T.C

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DIRAC ALANI İÇİN KUANTUM BOŞLUK ENERJİSİ

ALBION ARIFI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FİZİK ANABİLİM DALI

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mustafa ÖZCAN

EDİRNE 2021

ALBION ARIFI'nin hazırladığı "DIRAC ALANI İÇİN KUANTUM BOŞLUK ENERJİSİ" başlıklı bu tez, tarafımızca okunmuş kapsam niteliği açısından Fizik Anabilim Dalında bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri İmza

Prof. Dr. Mustafa ÖZCAN

Doç. Dr. Mehmet Akif SABANER

Prof. Dr. Metin ÖZDEMIR

Tez savunma tarihi: 13/07/2021

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Mustafa ÖZCAN İmza

Tez Danışmanı

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü onayı.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Hüseyin Rıza Ferhat KARABULUT

T.Ü.FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİZİK ANA BİLİM DALI YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

DOĞRULUK BEYANI

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında, tüm verilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini, kullanılan verilerde tahrifat yapılmadığını, tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını, kullanılan tüm literatür bilgilerinin bilimsel normlara uygun bir şekilde kaynak gösterilerek ilgili tezde yer aldığını ve bu tezin tamamı ya da herhangi bir bölümünün daha önceden Trakya Üniversitesi ya da farklı bir üniversitede tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

13/07/2021

Albion ARIFI

Yüksek Lisans Tezi
Dirac Alanı için Kuantum Boşluk Enerjisi
T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı

ÖZET

Bu çalışmada; geri zeminde var olan kütlesiz Dirac Alanı'nın içine yerleştirilmiş paralel plakalar ve küresel kabuğun Casimir enerjisi yeniden hesaplanacaktır. Dirac alanı için, MIT veya "bag" sınır koşulunu uyularak, elde edilen modların toplamı göz önüne alınarak, modların toplamı yöntemi ile, hem paralel plakalar hemde küresel kabuk için, renormalize edilmiş Casimir enerji elde edilmiştir. Kuantum boşluk enerjisi sonsuz bir nicelliği temsil eder, onu sonluya dönüştermek için birinci problemde üstel fonksiyonlarının özelliklerini ve ikinci problemde zeta fonksiyonu kullanılmıştır. Bu dönüşme regülarizasyon denir. Kuantum boşluk enerjisinin regülarizasyondan sonra bazı ıraksak katkılar hala mevcut olmaktadır, kuantum boşluk enerjisi üzerine bu katkıları çıkartmak için renormalizasyonu yapılmıştır. "Heat Kernel" katsayıları kullanılarak renormalizasyon gerçekleştirilmiştir. İki plaka arasında Dirac alanı için çekici ve küresel kabuk itici Casimir kuvvetini elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar, literatür ile uyumludur.

Regülarizasyon ve renormalizasyon yöntemleri göz önüne alındığında; elimizde, yegâne bir matematiksel teknik bulunmadığından, farklı kuantum alanları için farklı geometrideki kuantum boşluk enerjisi çalışmaları bize yeni gelişmeler sunacaktır. Bu çalışmadan kazanılan birikimle eş merkezli iki küre arasındaki Dirac alanının Casimir etkisi gelecekte tartışılacaktır.

Yıl: 2021

Sayfa Sayısı: 74

Anahtar Kelimeler**:** Casimir Enerji; Regülarizasyon; Renormalizasyon; Dirac Alanı; Modların Toplamı Metodu.

Master Thesis

The Quantum Vacuum Energy for Dirac Field

Trakya University Institute of Natural Sciences

The Department of Physics

ABSTRACT

In this thesis it was recalculated the Casimir energy between two parallel plates and for the spherical shell placed in the ground state of Dirac field. The renormalized Casimir energy was obtained for Dirac field for both parallel planes and spherical shell by the mode summation method. Therefore, during the calcultaions it was used the mode summation function while the field obeys the MIT or "bag" boundary condition. The vacuum energy represents an infinite quantity therefore for the first problem were used the properties of the exponential function to transform that quantity into finite; whereas for the second problem was used zeta function. This transformation is called regularization. After the regularization of vacuum energy in spherical shell geometry some divergent contributions still appear. Hence upon vacuum energy, it was done the renormalization to eleminate these contributions. Renormalization is done by using heat kernel coefficients. Casimir force for Dirac field between two parallel planes is founded to be attractive and in spherical shell repulsive. The results obtained are compatible with previous calculations by many researchers.

There is no unique mathematical technique in concern with the regularization and renormalization methods, hence the studies upon quantum vacuum energy for different quantum fields in different geometries will provide us with new outcomes. With the conclusions provided by this study, in the future will be discussed the Casimir effect between two concentric spheres.

Year: 2021

Number of pages: 74

Keywords: Casimir Energy; Regularization; Renormalization; Dirac Field; Mode Summation Method.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER iv
KISALTMALAR DİZİNİ vi
ŞEKİLLER DİZİNİ vii
ÇİZELGELER DİZİNİ viii
BÖLÜM 1 1
GİRİŞ 1
BÖLÜM 2 5
DİRAC ALANI VE SIFIR-NOKTA ENERJİSİ 5
2.1 Dirac Alanı 5
2.2. Sıfır Nokta Enerjisi 9
BÖLÜM 3 14
İKİ PARALEL PLAKA ARASINDA DİRAC ALANI İÇİN CASİMİR ETKİSİ 14
3.1. Dirac Alanın Modları 14
3.2. Casimir Enerji 21
BÖLÜM 4 24
KÜRESEL KABUK İÇİN DIRAC ALANIN CASIMIR ETKİSİ 24
4.1. Dirac Alanın Modları 24
4.2. Küresel Kabuğun Casimir Enerjisi 29
4.3. Iraksak Katkıları 34
4.4. Kütlesiz Spinor Alanı İçin Casimir Etkisi 50

SONUÇLAR 57
KAYNAKLAR 59
ÖZGEÇMİŞ..... 63

KISALTMALAR DİZİNİ

M.I.T "bag" modeli : Massachusetts Institute of Technology "bag" modeli

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Boşluğa yerleştirilmiş, d mesafe ile ayrılmış iki sonsuz iletken plaka 14

Şekil 3.2. İki bileşenli momentum ve r değişken arasındaki ilişki 19

ÇİZEGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. $x_{i,\alpha}$ katsayıları 32

Çizelge 4.2. Dış bölge için $x_{i,a}$ katsayıları 46

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Kuantum alan teorisinin gözlenebilir, ölçülebilir bir sonuç olan Casimir etki, ilk defa 1948'de boşluğun boş olmadığını, geri zeminde var olup yok olan sanal parçacıkların salınımlarında var olan alanın taban durumu enerjisi, kuantum vakum enerji, olarak ifade edilmiştir. Casimir; geri zeminde var olan elektromanyetik alan içine yüksüz iletken iki plakaya bandırdığında, plakalar arasında çekici bir kuvvetin oluştuğunu göstermiştir (Casimir, 1948). Geri planda var olan elektromanyetik dalgaların modları; bandırılan plakalardan dolayı, sınır değer değişimi, yüksek frekansla modlar plakaları delip geçer, baziları ise plakaların arasında kalır. İçerdeki modlar dışındaki modlara uyum sağlamaya geçtiğinde plakalar birbirine doğru çekilir bu Casimir'in çekici kuvvetidir.

Casimir'in bu teorik öngörüsü izleyen zaman içerisinde, 1956 yılında laboratuvarda ilk defa bu etki gözlemlenmiştir (Sparnaay, 1958). Şimdilerde ise gelişen teknolojinin unsurları ile öngörülen teorik sonuç daha az hata paylarıyla doğrulanmaktadır (Reynaud, Lambrecht, Genet, & Jaekel, 2001). Her ne kadar Casimir etki Van der Waals olarak bilinen etki ile yakınlık içerse de, Casimir etki tamamen geri zeminde var olan kuantum alanın taban durumu enerjisidir (Casimir & Polder, 1948). Van der Waals kuvvet; birbirine yakın nötr iki atom ya da molekül arasındaki kutupsal olmayan elektrik dipol momentin ürettiği taban durumu katkısının soncudur. Hâlbuki

kozmosta var olan bütün kuantum alanların taban durumu yani kuantum boşluk enerjileri vardır. Ayrıca Casimir etki; boşluğun boş olmadığını bize gösteren bir etkidir.

Casimir; paralel plakalar arasında ortaya çıkan çekici kuvvetin, küresel kabuk içinde geçerli olacağından hareketle, elektronun üzerindeki yükü açıklamaya çalışan bir model önerdi. Bu model başarısızlıkla sonuçlandı, çünkü küresel kabuktaki kuantum boşluk enerjisinin işareti pozitif olarak çıktı. Bu da küresel kabuğun kuantum boşluk enerjisinin itici kuvvet ürettiğini söyler. Böylelikle görüldü ki Van der Waals kuvvet'ten farklı olarak, Casimir etkinin işareti; geometri'den geometriye değişmektedir. Daha sonra yapılan çalışmalardan da görüldüğü üzere, Casimir enerji; geometriden geometriye, boyuttan boyuta, alandan alana işaret değişimi göstermektedir. Casimir etki kuantum mekaniksel bir etkidir, her kuantum alan için var olan bir içsel dinamiğinin ürünüdür.

Farklı kuantum alanları ve farklı geometrik yapıları için Casimir etki üzerinde birçok çalışmalar literatürde yer almaktadır. Böylece araştırma makalelerin arasında, Robin sınır koşullarına sahip iki paralel plaka arasındaki Casimir skaler etkisine (Romeo & Saharian, 2002), küresel geometride masif skaler alan için Casimir etkisine (Bordag, Elizalde, Kirsten & Leseduarte, 1997), iki eş merkezli küre arasında Casimir etkisine (Özcan, 2012) vs. bahsedebiliriz. Elektromanyetik alan için, küresel geometride (Nesterenko & Pirozhenko, 1998) ve silindirik geometride (Bordag, 2006) elektromanyetik alan için Casimir etkisi için hesaplamalar vardır. Dirac alanıyla ilgili olarak, bir küresel koşularda fermiyonik Casimir etkisi için hesaplamalar vardır (Elizalde, Bordag & Kirsten, 1998), hatta silindir-plaka reel problemi gibi iki cisimle ilgili problemler de hesaplamalar yapılmıştır (Teo, 2015).

Kuantum boşluk enerjisi, matematiksel olarak, sonsuzluk içermektedir, Casimir enerji hesaplamalarında; öncelik, sonsuzlukların belirlenmesi yani sonsuzluğa getiren büyüklüklerini belirlenmesi gerekir. Sonsuzlukları belirleme işine regülarizasyon denir. Regülarizasyon için kullanılan kesilim fonksiyonu (Milton, 1983), zeta fonksiyon regülarizasyonu (Elizalde & Romeo, 1989) ve nokta bölme şeması (Newton, Osland & Wu, 1994) gibi farklı yöntemler bulunmaktadır. Hesaplamalar Green fonksiyonu (Milton, 2004) veya modları üreten fonksiyonu (Elizalde, 1991) kullanılarak yapılabilir. Regülarizasyon işlemi yapıldıktan sonra, regülarize edilmiş boşluk enerjisinde bazı

ıraksak katkılar ve sonsuzlukları hala mevcuttur, bu nedenle renormalizasyon yöntemi ile bu katkıları çıkartabiliriz (Matt, 2018). Kullanılan bu teknik; regülarize edilmiş vakum enerjisi için tüm ıraksak katkıların "heat kernel" katsayıları ile temsil edildiğidir. Elektromanyetik boşluğa yerleştirilmiş bir küre (Bordag & Kirsten, 2002) veya D-boyutlu küre üzerindeki Laplace operatörü (Bordag, 1996) gibi problemlerde "Heat kernel" katsayıları tanımlamak için birçok hesaplamalar yapılmıştır.

Casimir kuvvet son derece zayıf olmasına rağmen, onu ölçmek için birçok deney yapılmıştır. Örneğin, bu kuvveti 0.6 ila 6 μm aralığında Lamoreaux (Lamoreaux, 1997) ölçülmüştür. Daha önceki ölçümler Sparnaay tarafından yapılan 1958 yılına kadar uzanmaktadır (Sparnaay, 1958). Diğer hassas ölçümler, Casimir kuvvetini 0,1 ila 0,9 μm aralığında hesaplayan Mohideen gibi birçok araştırmacı tarafından gerçekleştirilmiştir (Mohideen & Roy, 1998). Bu ölçümlerin ve diğerlerinin önemi Casimir'in teorik tahminini destekler ve bu ölçümler teorik sonuçlarla uyumludur.

Bu çalışmada kuantum boşluk enerjisi Dirac alanı için belli iki durum gözönüne alınacaktır: iki paralel plaka arasında ve küresel geometri için fermiyonik Casimir etkisi üzerinde çalışılacaktır. Dirac alanı, Dirac denklemine uyar ve elektron, kuarklar gibi 1/2 spinli parçacıkları tanımlar.

İlk problemi çözmek için, iki spinor formalizmi (Backdahl & Kroon, 2016) gibi birçok formlar vardır, ancak bu çalışmada daha basit matematiksel yöntemler kullanmıştır. Öte yandan ikinci problem daha zordur çünkü geometri daha karmaşıktır ve dalga fonksiyonunun çözümü küresel koordinatlarda olmaktadır.

Kuantum vakum enerjisi hesaplamalarında sonsuzlukların belirlenmesi yani regülarizasyonu yapmak zorundayız, çünkü; vakum enerjisinin kendisi ıraksak bir niceliktir. İlk durum için, üstel fonksiyonları ve bunun hiperbolik fonksiyonlarla bağlantısını kullanarak çok daha kolay regülarizasyon tekniğini kullanacağız. Küresel geometri için, "heat kernel" katsayılarının belirlenmesi tekniğini kullanacağız. Paralel plakalardaki skaler alanı için Casimir kuvvetin çekici olma özelliği, Dirac alanı için de çekici kuvvet ürettiği yeniden elde edilmiştir.

Bu çalışmada, hesaplamaları gerçekleştirmek için sayısal tekniklere dayanmaktadır. Üçüncü bölümünde üstel fonksiyonları özellikleri kullanılarak hesaplamaları yapılmıştır; dörtüncü bölümünde ise küresel Bessel fonksiyonları, mod toplama fonksiyonu ve diğer bazı fonksiyonlar gibi çeşitli fonksiyonları kullanılmıştır. Aynı şekilde birçok dönüşümler ve açılımlar kullanılmıştır. Böylece çalışmamız teorik varsayımlara ve sonuçlara dayanan analitik bir çalışmayı temsil etmektedir.

BÖLÜM 2

DİRAC ALANI VE SIFIR-NOKTA ENERJİSİ

Bu bölümde: Dirac denklemini, rölativistik kuantum denklemini, gözönüne alarak, Dirac alanını inşa edeceğiz. Spin'i ½ olan kütlesiz kuantum alanını temel özelliklerini bağlı kalarak Dirac alanının kuantum boşluk enerji durumunu betimleyeceğiz.

2.1 Dirac Alanı

Göreli kuantum mekaniği gereğince; parçacıklarına spin durumlarına göre farklı kuantum denklemleri gözönüne alınır: genelde spin-0 parçacıklar için Klein-Gordon denklemi; yarım sayılı ($1/2$, $3/2$ gibi) spinler için Dirac denklemi ve spini bir olan elektromanyetik alan için ikinci kuantizasyon koşullunu sağlayan Maxwell denklemleri.

Yarım sayılı spinler için Dirac denklemi

$$\left(i\gamma^{\mu}\,\partial_{\mu} - m\right)\psi = 0 \qquad (2.1)$$

şeklinde ifade edilir. Burada γ 'lere gamma matrisleri veya Dirac matrisleri denir ve μ =0,1,2,3 değerleri alabilir. ψ veya ψ_{α} ($\alpha = 1,2,3,4$) dört bileşenli bir spinör fonksiyonudur.

Dirac denklemi, Schrödinger denkleminden farklı olarak Lorentz dönüşümleri altında değişmez kalma özelliğini verecek bir kuantum göreli denklem bulma

girişiminde Dirac'ın tarafından türetilmiştir. Klein Gordon'un yaptığı gibi kuantum postulatlarını kullanarak göreli enerji ifadesini kullanmıştır.

Dirac denklemi, elektron, nötrino ve kuarklar gibi fermiyonlar olarak adlandırılan spin ½ parçacıklarını dinamiğini tanımlamaktadır. γ (4 × 4) bir matris olduğundan, (2.1) denklem dört farklı çözümü (ψ) içeren dört denklem setini temsil eder. İlk çözümlerden ikisi; yukarı ve aşağı spine sahip parçacıkları tanımlarken, diğer iki çözüm aynı spin'e karşılık gelen spinlerle anti parçacıkları tanımlamaktadır. Bu çözümler birbirinden bağımsızdır; bu da her çözümün bir parçacığı (anti parçacığı) kendine özgü bir durumda tanımladığı anlamına gelir. Dolayısıyla bağımsızllık, Dirac denklemi için dört çözüm bulunduğuna dair yukarıdaki ifade için sağlam bir argümanı temsil eder.

Dirac denkleminin eşlenik formu

$$\left(\mathrm{i}\,\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu + \mathrm{m}\bar{\psi}\right) = 0 \tag{2.2}$$

şeklinde yazılır. Burada $\bar{\psi}$ dalga fonksiyonun eşlenik formüdur**.** Eşlenik Dirac denklemi, Dirac denkleminin kendisi ile birlikte dört akımı bulmak için kullanılır

$$\mathrm{j}^\mu = \langle\bar{\psi}|\gamma^\mu|\psi\rangle \tag{2.3}$$

Dört akımın diverjansı sıfıra eşittir

$$\partial_\mu \mathrm{j}^\mu = 0 \tag{2.4}$$

Dirac denklemi parçacıkların spinlerini hesaba kattığından, spin için matematiksel ifadeyi yazmayı gerekmektedir (Mandl, 1984)

$$\sum_{\mathrm{i}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\sigma_{\mathrm{i}} & 0\\ 0 & \sigma_{\mathrm{i}}\end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Burada σ_i Pauli matrisleridir ve aşağıdaki gibi yazılır

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix} \tag{2.6}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Kuantum Alan Teorisinde ψ alanları temsil eder ve parçacıklar yalnızca bu alanın uyarılmalarıdır ve o alanın kuanta'sıdenir (Itzykson & Zuber, 1980). Klasik teoride alan, uzayın her yerine yayılmış tıpkı matematiskel olarak noktasal parçacıklar gibi uzayın ve zamanın bir fonksiyonudur. Ancak kuantum teorisinde alan tanımı daha karmaşıktır: alan, uzayın her yerine yayılmış bir niceliktir ve en önemli nokta, parçacıkları oluşturup yok edebilen bir operatör veya alan operatörü olarak tanıtlanmaktadır (Greiner & Reinhardt, 1996). Kuantum alanı değişmezlik kalma özelliğine sahiptir ve vakum durumu adı verilen benzersiz bir durum vardır burada vakum durumu kuantum alanın taban durumunu gösterir (Asorey, 2018). Boşluk enerjisi kavramı, çalışmamızda tartıştığımız Casimir etkisinin ana fikrini oluşturur. Bu açıklamadan sonra Kuantum Alan Teorisindeki (2.1) denklemi Dirac alanının modların tanımlayan denklemi olduğunu söyleyebiliriz ve onun çözümleri ψ alanı betimlemektedir.

Kuantum alan teorisi tanımlanırken, alanların alan operatörü olarak düşünüldüğü ikinci kuantizayonu yaptığımızdan bahsetmek önemlidir. İkinci kunatizasyonun veya bilindiği şekliyle kanonik kuantizasyonun temel fikri ilk olarak Dirac tarafından tanıtılmıştır (Dirac, 1927). İkinci kuantizasyonu, Dirac alanı dışındaki tüm alanlar için sıra değiştirme bağıntıları kullanılarak yapılmaktadır. Dirac alanı için ikinci kuantizasyonu, alan ve onun eşleniği için anti-sıra değiştirme bağıntıları kullanılarak yapılır; burada anti- sıra değiştirme bağıntıları; Dirac denklemi çıkarıldığında kullanılan Clifford cebirinin doğrudan sonuçlarıdır (Das, 2008). Spinör alanı ve eşleniği için

$$[\psi_\alpha(x)\psi_\beta(y)]_+ = [\psi_\alpha^\dagger(x)\psi_\beta^\dagger(y)]_+ = 0 \tag{2.7}$$

$$[\psi_\alpha(x)\psi_\beta^\dagger(y)]_+ = \delta_{\alpha\beta}\delta^{(3)}(x-y) \tag{2.8}$$

sıra değiştirme bağıntıları yazabiliriz. Burada

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \alpha \neq \beta \\ 1 & \alpha = \beta \end{cases}$$

Kroneker delta fonksiyonudur; $\delta^{(3)}(x-y)$ Dirac delta fonksiyonudur.

$$\psi^{\dagger} = \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,0}} \tag{2.9}$$

$\psi^{\dagger}$ alanının Hermitsel eşleniği gösterir. $\mathcal{L}$ Dirac alanın Lagrangian yoğunluğunu temsil eder ve

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^{\mu}\,\partial_{\mu} - m)\psi \tag{2.10}$$

denklem ile verilir. $\bar{\psi}$ fonksiyonu ψ alanın eşleniğidir.

Bir alan teorisinin tanımlanması için Hamiltoniyen'i yazılmasi gerekir, ayrica ilk (2.1) denklemin

$$\psi = \sum_{r,p} \sqrt{\frac{m}{VE_p}} \left(c_r(p)u_r(p)e^{-ipx} + d_r^{\dagger}(p)v_r(p)e^{ipx}\right) \tag{2.11}$$

$$\bar{\psi} = \sum_{r,p} \sqrt{\frac{m}{VE_p}} \left(d_r(p)\bar{v}_r(p)e^{-ipx} + c_r^{\dagger}(p)\bar{u}_r(p)e^{ipx}\right) \tag{2.12}$$

kesikli çözümlerini yazıyoruz. Bu formüller düzlem dalgaları temsil eder. Düzlem dalgalar, uzayda belirli bir yöne dik olan belirli bir düzlemde sabittir. $u_r(p)e^{-ipx}$ ve $v_r(p)e^{ipx}$ ile gösterilen fonksiyonlar sırasıyla parçacıklar ve antiparçacıklar için (2.1) 'in öz fonksiyonları olduğu söylenir. c, d katsayıları ise klasik alan veya Göreli Kuantum Mekaniğinin aksine, bunlar sadece sayılar değil, operatörlerdir (işlemciler), yaratma ve yok etme operatörleridir. E_p enerjidir ve V alanın çevrelediği hacimdir, p 3-momentumdur ve r değerleri, $r = 1$ spin yukarı temsil eder ve $r = 2$ spin aşağı temsil eder.

Dirac alanı için Hamitonyeni:

$$H = \int (-i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\,\partial_{\mu}\psi + m\bar{\psi}\psi) \tag{2.13}$$

yazılır. Denklem (2.11) ve (2.12) 'yi (2.8)' e koyarak Dirac katsayıları için

$$[c_r(p)c^{\dagger}{}_s(p')]_+ = [d_r(p)d_s^{\dagger}(p')]_+ = \delta_{rs}\delta_{pp'} \quad (2.14)$$

anti sıra değiştirme bağıntıları bulunur.

Diğerleri katsayılar arasındaki anti sıra değiştirme bağıntıları sıfırdır. Bu bağıntı, alan teorisinde en önemli bağıntıdır ve alan teorisi inşa etmek en temel rol taşımaktadır.

(2.11), (2.12) ve (2.14) denklemleri (2.13) de kullanarak Dirac alanı için Hamiltoniyeni

$$H = \sum_{r,p} E_p(N_r(p) - 1/2 + \overline{N_r}(p) - 1/2) \quad (2.15)$$

elde ederiz. Burada $N_r(p)$=$c_r^{\dagger}(p)c_r(p)$ ve $\overline{N_r}(p)$=$d_r^{\dagger}(p)d_r(p)$ sırasıyla $n_r(p)$ ve $\overline{n_r}(p)$ özdeğerleri olan Dirac sayı operatörleridir.

(2.11) ve (2.12) denklemlerinde bulunan katsayılar, yaratma ve yok etme operatörleridir. $c_r^{\dagger}(p)$ operatörü boşluktan bir parçacık oluştururken $c_r(p)$ aynı parçacığı boşlukta yok eder. Matematiksel olarak şu şekilde yazılabilir:

$$c_r(p)|0> = 0 \quad (2.16)$$

Burada $|0>$ taban durumudur. Aynı şekilde, $d_r^{\dagger}(p)$ operatörü vakumdan bir antiparçacık oluşturduğu ve $d_r(p)$operatörü onu yok ettiği diğer iki katsayı için de geçerlidir.

2.2. Sıfır Nokta Enerjisi

Dirac denkleminden hareketle, ikinci kuantizasyon yolu ile Hamilton işlemcisinin boşluk; yani $|0>$ taban durumun nasil elde edileceğini görelim:

$$<0|H|0> = <0|\sum_{r,p} E_p(N_r(p) - \frac{1}{2} + \overline{N_r}(p) - \frac{1}{2})|0> = \quad (2.17)$$

$$<0|\sum_{r,p} E_p\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)|0> = \sum_{r,p} E_p\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

(burada $<0|0> = 1$). Yukarıdan bakıldığında, boşluk sonsuz Dirac parçacıklarıyla dolu gibi görünmektedir; parçacıkların her birinin farklı frekansı vardır (doğal

birimlerde $E_p = \omega_p$), ancak anti parçaciklar negatif enerji durumlarına hepsini doldurmuşlardır.

Vakum durumuna uygulanan Hamiltoniyen'in beklenti değerlerinin sıfır olmasını bekliyoruz, ancak gerçek tam tersi görülüyor. Aslında bu sonuç bir ilgi ve merak kaynağıdır çünkü vakum parçacıklarla dolu halde bulunur (daha doğrusu sanal parçacıklarla) ve Dirac alanda bu parçacıklar negatif enerji durumlarını dolduran parçacıklardır. Tabam durumunda kuantum alan teorisinde vakum sıfır nokta enerjisi denir.

İlerlemeden önce, Dirac denklemi gibi göreli denklemlerde çözümlerin pozitif ve negatif enerjiye sahip olabileceğini vurgulamak önemlidir. Negatif enerjilerin varlığını açıklamak için Dirac, "Delik teorisi" adlı bir teori geliştirmiştir (Dirac, 1929).

Dirac Delik Teorisi'ne göre uzay sonsuz sayıda parçacık içerir, bizim durumumuzda sonsuz sayıda elektron ve uzayın bu bölgesi Dirac denizi olarak adlandırmaktadır. "Dirac denizinde" tüm bu elektronların enerjisi negatiftir. Pauli'nin dışarlama ilkesi nedeniyle deniz dışında pozitif enerjiye sahip elektronlar denize düşemezler. Denizden gelen elektron, denizin dışına geçiş yapıp "pozitif enerji" elde edebilecek kadar enerjiyi emer ve bunun sonucunda, arkasında onun anti parçacığı gibi davranan bir delik bırakır. Elektron bir nedenden dolayı soğurduğu enerjiyi yayarsa, tekrar deliğe düşer ve yok olma işlemi gerçekleşir.

"Negatif enerjiyi" açıklamanın bir başka yolu da bu enerjiye pozitif olarak bakmaktır, ancak bu enerjiye sahip olan parçacık zaman içinde geriye doğru hareket eder ve buna anti parçacıklar denir (örneğin, elektronun anti parçacığı pozitrondur). Bu açıklama Feynman'dan etkilenilmiştir (Feynman & Weinberg, 1987).

Bundan sonra, sürekli olarak oluşturulan/yok edilen parçacık/anti parçacık çiftleriyle dolu vakumu tanımlıyoruz ve bu parçacıklara sanal parçacıklar deniliyor çünkü o kadar kısa bir süre içinde var oluyor ki, onları herhangi bir ölçümle tespit edemiyoruz (Milonni, 1993). Bu sürece alan dalgalanması denir ve kuantum alan teorisinin en önemli tahminidir (Reynaud, Lambrecht, Gene & Jaekel, 2001).

Bu olay sırasında, parçacık-anti parçacık çifti boşluktan ortaya çıkar ve kısa bir süre için tekrar birbirini yok eder (Barcelona, 2017). Bu arada fiziğin en temel yasalarından biri olan yük korunumu yasası korunur. Parçacık-anti parçacık çifti yaratılmadan önce ve yok edildikten sonra toplam yük sıfıra eşittir.

Sürece, sanal parçacıkların etkileşime girdiklerini tespit edemeyiz. Parçacık-anti parçacık çiftlerinin varoluş zamanı ve onların enerjileri Heisenberg belirsizlik ilkesi ile belirlenmektedir.

Heisenberg belirsizlik ilkesi

$$\Delta E \Delta\, t \;\geq\; 1/2 \qquad (2.18)$$

denklemi ile verilir (burada ħ aldık çünkü doğal birimleriyle çalışıyoruz). ΔE - boşluktan "ödünç alınan" enerji varyasyonudur (Klauber, 2013) ve enerji büyüklüğü sürecin Δt- zaman varoluşunu bildirir. Δt – zaman varyasyonu sıfır aralığında bulunur diğer anda ΔE varyasyonu sıfırdan çok uzak bulunmaktadır. Enerji için yaptığımız gibi vakum dalgalanmasını açıklamak için belirsizlik ilkesini 3-momentuma ve konuma göre yazabiliriz, demek ki parçacık-anti parçacık çiftleri oluşturmak için boşluktan 3-momentum "ödünç" olarak alınır.

Özetle sıfır nokta enerjisi ve vakum dalgalanması için, spinor alanı gibi herhangi bir kunatize edilmiş alanın, farklı frekanslara sahip bir osilatör kümesi olarak kabul edildiğini söyleyebiliriz. Sıfır nokta enerjisi veya bu alanın taban durumunun enerjisi, vakum salınımlarının tüm enerjilerinin toplamı ile verilir (Bordag, Klimchitskaya, Mohideen & Mostepanenko, 2009).

Dirac Hamiltoniyen için Dirac alanı sıfır nokta enerjisi veya onun beklenti değerleri

$$\mathrm{E}_0^{1/2} = -2\sum_{\mathrm{j}} \mathrm{w_j} \qquad (2.19)$$

denklem ile verilir.

Burada; "0" alt simge sıfır nokta enerjisi veya vakum enerjisini, üst simge ½ spinor alanını göstermektedir. $j = (n, l, m)$ indeksi, $n = 1,2,3 \ldots$ baş kuantum sayısı,

$l = 0,1, \ldots n-1$ açısal kuantum sayısı ve $m = -l, -l+1, \ldots 0, 1, \ldots . +l$ azimutal kuantum sayısından oluşur. (2.19) denklem 'de Planck sabitinin bire eşit olduğu (ħ = 1) doğal birimler kullanılmıştır. (2.19) denklem'deki j indisi sonsuz bir değer alabildiğinden, toplam yani boşluk enerjisi sonsuzdur.

Casimir etkisi, vakum dalgalanmasının doğrudan bir sonucudur. Teorik perspektifte Casimir tarafından 1948'de yayınlanan bir makalede keşfedilmiştir (Casimir, 1948). Casimir, bu makalede, boşluğa yerleştirildiğinde paralel ve yüksüz iki iletken düzlemin nasıl birbirini çektiğini anlatmıştır. Bu olgu Casimir etkisi ve bu çekim kuvveti Casimir kuvveti olarak adlanmıştır. Casimir, kuantize edilmiş elektromanyetik alan üzerinde çalışarak varsayımını ve hesaplamalarını yapmış, ancak bugün Casimir kuvvetinin skaler ve spinör alan için bulunduğu birçok çalışma bulunmaktadır (Greiner & Reinhardt, 1987)

Plakalar arasındaki çekici kuvveti açıklayan ana fikir, bu alanın sonsuz farklı frekanslara sahip bir dizi osilatörden oluşmasıdır. Plakalar boşluğa yerleştirildiğinde, bu frekans yapılandırma bozulur, plakalar arasındaki frekanslar plakalar arasındaki ayrıma bağlı olarak belirli değerleri sahiptir ve plakaların dışındaki frekanslar herhangi bir değere sahip olabilir. Bu, Casimir baskısı adı verilen bir baskıya yol açar ve Casimir etkisinin gerçek nedeni budur (Lambrecht, 2002).

Çekici kuvveti; alanın türü (skaler, elektromanyetik veya spinör), geometriye ve boyuta bağlıdır. Örneğin, küresel veya silindirik gibi farklı geometriler, benzer değerlere sahip değildir.

Bu çalışmada, var olma ve yok olma işlemcileri ile tanımlanmış Dirac alanı'nı ele alıyoruz. İki farklı geometri durum incelenmiştir: öncelikle iki plaka arasındaki Casimir etkisi ve sonra küresel kabukta Casimir etkisi. İlk durumda Casimir kuvveti negatif değeri almaktadır, bu yüzden çekici bir kuvvet üretir. İkinci geometride ise Casimir kuvvetinin pozitif değeri vardır, bu yüzden kuvvet iticidir.

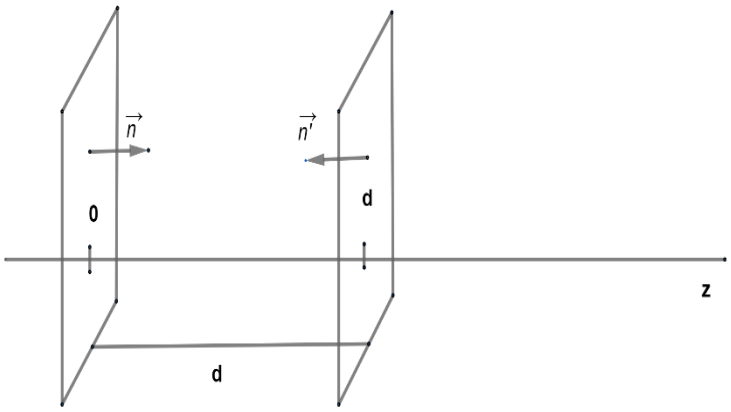
BÖLÜM 3

İKİ PARALEL PLAKA ARASINDA DİRAC ALANI İÇİN CASİMİR ETKİSİ

Bu bölümde Dirac alanın içine yüksüz ilekten iki plaka yerleştirilerek oluşan sistemin kuantum boşluk enerjisi hesaplanacak. Plakalar arasindaki modlar kesikli frekanslara sahiptir. Plakalar vakuma yerleştirildiğinde vakum frekansı dağılımının bozulması, aralarında çekici bir kuvvetin ortaya çıkmasına neden olmaktadır. Bu bölümde ilk olarak modların dağılımını belirleyeceğiz ve ardından kuantum boşluk enerjinin regülarizasyonu yapılacaktır. Regülarizasyon üstel kesici fonksiyonları kullanarak gerçekleştirecek. Sonuç olarak iki paralel plaka arasında Dirac alanı için Casimir kuvvetin itici olduğunu yeniden elde edeceğiz.

3.1. Sınır Koşulları ve Casimir Enerjisinin Plakalar Arasında Hesaplanması

Daha önce Dirac alanının taban durumunun muazzam enerji içerdiğini, sonsuz olduğunu tartışmıştık. Ancak boş uzayda, ima edilen sınırlar olmadıkça herhangi bir sonuç gözlenmemektedir. Bahsedildiği gibi boşluk deforme edildiğinde Casimir etkisi gerçekleşir.



Şekil 3.1. Boşluğa yerleştirilmiş, d mesafe ile ayrılmış iki sonsuz iletken plaka

Bu bölümde en basit geometriyi, iki sonsuz paralel plakaları ele alacağız. Bu durum ilk olarak Casimir (Casimir, 1948) tarafından kuantize elektromanyetik alan için incelenmiştir. Problemim aynı fakat alan farklıdır, geri zemindeki alan: kuantize edilmiş Dirac alanıdır.

Şekil (3.1)'de gösterildiği gibi, iki paralel plaka z eksenine, $z = 0$ ve $z = d$'ye yerleştirilmiştir. İki plaka arasındaki mesafe d'dir. Plakalar iletken ancak yüksüzdür. Yüksüz olmalarının nedeni, bu plakalar arasında elektromanyetik etkileşimin meydana gelmemesi içindir (Farina, 2006).

Dirichlet, Neumman ve Robin sınır koşulları gibi sınır koşulları genellikle literatürde incelenmiştir. Ancak Dirichlet sınır koşulu gibi sınırlar, (2.1) Dirac denklemi ile çelişmektedir, bu nedenle ψ bi-spinör üzerine uygulanan Dirichlet sınır koşulu anlamsızdır (Bordag, 2009). Bu durumda kullanılan sınır koşulu, hadron yapısını açıklamak için kullanılan model olan M.I.T "bag" sınır koşuludur (Johnson, 1975).

"Bag" modelinde plakalardan parçacık akımı geçmez ve

$$\hat{n} \cdot \vec{j}(x) = 0 \qquad (3.1)$$

olarak yazılır. Burada $\hat{n}$ vektörü $z = 0$ 'da yüzey dik birim vektörüdür ve $z = 0$ 'da birim vektörü $\widehat{n'}$ ile gösterir. $\widehat{n'}$ ters işareti sahiptir. (3.1) denklemi her iki plaka için ($z = 0$ ve $z = d$) geçerlidir.

Yüzeydeki sınır koşulları

$$in\gamma\psi(x) = \psi(x) \qquad (3.2)$$

yazılabilir. $n = n_\mu = (n^0, \vec{n})$ dört bileşenli birim vektörüdür ve yüzeye diktir. Gamma matrisleri

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

biçiminde yazılır. Burada $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ Pauli matrisleridir.

(3.2) denklemi bir çözümdür, onun kesinliğini doğrulamak için Dirac alanı için dört akım denklemi ele alıyoruz:

$$n_\mu j^\mu = \bar{\psi} n_\mu \gamma^\mu \psi = 0 \qquad (3.3)$$

Burada $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ Dirac parçacıklarının akımıdır. Bu denklem (3.1) denkleminin dört bileşenli formudur ve aynı fiziksel açıklamaya sahiptir: duvardan parçacık akımı geçmemektedir.

Şimdi (3.3) denklemin karesini alalım

$$(in_\mu \gamma^\mu)^2 = -n_\mu n_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu \qquad (3.4)$$

Gama matrisleri aşağıdaki özelliğe sahiptir:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g_{\mu\nu} I \qquad (3.5)$$

Burada $g_{\mu\nu}$ metrik tensörürdür ve I matris birimidir. (3.5) 'in (3.4)'e gönderilmesi

$$(in_\mu \gamma^\mu)^2 = -n_\mu n_\nu g_{\mu\nu} = -n_\mu n^\nu = -[(n^0)^2 - \vec{n}^2] = 1 \qquad (3.8)$$

verir. Bu nedenle $(in_\mu \gamma^\mu)$ ifadesi ± 1 öz değerleri alabilir.

(3.2)'nin daha ayrıntılı incelenmesi için, onun ek matrisini buluyoruz. Ek matrisi, (3.2) denklemin γ^0 çarpılmasıyla ve $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ kullanırken

$$i\bar{\psi}(x)\gamma n = -\bar{\psi}(x) \tag{3.9}$$

denklemini elde ederiz. Yüzeyin üzerinde:

$$in_\mu j^\mu = i\bar{\psi} n_\mu \gamma^\mu \psi \tag{3.10}$$

ve

$$in_\mu j^\mu = -\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}\psi = 0 \tag{3.11}$$

(3.8) denklem sonuçlarını birleştirerek, $in_\mu \gamma^\mu$'nin özdeğerlerinin ± 1 olduğu sonucuna varırız.

Plaka yüzeyinde yüklü parçacığın olmadığını açıklayan (3.2) denklemi kullanarak, (3.1)'deki sınır koşulunun doğru olduğu göstermiş bulunduk.

Önceki başlıkta Dirac vakumuda yerleştirilen plaka yüzeyine uygulanan sınır koşullarını bulmuştuk. Şimdi kütlesiz ½ spin parçacıkları için Dirac alanını ele alacağız. Karşılık gelen parçacığın göreli enerjisi $E = |p$ 'dir (bu ilişki $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$ rölativistlik enerjinden türetilmiştir; $c = 1$ alarak doğal bilimleri kulandık ve kütlesiz alanı üzerinde çalıştığımızdan $m = 0$ alıyoruz ve sonuc olarak $E = |p|$'dir).

z-bağımlılığı ile pozitif enerji dalga fonksiyonunu

$$\psi(\vec{x}, t) = e^{-iEt(p_1 x + p_2)}\left[e^{ip_3 z} + i\gamma^3 e^{-ip_3 z)}\right]u(\vec{p}) = e^{-Et}\phi(\vec{x}) \tag{3.12}$$

şu biçiminde yazılır (Chodos, Jaffe, Johnson &Thorn, 1974). Burada $u(\vec{p})$ pozitif enerjili bir spinördür. (3.2) denkleminden

$$in_\mu \gamma^\mu \psi(x) = \psi(x) \tag{3.13}$$

(3.12) denklemini son denklemde yazarak

$$in_\mu \gamma^\mu e^{-Et}\phi(\vec{x}) = e^{-Et}\phi(\vec{x}) \tag{3.14}$$

$z = 0$'da $n_\mu = (0,0,0,1)$ ve z = 0'da $n_\mu = (0,0,0,-1)$ olduğundan, yukarıda açıklanan sınırlara uyan iki denklem vardır.

(3.14) denklemde sınırları uygulanarak ($\phi(\vec{x}) = \phi(0)$ $z = 0$ 'da ve $\phi(\vec{x}) = \phi(d)$ $z = d$'de) ve $z = d$'daki birim vektörün zıt işaretini dikkate alarak, aşağıdaki çift denklemleri türetilmiştir

$$i\gamma^3\phi(0) = \phi(0) \tag{3.15}$$

$$i\gamma^3\phi(d) = -\phi(d) \tag{3.16}$$

Şimdi (3.12) denklem ile verilen dalga fonksiyonunu $\psi(x,t)$ son denklemlere yazıyoruz ve sonuç olarak

$$\left[i\gamma^3 e^{ip_3 d} - e^{-ip_3 d}\right]u(\vec{p}) = -[e^{ip_3 d} + i\gamma^3 e^{-ip_3 d}]u(\vec{p}) \tag{3.17}$$

denklemini elde ederiz. Buradan

$$e^{ip_3 d} = e^{-ip_3 d} \tag{3.18}$$

Sinüs ve kosinüs trigonometrik fonksiyonları cinsinden üstel fonksiyon yazmak için Euler formülünü kullanarak ve aşağıdaki

$$cos\, p_3 d = 0 \tag{3.19}$$

sonucu buluruz. Eğer kosinüs argümanı $n\pi$'ye eşitse momentumun öz değerleri

$$p_3 = \frac{n\pi}{2d} \tag{3.20}$$

elde ederiz. Burada $n = 1,3,5,$ ... Dirac alanı kütlesiz parçacıklar için tanımladığımızdan $E = |p|$ dir ve $|p|$

$$|p| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} = [p_1^2 + p_2^2 + \frac{n^2\pi^2}{4d^2}]^{1/2} \tag{3.21}$$

ile verilir. İki plaka arasında sınırlandırılmış Dirac alanı için (2.19) 'de vakum enerjisinin

$$\mathrm{E(d)} = -2\sum_{\vec{\mathrm{p}}}\sum_{\lambda=\pm 1/2}|\mathrm{p}| \tag{3.22}$$

olarak yazabiliriz. $\lambda = \pm 1/2$ helisite anlamına gelir ve $|p| = |\omega|$ çünkü doğal birimleri kullanıyoruz ($\hbar = 1$).

$|p|$ değerlerinin son denklemde koyarak

$$\mathrm{E(d)} = -2\sum_{\mathrm{P}}\sum_{\mathrm{n\ tek}}[p_1^2 + p_2^2 + \frac{n^2\pi^2}{4d^2}]^{1/2} \tag{3.23}$$

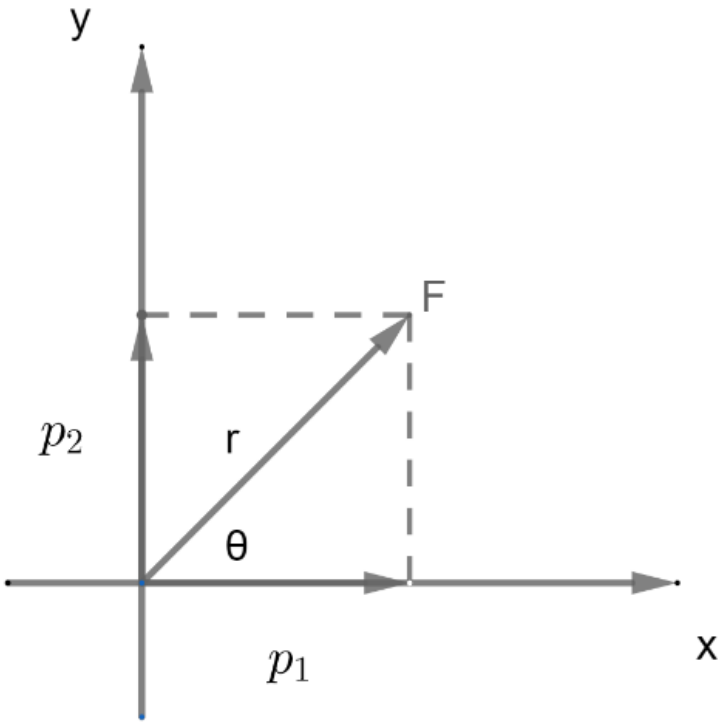
ifadesini buluruz. Toplamın $\vec{p}$ üzerinden integrale değiştiriyoruz

$$\sum_{\vec{p}} \rightarrow \int \frac{d^2p_\perp}{(2\pi)^2}$$

burada $p_\perp^2 = \mathrm{p}_1^2 + \mathrm{p}_2^2$. Buradan

$$\mathrm{E(d)} = -2\sum_{\mathrm{n\ tek}}\int \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{p}_\perp}{(2\pi)^2}[\mathrm{p}_\perp^2 + \frac{n^2\pi^2}{4d^2}]^{1/2} \tag{3.24}$$

elde ederiz. Bu denklemi çözmek için ilk integrand ve $d^2p_\perp$ diferansiyeli değiştiriyoruz. Bunu yapmak için aşağıdaki koordinat sistemini kullanırız



Şekil 3.2. İki bileşenli momentum ve r değişken arasındaki ilişki

Şekilden $p_\perp^2 = \mathrm{p}_1^2 + \mathrm{p}_2^2 = r^2$ ve $d^2p_\perp \to rd\theta dr$ olarak yazılır. Dolayısıyla (3.24) denklem

$$\mathrm{E(d)} = -2 \sum_{\text{n tek}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{rd\theta dr}}{(2\pi)^2} [\,\mathrm{r}^2 + \frac{n^2\pi^2}{4d^2}]^{1/2} \tag{3.25}$$

şeklini alır. Teta (θ) açısı üzerindeki integral 2π'ye eşittir.

$$\mathrm{E(d)} = -2 \sum_{\text{tek}} \int_0^{\infty} \frac{2\pi\mathrm{rdr}}{(2\pi)^2} [\mathrm{r}^2 + \frac{n^2\pi^2}{4d^2}]^{1/2} \tag{3.26}$$

Yukarıdaki ifadeyi basitleştiririz ve integrali aşağıda gösterildiği gibi yeni değişken tanımlayarak

$$x^2 = [r^2 + \frac{\mathrm{n}^2\pi^2}{4\mathrm{d}^2}]$$

$r \to \infty$ iken $x \to \infty$ ve $r \to 0$ iken $x \to \frac{n\pi}{2d}$ olur. Buradan

$$\mathrm{E(d)} = -\frac{1}{\pi}\sum_{\text{tek}}\int_{\mathrm{n}\pi/2\mathrm{d}}^{\infty}\mathrm{x}^2\mathrm{dx} \tag{3.27}$$

elde ederiz.

$E(d)$ ifadesinin regülarizasyona ihtiyacı vardır, çünkü has olmayan integrale sahip, böylece Casimir enerjisi doğrudan bulunamaz. Sınır koşullarının varlığı bu sonsuz enerjinin kaynağıdır. Ancak söylemek gerekir ki iki plaka da geliştiren regülarizasyon yöntemi küresel kabuğu probleminden daha basittir.

Şimdiye kadar hesaplamalar değişken olarak p –momentum ile yapılmıştır; aynı işlemleri k-dalga sayısı için yapabiliriz, çünkü doğal birimleri kullanırken $|p| = |k|$'dir. (3.26) denkleme karşılık gelen dalga sayısı cinsinden sıfır nokta enerjisi formülü

$$\mathrm{E(d)} = -2\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{k}_{\perp}\mathrm{dk}_{\perp}}{2\pi}\sum_{\mathrm{n\ tek}}\omega_{\mathrm{n}} \tag{3.28}$$

şekilde yazılır.

3.2. Casimir Enerji

Kuantum Alan Teorisinde ıraksama ile ilgili sorunlar çok yaygındır ve bunlarla başa çıkmak için birçok yöntem vardır. Sonsuz bir değeri ortadan kaldırmayı ve sonlu bir değere dönüştürmeyi mümkün kılan işlemlere regülarizasyon yöntemi denir (Gobira & Melo, 2020).

Sıfır nokta enerjisinin türetilebilmek için (3.27) ya da (3.28) denklemlerini kullanmalıyız. Son denklemin regülarizasyonu, Abel-Plana formülü kullanılarak yapılır, burada yarım tamsayılar üzerinden toplama yapılır (Podgornik, 1998), diğer yandan momentuma bağlı denklem, sonlu bir integral değeri bulmak için hiperbolik fonksiyonları kullanılır. Hesaplamaları sadece ikinci yöntem için yapacağız çünkü ikisi de aynı sonuçları verir

(3.27) denklemin düzenlemesi üstel olarak düzenlenmiş kesilim fonksiyon ile

$$\mathrm{E(d)} = -\frac{1}{\pi}\lim_{\alpha\to 0}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\sum_{\mathrm{n\ odd}}\int_{\mathrm{n}\pi/2\mathrm{d}}^{\infty}\mathrm{dx}\mathrm{e}^{-\alpha\mathrm{x}} = -\frac{1}{\pi}\lim_{\alpha\to 0}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\sum_{\mathrm{n\ odd}}\mathrm{e}^{-\mathrm{n}\pi\alpha/2\mathrm{d}} \tag{3.29}$$

yazılır (Milonni, 1993). Burada

$$\sum_{\text{n odd}} \mathrm{e}^{-\mathrm{n}\pi\alpha/2\mathrm{d}} = 2\,cosch\frac{\pi\alpha}{2\mathrm{d}} \tag{3.30}$$

$\lambda \to \alpha\pi/2d$ olsun, o halde hiperbolik kosekant fonksiyonun açılımı

$$cosch\,\mathrm{x} = \frac{1}{\mathrm{x}} - \frac{1}{6}\mathrm{x} + \frac{7\mathrm{x}^3}{360} + \cdots \tag{3.31}$$

olur. (3.30) ve (3.31) denklemleri kullanırken (3.29) denkleminin çözümü

$$\mathrm{E(d)} = -\frac{1}{2\pi}\lim_{\alpha\to 0}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left[\frac{2\mathrm{d}}{\pi\alpha^2} - \frac{\pi}{12\mathrm{d}} + \frac{7\pi^3}{360}\frac{\alpha^2}{8\mathrm{d}^3} + \cdots\right] \tag{3.32}$$

ifadesiyle verilir. Türevini alınarak

$$E(d) = -\frac{1}{2\pi}\lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{12\mathrm{d}}{\pi\alpha^4} + \frac{7\pi^3}{360}\frac{1}{8\mathrm{d}^3} + O(\alpha^k)\right] \qquad k \geq 3$$

elde ederiz. $O(\alpha^k)$ terimleri α bağılı olduğu için sıfır oluyor. Diğer anda, ilk terim $\alpha \to 0$ giderken sonsuzdur bu nedenle renormalizayon yöntemi ile çıkartmak gerekir. Renormalizasyon yapıldıktan sonra

$$\mathrm{E(d)} = -\frac{7\pi^2}{2880\mathrm{d}^3} \tag{3.33}$$

sonucu elde ederiz.

(3.33) denklem elde etmeye istediğimiz sonuçtur ve spinor alanında bulunan iki yüksüz paralel plaka arasındaki sıfır nokta enerjisini veya iki paralel plaka arasındaki Dirac alanı için Casimir enerjisini temsil eder. Sonucumuz, birçok araştırma makalesinde (Johnson, 1997) bulunan önceki sonuçlarla uyuşuyor ve bilimsel literatürdeki sıfır nokta değerinin doğruluğu bizim sonucumuzla aynı, bu bizim çalışmamızın doğru olduğunu ancak aynı zamanda önceki teorik araştırmaları da kanıtlamaktadır (Bordag, 2009).

Plakalar arasındaki mesafe azaldıkça (3.33) 'deki enerji daha negatif hale gelir, böylece spinör alanının vakum dalgalanmaları iki plaka arasında çekici bir kuvvete yol açar. Bu

kuvvet Casimir kuvveti olarak bilinir (Lutken & Ravndal, 1984). İki plaka arasındaki Casimir kuvveti, d değişkenine göre Casimir enerjisinin türevidir

$$\mathrm{F(d)} = -\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathrm{d}} = -\frac{7\pi^2}{960\mathrm{d}^4} \tag{3.34}$$

Eksi işareti, elektromanyetik alan için Casimir kuvveti ile aynı plakalar arasındaki çekiciliği gösterir (Casimir, 1948). Ön varsayımımız, sıfır nokta enerjisinin alandan alana farklılık gösterdiğini ve geometriye bağlı olduğunu belirtir. Aynı geometrinin (iki paralel plaka) var olduğu, ancak farklı alanın olduğu durumlarda bile sonucun sayısal farklı olması fakat işaretinin aynı olduğu gösterilmiştir. Dirac alanı için çekici kuvvetin değeri, elektromanyetik ve skaler Casimir kuvvetinden farklıdır; ancak aynı doğaya sahiptir ve plakalar arasındaki mesafenin üçüncü kuvveti ile orantılıdır.

BÖLÜM 4

KÜRESEL KABUK İÇİN SPİNÖR CASİMİR ETKİSİ

Kuantize edilmiş alanı farklı geomtrilerle etkinleştirdiğimizde, kuantum alanın sifir nokta enerjisinin (kuantum boşluk enerjisi) ölçülebilir değerini değiştirdiğini farklı regülarizasyon yöntemleri ile belirlermiş bulunuyoruz. Bu tecrübeden hareketle; alanı değiştirdiğmizde enerji değişikliği olacak mı önemli bir soru. Paralel plakalardan geometriyi küresel geometriye taşıdığımızda zorluk ve ilgi artmaktadır. Küresel geometrinin bilimsel ilginin bir parçası olmasının birçok nedeni vardır ve birçok gerçek fiziksel problem bu tür geometri ile ilgilidir. İlgimiz, bir elektronun yükünün küresel bir kabuk üzerine dağıtıldığını belirten Casimir elektron modeli (Casimir, 1953) ile başlar. Küresel geometrinin dikkat çekmesinin bir başka nedeni de, hadronun statik küresel sınır değerli göreli kuark modeli olan “bag” teorisidir (Chodos, Jaffe, Johnson & Thorn, 1974). Bilimsel literatürde belirtildiği gibi üçüncü neden, küresel bir kabuk üzerine etkiyen kuvvetin itici doğasıdır (Bordag, Klimchitskaya, Mohideen ve Mostepanenko, 2009); fiziksel gerçeklikte bu tür itici kuvveti bulmanın özellikle nanomekanik sistemlerde makine tasarlanmasında büyük etkisi olacağı düşünülmektedir.

Green'in fonksiyon metodu (Milton, 2001), mod toplama metodu vb. gibi küresel kabuk için spinör Casimir etkisini bulmanın birçok metodu veya şeması vardır. Bu çalışmada; kütlesiz Dirac alanı için mod toplama yöntemini ve “heat kernel” katsayılarını kullanarak hesaplamalar yapacağız.

4.1. Dirac Alanın Mod'ları

Kütleli alan için Dirac denklemi

$$\left(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\,\partial_{\mu}-\mathrm{m}\right)\psi(\mathrm{x})=0 \tag{4.1}$$

verilir. x-dört bileşenli konum vektörüdür. "Bag" sınır koşulunu

$$(\mathrm{i}\vec{\gamma}\hat{\mathrm{n}}+1)\psi(\mathrm{x})|_{\mathrm{S}}=0 \tag{4.2}$$

şeklinde ifade edilir. Burada S küresel kabuk ile sınırlanmış yüzeydir ve $\hat{n}$ yüzeye normal birim vektördür. "Bag", ise bir miktar pozitif enerjiye sahip olduğu varsayılarak alanın sınırlandırıldığı sonlu bir uzay bölgesidir (Chodos, 1974).

(4.1) denklem bir matris denklemidir. Pauli spin matrisleri cinsinden gamma matrisleri yazmak $\hat{n}$ ile çarpmak ve birim matrisle toplayarak

$$(\mathrm{i}\vec{\gamma}\vec{\mathrm{n}}+1)\psi(\mathrm{x})|_{\mathrm{S}}=\begin{pmatrix}\mathrm{I} & \mathrm{i}(\vec{\sigma}\hat{\mathrm{n}})\\ -\mathrm{i}(\vec{\sigma}\hat{\mathrm{n}}) & I\end{pmatrix}\psi(\mathrm{x})|_{\mathrm{S}} \tag{4.3}$$

buluruz. I birim matristir ve gama

$$\vec{\gamma}=\begin{pmatrix}0 & \vec{\sigma}\\ -\vec{\sigma} & 0\end{pmatrix} \tag{4.4}$$

şekilde verilir. Küresel geometri ile uğraştığımız için Dirac denkleminin küresel çözümleri ((2.1) denklem)

$$\psi_{\mathrm{j,m,\sigma,k}}(\vec{\mathrm{r}})=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{r}}}\begin{pmatrix}\sqrt{\mathrm{k}_0+\mathrm{m}}\,\mathrm{J}_{\frac{2\mathrm{j}+1-\sigma}{2}}(\mathrm{kr})\,\mathrm{i}\Omega^{\mathrm{l}}_{\mathrm{j,m}}(\theta,\varphi)\\ -\sigma\sqrt{\mathrm{k}_0-\mathrm{m}}\,\mathrm{J}_{\frac{2\mathrm{j}+1-\sigma}{2}}(\mathrm{kr})(\vec{\sigma}\hat{\mathrm{n}})\Omega^{\mathrm{l}}_{\mathrm{j,m}}(\theta,\varphi)\end{pmatrix} \tag{4.5}$$

olarak yazabiliriz. Burada J birinci tür Bessel fonksiyonudur, $\hat{n}=\vec{r}/r$ birim normal vektörü, $\vec{\sigma}$- Pauli matrisleri, $\sigma=\pm1$ dönüş projeksiyonlarını temsil eder ve $\Omega^{l}_{j,m}(\theta,\varphi)$- Pauli spinörleri

$$\Omega^{l}_{j,m}(\theta,\varphi)=\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{2l+2\sigma m+1}{2(2l+1)}}Y_{l,m-\frac{1}{2}}(\theta,\varphi)\\ \sigma\sqrt{\frac{2l-2\sigma m+1}{2(2l+1)}}Y_{l,m+\frac{1}{2}}(\theta,\varphi)\end{pmatrix} \tag{4.6}$$

şu şekilde tanımlanır. Burada $Y_{l,m}$ küresel harmonikleridir.

(4.5) denklemin her çözümü, $k_0=\sqrt{m^2+k^2}$ parçacıklar ve $k_0=\sqrt{m^2-k^2}$ anti parçacıklar için iki durumu tanımlar. Pauli spinörleri toplam momentumun öz durumlarını temsil eder ve

$$\vec{J}=\vec{L}+\frac{1}{2}\vec{\sigma} \tag{4.7}$$

denklem ile verilir. (4.5) denklemi (4.3) denkleme koyarak

$$\begin{pmatrix} I & i(\vec{\sigma}\hat{n})\\ -i(\vec{\sigma}\hat{n}) & I\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{r}}\begin{pmatrix}\sqrt{k_0+m}J_{\frac{2j+1-\sigma}{2}}(kr)i\Omega^{l}_{j,m}(\theta,\varphi)\\ -\sigma\sqrt{k_0-m}J_{\frac{2j+1-\sigma}{2}}(kr)(\vec{\sigma}\hat{n})\Omega^{l}_{j,m}(\theta,\varphi)\end{pmatrix}|_{r=R}=0 \tag{4.8}$$

ifadesini elde ederiz. Basit cebirsel hesaplamalar yaparak ve $(\vec{\sigma}\hat{n})(\widehat{n\vec{\sigma}})=1$ ifadesini kullanarak, (4.8) denklemini daha düzenli bir forma getiriz

$$\left[\sqrt{k_0+m}J_{\frac{2j+1-\sigma}{2}}(kr)-\sigma\sqrt{k_0-m}J_{\frac{2j+1-\sigma}{2}}(kr)\right]|_{r=R}=0 \tag{4.9}$$

Bu denklem, bi-spinörün üst iki bileşeni için elde edilen bir durumdur, sabit bir faktörle farklılık gösteren bi-spinörun alt iki bileşeni için aynı koşul elde edilir. Türetilen koşul, mod'ların üreten fonksiyonu bulurken önemlidir, bu fonksiyon kendisi vakum enerjisini düzenlememizi mümkün kılar.

Sınırlanmış spinör alanı için mod toplama yöntemi karmaşıktır çünkü sınır koşulunun hem alt hem de üst bileşenler tarafından aynı anda karşılanması gerekir. Bu yöntemin temel fikri; belirli bir yüzeyin çevrelediği sınır içindeki öz mod frekanslarının toplamına bağlıdır. Bizim durumumuz için sınır küresel bir kabuktur. Sonlu bir hacmi temsil eden bir küre, kuantize edilmiş bir spinör alanına yerleştirildiğinde, sıfır nokta enerjisi ayrık bir toplam olacak şekilde, hacimin içinde öz mod frekanslarının yeni dağılımı olarak ortaya çıkmaktadır (Plunien, Muller & Greiner, 1986).

Mod üreten fonksiyonunun iki ayrı durum için bulunması gerekir: kürenin içi $r \in [0, R]$ ve kürenin dışı $r \in [R, \infty)$.

Her iki durum için mod üreten fonksiyonu bulmak birçok tekrarlanan hesaplamayı içerir, bu nedenle iç bölge için yapılan tüm hesaplamaları adım adım açıklayacağız ve dış bölge için sonuçları ve işlemleri kısaca açıklayacağız. Dış durumla uğraşmak çok zordur çünkü bölge sınırsızdır, bu nedenle frekanslar bir dereceye kadar sürekli spektruma sahiptir. Bu tür bir problemle başa çıkmanın birçok yöntemi vardır, birinci yol: dış bölgeyi yarıçapının sonsuza eğilimli olduğu geniş bir küre ile çevrelemektir. Dış bölgeye sınır empoze edildiğinde, frekans spektrumu ayrık hale geldiği için sorunun çözümü daha kolay hale gelmektedir. Bu yöntemin son adımı, yarıçap sonsuza giderken küreyi kaldırmaktır ve ardından Bessel ve Hankel fonksiyonunun uygun ilişkilerini kullanarak gerekli çözümü bulmaktır (Bordag, 2009).

(4.9) denklemin çözümleri ayrık özdeğerlerdir, bu nedenle denklemin mod üreten fonksiyona eşit olması gerekir (Bordag, 2009); çünkü mod üreten fonksiyonun sıfırları dikkate alınan özdeğerlerdir. Parçacıklar için mod üretme fonksiyonu pozitif k_0 değerleri ile ve anti parçacıklar için mod üretme fonksiyonu ise k_0 negatif değerleri ile verilmektedir. Böylece mod üreten fonksiyonu parçacıklar için

$$\Delta_j^+(k) = \sqrt{k_0 + m}\, J_{\frac{2j+1-\sigma}{2}}(kr) - \sigma\sqrt{k_0 - m}\, J_{\frac{2j+1-\sigma}{2}}(kr) \tag{4.10}$$

şu şekilde verilir nerede "+" işareti parçacığı gösterir ve anti parçacıklar için mod üreten fonksiyonu

$$\Delta_j^-(k) = \sqrt{-k_0 + m}\, J_{\frac{2j+1-\sigma}{2}}(kr) - \sigma\sqrt{-k_0 - m}\, J_{\frac{2j+1-\sigma}{2}}(kr) \tag{4.11}$$

denklem ile verilir. İç bölgedeki parçacıklar ve antiparçacıklar için mod üretme fonksiyonu, birlikte alınan bu iki mod üreten fonksiyonların çarpımıdır ve

$$\Delta_j(k) = \Delta_j^+(k)\Delta_j^-(k) \tag{4.12}$$

olarak yazabiliriz. $\Delta_j^+(k)$ ve $\Delta_j^-(k)$ karşılık gelen (4.10) ve (4.11) denklemleri (4.12) denkleminde yazarsak

$$\Delta_j(k) = \left[\sqrt{k_0 + m}J_{\frac{2j+1-\sigma}{2}}(kr) - \sigma\sqrt{k_0 - m}J_{\frac{2j+1-\sigma}{2}}(kr)\right] \quad (4.13)$$
$$* \left[\sqrt{-k_0 + m}J_{\frac{2j+1-\sigma}{2}}(kr) - \sigma\sqrt{-k_0 - m}J_{\frac{2j+1-\sigma}{2}}(kr)\right]$$

elde ederiz. Basit cebirsel hesaplama yaparak ve $k_0 = \pm\sqrt{m^2 + k^2} \rightarrow k^2 = k_0^2 - m^2$'den k değerini değiştirerek

$$\Delta_j(k) = \sigma\left[J^2_{\frac{2j+1+\sigma}{2}}(kr) - J^2_{\frac{2j+1-\sigma}{2}}(kr)\right] - \frac{2m}{k}J_{\frac{2j+1+\sigma}{2}}(kr)J_{\frac{2j+1-\sigma}{2}}(kr) \quad (4.14)$$

elde ederiz. Daha önce, her spin projeksiyonu için σ-değerlerini $+1$ ve -1 olacak şekilde tanımladık. (4.14) denklem her iki durumda da aynı değerleri alır bu yüzden $\sigma = 1$ alırız

$$\Delta_j(k) = J^2_{j+1}(kr) - J^2_j(kr) - \frac{2m}{k}J_{j+1}(kr)J_j(kr) \quad (4.15)$$

Şimdi $k \rightarrow ik/r$ alarak karmaşık radyal momentuma dönüşümü yaparak

$$\widetilde{\Delta}_j(ik) = J^2_{j+1}(ik) - J^2_j(ik) - \frac{2m}{k}J_{j+1}(ik)J_j(ik) \quad (4.16)$$

Bessel fonksiyonu ile "modified" Bessel fonksiyonu arasındaki bağıntısı

$$J_\nu(iz) = i^\nu I_\nu(z) \quad (4.17)$$

göz önüne alarak ve $\nu = j + 1$ için

$$J^2_{j+1}(ik) = I^2_{j+1}(k) \quad (4.18)$$

elde ederiz. Ayrıca $\nu = j$ ise

$$-J^2_j(ik) = I^2_j(k) \quad (4.19)$$

bu sonucu vermektedir. Bu son sonuçları ve (4.17) bağıntısı (4.16) denklemde kullanıyoruz ve

$$\widetilde{\Delta}_j(ik) = I^2_{j+1}(k) - I^2_j(k) + \frac{2m}{k}I_{j+1}(k)I_j(k) \quad (4.20)$$

denklemini elde ederiz.

(4.20) denklem iç bölge için mod üretme fonksiyonunu temsil eder. Birinci tür Bessel fonksiyonunun iç bölgede kullanılmasının nedeni, birinci tür Bessel fonksiyonlarının başlangıçta düzenli olmasıdır (Langer, 1931).

4.2. Küresel Kabuğun Casimir Enerjisi

Zeta fonksiyonu regülarizasyonu, vakum enerjisi elde etmek için çok sık kullanılan yoldur. Vakum enerjisi sonsuz bir değeri temsil ettiğinden, bu sonsuz yapan terimlerin ayrıştırılması gerekmektedir. Bu yöntem Hawking (Hawking, 1977) tarafından yapılmıştır**.** Bu yöntemde Zeta fonksiyonunun özellikleri ve analitik süreklilik, tüm karmaşık düzlemde vakum enerjisine tanımlamayı mümkün kılar ve bundan sonra "heat kernel" katsayılarını kullanabiliriz ve vakum enerjisinin renormalizasyonu yapabiliriz, böylece vakum enerjisi için sonlu bir değer elde ederiz. Riemann zeta fonskiyonu

$$\zeta(\mathrm{s}) = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{n}^{\mathrm{s}}} \tag{4.21}$$

şu şekilde tanımlanır. Bu fonksiyon, toplamın $s > 1$'i için zeta fonksiyonunun analitik devamı olarak tanımlanır (Karatsuba, 1985). Bu fonksiyon (2.19) denklemde kullanılır ve vakum enerjisi

$$\mathrm{E}_0(\mathrm{s}) = -2\mu^{2\mathrm{s}} \sum_{\mathrm{j}} \omega_{\mathrm{j}}^{1-2\mathrm{s}} \tag{4.22}$$

formu alır. Bu ifade $Re\ s > (d+1)/2$ için yakınsıyor, burada d uzayın boyutudur ve $j = (n, l, M)$. $s = 0$ için, ifade (2.19) denklemindeki gibi önceki formu alır, ancak s sadece zeta fonksiyonunun analitik sürekliliğini yaparsak sıfır olabilir (Elizalde, 2009). $\omega \sim k_0$ doğal birimleri kullandığımız için ve burada k_0 ($k_0^2 = k^2 + m^2$) kütleli spinör alanı için özdeğerlerdir. Özdeğerini (4.22) denklemde yazıyoruz ve

$$\mathrm{E}_0(\mathrm{s}) = -2\mu^{2\mathrm{s}} \sum_{\mathrm{j}} (\mathrm{k}^2 + \mathrm{m}^2)^{(1-2\mathrm{s})/2} \tag{4.23}$$

elde ederiz. Toplamı (n, l, M) üç kuantum sayısına göre ayırıyoruz

$$E_0 = -2\mu^{2s} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{M=-l}^{+l} (k^2 + m^2)^{(1-2s)/2}) \tag{4.24}$$

M üzerindeki toplam $(2l + 1)$ 'e eşittir. Öte yandan, n üzerinden toplamı integrale dönüştürüyoruz. Bunu yapmak için önce kapalı bir kontür içindeki analitik fonksiyonlar için argüman ilkesini yani Cauchy integral teoremini kullanacağız (Ahlfors, 1979)

$$\sum_{n} g(a_n) - \sum_{m} g(b_m) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} g(z) d\, ln\, \Delta(z) \tag{4.25}$$

$g(z)$ - analitik bir fonksiyondur, $\Delta(z)$ – meromorfik bir fonksiyon a_n ve b_m katsayıları kontur (γ) içindeki $\Delta(z)$'nin sıfırları ve kutuplarıdır. Bizim için kapalı hacim kürenin iç kısmıdır ve $\Delta(z)$ mod üretme fonksiyonudur. Bizim durumumuzda a_n ve b_m $\Delta(z)$ fonksiyonunun sıfırları olduğundan, bunlar mod üreten fonksiyonun sıfırlarıdır.

Buradan (4.24) denklemi

$$E_0(s) = -2\mu^{2s} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (k^2 + m^2)^{(1-2s)/2} g(z) \frac{\partial}{\partial k} ln\, \Delta(z) \tag{4.26}$$

olarak yazabiliriz.

n üzerindeki toplamı integrale çevirdik, fakat aynısı l üzerindeki toplamı için de yapılabiliriz ve hiçbir şey değişmemektedir.

Hesaplamaları ilerletmek için aşağıdaki varsayamların gözönüne alırız

1. $\Delta_l(k) = \Delta_l(-k)$

2. γ 'yi hayali eksene doğru deforme ediyoruz ve $k \to ik$ değişimi yapıyoruz

3. Karmaşık düzlemin üst yarı düzleminde kutup yoktur

4. $k = 0$'da kutup yok (Bordag, 2009).

Varsayım (4), Bessel fonksiyonunun özellikleri ve davranışıyla sağlanmaktadır ve varsayım (3) sınır koşullarından gelmektedir.

$G_m^{\alpha}(z)$ fonksiyonunun

$$\mathrm{G_m^{\alpha}(z) = e^{\alpha\, ln(A^2+z^2)}}$$

olarak tanıtıyoruz. Bizim için $z^2 = k^2$, $A^2 = m^2$ ve $\alpha = (1-2s)/2$. Buradan

$$\mathrm{G_m^{\alpha}(k) = (k^2 + m^2)^{(1-2s)/2}} \tag{4.27}$$

sürdürmektedir. Abel-Plana formülünü (Saharian, 2000) kullanarak ve (4.27) denklemi (4.26) denklemde koyarken

$$\mathrm{E_0(s) = 2\mu^{2s} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \int_m^{\infty} \frac{dk}{2\pi i} [G_m^{\alpha}(ik) - G_m^{\alpha}(-ik)] \frac{\partial}{\partial k} ln\, \Delta(ik)} \tag{4.28}$$

elde ederiz. Aşağıdaki formülü

$$\mathrm{G_m^{(\alpha)}(it) - G_m^{(\alpha)}(-it) = 2ie^{\alpha\, ln(t^2-A^2)}\, sin\, \pi\alpha\, \theta(t-A)} \tag{4.29}$$

yazıyoruz burada $m = A$, $t = k$ ve $\theta(t-A)$ basamak fonksiyonudur.

Sinüs trigonometrik fonksiyonunun özelliklerini kullanarak

$$sin\, \pi\alpha = cos\, \pi s \tag{4.30}$$

elde ederiz. $\alpha = (1-2s)/2$ ve $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$ trigonometrik özdeşliğini kulandık. Buradan (4.29) denklem

$$\mathrm{G_m^{(\alpha)}(it) - G_m^{(\alpha)}(-it) = 2i(k^2 - m^2)^{(1-2s)/2}\, cos\, \pi s} \tag{4.31}$$

şeklini alır. Bunu (4.28) denklemde koyarız ve

$$\mathrm{E_0(s) = 2\mu^{2s} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \int_m^{\infty} \frac{dk}{2\pi i} 2i(k^2 - m^2)^{(1-2s)/2}\, cos\, \pi s \frac{\partial}{\partial k} ln\, \Delta(ik)} \tag{4.32}$$

denklemi elde ederiz.

Basit cebirsel hesaplamalar yapıp ve $\Delta(ik) \to \widetilde{\Delta}_J(ik)$ değiştiriyoruz $k \to k/R$ ve $l = \frac{2n-1}{2}$ iken

$$E_0(s) = 4(\mu R)^{2s} \frac{cos\,\pi s}{\pi R} \sum_{l=0}^{\infty} n \int_{mR}^{\infty} dk(k^2 - (mR)^2)^{(1-2s)/2} \frac{\partial}{\partial k} ln\, \widetilde{\Delta}_j(ik) \tag{4.33}$$

elde ederiz.

(4.33) denklem kuantize edilmiş spinör alanı için vakum enerjisi için zeta fonksiyonunun düzenlenmesi temsil etmektedir. Bu ifade, (4.20) denklemindeki $\widetilde{\Delta}_j(ik)$'nin gerçek olması nedeniyle gerçek bir ifadedir. Bu denklem, küresel kabuk geometrisi için vakum enerjisini bulmanın ilk temel unsurudur ve zeta fonksiyonu regülarizasyonu şemalarının en önemli parçasıdır. Şimdiye kadar iç bölge ile uğraştığımızı belirtmekte fayda vardır.

(4.33) denklem'deki mod üretme fonksiyonu (4.20) denklem ile verilmektedir. Doğrudan yerine yerleştirmeden önce bu denklemin şeklini değiştiririz Bessel fonksiyonlarının

$$I_{j+1}(k) = I_j'(k) - \frac{j}{k} I_j(k) \tag{4.34}$$

tekrarlama ilişkisini kullanarak. Böylece (4.20) denklem

$$\widetilde{\Delta}_j(ik) = [I_j'(k)]^2 + I_j^2(k)\left[1 + \frac{j^2}{k^2} - 2\frac{mR - j}{k^2}\right] + 2\frac{mR - j}{k} I_j(k) I_k'(j) \tag{4.35}$$

dönüştürür. Şimdi, mod üreten fonksiyonda $\widetilde{\Delta}_j(ik)$ bulunan logaritmasının analitik devamı gerçekleştirilmelidir. Ancak böyle bir analitik sürekliliğini yapılması çok karmaşıktır. Bu fonksiyonun asimptotik açılımı yapabiliriz eğer "modified" Bessel fonksiyonlarının

$$ln\, \widetilde{\Delta}_j(ik) = nD_{-1}(z) + D_0(z) + \frac{1}{n} D_1(z) + \cdots \tag{4.36}$$

"uniform" asimptotik açılımı kullanıyoruz.

$D_i(z)$ fonskiyonları

$$D_{-1}(z) = 2[\eta(z) - ln\, z] \tag{4.37}$$

$$D_0(z) = ln\frac{2}{1+\sqrt{1+z^2}} - ln\,2\pi j \tag{4.38}$$

ve

$$D_i(z) = \sum_{\alpha=1}^{3i} x_{i,\alpha}\, t^{\alpha} \tag{4.39}$$

şu şekilde verilir. Burada $i = 1,2,3$.

$x_{i,\alpha}$ katsayıları farklı alanlar için farklı değerlere sahiptir; bu nedenle spinör alanı için bu katsayılar aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir (burada $x = mR$)

Çizelge 4.1. $x_{i,\alpha}$ katsayıları

	a						
i	1	2	3	4	5	6	7
1	$\frac{4mR-1}{4}$	0	$\frac{1}{12}$	0	0	0	0
2	0	$-\frac{mR^2}{12}$	$\frac{1}{8}-\frac{mR^2}{2}$	$\frac{1}{8}-\frac{mR}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0
3	0	0	$\frac{5}{192}-\frac{mR}{8}+\frac{mR^3}{3}$	$\frac{1}{8}-\frac{mR}{2}+\frac{mR}{2}$	$\frac{9}{320}-\frac{mR}{4}+\frac{mR^2}{2}$	$\frac{x-1}{2}$	$\frac{56mR-23}{64}$

Aşağıdaki fonksiyonu tanımlıyoruz

$$h_{ass}(j,z) = \sum_{i=1}^{3} \frac{D_i(z)}{j^i} \tag{4.40}$$

ki (4.36) denklemdeki açılımın beş terimini temsil etmektedir. Açılımının sadece beş teriminin dikkate alınmasının nedeni, taban duruma tüm ıraksak katkının bu beş terimle tanımlanmasıdır (Elizalde, 1998).

4.3. Iraksak katkıları

(4.33) denklemde $h_{ass}(j,z)$ fonksiyonunu mod üretme fonksiyonundan ekliyoruz ve çıkarırız, böylece regularize edilmiş vakum enerjisinin iki kısmı, sonlu kısım ve asimptotik kısım elde ediliriz.

$$\mathrm{E_0(s) = E_0^{fin} + E_0^{ass}(s)} \tag{4.41}$$

E_0^{fin} için $s = 0$ alırız ve

$$\mathrm{E_0^{fin} = \frac{4}{R\pi}\sum_{l=0}^{\infty} n \int_{mR}^{\infty} dk\sqrt{k^2-(mR)^2}\,\frac{\partial}{\partial k}\left[ln\,\tilde{\Delta}_j(ik) - h_{ass}(j,z)\right]} \tag{4.42}$$

denklem ile verilir. Öte yandan asimptotik kısım

$$\mathrm{E_0^{ass} = 4(\mu R)^{2s}\frac{cos\,\pi s}{\pi R}\sum_{l=0}^{\infty} n \int_{mR}^{\infty} dk(k^2-(mR)^2)^{(1-2s)/2}\,\frac{\partial}{\partial k}h_{ass}(j,z)} \tag{4.43}$$

ile verilir. Sonlu kısım, kısmi integrasyon ile kolayca hesaplanabilir, böylece aşağıdaki ifadesi

$$\mathrm{E_0^{fin} = -\frac{4}{R\pi}\sum_{l=0}^{\infty} n \int_{mR}^{\infty} \frac{dk\,k}{\sqrt{k^2-(mR)^2}}\,\frac{\partial}{\partial k}\left[ln\,\tilde{\Delta}_j(ik) - h_{ass}(j,z)\right]} \tag{4.44}$$

elde ediliriz.

Regülarize edilmiş vakum enerjisine ıraksak katkıların eklenmemesi için E_0^{fin} kutuplarının olmaması nedeniyle bu ifadenin daha fazla değerlendirilmesi gerekli değildir. Daha sonra, kutupların varlığı nedeniyle tüm ıraksak katkıların asimptotik kısımda ortaya çıktığını göreceğiz. Başlangıçtan itibaren kutuplar, zeta fonksiyonunun tanımında görünür.

Asimptotik kısmı bulmak için, mod üreten fonksiyonun analitik devamının tartışıldığı önceki bölümden elde edilen sonuçlara ihtiyaç vardır. Ek olarak hesaplamalar yapmak için "modified" Bessel fonksiyonlarının asimptotik açılımlar kullanacağız

$$I_j(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi j}} \frac{1}{(1+z^2)^{1/4}} e^{j\eta(z)} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} 1^k \frac{u_k(t)}{j^k}\right] \tag{4.45}$$

$$I_j'(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi j}} \frac{(1+z^2)^{1/4}}{z} e^{j\eta(z)} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} 1^k \frac{v_k(t)}{j^k}\right] \tag{4.46}$$

Burada

$$\eta(z) = \sqrt{1+z^2} + ln \frac{z}{1+\sqrt{1+z^2}} \tag{4.47}$$

Ve

$$t = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \tag{4.48}$$

$u_k(t)$ ve $v_k(t)$ Debye (Mladinov, 1993) polinomlarıdır ve

$$u_0(t) = 1 \qquad v_0(t) = 1$$

$$u_{k+1}(t) = \frac{1}{2} t^2(1-t^2)u_k'(t) + \frac{1}{8}\int_0^t d\tau\,(1-5\tau^2)u_k(\tau) \qquad k = 0,1,\ldots \tag{4.49}$$

$$v_k(t) = u_k(t) - t(1-k^2)\left[\frac{1}{2}u_{k-1}(t) + tu_{k-1}'(t)\right] \qquad k = 1,2,\ldots$$

tekrarlama ilişkileri ile verilir. Vakum enerjisinin asimptotik kısmına her bir bireysel katkı

$$E_0^{ass}(s) = \sum_{i=-1}^{3} A_i(s) \tag{4.50}$$

şu şekilde tanımlanır. $A_i(s)$ fonksiyonu

$$A_i(s) = 4(\mu R)^{2s} \frac{cos\,\pi s}{\pi R} \sum_{l=0}^{\infty} n \int_{mR}^{\infty} dk(k^2 - (mR)^2)^{(1-2s)/2} \frac{\partial}{\partial k} h_{ass}(j,z) \tag{4.51}$$

biçimde yazılır ve $h_{ass}(j,z)$ (4.41) denkleminde verilirmiştir. $i=-1$ için A_{-1} katkı

$$\mathrm{A_{-1}(s)} = 4(\mu\mathrm{R})^{2s}\frac{cos\,\pi s}{\pi \mathrm{R}}\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{n}\int_{mR}^{\infty}\mathrm{dk}(\mathrm{k}^2-(\mathrm{mR})^2)^{(1-2s)/2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{k}}\frac{\mathrm{D_{-1}}}{\mathrm{j^{-1}}} \tag{4.52}$$

yazılır. Aynı ve diğer katkılar

$$\mathrm{A_0(s)} = 4(\mu\mathrm{R})^{2s}\frac{cos\,\pi s}{\pi \mathrm{R}}\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{n}\int_{mR}^{\infty}\mathrm{dk}(\mathrm{k}^2-(\mathrm{mR})^2)^{(1-2s)/2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{k}}\frac{\mathrm{D_0}}{\mathrm{j^0}} \tag{4.53}$$

$$\mathrm{A_i(s)} = 4(\mu\mathrm{R})^{2s}\frac{cos\,\pi s}{\pi \mathrm{R}}\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{n}\int_{mR}^{\infty}\mathrm{dk}(\mathrm{k}^2-(\mathrm{mR})^2)^{(1-2s)/2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{k}}\frac{\mathrm{D_i}}{\mathrm{j^i}} \tag{4.54}$$

şu şekilde yazılabilir. Son denklemde $i=1,2,3.$ (4.37), (4.38) ve (4.39) denklemlerinin sırasıyla (4.52), (4.53) ve (4.54) olarak değiştirilmesi

$$\mathrm{A_{-1}(s)} = 8(\mu\mathrm{R})^{2s}\frac{cos\,\pi s}{\pi \mathrm{R}}\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{n}\int_{mR}^{\infty}\mathrm{dk}(\mathrm{k}^2-(\mathrm{mR})^2)^{(1-2s)/2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{k}}\mathrm{j}[\eta(\mathrm{z}) - ln\,\mathrm{z}] \tag{4.55}$$

$$\mathrm{A_0(s)} = 4(\mu\mathrm{R})^{2s}\frac{cos\,\pi s}{\pi \mathrm{R}}\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{n}\int_{mR}^{\infty}\mathrm{dk}(\mathrm{k}^2-(\mathrm{mR})^2)^{(1-2s)/2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{k}}[ln\frac{2}{1+\sqrt{1+\mathrm{z}^2}} - ln\,2\pi\mathrm{j}] \tag{4.56}$$

$$\mathrm{A_i(s)} = 4(\mu\mathrm{R})^{2s}\frac{cos\,\pi s}{\pi \mathrm{R}}\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{n}\int_{mR}^{\infty}\mathrm{dk}(\mathrm{k}^2-(\mathrm{mR})^2)^{(1-2s)/2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{k}}\frac{\mathrm{D_i}}{\mathrm{j^i}} \tag{4.57}$$

verir.

Şu andan itibaren verilen formül ve denklemlerle bu üç denklemi çözeriz. Hesaplamalar basittir; burada kısaca ilk katkının çözüm yolunu yazarken diğerleri denklemler için sadece en son durumlarını yazacağız. (4.47) denklemden $\eta(z)$

fonksiyonu (4.55) denklemde koyarız ve $z = k/j$ kullanarak z değişkenine göre türevini alıyoruz, bu işlemden sonra

$$A_{-1}(s) = 8(\mu R)^{2s} \frac{cos\,\pi s}{\pi R} \sum_{l=0}^{\infty} n\,j \int_{mR}^{\infty} dk\,(k^2 - (mR)^2)^{(1-2s)/2} \frac{1}{j} \frac{\sqrt{1+z^2}-1}{z} \tag{4.58}$$

elde ederiz. Tekrar integrasyon değişkenini değiştiriyoruz ve n yerine $j + 1/2$ koyuyoruz

$$A_{-1}(s) = 8(\mu R)^{2s} \frac{cos\,\pi s}{\pi R} \sum_{j=0}^{\infty} j(j+\frac{1}{2}) \int_{mR}^{\infty} dz\,((zj)^2 - (mR)^2)^{(1-2s)/2} \frac{\sqrt{1+z^2}-1}{z} \tag{4.59}$$

Aşağıdaki açılımı kullanarak

$$\frac{\sqrt{1+z^2}-1}{z} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + O(z^{-4}) \tag{4.60}$$

ve integrasyon değişkenini $y = j^2 z^2 - (mR)^2$ ile değiştiririz

$$A_{-1}(s) = 4(\mu R)^{2s} \frac{cos\,\pi s}{\pi R} \sum_{j=0}^{\infty} (j+\frac{1}{2}) \int_{mR}^{\infty} dy \frac{y^{(1-2s)/2}}{\sqrt{y+(mR)^2}} \left\{ 1 - \frac{j}{\sqrt{y+(mR)^2}} + \frac{j^2}{2(y+(mR)^2} + O(y^{-4}) \right\} \tag{4.61}$$

Yine başka bir yerine koyma kullanarak

$$y^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \alpha^{s-1} e^{-y\alpha} d\alpha \tag{4.62}$$

Burada $\Gamma(s)$ gamma fonksiyonudur. Buradan

$$A_{-1}(s) = \frac{4(\mu R)^{2s}}{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)} \frac{cos\,\pi s}{\pi R} \sum_{j=0}^{\infty} \Bigg(j + \frac{1}{2} \Bigg) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dy\, d\alpha \alpha^{s-\frac{3}{2}} e^{-\alpha y} \left\{ \frac{1}{\sqrt{y+(mR)^2}} - \frac{j}{y+(mR)^2} + \frac{j^2}{2[y+(mR)^2]^2} + O(z^{-4}) \right\} \tag{4.63}$$

elde ederiz. Son ifade kolayca çözebilir; eğer

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{[x+\beta]^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\beta\mu} [1 - \Phi(\sqrt{\beta\mu})] \tag{4.64}$$

ise. Burada $\Phi\left(\sqrt{\beta\mu}\right)$ hata fonksiyonudur ve $\Phi\left(\sqrt{\beta\mu}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ ile verilir. Son çözüm olarak

$$A_{-1}(s) = \frac{4(\mu R)^{2s}}{R^2 \sqrt{\pi} \Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (mR)^{2k} \frac{\Gamma(k+s-1)}{2k+2s-1} \times [2\zeta(2k+2s-3, 1/2) + \zeta(2k+2s-2, 1/2] \tag{4.65}$$

$A_{-1}(s)$ katkısını buluyoruz. Burada

$$\zeta_H(s,z) = \sum_{l=0}^{\infty} (l+z^{-s}) \tag{4.66}$$

Hurwitz zeta fonksiyonudur. Diğerler ıraksak katkıları aynı şekilde bulunur, bu yüzden burada doğrudan onların çözümünü yazabiliriz

$$A_0(s) = -\frac{(\mu R)^{2s}}{R^2 \sqrt{\pi} \Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (mR)^{2k} \frac{\Gamma(k+s)}{2k+2s-1} \times [2\zeta(2k+2s-2, 1/2) + \zeta(2k+2s-1, 1/2] \tag{4.67}$$

Ve

$$A_i(s) = -\frac{(\mu R)^{2s}}{R^2\sqrt{\pi}\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}(mR)^{2k}\sum_{\alpha=1}^{3i}x_{i,\alpha}\frac{\Gamma\left(k+s+\frac{a-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)} \times [2\zeta(2k+2s+i-2,1/2)+\zeta(2k+2s+i-1,1/2] \quad (4.68)$$

$i = 1{,}23$ için. Bu ifadeler $mR = 1$ için yakınsamadır. Aynı yöntemde, büyük kütlesel açımılar için ıraksak katkıları (Elizalde, 1998) buluruz

$$A_{-1}(s) = \frac{R^{2s}}{\sqrt{\pi}\Gamma(s)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}(mR)^{2k}\frac{\Gamma\left(k+s-\frac{1}{2}\right)}{k+s} \times \left[2\zeta(2k+2s-2,1/2)+\zeta(2k+2s-1,\frac{1}{2})\right] \quad (4.69)$$

$$A_0(s) = -\frac{R^{2s}}{\sqrt{\pi}\Gamma(s)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}(mR)^{2k}\frac{\Gamma\left(k+s+\frac{1}{2}\right)}{k+s} \times \left[2\zeta(2k+2s-1,1/2)+\zeta(2k+2s-1,\frac{1}{2})\right] \quad (4.70)$$

$$A_i(s) = -\frac{2R^{2s}}{\Gamma(s)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}(mR)^{2k}\sum_{\alpha=0}^{2i}x_{i,\alpha}\frac{\Gamma\left(k+s+\frac{a+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+i}{2}\right)} \times \left[2\zeta(2k+2s+i-1,1/2)+\zeta(2k+2s+i,\frac{1}{2})\right] \quad (4.71)$$

Yukarıda belirttiğimiz gibi kutuplar, gama fonksiyonları ve genelleştirilmiş zeta fonksiyonu nedeniyle ortaya çıkmaktadır. Şimdi (4.69), (4.70) ve (4.71) kalıntılarını bulmalıyız. Daha zor inceleme gerektiren $A_{-1}(s)$ katsayından başlıyoruz. Denklem (4.69) yerine denklem (4.59) ile başlarız

$$A_{-1}(s) = 8\frac{sin\,\pi s}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}j(j+\frac{1}{2})\int_{mR/j}^{\infty}dz\,[(zj/R)^2-m^2]^{-s}\frac{\sqrt{1+z^2}-1}{z} \quad (4.72)$$

Şimdi $s = 1/2$'ye analitik devamlılığı yapmak istiyoruz, bunu yaparak $t = \frac{xj}{R} - M$ 'yi değiştirirek ve

$$A_{-1}(s) = 4\frac{sin\,\pi s}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}(j+\frac{1}{2})\int_{0}^{\infty} dt\frac{t^{-s}}{t+m^2}\left[\sqrt{j^2+R^2(t+m^2)}-j\right] \tag{4.73}$$

elde ederiz. Mellin integral gösterimini son denkleme kullanarak aşağıdaki gösterim türetilir

$$A_{-1}(s) = -2\frac{sin\,\pi s}{\pi^{3/2}}\sum_{j=0}^{\infty}\Big(j + \frac{1}{2}\Big)\int_{0}^{\infty} dt\,t^{-s}\int_{0}^{\infty} d\alpha e^{-\alpha(t+m^2)}\int_{0}^{\infty} d\beta\,\beta^{-3/2}\left\{e^{-\beta[j^2+R^2(t+m^2)]} - e^{-\beta j^2}\right\} \tag{4.74}$$

Yeni bir düzenlenmiş parametrenin tanıtılması δ aşağıdaki gibi $A_{-1}(s)$yazabiliriz

$$A_{-1}(s) = \lim_{\delta\to 0}[A^1_{-1}(s) + A^2_{-1}(s)] \tag{4.75}$$

Burada

$$A^1_{-1}(s) = -2\frac{sin\,\pi s}{\pi^{\frac{3}{2}}}\sum_{j=0}^{\infty}\Big(1 + \frac{1}{2}\Big)\int_{0}^{\infty} d\alpha e^{-\alpha m^2}\int_{0}^{\infty} d\beta\beta^{-\frac{3}{2}+\delta}e^{-\beta(j^2+R^2m^2)}\int_{0}^{\infty} dt t^{-s}e^{-t(\alpha+\beta R^2)} \tag{4.76}$$

Ve

$$A^2_{-1}(s) = -2\frac{sin\,\pi s}{\pi^{3/2}}\Gamma(1-s)\sum_{j=0}^{\infty}\left(j+\frac{1}{2}\right)\int_{0}^{\infty} d\alpha e^{-\alpha m^2}\alpha^{s-1}\int_{0}^{\infty} d\beta\beta^{-\frac{3}{2}+\delta}e^{-\beta j^2} \tag{4.77}$$

Son ifadedeki integralleri çözerek

$$\Gamma(1-s)\Gamma(s) = \frac{\pi}{sin\,\pi s} \tag{4.78}$$

Euler'in yansıma formülünü kullanarak

$$A^2_{-1}(s) = \frac{2m^{-2s}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\delta - 1/2)\sum_{j=0}^{\infty}(j+\frac{1}{2})j^{-2\delta+1} \tag{4.79}$$

elde ederiz. Son ifadeyi kütle üzerinden genişleterek $A^2_{-1}(s)$

$$A^2_{-1}(s) = \frac{2R^{1-2\delta}}{\sqrt{\pi}\Gamma(s)}\Gamma(s+\delta-\frac{1}{2})\sum_{j=0}^{\infty}(j+\frac{1}{2})\int_0^{\infty} dx\, x^{s-1}[m^2x+(\frac{j}{R})^2]^{\frac{1}{2}-s-\delta} \tag{4.80}$$

Son biçimine ulaşırız. Bener şekilde $A^1_{-1}(s)$ için

$$A^2_{-1}(s) = -\frac{2R^{1-2\delta}}{\sqrt{\pi}\Gamma(s)}\Gamma(s+\delta \\ -\frac{1}{2})\sum_{j=0}^{\infty}(j+\frac{1}{2})\int_0^{\infty} dy\, y^{\delta-3/2}[m^2+y(\frac{j}{R})^2]^{\frac{1}{2}-s-\delta} \tag{4.81}$$

final ifadenin buluruz. Son iki denklemi (4.77) denklemine koyuyoruz ve limiti alarak

$$A_{-1}(s) = \frac{2R}{\sqrt{\pi}\Gamma(s)}\Gamma(s-1/2)\sum_{j=0}^{\infty}(j+\frac{1}{2})\int_0^{1}[m^2x+(\frac{j}{R})^2]^{\frac{1}{2}-s} \tag{4.82}$$

elde ederiz. Toplamı j üzerinden gerçekleştirmek için

$$\sum_{\nu=1/2}^{\infty} f(\nu) = \int_0^{\infty} f(\nu) - i\int_0^{\infty} d\nu \frac{f(i\nu+\varepsilon)-f(-i\nu+\varepsilon)}{i+e^{2\pi\nu}} \tag{4.83}$$

Euler-Maclaurin toplama formülüne ihtiyacımız vardır nerede $\varepsilon \to 0$. Euler-Maclaurin toplama formülünü kullanarak $A_{-1}(s)$ 'i $s = 1/2$ civarında açılımını bakarız

$$A_{-1}(s) = \left(\frac{1}{s+1/2} - ln\, m^2\right)\left(-\frac{R^3m^2}{12\pi} + \frac{mR^2}{24\pi} + \frac{7}{960\pi R}\right) \tag{4.84}$$

$$+ \frac{R^3m^4}{24\pi}(1 - 4\, ln\, 2) - \frac{m^3R^2}{6} + \frac{m^2R}{24\pi}[2\, ln(2mR) - 1]$$

$$+ \frac{7}{960\pi R}[1 + 2\, ln\, 2mR]$$

$$- \frac{2}{\pi R}\int_0^\infty \frac{dv\, v}{1 + e^{2\pi v}}(v^2 - m^2R^2)\, ln(v^2 - m^2R^2)$$

$$- \frac{4mR^2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dv\, v}{1 + e^{2\pi v}}\left(ln|v^2 - m^2R^2| + \frac{v}{mR} ln\left|\frac{mR + v}{mR - v}\right|\right)$$

$$+ \frac{m^2R}{2\pi} ln(1 + e^{-2\pi mR}) - \frac{1}{R}\int_{mr}^\infty \frac{dv\, v^2}{1 + e^{2\pi v}}$$

$$- \frac{m^2R}{\pi}\int_0^1 dy\; ln(1 + e^{-2\pi mRy})$$

Aynı şekilde Euler-Maclaurin toplama formülünü kullanarak da

$$A_0(s) = -\left(\frac{1}{s+\frac{1}{2}} - ln\, m^2\right)\left(\frac{1}{48\pi R} + \frac{m^2R}{4\pi}\right) + \frac{m^3R^2}{6} \tag{4.85}$$

$$+ \frac{m^2R}{\pi}\left[\frac{5}{4} - \frac{1}{2}ln(2) - ln\, mR\right] - \frac{ln(2)}{24\pi R}$$

$$- \frac{2}{\pi R}\int_0^\infty \frac{dv\, v}{1 + e^{2\pi v}} - m^3R^2\int_0^\infty \frac{dx}{1 + e^{2\pi mR\sqrt{x}}}$$

$$+ \frac{1}{\pi R}\int_0^\infty \frac{dv\, v}{1 + e^{2\pi v}} ln\left|1 - (\frac{v}{mR})^2\right|$$

$$+ \frac{m^2R}{2\pi}\int_0^\infty dv\left(\frac{d}{dv}\frac{1}{1 + e^{2\pi v}}\right)\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} ln|m^2R^2 - v^2|$$

$A_0(s)$'nin katkısını buluruz. $i = 1,2,3$ için $A_i(s)$ erilen formülleri (Elizalde, 1998) kullanarak daha kolay bulabilir. Iraksak katkılar için bu belirgin formlarla, karşılık

gelen beş terimin tümünün artık terimlerini bularak iç kısım için renormalizasyonu yaparız

$$\mathrm{resA}_{-1}^{\mathrm{int}}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\mathrm{m}^4\mathrm{R}^3}{6\pi}+\frac{\mathrm{m}^2\mathrm{R}}{12\pi}+\frac{7}{480\pi\mathrm{R}} \tag{4.86}$$

$$\mathrm{resA}_{-1}^{\mathrm{int}}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\mathrm{m}^2\mathrm{R}}{2\pi}-\frac{1}{24\pi\mathrm{R}} \tag{4.86}$$

$$\mathrm{resA}_{-1}^{\mathrm{int}}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\mathrm{m}^3\mathrm{R}^2}{\pi}+\frac{\mathrm{m}^2\mathrm{R}}{12\pi}+\frac{\mathrm{m}}{12\pi}-\frac{1}{48\pi\mathrm{R}} \tag{4.87}$$

$$\mathrm{resA}_{-1}^{\mathrm{int}}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\mathrm{m}^2\mathrm{R}}{4}-\mathrm{m}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2\pi}\right)+\frac{1}{128\mathrm{R}}+\frac{1}{24\pi\mathrm{R}} \tag{4.88}$$

$$\mathrm{esA}_{-1}^{\mathrm{int}}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\mathrm{m}^3\mathrm{R}^2}{3\pi}+\mathrm{m}^2\mathrm{R}\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{32\pi}\right)+\mathrm{m}\left(\frac{1}{8}+\frac{7}{20\pi}\right)-\frac{1}{128\mathrm{R}}-\frac{97}{10080\pi\mathrm{R}} \tag{4.89}$$

Tüm bu denklemleri topladığımızda

$$\mathrm{res}\zeta^{\mathrm{int}}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{63\pi\mathrm{R}}-\frac{\mathrm{m}}{15\pi}+\frac{\mathrm{m}^2\mathrm{R}}{3\pi}-\frac{\mathrm{m}^3\mathrm{R}^3}{3\pi}-\frac{\mathrm{m}^4\mathrm{R}^3}{6\pi} \tag{4.90}$$

iç kısım için net ıraksak katkıyı buluruz.

Skaler alan (Bordag, Elizalde 1997) veya fermiyonik alan (Elizalde, 1998) için küresel sınır koşullarındaki birçok araştırma makalesinde belirtildiği gibi, ele alınan sistem iki bölümden oluşur: klasik bölüm ve kuantum bölümü. Sistemin klasik kısmı, R yarıçaplı küresel kabuğun ("bag" olarak bilinir) yüzeyini içerir. Enerjisi aşağıdaki denklemle verilir

$$\mathrm{E}_{\mathrm{class}}=\mathrm{pV}+\sigma\mathrm{S}+\mathrm{FR}+\mathrm{k}+\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{R}} \tag{4.91}$$

Burada $p-$basınç, V- kürenin hacmi, $S-$ yüzey, R- yarıçapı ve F,k,h'nin belirli isimleri yoktur.

Sistemimizin spinor alanından oluşan ikinci kısım (4.2)'de verilen Dirac denklemine ve MIT sınır koşullarına uyar. Spinor alanının taban durum enerjisi,

regülarize edilmiş boşluk enerjisi denklemi (4.33) ile verilmektedir. Bu açıklama, fiziksel sistemin toplam enerjisini

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_{\mathrm{class}} + \mathrm{E}^{\mathrm{ren}} \tag{4.92}$$

yazmamızı sağlamaktadır.

E_{class}- (4.91) denklem ile verilirken, E^{ren} renormalize edilmiş boşluk enerjisini temsil eder. Renormalize edilmiş boşluk enerjisi ifadesi, tüm ıraksak katkıların kaldırılmasından sonra türetilirken, bu ıraksak katkılar kuantum boşluk için yapılan regülarizasyonunun sonucudur.

Renormalizasyon, (4.94)'teki parametrelerin bir miktar kaydırılması ile yapılabilir ve bunlar toplam enerjiye eklendiğinde, tüm ıraksak kısım katkılarını kaldırır. Bu parametler farklı alanlar için farklıdır ve deneysel olarak belirlenir (Elizalde, 1998). Böylece bu parametreleri

$$\begin{aligned} p &\to p - \frac{m^4}{16\pi^2}\frac{1}{s} & F &\to F + \frac{m^2}{6\pi}\frac{1}{s} \\ \mathrm{h} &\to \mathrm{h} - \frac{1}{126\pi}\frac{1}{\mathrm{s}} & \mathrm{k} &\to \mathrm{k} - \frac{\mathrm{m}}{30\pi}\frac{1}{\mathrm{s}} \\ \sigma &\to \sigma - \frac{m^3}{24\pi^2}\frac{1}{s} \end{aligned} \tag{4.93}$$

şeklinde yazabiliriz.

Şimdi renormalize edilmiş enerjiyi tartışalım. Birincisi $m \to \infty$ ve ikinci $m \to 0$ olmak üzere iki durum vardır. $m \to \infty$ durumu $E^{ren} \to 0$ anlamına gelir ve sonsuz ağır spinör alanının dalgalanmadığı açıklanır (Bordag 2009). $m \to \infty$ olduğunda, kaybolmayan tüm parçaların karşılıkları klasik enerjide bulunur, bu nedenle bunlar bir araya getirildiklerinde birbirlerini yok eder (Elizalde, 1998). Renormalize edilmiş kısım

$$\mathrm{E}_0^{\mathrm{ren}} = \mathrm{E}_0^{\mathrm{fin}} + \mathrm{E}_0^{\mathrm{an}} \tag{4.94}$$

verilir. Burada E_0^{fin} (4.44) denkleminde verilmiştir. Analitik kısım

$$E_0^{an} = \lim_{s\to}\left[E_0^{ass} - E_0^{div}\right] \tag{4.95}$$

tanımlanır. Asimptotik kısım (4.93) 'te temsil edilirken, ıraksak kısım aşağıdaki ifadenin açılımından tanımlanır

$$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{16\pi^{3/2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(s+\frac{k}{2}-2\right)}{\Gamma(s-1/2)}m^{4-2s-k}a_{k/2} \tag{4.96}$$

ve son ifadenin açılımı

$$E_0^{div} = -\frac{m^4}{64\pi^2}\left(\frac{1}{s}+ln\frac{4\mu^2}{m^2}-\frac{1}{2}\right)a_0 - \frac{m^3}{24\pi^{\frac{3}{2}}}a_{\frac{1}{2}} + \frac{m^2}{32\pi^2}\left(\frac{1}{s}+ln\frac{4\mu^2}{m^2}-\right)a_1 + \frac{m}{16\pi^{\frac{3}{2}}}a_{\frac{3}{2}} - \frac{1}{32\pi^2}\left(\frac{1}{s}+ln\frac{4\mu^2}{m^2}--2\right)a_2 \tag{4.97}$$

dır; $k = 1,2,3,4,5$ için $a_{k/2}$ "heat kernel" katsayılarıdır.

Şimdiye kadar kürenin iç bölgesini tartıştık. Her iki bölge de dâhil edildiğinde, daha sonra göreceğimiz gibi bazı katkılar yok edilmiştir, bu nedenle klasik enerjide karşılık gelen kısımların renormalize edilmesine gerek kalmaz (Bordag, Elizalde 1997).

Daha önce de belirttiğimiz gibi, sorunu iki bölgeye böldük. Şimdi, büyük yarıçaplı küresel bir kabuk tarafından çevrelenmiş dış bölgeyi tartışıyoruz. İlk olarak, (4.20) denklemindeki mod üreten fonksiyonu bulduk aynı şekilde dış bölge için mod üretme fonksiyonu buluyoruz, bu nedenle karşılık gelen mod fonksiyonu

$$\widetilde{\Delta}_j(ik) = K_{j+1}^2(k) - K_j^2(k) - \frac{2m}{k}K_{j+1}(k)K_j(k) \tag{4.98}$$

ile verilir.

Birinci türden "modified" Bessel fonskiyonu yerine, ikinci türden "modified" Bessel fonksiyonu kullandık çünkü bu fonksiyon, yarıçap sonsuza eğilimli olduğunda sonlu olma özelliğine sahiptir. Burada başka bir fark, ikinci tür "modified" Bessel fonksiyonu için tekralama formülündeki farklı işaretten gelen kütle ($m \to -m$) için negatif işaret vardır (Bell, 1951)

$$K_{j+1}(k) = -K_j'(k) + \frac{j}{k} K_j(k) \tag{4.99}$$

Bu tekrarlama formülünü kullanarak, dış bölge için (4.36) denklemin karşılığını

$$\widetilde{\Delta}_j(ik) = [K_j(k)]^2 + [K_{j+1}(k)]^2 + 2\frac{mR}{k} K_j(k) K_{j+1}(k) \tag{4.100}$$

şeklinde buluruz. Daha fazla hesaplamalar için, ikinci tür Bessel fonksiyonu için asimptotik açılımı ihtiyacımız vardır

$$K_j(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2j}} \frac{1}{(1+z^2)^{1/4}} e^{-j\eta(z)} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{u_k(t)}{j^k}\right] \tag{4.101}$$

$$K_j'(z) = -\sqrt{\frac{\pi}{2j}} \frac{(1+z^2)^{1/4}}{z} e^{-j\eta(z)} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{v_k(t)}{j^k}\right] \tag{4.102}$$

Aynı zamanda (4.37), (4.38), (4.39), (4.40) ve (4.41) 'deki tüm ikameler gereklidir.

Tablo 4.1'in sayaç kısmı, $x_{i,a}$katsayıları için aşağıdaki çizelge ile özetleyebiliriz

Çizelge 4.2. Dış bölge için $x_{i,a}$ katsayıları

a

i	1	2	3	4	5	6	7
1	$\frac{1}{4}+\mathrm{mR}$	0	$-\frac{1}{12}$	0	0	0	0
2	0	$-\frac{\mathrm{m}^2\mathrm{R}^2}{2}$	$-\frac{1}{8}$ $-\frac{\mathrm{mR}}{2}$	$\frac{1}{8}+\frac{\mathrm{mR}}{2}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0
3	0	0	$-\frac{5}{192}$ $-\frac{\mathrm{mR}}{8}$ $+\frac{\mathrm{m}^3\mathrm{R}^3}{3}$	$\frac{1}{8}+\frac{\mathrm{mR}}{2}$ $+\frac{\mathrm{m}^2\mathrm{R}^2}{2}$	$-\frac{9}{320}$ $-\frac{\mathrm{mR}}{4}$ $-\frac{\mathrm{m}^2\mathrm{R}^2}{2}$	$\frac{-\mathrm{mR}-1}{2}$	$\frac{56\mathrm{mR}-237}{64}$

Regülarize edilmiş boşluk enerjisinin asimptotik kısımları aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\mathrm{A}_{-1}^{\mathrm{ext}}(\mathrm{s}) = -\mathrm{A}_{-1}^{\mathrm{int}}(\mathrm{s}) \tag{4.103}$$

$A_{-1}^{int}(s)$ (4.65)'da bulunur. $A_0^{ext}(s)$ için

$$\mathrm{A}_0^{\mathrm{ext}}(\mathrm{s}) = \frac{4\,sin\,\pi\mathrm{s}}{\pi}\sum_{\mathrm{j}=1/2}^{\infty}(\mathrm{j}+\frac{1}{2})\int_{\mathrm{mR/j}}^{\infty}\mathrm{dz}\,[(\mathrm{zj/R})^2-\mathrm{m}^2]^2\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}ln\frac{\sqrt{1+\mathrm{z}^2}+1}{1+\mathrm{z}^2} \tag{4.104}$$

$A_i^{ext}(s)$ ifadesine gelince, (4.68) denklem ile aynıdır, ancak burada tablo 4.1. yerine $x_{i,\alpha}$ değerleri için tablo 4.2.'yi kullanıyoruz. Böylece $A_i^{ext}(s)$ aşağıdaki gibidir

$$\mathrm{A}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{ext}}(\mathrm{s}) = -\frac{(\mu\mathrm{R})^{2\mathrm{s}}}{\mathrm{R}^2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\mathrm{s}-\frac{1}{2}\right)}\sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k}!}(\mathrm{mR})^{2\mathrm{k}}\sum_{\alpha=1}^{3\mathrm{i}}\mathrm{x}_{\mathrm{i},\alpha}\frac{\Gamma\left(\mathrm{k}+\mathrm{s}+\frac{\mathrm{a}-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mathrm{a}}{2}\right)} \tag{4.105}$$

$$\times\,[2\zeta(2\mathrm{k}+2\mathrm{s}+\mathrm{i}-2,1/2)+\zeta(2\mathrm{k}+2\mathrm{s}+\mathrm{i}-1,1/2]$$

Daha önce olduğu gibi, her katkının kalıntısını buluyoruz

$$\mathrm{resA}_{-1}^{\mathrm{ext}}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\mathrm{m}^4\mathrm{R}^3}{6\pi}-\frac{\mathrm{m}^2\mathrm{R}}{12\pi}-\frac{7}{480\pi\mathrm{R}} \tag{4.106}$$

$$\mathrm{resA}_{0}^{\mathrm{ext}}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\mathrm{m}^2\mathrm{R}}{2\pi}+\frac{1}{24\pi\mathrm{R}} \tag{4.107}$$

$$\mathrm{resA}_{1}^{\mathrm{ext}}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\mathrm{m}^3\mathrm{R}^2}{\pi}-\frac{\mathrm{m}^2\mathrm{R}}{12\pi}+\frac{\mathrm{m}}{12\pi}+\frac{1}{48\pi\mathrm{R}} \tag{4.108}$$

$$\mathrm{resA}_{2}^{\mathrm{ext}}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\mathrm{m}^2\mathrm{R}}{4}+\mathrm{m}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2\pi}\right)+\frac{1}{128\mathrm{R}}-\frac{1}{24\pi\mathrm{R}} \tag{4.109}$$

$$\mathrm{esA}_{-1}^{\mathrm{int}}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\mathrm{m}^3\mathrm{R}^2}{3\pi}+\mathrm{m}^2\mathrm{R}\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{32\pi}\right)-\mathrm{m}\left(\frac{1}{8}-\frac{7}{20\pi}\right)-\frac{1}{128\mathrm{R}}+\frac{97}{10080\pi\mathrm{R}} \tag{4.110}$$

Son beş denklem ile (4.88) - (4.92) arasında pek çok benzerlik görüyoruz, ancak farklılıklar zıt işarete bağımlıdır; bu torbası yüzey eğriliğinin iki bölgeye kıyasla zıt işarete sahip olduğu geometrinin açık bir sonucudur (Elizalde, 1998). Dış bölgede final katkıları bulmak için son beş katkıların her birini topluyoruz

$$\mathrm{res}\zeta^{\mathrm{ext}}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{63\pi\mathrm{R}}-\frac{\mathrm{m}}{15\pi}-\frac{\mathrm{m}^2\mathrm{R}}{3\pi}-\frac{\mathrm{m}^3\mathrm{R}^3}{3\pi}+\frac{\mathrm{m}^4\mathrm{R}^3}{6\pi} \tag{4.111}$$

Şimdi bu ifadeyi normalleştirmek istersek, önceki başlıktaki adımların aynısını yapıyoruz. (4.114) denklemde beş terim olduğundan, ifadeyi renormalize etmek için önceki hesaplamalarda olduğu gibi beş parametreye ihtiyacımız vardır. Yine serbest parametreler deneysel olarak belirlenir ve tüm felsefe bu farklı parçaların kaldırılmasına dayanmaktadır. (4.96) denklemde olduğu gibi, $\{p,\sigma,F,k,h\}$ serbest parametrelerini aşağıdaki gibi yazabiliriz

$$p\to p+\frac{m^4}{16\pi^2}\frac{1}{s}\qquad\qquad F\to F-\frac{m^2}{6\pi}\frac{1}{s}$$

$$h \to h + \frac{1}{126\pi}\frac{1}{s} \qquad k \to k - \frac{m}{30\pi}\frac{1}{s}$$

$$\sigma \to \sigma - \frac{m^3}{24\pi^2}\frac{1}{s}$$

Yine, geometri türüne bağımlılık hakkında yukarıda verilen açıklamayı izleyen işaretlerde bir fark görüyoruz.

Hem dış hem de iç bölge için ıraksak katkıları, (4.93) denklem ve (4.111) denklem toplamı ile verilmiştir

$$\mathrm{res}\zeta\left(-\frac{1}{2}\right) = \mathrm{res}\zeta^{\mathrm{int}}\left(-\frac{1}{2}\right) + \mathrm{res}\zeta^{\mathrm{ext}}\left(-\frac{1}{2}\right) \tag{4.112}$$

Buradan

$$\mathrm{res}\zeta\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2\mathrm{m}}{15\pi} - \frac{2\mathrm{m}^3\mathrm{R}^2}{3\pi} \tag{4.113}$$

elde ederiz. Iraksamalar birini ve diğerini yok etmediğini ve iki terimin kaldığını görüyoruz. Bunlar, ifadeyi renormalize etmek için iki serbest parametrenin $\{\sigma, k\}$ gerekli olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla, tüm alan dikkate alınsa bile (iç ve dış bölge birlikte ele alındığında) renormalize etmek için iki parametreye ihtiyaç vardır. Bu iki serbest parameter klasik enerjinin bir parçasıdır. Teorik olarak konuşursak, bu parametreler, sorunumuzu gerçek bir fiziksel sorundan uzak tutan sabit değerlerle belirlenemez. Önemli olan, daha sonra gerçek problemler ve geometriler gibi sıfır noktası enerjisini bulmak için kullanılabilecek geliştirilen yöntemdir.

Şimdiye kadar, bu tür bir alanın (4.113) denklemdeki kaybolmayan terimlerin görünümünü etkilediğini söylememiz gereken kütleli Dirac Alanını tartıştık. Kütlesiz Dirac alanı için, hesaplamaların kütlesiz skaler alan için sıfır nokta enerjisine benzerdir ve bu terimler kaybolur ve normalizasyon gerekmemektedir (Bordag, 1997).

4.4. Kütlesiz spinör alanı için Casimir etkisi

İlk olarak, renormalizasyon parametreleri gerektiren basit bir klasik modeli tartışacağız. Bunu yapmak için (4.38) denklemini aşağıdaki gibi yazıyoruz

$$\mathrm{E_0(s)} = -\frac{(\mu\mathrm{R})^{2s}}{\mathrm{R}}\mathrm{e_0(s)} \tag{4.114}$$

$e_0(s)$- boyutları olmayan s bağımlı fonksiyonudur. Buradan beri kütlesiz spinör alanını tartışıyoruz ve $m = 0$ için "heat kernel" açılımını kullanıyoruz

$$\mathrm{E_0^p(s)} = -\frac{\widetilde{a_2}}{32\pi^2 \mathrm{s}} = -\frac{2a_2 - 2a_1 m^2 + a_0 m^4}{64\pi^2} \tag{4.115}$$

$m = 0$ alıyoruz ve $e_0(s)$ için

$$\mathrm{e_0(s)} = -\frac{a_2 \mathrm{R}}{32\pi^2}\frac{1}{\mathrm{s}} + \widetilde{e_0} + \mathrm{O(s)} \tag{4.116}$$

elde ederiz. Burada $\widetilde{e_0}$ s'ye bağlı değildir.

$(\mu R)^{2s} = 1 + 2s\ln(\mu R)$ açılımını kullanarak ve (4.120) denklemini (4.18) denklemi ile değiştirerek

$$\mathrm{E_0(s)} = -\frac{a_2 \mathrm{R}}{32\pi^2}\left[\frac{1}{\mathrm{s}} + 2\,ln(\mu\mathrm{R})\right] + \frac{\widetilde{e_0}}{\mathrm{R}} + \mathrm{O(s)} \tag{4.117}$$

elde ederiz. Aşağıdaki klasik modeli yazmak için önceki başlık referans alırız

$$\mathrm{E_{class}} = \mathrm{pV} + \sigma\mathrm{S} + h_1 \mathrm{R} + h_2 + \frac{h_3}{\mathrm{R}} \tag{4.118}$$

Renormalizasyon için sadece $h_3 \neq 0$'a ihtiyacımız var, bu arada diğer tüm parametreler sıfıra eşittir. (4.87) denkleminden, sistemin toplam enerjisinin klasik enerjisi ve kuantum enerjisi $E_0(s)$ toplamı olduğunu görüyoruz, dolayısıyla

$$\mathrm{E} = \frac{h_3}{\mathrm{R}} - \frac{a_2 \mathrm{R}}{32\pi^2}\left[\frac{1}{\mathrm{s}} + 2\,ln(\mu\mathrm{R})\right] + \frac{\widetilde{e_0}}{\mathrm{R}} + \mathrm{O(s)} \tag{4.118}$$

Önceki bölümlerde yaptığımız gibi, h_3 serbest parametresini

$$h_3 \to h_3^{\mathrm{ren}} = h_3 - \frac{a_2 \mathrm{R}}{32\pi^2} \tag{4.119}$$

şu şekilde yeniden tanımlarız.

Buradan $\widetilde{e_0}/R$ 'nin, h_3 parametresinin yeni tanımı ile ıraksamaların giderilmesinden sonraki vakum enerjisinin temsil edebileceğini söyleyebiliriz, ancak daha fazla yorumlayamayız çünkü söz konusu klasik model hakkında daha fazla bilgiye ihtiyacımız vardır (Bordag, 2009). Şimdiye kadar yapılan tüm açıklamaların a_2 için sıfır olmayan bir değer içerdiğine dikkat etmeliyiz. İç bölge için "heat kernel" katsayılarını (4.6) bölümünde bulduk. Dikkate alınan her iki bölge için a_0 katsayısı sıfır olur, dolayısıyla (4.123) ve (4.121) denklemlerinden

$$\mathrm{E}_0^{\mathrm{ren}} = \frac{\widetilde{\mathrm{e}_0}}{\mathrm{R}} \tag{4.120}$$

elde ederiz ve bu denklem Casimir etkileşiminin iki paralel plaka arasındaki fiziksel anlamı verir. Bunun üzerine boşluk enerjisinin fiziksel anlamını tanımladık, şimdi onun değerini bulmaya devam edelim.

Kütlesiz Dirac alanı için boşluk enerjisi bulma hesaplamaları, daha önce yapılanlara eşdeğerdir. Bu nedenle, türetilen ana formül ve denklemlere açıklamamızı basitleştiriyoruz. Yine en önemli nokta, ortaya çıkan farklı katkılarla uğraşmaktır, bundan sonra sonlu kısmını ele alırız. Başta (4.52) denklemde $m = 0$ koyarız

$$\mathrm{A_i(s)} = 4(\mu\mathrm{R})^{2\mathrm{s}} \frac{cos\,\pi\mathrm{s}}{\pi\mathrm{R}} \sum_{\mathrm{j}=0}^{\infty} \mathrm{n} \int_0^{\infty} \mathrm{dk\,k}^{(1-2\mathrm{s})} \frac{\partial}{\partial \mathrm{k}} \frac{\mathrm{D_i}}{\mathrm{j^i}} \tag{4.121}$$

Ve entegrasyon değişkenini $k = jz$ ile değiştirerek

$$\mathrm{A_i(s)} = 4(\mu\mathrm{R})^{2\mathrm{s}} \frac{cos\,\pi\mathrm{s}}{\pi\mathrm{R}} \sum_{\mathrm{j}=0}^{\infty} (\mathrm{j} + \frac{1}{2})\,\mathrm{j}^{1-2\mathrm{s}} \int_0^{\infty} \mathrm{dz\,z}^{(1-2\mathrm{s})} \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \frac{\mathrm{D_i}}{\mathrm{j^i}} \tag{4.122}$$

elde ederiz. (4.37), (4.38) ve (4.47) denklemlerini kullanarak

$$\mathrm{A_{-1}(s)} = 8(\mu\mathrm{R})^{2\mathrm{s}} \frac{cos\,\pi\mathrm{s}}{\pi\mathrm{R}} \sum_{\mathrm{j}=0}^{\infty} (\mathrm{j} + \frac{1}{2})\,\mathrm{j}^{2-2\mathrm{s}} \int_0^{\infty} \mathrm{dz\,z}^{(1-2\mathrm{s})} \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} [\eta(\mathrm{z}) - ln\,\mathrm{z}] \tag{4.123}$$

$$A_0(s) = 4(\mu R)^{2s} \frac{cos\,\pi s}{\pi R} \sum_{j=0}^{\infty} (j + \frac{1}{2})\, j^{1-2s} \int_0^{\infty} dz\, z^{(1-2s)} \frac{\partial}{\partial z} \Big[ln \frac{2}{1+\sqrt{1+z^2}} - ln\, 2\pi j \Big] \tag{4.124}$$

$$A_i(s) = 4(\mu R)^{2s} \frac{cos\,\pi s}{\pi R} \sum_{j=0}^{\infty} (j + \frac{1}{2})\, j^{1-2s} \int_0^{\infty} dz\, z^{(1-2s)} \frac{\partial}{\partial z} \frac{D_i}{j^i} \tag{4.125}$$

buluruz. Burada $i = 1,2,3$. İntegraller kolayca çözülebilir

$$\int_0^{\infty} dz\, z^{(1-2s)} \frac{\partial}{\partial z} [\eta(z) - ln\, z] = -\frac{\Gamma(\frac{1}{2} - s)\Gamma(s-1)}{4\sqrt{\pi}} \tag{4.126}$$

$$\int_0^{\infty} dz\, z^{(1-2s)} \frac{\partial}{\partial z} \Big[ln \frac{2}{1+\sqrt{1+z^2}} - ln\, 2\pi j \Big] = \frac{\pi}{2cos\,\pi s} \tag{4.127}$$

$$\int_0^{\infty} dz\, z^{(1-2s)} \frac{\partial}{\partial z} D_i = \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - s)\Gamma(s + \frac{\alpha+1}{2})}{\Gamma\left(\frac{\alpha+i}{2}\right)} \tag{4.128}$$

Bu sonuçları ve (4.80) denklemini kullanarak

$$A_{-1}(s) = \frac{R^{2s}}{\sqrt{\pi}\Gamma(s)} \frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})}{s} \Big[2\zeta\Big(2s-2, \frac{1}{2}\Big) + \zeta\Big(2s-1, \frac{1}{2}\Big) \Big] \tag{4.129}$$

$$A_0(s) = -\frac{R^{2s}}{\sqrt{\pi}\Gamma(s)} \frac{\Gamma(s + \frac{1}{2})}{s} \Big[2\zeta\Big(2s-1, \frac{1}{2}\Big) + \zeta\Big(2s-1, \frac{1}{2}\Big) \Big] \tag{4.130}$$

$$A_i(s) = -\frac{2R^{2s}}{\Gamma(s)} \sum_{j=0}^{2i} x_{i.\alpha} \frac{\Gamma(s + \frac{\alpha+1}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha+i}{2})} \Big[2\zeta\Big(2s+i-1, \frac{1}{2}\Big) + \zeta\Big(2s+i, \frac{1}{2}\Big) \Big] \tag{4.131}$$

elde ederiz. Dış bölge için aynı prosedür, aynı ifadeleri yeniden üretir, ancak zıt işaret ile. Bu ifade, (4.107), (4.108) ve (4.109) denklemlerinden açıkça görülmektedir. Şimdi analitik sürekliliği $s = 1/2$ etrafında alarak, Hurwitz zeta fonksiyonu $\zeta(0,1/2) = \zeta(-2,1/2) = 0$ değerlerini kullanarak ve ıraksak katkıların her birini ekleyerek vakum

enerjisinin asimptotik kısmı sıfır olarak buluruz. Böylece sonlu kısma ıraksak bir katkı eklenmez.

Karşılaştırılabilir hesaplamalar, (4.69), (4.70) ve (4.71)'ye m = 0 koyarak yapılabilir, aynı zamanda bu daha kısa bir yaklaşımdır, eğer halihazırda kütleli alan için katkılarımız varsa $m = 0$ aldığımız için, m ile çarpma nedeniyle tüm ıraksak katkılar sıfır olur.

Son görev, boşluk enerjisi için sonlu kısmı bulmaktadır. (4.23) denkleminden başlayıp $m = 0$ koyarak veya (4.40)'te m'nin değerini değiştirerek başlayabiliriz

$$\mathrm{E}_0^{\mathrm{fin}} = \frac{4}{\mathrm{R}\pi}\sum_{\mathrm{l}=0}^{\infty}\mathrm{n}\int_0^{\infty}\mathrm{dk\,k}\frac{\partial}{\partial \mathrm{k}}\left[ln\,\widetilde{\Delta}_{\mathrm{J}}(\mathrm{ik}) - \mathrm{h}_{\mathrm{ass}}(\mathrm{j},\mathrm{z})\right] \tag{4.132}$$

İntegrasyon değişkenini $k = jz$ ile değiştiriyoruz

$$\mathrm{E}_0^{\mathrm{fin}} = \frac{4}{\mathrm{R}\pi}\sum_{\mathrm{l}=0}^{\infty}\mathrm{nj}\int_0^{\infty}\mathrm{dz\,z}\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\left[ln\,\widetilde{\Delta}_{\mathrm{J}}(\mathrm{ijz}) - \mathrm{h}_{\mathrm{ass}}(\mathrm{j},\mathrm{z})\right] \tag{4.133}$$

Şimdi parantez içindeki ifadenin açılımına ihtiyacımız var, bunu yapmak için iç ve dış bölgeler için sonlu vakum enerjisini aşağıdaki biçimde ve birlikte yazıyoruz (Milton, 1983)

$$\mathrm{E}_0^{\mathrm{fin}} = \frac{2}{\mathrm{R}\pi}\sum_{\mathrm{l}=0}^{\infty}(\mathrm{l}+1)\int_0^{\infty}\mathrm{dz\,z}\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}ln\left[\left(\mathrm{j}_{\mathrm{l}+1}^2 + \mathrm{j}_{\mathrm{l}}^2\right)\left(\mathrm{y}_{\mathrm{l}+1}^2 + \mathrm{y}_{\mathrm{l}}^2\right)\right] \tag{4.134}$$

j_l ve y_l

$$\mathrm{j_l(z)} = \sqrt{\frac{\pi}{2\mathrm{z}}}\mathrm{J}_{\mathrm{l}+\frac{1}{2}}(\mathrm{z}) \tag{4.135}$$

$$\mathrm{y_l(z)} = \sqrt{\frac{\pi}{2\mathrm{z}}}\mathrm{Y}_{\mathrm{l}+\frac{1}{2}}(\mathrm{z}) \tag{4.136}$$

şu şekilde tanımlanan küresel Bessel fonksiyonlardır (Bell, 1967). Logaritmik fonksiyonun argümanı

$$\left(j_{l+1}^2 + j_l^2\right)\left(y_{l+1}^2 + y_l^2\right) = 1 + \lambda_l^2 \tag{4.137}$$

şu ifade ile eşittir. Asagidaki belirtilmektedir;

$$\lambda_l^2 = \frac{d}{dz}\left[\left(l + \frac{1}{2}\right) - \frac{z}{2}\frac{d}{dz}\right]\frac{j_l y_l}{z} \tag{4.138}$$

Rayleigh formüllerini küresel Bessel fonksiyonları için kullandık (Bell, 1967)

$$j_l(z) = (-1)^l z^l \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^l \frac{sin\, z}{z} \tag{4.139}$$

$$y_l(z) = -(-1)^l z^l \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^l \frac{cos\, z}{z} \tag{4.140}$$

(4.46) ve (4.105) denklemlerini kullanarak $j_l y_l$

$$j_l y_l \sim \frac{z}{2}\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k}{\nu^k}\right]\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{u_k}{\nu^k}\right] \tag{4.141}$$

çarpımını buluruz. u_k - (4.49) denklemde verilen Debye polinomlarını temsil eder. Birkaç basit cebirsel hesaplamadan sonra

$$\begin{aligned} E_0 = \frac{2}{R\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\int_0^{\infty} dz \Bigg\{ & z\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{4}\frac{1}{(1+z^2)^3} + \frac{3z^2}{8\nu}\frac{1}{(1+z^2)^3}\left(1 - \frac{2}{1+z^2}\right)\right] \\ & - \left[\nu^2\left(1 + \frac{1}{2\nu}\right) ln\left(1 + \lambda_l^2\right) - \frac{1z^2}{4}\frac{1}{(1+z^2)^3}\right. \\ & \left. - \frac{3z^2}{8\nu}\frac{1}{(1+z^2)^3}\left(1 - \frac{2}{1+z^2}\right)\right]\Bigg\} \end{aligned} \tag{4.142}$$

elde ederiz. İlk parantezdeki integral kolayca bulunur ve ikinci parantez için yapılan bir değerlendirme ile birlikte

$$E_0 = \frac{1}{64R} - \frac{2}{R\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\int_0^{\infty} dz\left[\nu^2\left(1 + \frac{1}{2\nu}\right) ln\left(1 + \lambda_l^2\right) - \frac{\pi}{64}\right] \tag{4.143}$$

elde ederiz. 3'e kadar l için vakum enerjisi için doğrubir değer buluyoruz (Milton, 1983), bu nedenle ilk değerler için

$$E_0 = \frac{1}{64R} - \frac{2}{R\pi}(-0{,}0075) \tag{4.144}$$

Final çözüm

$$E_0 = \frac{0.0204}{R} \tag{4.145}$$

şudur.

(4.145) denklem, "bag" sınır koşulu olarak adlandırılan küresel sınır koşullarında kütlesiz spinör alanı için sıfır nokta enerjisini temsil eder. Sonuçlarımız, önce sayısal değerlendirmelerden (Milton, 1983) en son hesaplamalara (Elizalde, 1998), şimdiye kadar yapılan tüm sonuçlarla tamamen aynıdır. Bulunan sıfır nokta enerjisi, hem dış hem de iç bölgeleri kapsamaktadır. Pozitif işaret, spinor alanının küresel bir geometri ile sınırlandırıldığında Casimir kuvvetinin itici doğasını gösterir. Bu arada, iki paralel plaka arasındaki Casimir kuvvetinin çekici olduğu tespit edilmiştir (Bölüm 2), bu farklı sonuçlar, Casimir etkisinin veya Casimir kuvvetinin geometriye bağlı nicelik olduğu varsayımımıza başka bir örnek sağlamaktadır.

SONUÇLAR

Bu çalışmada; göreli kuantum denkleminden hareketle Dirac alanını inşa ederek, paralel plakalar ve küresel kabuk için Dirac alanının kuantum boşluk enerjisi yani taban durumu enerjisini modların toplamı ve zeta fonksiyonu regülarizasyonu kullanarak yeniden elde edilmiştir.

Küresel kabuk için sıfır nokta enerjisi hesaplamalarımızda öncellikle modların küresel geometrideki dağılımlarını açıklamak ve mod toplamını bulmak için modların toplamı yöntemi kullanıldı. Problem; hadronları açıklamaya yönelik bir model olan "bag" modeli olarak adlandırılan modele uymaktadır. Boşluk enerjisini regülarize etmek için zeta fonksiyonları kullanıldı. Regülarizasyondan sonra, kürenin dış ve iç kısmı birlikte ele alındığında bu farklı katkıların ortadan kalkmasını beklediğimiz yerde farklı sonsuzlukları ortaya çıkar. Kürenin her iki bölgesi için tüm ıraksak katkıları, kütleli ve kütlesiz Dirac alanı için ayrı ayrı hesaplanabilir. Kütleli Dirac alanı için ıraksak kısımlar kaybolmaz, bu nedenle fazladan bir renormalizasyon yapmamız gerekir. Buradaki renormalizasyon; iki bölümden oluşan fiziksel bir sistemin tanımlanmasını gerektirir: klasik enerji ve kuantum enerjisi gibi. Bunu yaparken, kaybolmamış ıraksak katkıları işlemek için birkaç serbest parametre kullanılır. Ancak böyle bir sistem fiziksel ve gerçek sorunlardan uzaktır. Öyle bile olsa, alanın küresel geometride nasıl davrandığına dair önemli bir bilgi verir. Bu arada kütlesiz alan için ıraksak katkılar tamamen ortadan kalkar, bu nedenle renormalizasyona gerek yoktur. Bulunan Casimir kuvveti, plakanın geometrisinin tamamen tersine itici bir doğaya sahiptir. Bu sonuç Casimir kuvvetinin doğasının geometriye bağlı olduğunu gösterir.

Kütlesiz Dirac alanının renormalize kuantum boşluk enerjisinin paralel plaka için tıpkı skaler ve elektromanyetik alanlarında olduğu gibi negatif değerli yani çekici

kuvvet üreten enerjiye sahip olduğu elde edilmiştir. Paralel plakalar için kütlesiz Dirac alanının renormalize kuantum boşluk enerjisi itici kuvvet

$$F(d) = -\frac{7\pi^2}{960d^4}$$

dir. Burada d, plakalar arasındaki mesafeyi ifade eder. Bu itici kuvvet elektromanyetik alanın ürettiği itici kuvvetin$7/4$ katına eşittir.

Küresel kabuk için ürettiği kuantum kütlesiz Dirac alanının boşluk enerjisi, oldukça uzun işlemlerin diğer değişle yorucu regülarizasyon yönteminin uygulanması sonucunda itici kuvvet üreten

$$E(R) = \frac{0.0204}{R}$$

değer elde edilmiştir. Burada R kürenin yarıçapı. Elektromanyetik alanın küresel kabuktatki renormalize edilmiş kuantum boşluk enerjisi

$$E(R) = \frac{0.046361}{R}$$

Dirac alanın enerji değerinin yaklaşık olarak iki katı değerdedir.

Bu çalışmadan kazandığımız yönelim ile eş merkezli iki küre arasına yerleştririlmiş kütlesiz Dirac alanının Casimir etkisini gelecekte tartışacağız.

KAYNAKÇA

Ahlfors, L. V. (1979). *Complex Analysis: An introduction to the Theory of Analytic functions and Complex variables*. Third Edition, United State of America: McGraw-Hill, Inc.

Asorey, M. (2018). A concise introduction to Quantum Field Theory. *International Journal of geometric Methods in Modern Physics*. DOI: 10.1142/S021988781940005X.

Backdahl, T., Kroon. J. A. V. (2016). A formalism for the calculus of variations with spinors. *Journal of Mathematical Physics*. Volume 57.

Bordag, M. (1996). Heat kernel coefficients of the Laplace operator on the D-dimensional ball. *Journal of Mathematical Physics*. Volume 37. 895.

Bordag, M. (2006). Casimir effect for a sphere and a cylinder in front a plane and corrections to the proximity force theorem. *Phys. Rev. D* 73, 125018.

Bordag, M., Elizalde, E., Kirsten, K., Leseduarte, S. (1997). Casimir energies for a massive scalar field in a spherical geometry. *Physical Review D*. volume 56.

Bordag, M., Kirsten, K. (2002). Heat kernel coefficients and divergencies of the Casimir energy for the dispersive sphere. *Int.J.Mod.Phys.A*. volume 17. 813-819.

Bordag, M., Mohideen, U., Mostepanenko, U. H., (2001). New development in the Casimir Effect. *Physics Report*. Volume 353.

Bordag, M., Elizalde, E., Kirsten, K. (1998). Heat kernel coefficients of the Laplace operator on the *D*-dimensional ball. *Journal of mathematical Physics*. Volüme 37.

Bordag, M., Klimchitskaya, G. L., Mohideen. U., Mostepanenko, V. M. (2009). *Advances in The Casimir Effect*. Oxford University Press Inc., New York.

Bunge, M. (1970). Virtual Processes and virtual Particles: real or fictitious. *International Journal of Theoretical Physics*. Volume 3.

Casimir, H. B. G. (1948). On the attraction between two perfectly conducting plates. *Indag.MathVo 10.*

Casimir, H. B. G. (1953). Introductory Remarks on Quantum Electrodynamics. *Physica*. Vol. 19.

Casimir, H. B. G., Polder, D. (1948). The influence of retardation on the London-van der Waals Forces. *Physical Review.* Volume 3. Number 4.

Chodos, A., Jaffe, R. L., Johnson, K., Thorn, C. B. (1974). Baryon Structure in the bag theory. *Physical Review D*. vol. 10.

Chodos, A., Jaffe, R. L., Johnson, K., Thorn, C. B., and Weisskopf V. F. (1974), New extended model of hadrons. *Phys. Rev. D.* Vol. 9.

Das, A. (2008). *Lectures on quantum field Theory*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Dirac, P. (1927). Quantum Mechanics of Many-Electron System. *Proc.Roy. Soc.Lond.* Volume 123. Page 714-734.

Dirac, P. (1929). The Quantum Theory of the Emission and Absorption of Radiation. *Proc.Roy. Soc.Lond.* A 114.

Elizalde, E. (1991). Essentials of the Casimir effect and its computation. A*merican Journal of Physics.* Volume 59. No. 8

Elizalde, E., (1993). Zeta-Function Regularization is Uniquely Defined and Well. *Journal of Physics A General Physics*. Volume 27.

Elizalde, E., Bordag, M., Kirsten, K. (1998). Casimir energy for a massive fermionic quantum field with a spherical boundary. *J. Phys. A: Math. Gen*. 31 1743.

Elizalde, E., Romeo, A. (1989). Rigorous extension of the proof of zeta-function regularization. *Phys. Rev. D.* vol. 40, 436.

Farina, C. (2006). The Casimir Effect: Some aspects. *Brazilian Journal of Physics volume l.36 no.4a.*

Feynman, R., Weinberg, S. (1987), *Elementary Particles and the Laws of Physics*, the 1986 Dirac Memorial Lectures. Cambridge: Cambridge University Press.

Garner, G. (2017). Quantum Boundary Conditions. The University of Bari Aldo Moro, Department of Physics "M. Merlin", Bari.

Gobira, S. R., De Melo, M. D. B. (2020). Divergent Integrals Treatment in Quantum Field Theory. *Rev. Bras. EnsinoFís*. Vol.43.

Graham, N., Jaffe, R. L., Khemani, V., Quandt, M., Scandurra, M., Weigel, H. (2003). Casimir energies in the light of quantum field theory. *Physics letters B*. volume 572. Page 196-201.

Greiner, W., Reinhardt, J. (1996). *Field quantization. Heidelberg*, Germany: Springer.

Hawking, S. W. (1977). Zeta Function Regularization of Path Integrals in Curved Space-time, *Communication in Mathematical Physics*. Vol. 55.

Itzykson, C., Zuber J.B. (1980). *Quantum field Theory*. New York, United State of America: McGraw-Hill.

Jaffe, R. L. (2005). Casimir effect and the quantum Vacuum. *Physical Review D*. vol. 72.

Johnson, K. (1975). The M.I.T Bag Model. *Acta.Physica. Polonica*. Vol. B6.

Karatsuba, A. A. (1985). The Riemann Zeta Function and Its zeros. *Russian Mathematical Surveys*. Vol. 40.

Klauber, R. D., (2013). *Student Friendly Quantum Field Theory*. Iowa, United State of America: Sandtrove Press.

Lambrecht, A., (2002). The Casimir effect: a force from nothing. *Physics World*. Vol. 15. No. 9.

Lamoreaux, S. K. (1997). Demonstration of the Casimir Force in the 0.6 to 6 μm Range. *Phys. Rev. Lett*. Vol. 78, 5.

Langer, R. E. (1931). On the asymptotic solutions of ordinary differential equations, with an application to the Bessel functions of large order. *Transactions of theAmerican Mathematical Society*.

Lifshitz, E. M. (1956). The Theory of Molecular Attractive Forces Between Solids. *Sov.Phys. JETP*. vol. 2 page 73-83.

Lutekn, C. A., Ravndal, F. (1984). Fermionic vacuum fluctuations between chiral plates. *Journal of Physics G: Nuclear Physics*. Volume 10.

Mainland, G. B., Mulligan, B. (2019). How vacuum fluctuation determine the properties of the vacuum. *J. Phys.: Conf. Ser*. Volume 1239.

Mandl, F., Shaw, G. (1984). *Quantum Field Theory. First Edition*. United State of America: John Wiley.

Matt, V. (2018). Regularization versus Renormalization: Why Are Casimir Energy Differences So Often Finite. *Particles*. vol. 2. No. 1.

Milonni, P.W. (1993). *The Quantum Vacuum: An introduction to Quantum Electrodynamics*. San Diego: Academic Press, Inc.

Milton, K. (2003). The Casimir Effect: Physical Manifestation of Zero-Point Energy. *Physics Today*. Vol. 56.

Milton, K. A. (1983). Fermionic Casimir stress on a spherical bag. *Annals of Physics*. Volume 150.

Milton, K. A. (2004). The Casimir effect: recent controversies and progress. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, Volume 37, Number 38.

Mladenov, I. M. (1993). On Debye-Huckle's Theory. *Europhysics Letters*. Vol. 24.

Mohideen, U., Roy, A. (1998). Precision Measurement of the Casimir Force from 0.1 to 0.9μm. *Phys. Rev. Lett*. Vol. 81.

Nesterenko, V. V., Pirozhenko, I. G. (1998). Simple method for calculating Casimir effect for a sphere. *Phys. Rev. D* 57, 1284.

Newton, C., Osland, P., Wu, T. T. (1994). Point-splitting regularization for gauge theories: Quantum electrodynamics. *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, volume 61, pages 441–44.

Özcan, M. (2012). Scalar Casimir Effect between two concentric spheres. *International Journal of Modern Physics A*. volume 27. No. 16.

Paris, R. B. (2017). A note of the asymptotics of the modified Bessel functions on the Stokes lines. *Mathematica Aeterna*. Vol. 7.

Power, E. A. (1966). Zero-point enrgy and the lamb shift. *American Journal of Physics*. Volume 34. No 516.

Reynaud, S., Lambrecht, A., Genet, C., Jaekel. M. T. (2001). Quantum Vacuum Fluctuation. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences*. Volume 2. Page 1287-1298.

Romeo, A., Saharian, A. A. (2002). Casimir effect for scalar fields under Robin boundary Conditions on plates. *J. Phys. A: Math. Gen*. 35 1297.

Saharian, A. A. (2000). The Generalized Abel-Plana Formula. Application to Bessel Functions and Casimir Effect. *The Abdus Salam International Center for Theoretical Physics*. Vol. 14.

Sibold, K. (2009). Conjugate variables in quantum field theory and natural symplectic structures. *Nuclear Physics B*. volume 811.

Sparnaay, M. J. (1958). Measurements of attractive forces between flat plates. *Physica*. Vol. 24.

Sun, J. (1998). On the ultraviolet divergence in QED. *Hadronic Journal*. Volume 21.

Teo, L. P. (2015). Fermionic Casimir interaction in cylinder-plate and cylinder-cylinder geometries. *Phys. Rev. D* 91, 125030.

Vassilevich, D. V., Heat Kernel Expansion: user's manual. *Physics Report*. vol.338 Pages 751-764.

Wheeler, J. A. (1957). On the Nature of Quantum Geo-metro-dynamics. *Annals of Physics*. Volume 2.

ÖZGEÇMİŞ

ALBION ARIFI

EĞİTİM BİLGİLERİ

Lise: "Kiril Pejçinoviq*",* Kalkandelen, Kuzey Makedonya, 2011/2015

Lisans : "Kalkandelen Devlet Üniversitesi", Fizik Bölümü, Kalkandelen, Kuzey Makedonya, 2015-2019

Yüksesk Lisans :"**Trakya Üniversitesi",** Fizik Bölümü - Kuantum alan Teorisi, Edirne, Türkiye, 2019- devam ediyor

SERTİFİKA, ÖDÜLLERI VE BURSLAR

« **Yılın en iyi okuyucu »**, Kalkandelen Kütüphanesi, yıl 2015

« **Sertifikatası aktif gönüllü iş için** », Gençlik İslam Forumu, yıl 2014

« Liderlik Seminer », oğrenci organizasyon, » Oğrenci hayat », yıl 2017

« **English Summer Camp** », oğrenci organizasyon, » Oğrenci hayat », yıl 2017

« **English Summer Camp** », oğrenci organizasyon, » Oğrenci hayat », yıl 2018

« **Takdir Sertifikatası, InCites B/A & Journal Citation Reports & Essential Science Indicator** », Web of Science Group, 22.03.2021

« **Takdir Sertifikatası, Web of Science Core Collection** », Web of Science Group, 16.03.2021

"**Burs en iyi oğrenciler için**", Eğitim, Gençlik ve Spor Bakanlığı, Kuzey Makedonya, Akademik yıllar 2016-2017, 2017-2018, 2018-2019

"**ERASMUS+**", değişmen burs programi, Akademik yıl 2017/2018, Bahar dönemi, "Trakya Üniversitesi", Fen Fakültesi, Fizik Bölümü, Edirne, Türkiye

"**Yüksek Lisans Bursları**", İlim Yayma Vakıf, İstanbul, Türkiye, 2019-2020

"**Başarı Bursu**", Türkiye Bursları, Türkiye, 2020-2021

KONFERANSLAR

« **Third International Conference of Natural Sciences and Mathematics** », Kalkandelen Devlet Üniversitesi, Fen Bilimleri Fakültesi, 15-17 Mayıs 2019

BİLGİSAYAR BİLGİSİ

C++ programlama dili, **FORTRAN** programlama dili, **WORD**, **EXEL**, **POWERPOINT**

DİL BİLGİSİ

Arnavutça- ana dil

Makedonca- Okuma: Çok iyi, Yazma: Çok iyi, Konuşma: İyi

İnglizce -Okuma: Çok iyi, Yazma: Çok iyi, Konuşma: Çok İyi

Türkçe- Okuma: Çok iyi, Yazma: Çok iyi, Konuşma: Çok İyi

REFERANSLAR

Mustafa Özcan- Fizikte Doktora, "Trakya Üniversitesi"