T.C.

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ TÜREV İLE EĞRİLERİN GEOMETRİSİ

FATMA ARSLAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Pelin TEKİN

EDİRNE-2023

Fatma ARSLAN'ın hazırladığı "**RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ TÜREV İLE EĞRİLERİN GEOMETRİSİ**" başlıklı bu tez, tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından **MATEMATİK** Anabilim Dalında bir **Yüksek lisans** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri (Ünvan, Ad, Soyad): İmza

Prof. Dr. Mahmut ERGÜT .....

Doç. Dr. Tuna BAYRAKDAR .....

Dr. Öğr. Üyesi Pelin TEKİN .....

Tez Savunma Tarihi: 17/11/2023

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

İmza

Dr. Öğr. Üyesi Pelin TEKİN
Tez Danışmanı

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof. Dr. Özlem ÇETİN ERDOĞAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

T.Ü.FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

DOĞRULUK BEYANI

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında, tüm verilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini, kullanılan verilerde tahrifat yapılmadığını, tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını, kullanılan tüm literatür bilgilerinin bilimsel normlara uygun bir şekilde kaynak gösterilerek ilgili tezde yer aldığını ve bu tezin tamamı ya da herhangi bir bölümünün daha önceden Trakya Üniversitesi ya da farklı bir üniversitede tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

17/11/2023

Fatma ARSLAN

Yüksek Lisans Tezi
RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ TÜREV İLE EĞRİLERİN GEOMETRİSİ
T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

ÖZET

Bu tez çalışmasında, ${}_{RL}D_t^{\alpha}$ Riemann-Liouville kesirli türev operatörü yardımıyla $\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ uzayında eğrilerin diferansiyel geometrisi çalışılmıştır. Riemann-Liouville kesirli türevine göre eğrinin teğet, normal ve binormal vektörleri bulunarak, eğrilik ve burulması hesaplanmıştır. Klasik türev ve kesirli türev arasındaki ilişki ortaya konularak, kesirli türev ile eğrilerin incelemesi yapılıp, yeni tanım ve teoremler verilmiştir.

Yıl : 2023

Sayfa Sayısı : 42

Anahtar Kelimeler : Eğri, Kesirli analiz, Riemannian-Liouville kesirli türevi.

Master of Science Thesis
GEOMETRY OF CURVES WITH RIEMANN-LIOUVILLE FRACTIONAL DERIVATIVE
Trakya University Institute of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

ABSTRACT

In this thesis, the ${}_{RL}D_t^{\alpha}$ differential geometry of curves in $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^3$space was studied with the help of the Riemann-Liouville fractional derivative operator. According to the Riemann-Liouville fractional derivative, the tangent, normal and binormal vectors of the curve were found and its curvature and torsion were calculated. The relationship between classical derivative and fractional derivative is revealed, fractional derivative and curves are examined, and new definitions and theorems are given.

Year : 2023

Number of Pages : 42

Keywords : Curve, Fractional calculus, Riemannian-Liouville fractional derivative.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın yürütülmesi sırasında bana yol gösteren, tüm bilgi birikiminden faydalandığım, öğrencisi olmaktan gurur duyduğum tez danışmanım sayın Dr. Öğr. Üyesi Pelin TEKİN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Yoğun çalışmaları arasında bize desteğini esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Muhittin Evren AYDIN'a teşekkürlerimi sunarım. Hayatım boyunca bana hep güvenen en büyük destekçim annem İpek ÖZCAN'a teşekkür ederim. Ve her zaman yanımda olan, beni yüreklendiren kıymetli eşim Resul ARSLAN'a teşekkür ederim. Çalışma sürecinde yardımlarını esirgemeyen tüm dostlarıma da ayrıca teşekkür ederim. Trakya Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimine teşekkür ederim.

Fatma ARSLAN

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**
ABSTRACT ..... **v**
TEŞEKKÜR ..... **vi**
İÇİNDEKİLER ..... **vii**
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ ..... **viii**
BÖLÜM 1 ..... **1**
GİRİŞ **1**
BÖLÜM 2 ..... **4**
TEMEL KAVRAMLAR **4**
BÖLÜM 3 ..... **9**
EĞRİLERİN RIEMANN- LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRAL İLE İNCELENMESİ **9**
BÖLÜM 4 ..... **14**
$\mathbb{R}2$ DE EĞRİLERİN RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ TÜREV İLE İNCELENMESİ **14**
BÖLÜM 5 ..... **24**
$\mathbb{R}3$ DE EĞRİLERİN RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ TÜREV İLE İNCELENMESİ **24**
BÖLÜM 6 ..... **30**
SONUÇ VE ÖNERİLER **30**
KAYNAKLAR **31**
ÖZGEÇMİŞ **34**

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

I^{n} : n. mertebeden klasik integrali

D^n : $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$

α : Kesirli türevin mertebesi

I^{α} : α −mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali

${}_{RL}D^{\alpha}$: α −mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi

$\mathbb{R}_+$: $\mathbb{R}_+ = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}, \mathrm{x} > 0\}$

$\mathbb{R}_+^2$: $\mathbb{R}_+^2 = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$

$\mathbb{R}^n$: n −boyutlu standart reel vektör uzayı

J : $\mathbb{R}_+$ nın bir açık alt aralığı

γ : $J \longrightarrow \mathbb{R}_+^2$ parametrik eğri

$C^{\infty}(\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R}_+)$: $C^{\infty}(\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R}_+) = \{f: \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+ | \, f$ her mertebeden klasik anlamda türevlenebilir$\}$

T : Teğet vektörü

N : Normal vektör

B : Binormal vektör

T^{α} : α −mertebeden teğer vektör

N^{α} : α −mertebeden normal vektör

B^{α} : α −mertebeden binormal vektör

κ : Eğrilik fonksiyonu

τ : Burulma fonksiyonu

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Kesirli analiz, 17. y.y. dan bu yana matematiğin üzerinde çalışılan bir konusudur ve Leibniz, Bernoulli, L'Hopital, Euler, Laplace gibi ünlü matematikçiler kesirli analizin ortaya çıkışına öncülük etmişlerdir. Kesirli türev kavramı; tam mertebeli diferansiyel ve integral kavramlarının rasyonel mertebelere bir genellemesidir. Bu kavram, matematiğin gerek teorik gerekse de uygulamalı alanlarında önemli bir yere sahiptir (Baleanu ve Fernandez, 2019; Samko, Kilbas ve Marichev, 1993). Kesirli analiz matematik, fizik, biyoloji gibi alanlarda kullanılmaktadır hatta özel olarak akışkanlar mekaniği (Kulish ve Lage, 2002), analitik mekanik (Agrawal, 2002), dinamik sistemler (Tarasov, 2005) gibi alanlarda çeşitli problemlere uygulanmıştır.

Tam mertebeden türev ve integral kavramların aksine, birbirinden farklı pek çok kesirli türev ve integral tanımları literatürde mevcuttur. Kesirli analizdeki birden fazla türev tanımının oluşu problemin türüne uygun olanının kullanılması ve böylece problemin en iyi çözümünün elde edilmesini sağlar. Başlıca Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov, Weyl, Riesz ve Marchaud kesirli türevleridir. Kesirli mertebeden türev nasıl tanımlanırsa tanımlansın türevin mertebesi tamsayı seçildiğinde sonuç tamsayı mertebeden türev ifadesiyle aynı çıkmaktadır. Birbirleri arasında geçiş olmasına rağmen tanımları ve tanımlarının fiziksel yorumları açısından farklıdırlar (Podlubny, 1999); Hilfer, 2000). Son yıllarda kesirli analiz araçları kullanılarak diferansiyel geometri alanında eğriler, yüzeyler ya da daha yüksek boyutlu yapılar üzerine yapılan çalışmalar göze çarpmaktadır (Aydın, Mihai ve Yokuş, 2021; Aydın, Bektas, Ogrenmis, Yokus, 2021).

Literatür incelendiğinde Riemann-Liouville kesirli türev operatörünü kullanarak eğrilerin diferansiyel geometrisine dair bir çalışmaya rastlanılmamıştır. Bunun en önemli sebeplerinden biri, Riemann-Liouville kesirli türevin sabit fonksiyon üzerindeki etkisidir. Daha açık bir şekilde bir sabit fonksiyonun Riemann-Liouville kesirli türevi daima sıfırdan farklıdır. Diferansiyel geometri açısından bu bir dezavantaj olmasına rağmen, Riemann-Liouville kesirli türev operatörü birden fazla avantaja da sahiptir. Bu nedenle yapılacak tez çalışmasının matematiğin yanı sıra diğer bilim dallarında çalışanların da ilgisini çekebilecek ve çalışma konusu olabilecek niteliktedir.

Bu tez çalışmasındaki amacımız, Riemann-Liouville kesirli türev ve integral kavramları kullanarak eğrilerin geometrisini incelemek olacaktır.

Bu çalışmada izleyeceğimiz yolu ise kısaca şu şekilde açıklayabiliriz:
$0 < \alpha < 1$ şeklinde $\alpha \in \mathbb{R}$ reel sayısı verilsin. Buna göre,

$$I_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(x)}{(t-x)^{1-\alpha}}\, dx$$

şeklinde tanımlı integrale $f(t)$ fonksiyonunun α −mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali adı verilir. Burada $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$ ile gama fonksiyonu gösterilmiştir. Eğer $f(x)$ fonksiyonu parçalı sürekli ise o zaman $I_t^{\alpha} f(t)$ integrali mevcuttur, yani Riemann-Liouville kesirli integrallenebilirdir (Kilbas vd., 2006).

Bir $f(t)$ fonksiyonunun α −mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi,

$$ {}_{RL}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{d}{dt}\left(I_t^{1-\alpha} f(t)\right) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt}\left(\int_0^t \frac{f(x)}{(t-x)^{\alpha}}\, dx \right) \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlanır.

(1.1) denklemi yardımıyla düzlem eğrilerinin diferansiyel geometrisi çalışılacaktır. Bu yapılırken eğrilerin parametrik ifadelerinden faydalanılacaktır.

R^2'de $s \mapsto \gamma(s), s \in (a,b), 0 < a < b,$ en az C^2 sınıfından bir vektör değerli fonksiyon olsun. Bu tez çalışmasında $\gamma(s)$ fonksiyonu türevlenirken ilk adımda ${}_{RL}D_s^{\alpha}$ Riemann-Liouville kesirli türev operatörü daha sonraki adımlarda ise tam mertebeden türev operatörü kullanılacaktır. Açık bir şekilde; $\gamma(s)$'nın 1. mertebeden $\frac{d\gamma}{ds}(s)$ türevi

yerine ${}_{RL}D_s^{\alpha}\,\gamma(s)$, 2. mertebeden $\frac{d^2\gamma}{ds^2}(s)$ türevi yerine ${}_{RL}D_s^{1+\alpha}\,\gamma(s)$ kullanılacaktır. Bunun kullanılmasının sebebi ise Riemann-Liouville kesirli türev operatörünün Leibniz ve zincir kuralını sağlamamasıdır.

Bu tez, 6 bölümden oluşmaktadır, birinci bölüm giriş bölümüdür kısa bir literatür özeti sunulmuştur. İkinci bölümde, temel kavramlara değinilmiştir. Üçüncü bölümde, Riemann-Liouville kesirli integral tanımı verilmiş ve bu tanımdan yararlanılarak örnekler çözülmüştür. Dördüncü bölümde, Riemann-Liouville kesirli türev tanımı verilmiş, örnekler çözülmüş ve bunlardan faydalanarak $\mathbb{R}^2$'de bazı geometrik tanımlar yapılmış ve bu tanımlar örneklerle güçlendirilmiştir. Beşinci bölümde, dördüncü bölümde bulmuş olduğumuz tanımlar $\mathbb{R}^3$ uzayına uyarlanmıştır. Altıncı bölüm ise sonuç ve öneri bölümüdür.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ şeklinde verilen $\mathbb{R}^n$ kümesinde toplama işlemi;

$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)\} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$

ifadesiyle tanımlanır. Skalerle çarpma işlemi, $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ için

$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n)=(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$

eşitliği ile tanımlanır. Bu işlemlere göre $\mathbb{R}^n$ kümesi $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir *vektör uzayı* olur. $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ olmak üzere

$g(x, y) = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$

eşitliğiyle tanımlanan $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir *iç çarpımdır*. Bu iç çarpıma, $\mathbb{R}^n$ uzayının *Öklid iç çarpımı* denir. $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}$

diyelim. $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir *normdur*. Buna göre $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı, *normlu vektör uzayıdır*. $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$ biçiminde tanımlanan *d:* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir *metriktir*. Dolayısıyla $\mathbb{R}^n$ bir *metrik uzaydır*. Bu metrik ile birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayına *Öklid uzayı* denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.2. E^n de bir açık alt küme U olmak üzere $f: U \to \mathbb{R}$ fonksiyonun k'ıncı mertebeden bütün kısmi türevleri mevcut ve sürekli ise f fonksiyonuna C^k sınıfından (k'ıncı sınıftan) *diferansiyellenebilirdir* denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.3. I, $\mathbb{R}$ uzayında bir aralık olmak üzere, $\gamma: \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{E}^n$ dönüşümü I aralığının her noktasında parçalı sürekli ise, γ'ya E^n uzayında bir *eğridir* denir. E^n uzayında bir γ eğrisini

$\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \dots, \gamma_n(s))$

biçiminde yazarız (Özdemir, 2020).

Tanım 2.4. Eğer $\forall\, s \in \mathrm{I}$ için,

$\|\alpha'(\mathrm{s})\| = 1$

ise *birim hızlı eğridir* denir. Bu durumda, eğrinin $s \in \mathrm{I}$ parametresine *yay parametresi* adı verilir. $a, b \in \mathrm{I}$ olmak üzere, a'dan b'ye eğrinin *yay uzunluğu* diye, eğrinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki uzunluğuna karşılık gelen

$\int_a^b \|\alpha'(\mathrm{t})\| dt\ ,\ t \in \mathrm{I}$

reel sayısına denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım2.5. I, $\mathbb{R}$ uzayının bir açık aralığı olmak üzere, $\alpha : \mathrm{I} \to \mathrm{E}^n$ eğrisinde, eğer her $\mathrm{t} \in \mathrm{I}$ için, $\alpha'(t) \neq 0$ ise, bu eğriye *regüler eğri* denir. Yani, her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.6. Eğri birim hızlı ise,

$T = \alpha'(s)$ (Eğrinin teğeti),

$N = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|}$ (Eğrinin normali),

$B = T \times N$ (Eğrinin binormali)

biçiminde tanımlanan vektörlere, eğrinin *Frenet Vektör alanları*, $\{T, N, B\}$ çatısına da *Frenet Çatısı* denir (Özdemir, 2020).

Tanım 2.7. $\alpha : I \to E^3$ birim hızlı eğri olsun. $\alpha(t)$ eğrisinin Frenet vektör alanları $T(t), N(t)$, ve $B(t)$ olmak üzere,

$\kappa : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \kappa(t) = \langle T'(t), N(t) \rangle$

şeklinde tanımlanan fonksiyona, α eğrisinin *eğrilik fonksiyonu* denir. Literatürde eğrilik için κ harfi kullanılır. Bu eğrilik eğrilmenin yönüne göre negatif veya pozitif olabileceğinden, işaretli eğrilik olarak da adlandırılır ve $\mathbb{R}^3$ uzayındaki eğrilik ile karışmaması için κ_s şeklinde de gösterilir. Ayrıca,

$N = \frac{T'}{\|T''\|} \Longrightarrow T' = \|T'\| N$

olduğundan,

$$\kappa(t) = \langle T'(t), N(t)\rangle = \langle \|T'(t)\| N(t), N(t)\rangle = \|T'(t)\| = \|\alpha''(t)\|$$

şeklinde de tanımlanır. Buna göre, E^3 uzayında bir eğrinin eğrilik fonksiyonu negatif olamaz. Diğer yandan,

$$\tau : I \to \mathbb{R}, \quad \tau(t) = \langle N'(t), B(t)\rangle$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona da, α eğrisinin *burulma fonksiyonu* denir. Literatürde burulma için τ harfi kullanılır (Özdemir, 2020).

Tanım 2.8. Kabul edelim ki $\alpha(s)$ birim hızlı eğri olsun. O zaman $s_0 \in (a, b)$ ve

$$\alpha'(s_0) = (\cos\varphi_0\,, \sin\varphi_0)$$

olacak şekilde bir φ_0 olsun. Bu durumda, $\varphi(s_0) = \varphi_0$ olacak biçimde bir tek $\varphi: (a, b) \to \mathbb{R}$ düzgün fonksiyonu vardır. $\varphi(s)$ düzgün fonksiyonuna, α'nın $\varphi(s_0) = \varphi_0$ koşuluyla belirlenen *dönme açısı* denir (Pressley, 2012).

Önerme 2.1. $\alpha(s)$ birim hızlı bir düzlem eğrisi ve $\varphi(s)$ de α'nın bir dönme açısı olsun. Bu durumda,

$$\kappa_s = \frac{d\varphi}{ds} \tag{2.1}$$

dir (Pressley, 2012).

İspat. Eğer α, birim hızlı bir eğri ise teğet vektörünün doğrultusu

$$\alpha'(s) = (\cos\varphi(s)\,, \sin\varphi(s))$$

olmak üzere $\varphi(s)$ açısıyla ölçülür. Teğet vektör $T = (\cos\varphi(s)\,, \sin\varphi(s))$ dir, o halde

$$T' = \varphi'(-\sin\varphi(s)\,, \cos\varphi(s))$$

dir.

$$N = (-\sin\varphi(s)\,, \cos\varphi(s))$$

olduğundan

$$T' = \kappa_s N$$

denklemi ifade edilen sonucu verir.

Teorem 2.1. (Varlık Teoremi) $k\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ herhangi bir düzgün fonksiyon olsun. Bu durumda işaretli eğriliği k olan birim hızlı bir $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^2$ eğrisi vardır (Pressley, 2012).

İspat. Sabit bir $s_0 \in (a,b)$ alalım. Herhangi bir $s \in (a,b)$ için,

$$\varphi(s) = \int_{s_0}^{s} k(u)\, du$$

$$\gamma(s) = \left(\int_{s_0}^{s} \cos\varphi(t)\, dt, \int_{s_0}^{s} \sin\varphi(t)\, dt \right)$$

olarak tanımlayalım. α' nın teğet vektörü,

$$\alpha'(s) = (\cos\varphi(s)\,, \sin\varphi(s))$$

olur ve bu $x-$ekseni ile $\varphi(s)$ açısını yapan birim vektördür. α, birim hızlı eğri olduğundan ve (2.1) denkleminden α'nın işaretli eğriliği

$$\kappa_s(s) = \frac{d\varphi(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\int_{s_0}^{s} k(u)\, du \right) = k(s)$$

bulunur.

Teorem 2.2. $\alpha(s)$, $\mathbb{R}^3$'te eğriliği hiçbir yerde sıfır olmayan regüler eğri olsun. Bu durumda, bu eğrinin burulması,

$$\tau = \frac{\langle \alpha'(s) \times \alpha''(s), \alpha'''(s) \rangle}{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\|^2}$$

formülü ile verilir (Pressley, 2012).

Bu formül $\tau(s)$'in, eğrinin $\kappa(s)$ eğriliğinin sıfır olmadığı tüm $\alpha(s)$ noktalarında tanımlanır.

İspat.

$$\tau = -\langle N, B' \rangle = -\langle N, T \times N \rangle = -\langle N, \left(T' \times N\right) + \left(T \times N'\right) \rangle = -\langle N, T \times N' \rangle$$

olur. Şimdi $N = \frac{1}{\kappa}T' = \frac{1}{\kappa}\alpha''$ idi, o halde $\langle \alpha'', \alpha' \times \alpha'' \rangle = 0$ ve $\langle \alpha'', \alpha' \times \alpha''' \rangle = -\langle \alpha''', \alpha' \times \alpha'' \rangle$ olduğundan

$$\tau = -\langle \frac{1}{\kappa}\alpha'', \alpha' \times \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\kappa}\alpha''\right) \rangle = -\frac{1}{\kappa}\langle \alpha'', \alpha' \times \left(\frac{1}{\kappa}\alpha''' - \frac{\kappa'}{\kappa^2}\alpha''\right) \rangle = \frac{1}{\kappa^2}\langle \alpha''', \alpha' \times \alpha'' \rangle$$

elde edilir. α birim hızlı eğri olduğundan α' ve α'' diktir, dolayısıyla

$$\|\alpha' \times \alpha''\| = \|\alpha'\|\|\alpha''\| = \|\alpha''\| = \kappa$$

bulunur.

Teorem 2.3. α, $\mathbb{R}^3$ uzayında eğriliği hiçbir yerde sıfır olmayan, birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda,

$$T' = \kappa N$$

$$N' = -\kappa T + \tau B$$

$$B' = -\tau N$$

biçiminde tanımlanan denklemlere Frenet-Serret denklemleridir (Pressley, 2012).

İspat.

$T' = \kappa N$ ve $B' = -\tau N$ olduğunu biliyoruz. N''yi hesaplayalım.

$B = T \times N$, $T = N \times B$, $N = B \times T$ dir. Buradan,

$$N' = (B \times T)'$$

$$= B' \times T + B \times T'$$

$$= -\tau N \times T + B \times \kappa N$$

$$= \tau T \times N + \kappa N \times B$$

$$= -\kappa T + \tau B$$

olur.

BÖLÜM 3

EĞRİLERİN RIEMANN- LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRAL İLE İNCELENMESİ

Türevlenebilir bir $y = f(x)$ fonksiyonu için şimdiye kadar yüksek mertebeden türevini alırken $n \in \mathbb{N}$ olması durumunu inceledik fakat diyelim ki $n \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{C}$ olsa fonksiyonun türevi ne olur? Bu soruların cevabı kesirli kalkülüs ile ilgilidir. Yani kesirli kalkülüs herhangi mertebeden diferansiyel ve integral kavramlarının bir bütünüdür. Son zamanlarda bu alanda yapılan çalışmalar ilgi çekici olmaya başlamıştır.

Kesirli türevleri tanıtmaya Euler'in Kesirli türev kavramından başlayalım.

Tanım 3.1. (Euler'in Kesirli Türevi) $y = E(t) = t^p,\ p \in \mathbb{N}, n < p, n \in \mathbb{N}$ olsun.

$$\frac{d^n t^p}{dt^n} = p(p-1)\cdots(p-n+1)t^{p-n} = \frac{p!}{(p-n)!}t^{p-n} \tag{3.1}$$

(Dalir, Bashour, 2010).

Burada $n \in \mathbb{N}$ değilde $n \in \mathbb{R}$ alınırsa ne olur ? $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ olsun. (3.1) denkleminde yerine yazarsak,

$$\frac{d^\alpha t^p}{dt^\alpha} = \frac{p!}{(p-\alpha)!}t^{p-\alpha} \tag{3.2}$$

olur ve buradaki faktöriyel kavramı tanımlı değildir. Bunun için de "Gama Fonksiyonu"nu kullanırız. Bir diğer adıyla Euler'in 2.tür İntegrali ya da Genelleştirilmiş İntegral de denilebilir.

Kesirli analizin en önemli argümanları,

1. Gama Fonksiyonu
2. Cauchy Formülü

dür. Tüm teori bunun üzerine kurulmuştur.

Tanım 3.2. $n > 0$ olmak üzere gama fonksiyonu,

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x}\, dx$$

şeklindedir (Podlubny, 1998). Gama fonksiyonunun bazı özellikleri aşağıdaki gibidir;

1. $n \in \mathbb{N}$ için $\Gamma(n+1) = n!$
2. $n \notin \mathbb{N}$ için $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

Şimdi türevi gama fonksiyonuyla ilişkilendirelim. Burada n yerine α, ! yerine de Γ fonksiyonu alarak Euler'in Kesirli Türev tanımını tekrar yazabiliriz.

Tanım 3.3. $y = t^p,\ \alpha \in \mathbb{R}$ olsun. (3.2) denkleminde yerine koyarsak

$$\frac{d^{\alpha} t^{p}}{dt^{\alpha}} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)}\, t^{p-\alpha} \tag{3.3}$$

elde edilir (Dalir, Bashour, 2010).

Tanım 3.4. (Cauchy Formülü) $n \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{R}, t > 0$ olsun.

$$f^{(-n)}(t) = \int_a^t \int_a^{x_1} \cdots \int_a^{x_{n-1}} f(x)dx \cdots dx_2 dx_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t f(x)(t-x)^{n-1} dx \tag{3.4}$$

(Dalir, Bashour, 2010).

(3.4) denkleminde $n \to \alpha,\ (n-1)! \to \Gamma(\alpha)$ şeklinde düzenlersek Riemann-Liouville kesirli integral tanımını verebiliriz.

Tanım 3.5. $\alpha, t \in \mathbb{R}, 0 < t < \infty,\ \alpha > 0, a > 0$ olmak üzere, α −mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali;

$$\mathrm{I}^{\alpha} f(t) = \frac{d^{-\alpha}}{dt^{-\alpha}} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(x)}{(t-x)^{1-\alpha}}\, dx \tag{3.5}$$

olarak tanımlıdır (Podlubny, 1998). α −mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali aşağıdaki özellikleri sağlar;

1. $\mathrm{I}^0 f(t) = f(t)$ (özdeşlik)
2. $\mathrm{I}^{\alpha}\big(\lambda f(t) + g(t)\big) = \lambda \mathrm{I}^{\alpha} f(t) + \mathrm{I}^{\alpha} g(t)$ (lineerlik)
3. $\lim_{\alpha \to 0} \mathrm{I}^{\alpha} f(t) = f(t)$
4. $\mathrm{I}^{\alpha}\left(\mathrm{I}^{\beta} f(t)\right) = \mathrm{I}^{\beta}\big(\mathrm{I}^{\alpha} f(t)\big) = \mathrm{I}^{\alpha+\beta} f(t)$ (birleşme)

Bu bölümde Riemann-Liouville kesirli integraline dair bazı örnekler verilecektir. Bu örnekler Ruban Raj ve Sahaya Jernith 'in 2017 yılında yapmış oldukları "Solving Fractional Derivative of Some Functions" adlı çalışmadan derlenmiştir.

Örnek 3.1. $f(t) = 1$ fonksiyonunun, $\alpha = \frac{1}{2}$ mertebeden Riemann-Liouville kesirli integralini inceleyelim. $\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\right)$

Çözüm:

$$\mathrm{I}^{\frac{1}{2}}1 = \frac{d^{-\frac{1}{2}}}{dt^{-\frac{1}{2}}}\,1 = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^t \frac{1}{(t-x)^{-\frac{1}{2}+1}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^t \frac{1}{(t-x)^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(2t^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

elde edilir.

Örnek 3.2. $f(t) = t$ fonksiyonunun, $\alpha = \frac{1}{2}$ mertebeden Riemann-Liouville kesirli integralini inceleyelim. $\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\right)$

Çözüm:

$$\mathrm{I}^{\frac{1}{2}}t = \frac{d^{-\frac{1}{2}}}{dt^{-\frac{1}{2}}}\,t = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^t \frac{x}{(t-x)^{-\frac{1}{2}+1}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{x\,dx}{(t-x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{4}{3\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}}$$

elde edilir.

Örnek 3.3. $f(t)=\sin t$ fonksiyonunun, $\alpha=\frac{1}{2}$ mertebeden Riemann-Liouville kesirli integralini inceleyelim. $\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\right)$

Çözüm:

$$\mathrm{I}^{\frac{1}{2}}\sin t=\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{dt^{-\frac{1}{2}}}\sin t=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^t\frac{\sin x}{(t-x)^{-\frac{1}{2}+1}}dx$$

$$=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^t\frac{\sin x}{(t-x)^{\frac{1}{2}}}dx$$

$\begin{cases} t-x=\theta^2 \\ dx=-(2\theta)d\theta \end{cases}$

dönüşümü yapılırsa,

$$=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\sqrt{t}}\frac{\sin(t-\theta^2)}{\sqrt{\theta^2}}2\theta d\theta$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}\sin(t-\theta^2)\,d\theta$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}[\sin t\cos\theta^2-\cos t\sin\theta^2]\,d\theta$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\sin t\int_0^{\sqrt{t}}\cos\theta^2 d\theta-\cos t\int_0^{\sqrt{t}}\sin\theta^2 d\theta\right]$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\sin t\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)-cost\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t-\cos t)$$

elde edilir.

Örnek 3.4. $f(t)=\cos t$ fonksiyonunun, $\alpha=\frac{1}{2}$ mertebeden Riemann-Liouville kesirli integralini inceleyelim. $\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\right)$

Çözüm:

$$\mathrm{I}^{\frac{1}{2}}\cos t=\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{dt^{-\frac{1}{2}}}\cos t=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^t\frac{\cos x}{(t-x)^{-\frac{1}{2}+1}}dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^t \frac{\cos x}{(t-x)^{\frac{1}{2}}} dx$$

$\begin{cases} t - x = \theta^2 \\ dx = -(2\theta)d\theta \end{cases}$

dönüşümü yapılırsa,

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\sqrt{t}} \frac{\cos(t-\theta^2)}{\sqrt{\theta^2}} 2\theta d\theta$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} \cos(t-\theta^2)\, d\theta$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} [\cos t \cos\theta^2 + \sin t \sin\theta^2]\, d\theta$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\cos t \int_0^{\sqrt{t}} \cos\theta^2 d\theta + \sin t \int_0^{\sqrt{t}} \sin\theta^2 \theta d\theta\right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\cos t \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) + \sin t \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos t + \sin t)$$

elde edilir.

BÖLÜM 4

$\mathbb{R}^2$ DE EĞRİLERİN RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ TÜREV İLE İNCELENMESİ

Tanım 4.1. Bir $f(t)$ fonksiyonunun $n-1 \leq \alpha < n$ sağlayacak biçimde n pozitif tam sayı ve $t > 0$ olmak koşuluyla α −mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi,

$$ {}_{RL}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \left(\int_a^t f(x)(t-x)^{n-\alpha-1} dx \right) \tag{4.1} $$

şeklinde tanımlanır (Podlubny, 1999).

Bu bölümde ${}_{RL}D_t^{\alpha}$ Riemann-Liouville kesirli türev operatörü yardımıyla düzlem eğrilerinin diferansiyel geometrisi çalışılacak ve bazı örnekler verilecektir. Bu örneklerde eğrilerin parametrik ifadelerinden faydalanılacaktır.

Tanım 4.2. (4.1) denkleminden yola çıkarak bir genelleme yapacak olursak:

$n-1 < \alpha < n$ için,

$$ {}_{RL}D^{\alpha} = {}_{RL}D^{n} \circ \mathrm{I}^{n-\alpha} \Rightarrow {}_{RL}D^{\alpha} f(t) = {}_{RL}D^{\alpha}\left(\mathrm{I}^{n-\alpha} f(t)\right) $$

$$ = {}_{RL}D^{\alpha} \left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t f(x)(t-x)^{n-\alpha-1} dx \right) $$

$0 < \alpha < 1$ için,

$$ {}_{RL}D^{\alpha} f(t) = D^1 \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{f(x)}{(t-x)^{\alpha}} dx \right) $$

dir.

${}_{RL}D_t^{\alpha}$ Riemann-Liouville kesirli türev operatörü aşağıdaki özellikleri sağlar (Podlubny, 1999);

1. ${}_{RL}D^0$: $\ddot{o}zde\c{s}lik$

2. ${}_{RL}D^{\alpha} \circ \mathrm{I}^{\alpha}$: $\ddot{o}zde\c{s}lik$ (sol ters operatör)
3. ${}_{RL}D^{\alpha} = D^{1} \circ \mathrm{I}^{1-\alpha}$
4. ${}_{RL}D^{\alpha}\ lineerdir$
5. $D^{m} \circ {}_{RL}D^{\alpha} = {}_{RL}D^{\alpha+m} \neq {}_{RL}D^{\alpha} \circ D^{m}\ (m \in \mathrm{N})$
6. ${}_{RL}D^{\beta} \circ {}_{RL}D^{\alpha} \neq {}_{RL}D^{\alpha} \circ {}_{RL}D^{\beta},\ {}_{RL}D^{\beta} \circ {}_{RL}D^{\alpha} = {}_{RL}D^{\alpha+\beta} - \frac{x^{-\beta-1}}{\Gamma(-\beta)}\,{}_{RL}D^{\alpha-1}$
7. $\alpha = \beta \Rightarrow {}_{RL}D^{\beta} \circ {}_{RL}D^{\alpha} = {}_{RL}D^{\alpha+\beta}$
8. $f^{(s)}(0) = 0 \implies {}_{RL}D^{\beta} \circ {}_{RL}D^{\alpha} = {}_{RL}D^{\alpha+\beta}, s = 0,1,\dots,n-1,\ n-1 < \alpha < n$

Örnek 4.1. $f(t) = 1$ fonksiyonunun, $\alpha = \frac{1}{2}$ mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi ile inceleyelim.

Çözüm: $\alpha = \frac{1}{2}$ olduğundan $n = 1$ olur ve $a = 0$ için,

$$ {}_{RL}D_t^{\frac{1}{2}}1 = \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t \frac{1}{(t-x)^{\frac{1}{2}}}dx\right) $$

$$ \begin{cases} t - x = u^2 \\ dx = -(2u)du \end{cases} $$

dönüşümü yapılırsa,

$$ = -\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dt}\int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{u^2}}2udu $$

$$ = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dt}\left(2t^{\frac{1}{2}}\right) $$

$$ = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} $$

elde edilir.

2.Yol: $\frac{1}{2}$ mertebeden Riemann-Liouville kesirli integral aldıktan sonra klasik türevini alırsak yine aynı sonuca varabiliriz,

$$ {}_{RL}D_t^{\frac{1}{2}}1 = \frac{d}{dt}\left(\mathrm{I}^{\frac{1}{2}}1\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{dt^{-\frac{1}{2}}}1\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} $$

elde edilir.

Buradan görülmektedir ki bir sabit fonksiyonun Riemann-Liouville kesirli türevi alındığında, türev sıfırdan farklı çıkmaktadır bu da diferansiyel geometri açısından bir dezavantaj teşkil eder. Çünkü sabit fonksiyonun türevinin sıfır oluşu diferansiyel geometri açısından önemlidir.

Örnek 4.2. $f(t)=t$ fonksiyonunun $\alpha=\frac{1}{2}$ mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi ile inceleyelim.

Çözüm: $\alpha=\frac{1}{2}$ olduğundan $n=1$ olur ve $a=0$ için,

$$ {}_{RL}D_t^{\frac{1}{2}}t=\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t\frac{x}{(t-x)^{\frac{1}{2}}}dx\right) $$

$$ \begin{cases} t-x=u^2 \\ dx=-(2u)du \end{cases} $$

dönüşümü yapılırsa,

$$ =\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dt}\int_0^{\sqrt{t}}\frac{u^2-t}{\sqrt{u^2}}2udu $$

$$ =-\frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dt}\left(\frac{u^3}{3}-ut\Big|_0^t\right) $$

$$ =\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right) $$

$$ =2\sqrt{\frac{t}{\pi}} $$

elde edilir.

2.Yol: $\frac{1}{2}$ mertebeden Riemann-Liouville kesirli integral aldıktan sonra klasik türevini alırsak yine aynı sonuca varabiliriz,

$$ {}_{RL}D_t^{\frac{1}{2}}t=\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}}t=\frac{d}{dt}\left(\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{dt^{-\frac{1}{2}}}t\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}}\right)=2\sqrt{\frac{t}{\pi}} $$

elde edilir.

Örnek 4.3. $f(t)=\sin t$ fonksiyonunun, $\alpha=\frac{1}{2}$ mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevini inceleyelim. $\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\right)$

Çözüm: $\alpha=\frac{1}{2}$ olduğundan $n=1$ olur ve $a=0$ için integral alınırsa,

$$
\begin{aligned}
{}_{RL}D_t^{\frac{1}{2}}\sin t &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\sin x}{(t-x)^{-\frac{1}{2}+1}}dx \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\sin x}{(t-x)^{\frac{1}{2}}}dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases} t-x=\theta^2 \\ dx=-(2\theta)d\theta \end{cases}
$$

dönüşümü yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dt}\int_0^{\sqrt{t}} \frac{\sin(t-\theta^2)}{\sqrt{\theta^2}}2\theta d\theta \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^{\sqrt{t}} \sin(t-\theta^2)\,d\theta \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^{\sqrt{t}} [\sin t\cos\theta^2-\cos t\sin\theta^2]\,d\theta \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\left[\sin t\int_0^{\sqrt{t}}\cos\theta^2 d\theta-\cos t\int_0^{\sqrt{t}}\sin\theta^2 d\theta\right] \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\left[\sin t\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)-\cos t\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t+\sin t)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

2.Yol: $\frac{1}{2}$ mertebeden Riemann-Liouville kesirli integral aldıktan sonra klasik türevini alırsak yine aynı sonuca varabiliriz,

$$
{}_{RL}D_t^{\frac{1}{2}}\sin t=\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}}\sin t=\frac{d}{dt}\left(\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{dt^{-\frac{1}{2}}}\sin t\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d}{dt}(\sin t-\cos t)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t+\sin t)
$$

elde edilir.

Örnek 4.4. $f(t)=\cos t$ fonksiyonunun, $\alpha=\frac{1}{2}$ mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevini inceleyelim. $\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\right)$

Çözüm:

$$
{}_{RL}D_t^{\frac{1}{2}}\cos t=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{\cos x}{(t-x)^{-\frac{1}{2}+1}}dx
$$

$$
=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{\cos x}{(t-x)^{\frac{1}{2}}}dx
$$

$$
\begin{cases} t-x=\theta^2 \\ dx=-(2\theta)d\theta \end{cases}
$$

dönüşümü yapılırsa,

$$
=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dt}\int_0^{\sqrt{t}}\frac{\cos(t-\theta^2)}{\sqrt{\theta^2}}2\theta d\theta
$$

$$
=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^{\sqrt{t}}\cos(t-\theta^2)\,d\theta
$$

$$
=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^{\sqrt{t}}[\cos t\cos\theta^2+\sin t\sin\theta^2]\,d\theta
$$

$$
=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\left[\cos t\int_0^{\sqrt{t}}\cos\theta^2 d\theta+\sin t\int_0^{\sqrt{t}}\sin\theta^2\theta d\theta\right]
$$

$$
=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\left[\cos t\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)+\sin t\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\right]
$$

$$
=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d}{dt}(\cos t+\sin t)
$$

$$
=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t+\cos t)
$$

elde edilir.

2.Yol: $\frac{1}{2}$ mertebeden Riemann-Liouville kesirli integral aldıktan sonra klasik türevini alırsak yine aynı sonuca varabiliriz,

$$
{}_{RL}D_t^{\frac{1}{2}}\cos t=\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}}\cos t=\frac{d}{dt}\left(\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{dt^{-\frac{1}{2}}}\cos t\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d}{dt}(\cos t+\sin t)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t+\cos t)
$$

elde edilir.

R^2 de $\|\quad\|$ ve $\langle,\rangle$ ile norm ve iç çarpım fonksiyonları gösterilmek üzere aşağıdaki tanımları verebiliriz.

Tanım 4.3. γ: $J \to \mathbb{R}_+^2$ parametrik bir eğri ve her $t \in J$ için $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ olsun. Buna göre ${}_{RL}D^{\alpha}$ ile α −mertebeden Riemann-Liouville kesirli türev gösterilmek üzere,

$({}_{RL}D^{\alpha}\gamma)(t) = \left(({}_{RL}D^{\alpha}x)(t), ({}_{RL}D^{\alpha}y)(t)\right)$

ile tanımlanır.

Tanım 4.4. γ: $J \to \mathbb{R}_+^2$ parametrik bir eğri olsun. Eğer her $t \in J$ için $({}_{RL}D^{\alpha}x)(t)$ ve $({}_{RL}D^{\alpha}y)(t)$ türevleri mevcut ve $({}_{RL}D^{\alpha}x)(t) \in C^{\infty}$, $({}_{RL}D^{\alpha}y)(t) \in C^{\infty}$ ise o zaman γ'ya α *−diferansiyellenebilirdir* denir.

Tanım 4.5. γ: $J \to \mathbb{R}_+^2$ ya α − diferansiyellenebilir bir eğri olsun. Eğer her $t \in J$ için ${}_{RL}D^{\alpha}\gamma \neq \vec{0}$ ise γ'ya α *−regülerdir* denir.

Tanım 4.6. γ: $J \to \mathbb{R}_+^2$ α −regüler bir eğri olsun. Eğer her $s \in J$ için $\left\|{}_{RL}D^{\alpha}\gamma(s)\right\| = 1$ ise $\gamma(s)$ eğrisine *birim* α *−hızlı eğri* denir. s parametresine ise α *−yay parametresi* adı verilir.

Tanım 4.7. $\mathbb{R}^2$ uzayında $\gamma(s) = \left(u(s), v(s)\right)$ α −yay parametreli eğri olsun. Bu durumda, γ eğrisinin *birim* α *−teğet vektörü*,

$T^{\alpha}(s) = {}_{RL}D^{\alpha}\gamma(s)$

birim α *−normal vektörü*,

$$N^{\alpha}(s) = \frac{{}_{RL}D^{1+\alpha}\gamma(s)}{\left\|{}_{RL}D^{1+\alpha}\gamma(s)\right\|}$$

ile tanımlanır.

Burada dikkat edilmelidir ki $\langle T^{\alpha}(s), T^{\alpha}(s)\rangle = 1$ eşitliğinin her iki tarafının $\frac{d}{ds}$ klasik türevi alınırsa $\langle \frac{dT^{\alpha}}{ds}(s), T^{\alpha}(s)\rangle = 0$ olur ve buradan $\frac{dT^{\alpha}}{ds}(s)$ ile $N^{\alpha}(s)$ vektör alanlarının paralel olduğu görülür. Burada $\frac{dT^{\alpha}}{ds}(s) = {}_{RL}D_s^{1+\alpha}\gamma(s)$ olduğu göz önüne alınırsa

${}_{RL}D_s^{1+\alpha}\gamma(s) = \kappa^{\alpha}(s)N^{\alpha}(s)$

olacak şekilde bir $\kappa^{\alpha}(s)$ fonksiyonu mevcuttur.

$\kappa^{\alpha}(s) = \left\| {}_{RL}D_s^{1+\alpha}\gamma(s) \right\|$

fonksiyonuna $\gamma(s)$ eğrisinin α *−eğriliği* adı verilir.

Uyarı 4.1. γ: $J \to \mathbb{R}_+^2$ α −yay parametreli bir eğri olsun. Buna göre ${}_{RL}D^{\alpha}\gamma(s) = \left({}_{RL}D^{\alpha}x(s), {}_{RL}D^{\alpha}y(s)\right)$ vektörüne α *−teğet vektörü alanı* denir ve $T^{\alpha} = {}_{RL}D^{\alpha}\gamma$ ile gösterelim. $\left(-{}_{RL}D^{\alpha}y(s), {}_{RL}D^{\alpha}x(s)\right)$ T^{α}'ya dik olduğundan $N^{\alpha} = \left(-{}_{RL}D^{\alpha}y(s), {}_{RL}D^{\alpha}x(s)\right)$ vektör alanına ise $\gamma(s)$ nin α *−normal vektör alanı* denir.

Örnek 4.5. $\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t + \cos t\,, \sin t - \cos t)$ eğrisinin $\frac{1}{2}$−teğet vektörünü, $\frac{1}{2}$−normal vektörünü ve $\frac{1}{2}$−eğriliğini bulalım.

Çözüm:

$\frac{1}{2}$−teğet vektörü,

$$T^{\frac{1}{2}}(t) = {}_{RL}D^{\frac{1}{2}}\gamma(t)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left({}_{RL}D^{\frac{1}{2}}\sin t + {}_{RL}D^{\frac{1}{2}}\cos t\,, {}_{RL}D^{\frac{1}{2}}\sin t - {}_{RL}D^{\frac{1}{2}}\cos t\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,,\right.$$

$$\left.\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\cos t\,, \frac{2}{\sqrt{2}}\sin t\right)$$

$$= (\cos t\,, \sin t)$$

$\frac{1}{2}$−normal vektörü,

$N^{\frac{1}{2}}(t) = (-\sin t\,, \cos t)$

Eğriliği,

$\kappa^{\frac{1}{2}}(t) = \left\| {}_{RL}D^{1+\frac{1}{2}}\gamma(t) \right\| = \sqrt{(\cos t)^2 + (\sin t)^2} = 1$

olup $\left\| {}_{RL}D^{\frac{1}{2}}\gamma(t) \right\| = 1$ olduğundan $\gamma(t)$, $\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)$−yay parametreli bir eğridir. Bu aslında bir çemberdir ($x^2 + y^2 = 1$).

Örnek 4.6. $\|v\| = 1$ olacak şekilde sabit $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2_+$ vektörü verilsin burada $ab \neq 0$.

$$\gamma(s) = \left(\frac{a}{\Gamma(1+\alpha)} s^\alpha, \frac{b}{\Gamma(1+\alpha)} s^\alpha\right)$$

simetri doğusunu alalım $y = (b/a)x$. Buna göre

$${}_{RL}D^\alpha \gamma(s) = \left(\frac{a}{\Gamma(1+\alpha)} {}_{RL}D^\alpha(s^\alpha), \frac{b}{\Gamma(1+\alpha)} {}_{RL}D^\alpha(s^\alpha)\right) = (a, b)$$

olup $\left\| {}_{RL}D^\alpha \gamma(s) \right\| = 1$ olduğundan $\gamma(s)$ α −yay parametreli bir eğridir. Buna göre

$${}_{RL}D^\alpha \gamma(s) = T^\alpha(s) = (a, b)$$

ve

$$N^\alpha(s) = \frac{dT^\alpha}{ds}(s) = (0,0).$$

Dolayısıyla $\kappa^\alpha(s) = 0$ dir.

Ancak bu örneğin tersi daima doğru olmayabilir. Aşağıdaki önermede bunu ifade edelim. Klasik diferansiyel geometride doğrunun eğriliği daima sıfırdır. Eğrilik sıfır olduğunda da eğrinin bir doğru olduğunu görürüz. Fakat, Örnek 4.6. da bir simetri doğrusunun α −eğriliğinin sıfır olduğunu gösterdik. α −eğriliği sıfırken α kesirli integrali alınırsa karşımıza her zaman bir doğru çıkmayabilir.

Önerme 4.1. $\gamma(s)$ α −yay parametreli bir eğri ve κ^α α −eğriliği olsun. Eğer $\kappa^\alpha = 0$ iken $\gamma(s)$ her zaman bir doğru belirtmez.

İspat: Eğer $\kappa^\alpha = 0$ ise o zaman her s için

$$\kappa^\alpha(s) = \left\| {}_{RL}D^{1+\alpha} \gamma(t) \right\| = 0$$

ya da

$${}_{RL}D^{1+\alpha} \gamma(s) = 0$$

olur. Burada ${}_{RL}D^{1+\alpha} \gamma(s) = ({}_{RL}D^\alpha \gamma(s))'$ olduğundan son denklemde klasik integral alınırsa ${}_{RL}D^\alpha \gamma(s)$ vektörünün sabit bir vektör olduğu görülür. $a, b \in \mathbb{R}$ olacak şekilde bu vektör (a, b) ile gösterilirse

$${}_{RL}D^\alpha \gamma(s) = (a, b)$$

elde edilir. Son eşitlikte sağ tarafın α −mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali alınırsa

$$(I^{\alpha}a, I^{\alpha}b) = \left(\frac{a}{\Gamma(1+\alpha)}s^{\alpha}, \frac{b}{\Gamma(1+\alpha)}s^{\alpha}\right)$$

olup $y = (b/a)x$ denklemli simetri doğrusu olur. Ancak $I^{\alpha}({}_{RL}D^{\alpha}\gamma(s))$ her zaman $\gamma(s)$'e eşit değildir. Yani ${}_{RL}D^{\alpha} \circ I^{\alpha}$ özdeşlik iken, $I^{\alpha} \circ {}_{RL}D^{\alpha}$ özdeşlik olmayabilir.

Tanım 4.8. Kabul edelim ki $\gamma(s), \alpha$ −birim hızlı eğri olsun. O zaman ${}_{RL}D^{\alpha}\gamma(s)$, birim hızlı eğri olduğundan ${}_{RL}D^{\alpha}\gamma(s) = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s))$ olacak şekilde bir $\varphi(s)$ fonksiyonu vardır. Buna γ'nın α −*dönme açısı* denir.

Önerme 4.2. $\gamma(s)$ α −birim hızlı bir düzlem eğrisi ve $\varphi(s)$ de γ'nın bir dönme açısı olsun. Bu durumda

$$\kappa_s^{\alpha} = \frac{d\varphi(s)}{ds} \tag{4.2}$$

dir.

İspat. Eğer γ, α −birim hızlı bir eğri ise ${}_{RL}D^{\alpha}\gamma(s)$ teğet vektörünün doğrultusu

${}_{RL}D^{\alpha}\gamma(s) = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s))$

olmak üzere $\varphi(s)$ açısıyla ölçülür.

$${}_{RL}D^{1+\alpha}\gamma(s) = \frac{d\varphi(s)}{ds}(-\sin\varphi(s), \cos\varphi(s))$$

$$N^{\alpha} = (-\sin\varphi(s), \cos\varphi(s))$$

olduğundan

$$\kappa_s^{\alpha} = \frac{d\varphi(s)}{ds}$$

bulunur.

Not: Bir eğrinin α −dönme açısı ile klasik dönme açısı genelde farklıdır.

Teorem 4.1. $k: J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ herhangi bir düzgün fonksiyon olsun. Bu durumda α −işaretli eğriliği k olan birim α −hızlı bir $\gamma: J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eğrisi vardır.

İspat. Sabit bir $s_0 \in$ J alalım. Herhangi bir $s \in J$ için,

$$\varphi(s) = \int_{s_0}^{s} k(u)\, du$$

$$\gamma(s) = (\mathrm{I}^{\alpha}\cos\varphi(s)\,, \mathrm{I}^{\alpha}\sin\varphi(s))$$

olarak tanımlayalım. γ'nın α −teğet vektörü,

$$_{RL}D^{\alpha}\gamma(s) = \left({}_{RL}D^{\alpha}\,\mathrm{I}^{\alpha}\cos\varphi(s)\,, {}_{RL}D^{\alpha}\mathrm{I}^{\alpha}\sin\varphi(s)\right)$$

$$= (\cos\varphi(s)\,, \sin\varphi(s))$$

olur ve bu x −ekseni ile $\varphi(s)$ açısını yapan α −birim vektördür. γ, α −birim hızlı olduğundan ve (4.2) den γ'nın işaretli eğriliği

$$\kappa_s^{\alpha} = \frac{d\varphi(s)}{ds} = k(s)$$

bulunur.

Örnek 4.7. $k(s) = s$ fonksiyonunu alalım. Herhangi bir $s \in J$ için,

$$\varphi(s) = \int_0^s k(u)\, du = \int_0^s u\, du = \left.\frac{u^2}{2}\right|_0^s = \frac{s^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{s^2}{2}$$

$$\gamma(s) = \left(\mathrm{I}^{\frac{1}{2}}\cos\frac{s^2}{2}, \mathrm{I}^{\frac{1}{2}}\sin\frac{s^2}{2}\right)$$

olur. γ'nın $\frac{1}{2}$ −teğet vektörü,

$$_{RL}D^{\frac{1}{2}}\gamma(s) = \left({}_{RL}D^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{I}^{\frac{1}{2}}\cos\frac{s^2}{2}, {}_{RL}D^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{I}^{\frac{1}{2}}\sin\frac{s^2}{2}\right)$$

$$= \left(\cos\frac{s^2}{2}, \sin\frac{s^2}{2}\right)$$

olur ve bu x −ekseni ile $\varphi(s) = \frac{s^2}{2}$ açısını yapan $\frac{1}{2}$ −birim vektördür. γ, $\frac{1}{2}$ −birim hızlı eğri olduğundan ve (4.2)'den γ'nın işaretli eğriliği

$$\kappa_s^{\frac{1}{2}} = \frac{d\varphi(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\frac{s^2}{2} = s = k(s)$$

bulunur.

BÖLÜM 5

$\mathbb{R}^3$ DE EĞRİLERİN RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ TÜREV İLE İNCELENMESİ

R^3 de $\|\quad\|$ ve $\langle,\rangle$ ile norm ve iç çarpım fonksiyonları gösterilmek üzere aşağıdaki tanımları verebiliriz.

Tanım 5.1. γ: $J \to \mathbb{R}^3_+$ parametrik bir eğri ve her $t \in J$ için $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ olsun. Buna göre ${}_{RL}D^{\alpha}$ ile α −mertebeden Riemann-Liouville kesirli türev gösterilmek üzere,

$({}_{RL}D^{\alpha}\gamma)(t) = \left(({}_{RL}D^{\alpha}x)(t), ({}_{RL}D^{\alpha}y)(t), ({}_{RL}D^{\alpha}z)(t)\right)$

ile tanımlanır.

Tanım 5.2. γ: $J \to \mathbb{R}^3_+$ parametrik bir eğri olsun. Eğer her $t \in J$ için $({}_{RL}D^{\alpha}x)(t)$, $({}_{RL}D^{\alpha}y)(t)$ ve $({}_{RL}D^{\alpha}z)(t)$ türevleri mevcut ve $({}_{RL}D^{\alpha}x)(t) \in C^{\infty}$, $({}_{RL}D^{\alpha}y)(t) \in C^{\infty}$, $({}_{RL}D^{\alpha}z)(t) \in C^{\infty}$ ise o zaman γ'ya α −*diferansiyellenebilirdir* denir.

Tanım 5.3. γ: $J \to \mathbb{R}^3_+$ ya α − diferansiyellenebilir bir eğri olsun. Eğer her $t \in J$ için ${}_{RL}D^{\alpha}\gamma \neq \vec{0}$ ise γ'ya α −*regülerdir* denir.

Tanım 5.4. γ: $J \to \mathbb{R}^3_+$ α −regüler bir eğri olsun. Eğer her $s \in J$ için $\left\|{}_{RL}D^{\alpha}\gamma(s)\right\| = 1$ ise $\gamma(s)$ eğrisine *birim* α −*hızlı eğri* denir. s parametresine ise α −*yay parametresi* adı verilir.

Tanım 5.5. $\mathbb{R}^3$ uzayında $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ α −yay parametreli eğri olsun. Bu durumda, γ eğrisinin *birim* α −*teğet vektörü*,

$T^{\alpha}(s) = D^{\alpha}\gamma(s)$

birim α *−normal vektörü*,

$$N^{\alpha}(s) = \frac{{}_{RL}D^{1+\alpha}\gamma(s)}{\left\|{}_{RL}D^{1+\alpha}\gamma(s)\right\|}$$

birim α *−binormal vektörü*,

$$B^{\alpha} = T^{\alpha} \times N^{\alpha}$$

ile tanımlıdır.

Açıklama 5.1. Dikkat edilmelidir ki $\langle T^{\alpha}(s), T^{\alpha}(s)\rangle = 1$ eşitliğinin her iki tarafının $\frac{d}{ds}$ klasik türevi alınırsa $\langle \frac{dT^{\alpha}}{ds}(s), T^{\alpha}(s)\rangle = 0$ olur ve buradan $\frac{dT^{\alpha}}{ds}(s)$ ile $N^{\alpha}(s)$ vektör alanlarının paralel olduğu görülür. Burada $\frac{dT^{\alpha}}{ds}(s) = {}_{RL}D_s^{1+\alpha}\gamma(s)$ olduğu göz önüne alınırsa

${}_{RL}D_s^{1+\alpha}\gamma(s) = \kappa^{\alpha}(s)N^{\alpha}(s)$

olacak şekilde bir $\kappa^{\alpha}(s)$ fonksiyonu mevcuttur.

$\kappa^{\alpha}(s) = \left\|{}_{RL}D_s^{1+\alpha}\gamma(s)\right\|$

fonksiyonuna $\gamma(s)$ eğrisinin α *−eğriliği* adı verilir. Buna göre, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir eğrinin eğrilik fonksiyonu negatif olamaz.

Açıklama 5.2. B^{α}'nın $\frac{d}{ds}$ klasik türevi alınırsa

$$\frac{d}{ds}B^{\alpha} = \frac{d}{ds}T^{\alpha} \times N^{\alpha} + T^{\alpha} \times \frac{d}{ds}N^{\alpha} = T^{\alpha} \times \frac{d}{ds}N^{\alpha}$$

Buradan, $\frac{d}{ds}B^{\alpha}$ ile T^{α} vektör alanlarının dik olduğu görülür. $\frac{d}{ds}B^{\alpha}$, hem B^{α}'ya hem de T^{α}'ya dik olduğundan $\frac{d}{ds}B^{\alpha}$, N^{α}'ya paralel olmak zorundadır. Böylece

$$\frac{d}{ds}B^{\alpha} = -\tau^{\alpha}N^{\alpha}$$

olacak şekilde bir τ^{α} sayısı vardır.

$$\tau^{\alpha} = -\langle \frac{d}{ds}B^{\alpha}, N^{\alpha}\rangle$$

τ^{α}'ya γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki α −burulması denir. (Burada işareti negatif almak, daha sonra oluşacak toplam eksi sayısını düşürecektir.) τ^{α} burulmasının yalnızca κ^{α} eğriliğinin sıfırdan farklı olması durumunda tanımlıdır.

Örnek 5.1. $\gamma(s) = \left(I^{\frac{1}{2}}\frac{\cos s}{\sqrt{2}}, I^{\frac{1}{2}}\frac{\sin s}{\sqrt{2}}, I^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ eğrisinin $\frac{1}{2}$−teğet vektörünü, $\frac{1}{2}$−normal vektörünü, $\frac{1}{2}$−eğriliğini ve $\frac{1}{2}$−burulmasını bulalım.

Çözüm:

$\frac{1}{2}$−teğet vektörü,

$$T^{\frac{1}{2}}(s) = {}_{RL}D^{\frac{1}{2}}\gamma(s)$$
$$= \left({}_{RL}D^{\frac{1}{2}}I^{\frac{1}{2}}\frac{\cos s}{\sqrt{2}}, {}_{RL}D^{\frac{1}{2}}I^{\frac{1}{2}}\frac{\sin s}{\sqrt{2}}, {}_{RL}D^{\frac{1}{2}}I^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= \left(\frac{\cos s}{\sqrt{2}}, \frac{\sin s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$\frac{1}{2}$−normal vektörü,

$$N^{\frac{1}{2}}(s) = \frac{{}_{RL}D^{1+\frac{1}{2}}\gamma(s)}{\left\|{}_{RL}D^{1+\frac{1}{2}}\gamma(s)\right\|} = (-\sin s, \cos s, 0)$$

$\frac{1}{2}$−eğriliği,

$$\kappa^{\frac{1}{2}}(s) = \left\|{}_{RL}D^{1+\frac{1}{2}}\gamma(s)\right\| = \sqrt{\frac{(\cos s)^2}{2} + \frac{(\sin s)^2}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$\frac{1}{2}$−binormali,

$$B^{\frac{1}{2}}(s) = T^{\frac{1}{2}} \times N^{\frac{1}{2}} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\cos s}{\sqrt{2}} & \frac{\sin s}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\sin s & \cos s & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{\cos s}{\sqrt{2}}, -\frac{\sin s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$\frac{1}{2}$−burulması,

$$\tau^{\frac{1}{2}}(s) = -\langle\frac{d}{ds}B^{\frac{1}{2}}, N^{\frac{1}{2}}\rangle = \frac{(\cos s)^2}{\sqrt{2}} + \frac{(\sin s)^2}{\sqrt{2}} + 0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

olup $\left\|{}_{RL}D^{\frac{1}{2}}\gamma(s)\right\| = 1$ olduğundan $\gamma(s)$, $\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)$−yay parametreli bir eğridir.

Teorem 5.1. $\gamma(s), \mathbb{R}^3$ te α −eğriliği hiçbir yerde sıfır olmayan regüler eğri olsun. Bu durumda, bu eğrinin α −burulması,

$$\tau^{\alpha} = \frac{\langle {}_{RL}D_s^{\alpha}\gamma(s) \times {}_{RL}D_s^{1+\alpha}\gamma(s), {}_{RL}D_s^{2+\alpha}\gamma(s)\rangle}{\left\| {}_{RL}D_s^{1+\alpha}\gamma(s)\right\|^{\mathbf{2}}} \tag{5.1}$$

formülü ile verilir.

Bu formül $\tau^{\alpha}(s)$'in, eğrinin $\kappa^{\alpha}(s)$ eğriliğinin sıfır olmadığı tüm $\gamma(s)$ noktalarında tanımlanır.

İspat.

$$\tau^{\alpha} = -\langle N^{\alpha}, \frac{d}{ds}B^{\alpha}\rangle$$

$$= -\langle \frac{1}{\kappa^{\alpha}(s)} {}_{RL}D_s^{1+\alpha}\gamma(s),\ T^{\alpha} \times \frac{d}{ds}N^{\alpha}\rangle$$

$$= -\langle \frac{1}{\kappa^{\alpha}(s)} {}_{RL}D_s^{1+\alpha}\gamma(s), {}_{RL}D_s^{\alpha}\gamma(s) \times \frac{d}{ds}\frac{1}{\kappa^{\alpha}(s)} {}_{RL}D_s^{1+\alpha}\gamma(s)\rangle$$

$$= -\langle \frac{1}{\kappa^{\alpha}(s)} {}_{RL}D_s^{1+\alpha}\gamma(s), {}_{RL}D_s^{\alpha}\gamma(s) \times \left(\frac{1}{\kappa^{\alpha}(s)}\frac{d}{ds} {}_{RL}D_s^{1+\alpha}\gamma(s) - \frac{\kappa^{\alpha\prime}(s)}{\left(\kappa^{\alpha}(s)\right)^{\mathbf{2}}} {}_{RL}D_s^{1+\alpha}\gamma(s) \right)\rangle$$

$\kappa^{\alpha}(s)$ sabit sayı olduğundan $\kappa^{\alpha\prime}(s) = 0$ olur ve buradan,

$$= -\langle \frac{1}{\kappa^{\alpha}(s)} {}_{RL}D_s^{1+\alpha}\gamma(s), {}_{RL}D_s^{\alpha}\gamma(s) \times \left(\frac{1}{\kappa^{\alpha}(s)} {}_{RL}D_s^{2+\alpha}\gamma(s) \right)\rangle$$

$$= -\frac{1}{\left(\kappa^{\alpha}(s)\right)^{\mathbf{2}}}\langle {}_{RL}D_s^{1+\alpha}\gamma(s), {}_{RL}D_s^{\alpha}\gamma(s) \times \left({}_{RL}D_s^{2+\alpha}\gamma(s) \right)\rangle$$

$$= \frac{1}{\left(\kappa^{\alpha}(s)\right)^{\mathbf{2}}}\langle {}_{RL}D_s^{\alpha}\gamma(s) \times {}_{RL}D_s^{1+\alpha}\gamma(s), {}_{RL}D_s^{2+\alpha}\gamma(s)\rangle$$

$\left(\kappa^{\alpha}(s)\right)^{\mathbf{2}} = \left(\left\| {}_{RL}D_s^{1+\alpha}\gamma(s)\right\|\right)^{\mathbf{2}}$ olduğundan,

$$= \frac{\langle {}_{RL}D_s^{\alpha}\gamma(s) \times {}_{RL}D_s^{1+\alpha}\gamma(s), {}_{RL}D_s^{2+\alpha}\gamma(s)\rangle}{\left\| {}_{RL}D_s^{1+\alpha}\gamma(s)\right\|^{\mathbf{2}}}$$

elde edilir.

Örnek 5.2. Örnek 5.1. de çalışılan $\gamma(s)=\left(I^{\frac{1}{2}}\frac{\cos s}{\sqrt{2}}, I^{\frac{1}{2}}\frac{\sin s}{\sqrt{2}}, I^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ eğrisinin α −burulmasını (5.1) denklemi yardımıyla tekrar hesaplayalım.

Çözüm:

$$_{RL}D^{\frac{1}{2}}\gamma(s)=\left(\frac{\cos s}{\sqrt{2}},\frac{\sin s}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$_{RL}D^{1+\frac{1}{2}}\gamma(s)=\left(-\frac{\sin s}{\sqrt{2}},\frac{\cos s}{\sqrt{2}},0\right)$$

$$_{RL}D^{2+\frac{1}{2}}\gamma(s)=\left(-\frac{\cos s}{\sqrt{2}},-\frac{\sin s}{\sqrt{2}},0\right)$$

$$_{RL}D^{\frac{1}{2}}\gamma(s)\times {}_{RL}D^{1+\frac{1}{2}}\gamma(s)=\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\cos s}{\sqrt{2}} & \frac{\sin s}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sin s}{\sqrt{2}} & \frac{\cos s}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}=\left(-\frac{\cos s}{2},-\frac{\sin s}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$\left\langle\left({}_{RL}D_s^{2+\alpha}\gamma(s)\right), {}_{RL}D_s^{\alpha}\gamma(s)\times {}_{RL}D_s^{1+\alpha}\gamma(s)\right\rangle=\frac{(\cos s)^2}{2\sqrt{2}}+\frac{(\sin s)^2}{2\sqrt{2}}+0$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\left\|{}_{RL}D_s^{1+\alpha}\gamma(s)\right\|^2=\frac{(\cos s)^2}{2}+\frac{(\sin s)^2}{2}+0=\frac{1}{2}$$

$$\tau^{\alpha}=\frac{\left\langle\left({}_{RL}D_s^{2+\alpha}\gamma(s)\right), {}_{RL}D_s^{\alpha}\gamma(s)\times {}_{RL}D_s^{1+\alpha}\gamma(s)\right\rangle}{\left({}_{RL}D_s^{1+\alpha}\gamma(s)\right)^2}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Teorem 5.2. γ, $\mathbb{R}^3$ uzayında α −eğriliği hiçbir yerde sıfır olmayan, birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda,

$$(T^{\alpha})'=\kappa^{\alpha}N^{\alpha}$$

$$(N^{\alpha})'=-\kappa^{\alpha}T^{\alpha}+\tau^{\alpha}B^{\alpha}$$

$$(B^{\alpha})'=-\tau^{\alpha}N^{\alpha}$$

biçiminde tanımlanan denklemlere Frenet-Serret denklemleridir.

İspat.

$(T^\alpha)' = \kappa^\alpha N^\alpha$ ve $(B^\alpha)' = -\tau^\alpha N^\alpha$ olduğunu biliyoruz. $(N^\alpha)'$ yi hesaplayalım.

$B^\alpha = T^\alpha \times N^\alpha,\ T^\alpha = N^\alpha \times B^\alpha,\ N^\alpha = B^\alpha \times T^\alpha$ dir. Buradan,

$$(N^\alpha)' = (B^\alpha \times T^\alpha)'$$
$$= (B^\alpha)' \times T^\alpha + B^\alpha \times (T^\alpha)'$$
$$= -\tau^\alpha N^\alpha \times T^\alpha + B^\alpha \times \kappa^\alpha N^\alpha$$
$$= \tau^\alpha T^\alpha \times N^\alpha + \kappa^\alpha N^\alpha \times B^\alpha$$
$$= -\kappa^\alpha T^\alpha + \tau^\alpha B^\alpha$$

olur.

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında $\mathbb{R}^2$, 2 boyutlu Öklid uzayında parametrik eğriler Riemann Liouville kesirli türev yardımıyla geometrik olarak incelenmiştir. $\alpha-$teğet vektör alanı, $\alpha-$normal vektör alanı, fonksiyonun $\alpha-$eğriliği gibi bir takım kesirli kalkulusa ait geometrik tanımlamalar yapılmış ve örnekler verilmiştir. Kesirli türev teknikleri kullanılarak sabit fonksiyonun türevinin sıfırdan farklı olduğu gösterilmiştir ve bir önerme olarak ifade edilmiştir. Bu problemden yola çıkarak örnekler incelenmiş ve bir takım yeni önermeler elde edilmiştir. $\mathbb{R}^2$ uzayında bulunan sonuçlar geliştirilerek $\mathbb{R}^3$ uzayında Riemann-Liouville kesirli türevi çalışılmış, klasik türev ile elde edilebilen teoremlerin Riemann-Liouville kesirli türevine de uyarlanabildiği görülmüş ve bir varlık teoremi verilerek orijinal sonuçlar elde edilmiştir. Bulunan bu sonuçlar ise örneklerle desteklenmiştir. Burada eğrinin $\alpha-$ binormali ve $\alpha-$burulması da incelenmiştir.

Bu tez çalışması boyunca birçok yeni tanım ve teoremler literatüre eklenmek suretiyle orijinal bir çalışma ortaya çıkarılmıştır. Bu tezde başından beri bahsettiğimiz gibi Riemann-Liouville kesirli türevi yardımıyla iki ve üç boyutta eğriler incelenmiştir, buradan hareketle yine Riemann-Liouville kesirli türevi yardımıyla yüzeyler üzerinde de incelemeler yapılabileceği öngörülmektedir. Bu tez çalışması kesirli analizin argümanları ile incelenebilecek daha bir çok açık problemi de beraberinde getirmiştir.

KAYNAKLAR

Agrawal, Om. P. (2002). Formulation of Euler–Lagrange equations for fractional variational problems. *J. Math.Anal. Appl. 272.*

Aydin, M.E., Bektas, M., Ogrenmis, A.O. ve Yokus, A. (2021). Differential geometry of curves in Euclidean 3-space with fractional order, *International Electronic Journal of Geometry* 14(1), 132-144.

Aydin, M.E., Mihai, A. ve Yokus, A. (2021). Applications of fractional calculus in equiaffine geometry: plane curves with fractional order, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 44(17) 1-11.

Baleanu, D., Fernandez, A. (2019). On fractional operators and their classifications. *Mathematics,* 7.

Dalir, M., Bashour, M. (2010). Applications of Fractional Calculus, *Applied Mathematical Sciences*, (4) 21 1021-1032.

Hacısalihoğlu, H. H. (2000). Diferensiyel Geometri. *Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları*.4. Basım, Ankara.

Hilfer, R. (2000). Applications of fractional calculus in physics, *World Scientific*, Singapore.

Kaya, Ş. (2022). Kesirli Türevlerin eğrilerin afin diferansiyel geometrisine uygulamaları. *Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü*, Yüksek lisans tezi.

Kilbas, A., Srivastava, H. ve Trujillo, J. (2006). Theory and Applications of Fractional Differential Equations, *Math. Studies., North-Holland, New York.*

Kulish, V.V., Lage, J.L. (2002). Application of fractional calculus to fluid mechanics. *J. Fluids Eng. 124.*

Louchko, Y. (2020). Fractional derivatives and the fundamental theorem of fractional calculus. *An international journal for theory and applications.* Vol 23, no.4. 939-966.

Özdemir, M. (2020). Diferansiyel Geometri, *Altın Nokta Yayınevi*, 1. Basım, İzmir.

Podlubny, I. (1999). Fractional Differential Equations, *Academic Press, New York.*

Podlubny, I. (1998). Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications, *Elsevier.*

Pressley, A. (2012). Elemantary Differential Geometry, *Springer Undergraduate Mathematics Series*, 2nd edition.

Raj, R., Jernith, S. (2017). Solving fractional derivative of some functions, *International journal of Mathematics Trends and Technology (IJMTT)*, Vol 52, no 2. 88-92.

Sabuncuoğlu, A. (2014). Diferensiyel Geometri, *Nobel Akademik Yayıncılık*, 5. Basım, İstanbul.

Samko, S.G., Kilbas, A.A. ve Marichev, O.I. (1993). Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications. *Gordon and Breach Science Publishers*: London.

Tarasov, V. E. (2005). Fractional generalization of gradient and Hamiltonian systems . *J. Phys. A: Math.Gen. 38.*

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Fatma ARSLAN

Yabancı Diller

İngilizce

Eğitim Bilgileri

Lise : Kastamonu Anadolu İmam Hatip Lisesi 2016

Lisans : Matematik Bölümü, Karabük Üniversitesi, Fen Fakültesi 2021

Yüksek Lisans : Matematik, Trakya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü 2023

Makale & Bildiriler

1) Arslan F., Tekin P., Aydın M.E., (2023). $\mathbb{R}^2$ de Riemann-Liouville Kesirli Türevinin Eğriler Üzerinde Bazı Uygulamarı, 35. Ulusal Matematik Sempozyumu (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)