\phi}) = \cos\delta_{\ell}\left[\mathrm{j}_{\ell}(z) + in_{\ell}(z)\right] \tag{2.90}$$

$$f_{\ell}^{(2)}(iye^{-i\phi}) = \cos\delta_{\ell} h_{\ell}^{(1)}(iye^{-i\phi}) \tag{2.91}$$

$$f_{\ell}^{(2)}(iye^{-i\phi}) = \frac{1}{2} e^{(iye^{-i\phi}\frac{R}{a})} e^{i\frac{\ell\pi}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2iye^{-i\phi}}} \frac{2}{\pi} i^{-\upsilon-1} K_{\upsilon}(ye^{-i\phi}) \tag{2.92}$$

$$f_{\ell}^{(2)}(iye^{-i\phi}) = \frac{1}{2} e^{(iye^{-i\phi}\frac{R}{a})} e^{i\frac{\ell\pi}{2}} h_{\ell}^{(1)}(iye^{-i\phi}) \tag{2.93}$$

$\alpha = 3$;

$$f_{\ell}^{(3)}(z) = \frac{d}{dz}\left[z j_{\ell}(z)\right]$$

$$f_{\ell}^{(3)}(iye^{-i\phi}) = \frac{1}{2} I_{\upsilon}(ye^{-i\phi 1} + ye^{-i\phi} I'_{\upsilon}(ye^{-i\phi}) \tag{2.94}$$

$\alpha = 4$:

$$f_{\ell}^{(4)}(z) = \sin\delta_{\ell}(z)\frac{d}{dz}\left[z\, j_{\ell}(z)\right] - \cos\delta_{\ell}(z)\frac{d}{dz}\left[z\, n_{\ell}(z)\right] \tag{2.95}$$

$$\sin\delta_{\ell}(z) = -\frac{1}{2i} e^{(iye^{-i\phi}\frac{R}{a})} e^{\frac{i\ell\pi}{2}} \tag{2.96}$$

$$f_\ell^{(4)}(iye^{-i\phi}) = \frac{i}{2} e^{(ye^{-i\phi}\frac{R}{a})} e^{\frac{i\ell\pi}{2}} \left\{ \frac{1}{2} K_\upsilon(ye^{-i\phi}) + ye^{-i\phi} K'_\upsilon(ye^{-i\phi}) \right\} \qquad (2.97)$$

$(\upsilon \to \ell + 1/2)$

Bulunan sonuçların çarpımı Γ_1 segmentinin katkısını verir,

$$f_\ell(iye^{-i\phi}) = \left\{ f_\ell^{(1)}(iye^{-i\phi}) f_\ell^{(2)}(iye^{-i\phi}) f_\ell^{(3)}(iye^{-i\phi}) f_\ell^{(4)}(iye^{-i\phi}) \right\} \qquad (2.98)$$

$$f_\ell(iye^{-i\phi})\Big|_{\Gamma_1} = \frac{i}{4}(-1)^\ell e^{(2ye^{-i\phi}\frac{R}{a})} I_\upsilon(ye^{-i\phi}) K_\upsilon(ye^{-i\phi}) \times$$

$$\left\{ \frac{1}{2} I_\upsilon(ye^{-i\phi}) + ye^{-i\phi} I'_\upsilon(ye^{-i\phi}) \right\} . \left\{ \frac{1}{2} K_\upsilon(ye^{-i\phi}) + ye^{-i\phi} K'_\upsilon(ye^{-i\phi}) \right\} \qquad (2.99)$$

Bu kez Γ_2 segmenti ele alacağız. $z = -iye^{i\phi}$ ve $\Gamma \to y$ olmak üzere,

$\alpha = 1;$

$$f_\ell^{(1)}(-iye^{i\phi}) = I_\upsilon(-ye^{i\phi}) \qquad (2.100)$$

$\alpha = 2;$

$$f_\ell^{(2)}(-iye^{i\phi}) = \frac{1}{2} e^{(ye^{i\phi}\frac{R}{a})} e^{-\frac{i\ell\pi}{2}} h_\ell^{(1)}(-ye^{i\phi}) \qquad (2.101)$$

$\alpha = 3;$

$$f_\ell^{(3)}(-iye^{i\phi}) = \frac{1}{2} I_\upsilon(-ye^{i\phi}) + ye^{i\phi} I'_\upsilon(-ye^{i\phi}) \qquad (2.102)$$

$\alpha = 4;$ $$f_\ell^{(4)}(-iye^{i\phi}) = -\frac{i}{2} e^{(ye^{i\phi}\frac{R}{a})} e^{-\frac{i\ell\pi}{2}} . \left\{ \frac{1}{2} K_\upsilon(-ye^{i\phi}) + ye^{i\phi} K'_\upsilon(-ye^{i\phi}) \right\} \qquad (2.103)$$

Sonuç olarak Γ_2 segmenti için,

$$f_\ell(z)\Big|_{\Gamma_2} = \prod_\alpha f_\ell^{(\alpha)}(z)$$

$$= -\frac{i}{4} e^{-i\ell\pi} I_\upsilon(-ye^{i\phi}) K_\upsilon(-ye^{i\phi}) e^{(-2ye^{i\phi}\frac{R}{a})} \cdot \left\{ \frac{1}{2} I_\upsilon(-ye^{i\phi}) + ye^{i\phi} I'_\upsilon(-ye^{i\phi}) \right\} \cdot$$

$$\left\{ \frac{1}{2} K_\upsilon(-ye^{i\phi}) + ye^{i\phi} K'_\upsilon(-ye^{i\phi}) \right\} \tag{2.104}$$

bulunur. Γ_1 ve Γ_2 segmentleri boyunca elde ettiğimiz sonuçlar birbirinin kompleks eşleniğidir. Toplamda enerjiye sadece reel kısımların katkısı gelir. Buna göre Casimir enerjisi

$$E_c = -\frac{1}{\pi a} \sum_{\ell=1}^{\infty} (\ell + 1/2) \mathrm{Re} e^{-i\phi} \int_0^\infty e^{(-i\sigma y e^{-i\phi})} y \frac{d}{dy} \ln\left\{ 1 - \left[\lambda_\ell(ye^{-i\phi}) \right]^2 \right\} dy \tag{2.105}$$

$y \to \upsilon y$ olmak üzere,

$$E_c = -\frac{1}{\pi a} \sum_{\ell=1}^{\infty} (\ell + 1/2)^2 \mathrm{Re} e^{-i\phi} \int_0^\infty e^{(-i\sigma\upsilon y e^{-i\phi})} y \frac{d}{dy} \ln\left\{ 1 - \left[\lambda_\ell(y\upsilon e^{-i\phi}) \right]^2 \right\} dy \tag{2.106}$$

olur. Burada,

$$\lambda_\ell(y) = \frac{d}{dy} \{ y I_\upsilon(y) K_\upsilon(y) \} = \sigma_\ell(y)' \tag{2.107}$$

şeklindedir. $\sigma_\ell(z) \to \sigma_\ell(\upsilon y)$ olmak üzere,

$$[\sigma_\ell(\upsilon y)']^2 = \frac{1}{4\upsilon^2(1+y^2)^{3/2}} \tag{2.108}$$

dır. Modife Bessel fonksiyonların uniform yaklaşık ifadelerini kullanılarak bulduğumuz bu sonucun 0 ile ∞ aralığındaki değeri –3/64 tür. Bu sonuç $\sigma = 0$ için E_c de ıraksamaya sebep olur. Bu ifade çok büyük υ değeri için Casimir enerjisinde eklenip çıkartılarak E_c ifadesi iki kısım halinde yazılabilir.

$$E_c = E_{FIN} + E_\sigma \tag{2.109}$$

E_{FIN} yi $\sigma \to 0$ ve $y \to ye^{i\phi}$ dönüşümü ve kısmi integral yöntemi ile hesaplandığında,

$$E_{FIN} = \frac{1}{\pi a}\sum_{\ell=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\left[(\ell+\frac{1}{2})^2 \ln\left\{1-[\lambda_\ell(\upsilon y)]^2\right\} + +\frac{1}{4}(1+y^2)^{-3}\right]dy \tag{2.110}$$

bulunur. Kesilim faktörüne bağlı olan enerji ifadesi,

$$E_\sigma = \frac{1}{4\pi a}\sum_{\ell=1}^{\infty}\mathrm{Re}\, e^{-i\phi}\int_0^{\infty} dy e^{(-i\upsilon y\sigma e^{-i\phi})} y\frac{d}{dy}(1+y^2e^{-2i\phi})^{-3} \tag{2.111}$$

(2.111) ifadesi sonlu görünse de $(\sigma = 0)$ için bu noktada ıraksak sonuç vereceğinden dolayı limit alınmadan önce sonlu σ için değerlendirildiğinde

$$E_\sigma\big|_{\sigma=0} = -\frac{3}{64}\sum_{\ell=1}^{\infty}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^0 \tag{2.112}$$

bulunur. Sonuç olarak E_c .

$$E_c = -\frac{3}{2\pi a}\sum_{\ell=1}^{\infty}\mathrm{Re}\,e^{-i\phi}\int_0^{\infty}e^{(-i\upsilon y\sigma e^{-i\phi})}y^2e^{-2i\phi}\frac{1}{(1+y^2e^{-2i\phi})^4}dy \qquad (2.113)$$

$\upsilon \to \ell + 1/2$ olduğuna göre

$$e^{(-i\upsilon\sigma y e^{-i\phi})} = e^{(-i\ell\sigma y e^{-i\phi})}e^{(-\frac{i\sigma y e^{-i\phi}}{2})} \qquad (2.114)$$

$$E_c = -\frac{3}{2\pi a}\mathrm{Re}\,e^{-i\phi}\int_0^{\infty}dy\frac{y^2e^{(-i\sigma y e^{-i\phi}/2)}}{(1+y^2e^{-2i\phi})^4}\frac{e^{-2i\phi}}{e^{(i\sigma y e^{-i\phi}-1)}} \qquad (2.115)$$

(2.115) denklemindeki exponansiyel ifadeler seriye açıldığında enerji ifadesi

$$\frac{e^{(-i\sigma y e^{-i\phi}/2)}}{e^{(i\sigma y e^{-i\phi}-1)}} = -(\frac{i}{\sigma y e^{-i\phi}}+1) \qquad (2.116)$$

$$E_\sigma = \frac{3}{2\pi a}\mathrm{Re}\int_0^{\infty}\frac{y^2e^{-3i\phi}}{(1+y^2e^{-2i\phi})^4}(1+\frac{i}{\sigma y e^{-i\phi}})dy \qquad (2.117)$$

bulunur. Yukarıdaki ifadede $\sigma \to 0$ için $\frac{i}{\sigma y e^{-i\phi}}$ terimi sonsuza gider. Ancak integralin reel kısmının alınması bu güçlüğü ortadan kaldırır.

$$E_\sigma = \frac{3}{2\pi a}\int_0^{\infty}\frac{y^2e^{-3i\phi}}{(1+y^2e^{-2i\phi})^4}dy\Big|_{\sigma=0} = \frac{3}{64a} \qquad (2.118)$$

sonuç olarak,

$$E_c = E_{MN} + E_\sigma = 0{,}09235/2a = \frac{0{,}046175}{a} \tag{2.119}$$

hesaplanmış olur.

SONUÇ

Iraksak ifadelerin ürettiği zorlukları ortadan kaldırmak ve farklı teknikler uygulandığında aynı fiziksel sonucu elde etmek Casimir etki hesaplamalarında önemli bir yere sahiptir

Çalışmamızda öncelikle kaynaksız boş uzayda Maxwell denklemlerini kuantize ederek elektromagnetik alanın enerjisini bulduk ve sınır değer koşulları altında klasik öz frekans denklemlerini elde ettik. Daha sonra ideal iletken küresel kabuğun Casimir enerjisini kontur integrasyonu ve kesilim fonksiyonu kullanılarak mod toplama metoduyla yeniden hesapladık.

Mod toplama metodu tamamıyla ele alınan kuantum sisteminin klasik öz frekans denklemlerine dayanmaktadır. Dolayısıyla çalışmamızın temel noktasını öz frekans denklemleri belirler.

Çalışmamızda kullanılan teknikler ıraksamanın ortadan kaldırılması amaçlıdır. İlk hesaplamalarda ıraksak terimler zeta fonksiyonunun analitik süreklilik esasına bağlı kalarak ortadan kaldırılmıştır ve neticede ıraksak terimler ayrıştırılarak sonlu terimler üretilmiştir.

İkinci olarak kompleks olmayan frekans dağılımı göz önüne alınarak sonsuzlukların ayıklanması amaçlı bir kesilim fonksiyonu kullanılmıştır. Bu kesilim fonksiyonu yüksek frekansların katkısını etkili bir şekilde bastırır.

Bu yöntemler çerçevesinde küresel kabuğun Casimir enerjisi literatürle uyumlu bir şekilde sonuçlandırılmıştır.

KAYNAKLAR

Abramowitz M. And Stegun I. A.,"Handbook of Mathematical Functions", (Washington, D.c..1964)

Arfken G., "Mathematical Methods for Physicist", Akademic Press Newyork. (1970)

Bordag M., Mohideen U., Mostepanenko,"New Developments in The Casimir Effect" Phys. Rep. 353.1-205, (2001)

Bowers M.E., Hagen C.R."Casimir Energy of Spherical Shell", Phys.Rev.D, Volume 59, (1998)

Gradshteyn I. S.. Ryzhik I. M., "Table of Integrals, Series and Products", Academic Press, New York, (1980)

Jackson J.D, "Classical Elektrodynamics", Colorado, (1962)

Mandl F., Shaw G., "Quantum Field Theory", (1984)

Mostepanenko V. M. , Trunov N. N. "Casimir Effect and its Applications", Oxford Press, (1997)

Nesterenko V.V. and Pirozhenko I.G."Simple Method for Calculating the Casimir Energy for a Sphere", Phys. Rev. D57, 1284, (1997)

Plunien G., Müller B., Greiner W. "The Casimir Effect", Phys. Rep. Amsterdam. (1986)

Sakurai J.J, "Advanced Quantum Mechanics", University of Chicago, (1967)

Schwinger J., Milton K.A., and DeRaad L.L.,"Casimir Self-stress on a Perfectly Conducting Spherical Shell", Ann. Phys. (N.Y)115,388, (1978)

Stratton, J.A. "Electromagnetic Theory", (Mc.Graw-Hill, Newyork, 1941)

Watson G N. and Wittaker E.T., "A Course of Modern Analysis", Cambridge University Press. England (1969)

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında Siirt'te doğdum. Lise eğitimimi 1994 yılında Trabzon/Of Şehit Ahmet Türkkan lisesinde bitirdikten sonra 1996 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi S.H.M.Y.O Hemşirelik önlisans programından mezun oldum. 1997 yılında girdiğim Trakya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümünden 2001 yılında mezun oldum ve aynı yıl yüksek lisans eğitimime başladım. Halen Trakya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümünde Araştırma görevlisi olarak çalışmaktayım.