T.C.

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU HALKALARDA DEVİRLİ KODLAR VE KODLARIN KIYASLANMASI

Habibe Rana KAŞDAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HESAPLAMALI BİLİMLER ANABİLİM DALI

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Mustafa ÖZKAN

EDİRNE-2025

Habibe Rana KAŞDAŞ'in hazırladığı **"Sonlu Halkalarda Devirli Kodlar ve Kodların Kıyaslanması"** başlıklı bu tez, tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından **Hesaplamalı Bilimler** Anabilim Dalında bir **Yüksek lisans tezi** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Dr. Öğr. Üyesi Mustafa ÖZKAN	……
Prof. Dr. Ayten PEKİN	……
Prof. Dr. Mehmet SEZGİN	……

Tez Savunma Tarihi: 20/06/2025

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

İmza

Dr. Öğr. Üyesi Mustafa ÖZKAN

Tez Danışmanı ……

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

……

Doç. Dr. Filiz UMAROĞULLARI

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

T. Ü. FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HESAPLAMALI BİLİMLER ANABİLİM DALI YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

DOĞRULUK BEYANI

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında, tüm verilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini, kullanılan verilerde tahrifat yapılmadığını, tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını, kullanılan tüm literatür bilgilerinin bilimsel normlara uygun bir şekilde kaynak gösterilerek ilgili tezde yer aldığını ve bu tezin tamamı ya da herhangi bir bölümünün daha önceden Trakya Üniversitesi ya da farklı bir üniversitede tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

20/06/2025

Habibe Rana KAŞDAŞ

İmza

Yüksek Lisans Tezi

Sonlu Halkalarda Devirli Kodlar ve Kodların Kıyaslanması

T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü

Hesaplamalı Bilimler Anabilim Dalı

ÖZET

Tezde iki değişkenli yeni halka tipi tanımlanmıştır. Devirli, sabit, yarı devirli kod tanımları bu halka tipi üzerinde sunulmuştur ve aralarındaki ilişkileri kıyaslayan önermeler verilmiştir.

Tezin birinci bölümünde, kodlama teorisindeki ilk çalışmalar, gelişimi ile birlikte literatürdeki araştırmalardan bahsedilmiştir.

İkinci bölümde ise, kodlama teorisi kapsamında özellikle lineer ve devirli kodlara dair gerekli olan temel cebirsel kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde $u_1{}^3 = 0,\ u_2{}^3 = 0$ ve $u_1 \cdot u_2 = u_2 \cdot u_1 = 0$ koşulları ile iki değişkenli katsayıları $\mathbb{F}_2$'de olan halka verilmiştir. Bu halkadaki sabit devirli kodların $\mathbb{F}_2$ cisminde karşılık geldiği yarı devirli kodlar incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ise $u_1{}^3 = 0,\ u_2{}^3 = 0$ ve $u_1 \cdot u_2 = u_2 \cdot u_1 = 0$ şartlarını koşulları ile katsayıları $\mathbb{F}_3$ ve $\mathbb{F}_p$'de olan iki değişkenli halkalarda devirli kodlar ele alınmış ve bunların Gray görüntülerinin sonuçları incelenip yorumlanmıştır.

Son bölümde ise ilk dört bölümün genel bir sonucu çıkarılmıştır.

Yıl : 2025

Sayfa Sayısı : 97

Anahtar Kelimeler : Kodlama Teorisi, Sonlu Halkalar, Devirli Kod, Sabit Devirli Kod, Gray Dönüşüm

Master's Thesis

Cyclic Codes and Comparison of Codes in Finite

Trakya University Institute of Natural Sciences

Department of Computational Sciences

ABSTRACT

The thesis defines a new type of two-variable ring. Cyclic, constacyclic, quasi-cyclic code definitions are presented on this ring type and propositions comparing the relationships between them are given.

In the first part of the thesis, the first studies in coding theory, the research in the literature with its development are mentioned.

In the second part, the basic algebraic concepts required especially for linear and cyclic codes within the scope of coding theory are given.

In the third part, the ring with the conditions $u_1^3 = 0, u_2^3 = 0$ and

$u_1 \cdot u_2 = u_2 \cdot u_1 = 0$ and the two-variable coefficients in $\mathbb{F}_2$ are given. The quasi-cyclic codes corresponding to the constacyclic codes in this ring in the object $\mathbb{F}_2$ are examined.

In the fourth section, cyclic codes in two-variable rings with coefficients in $\mathbb{F}_3$ and $\mathbb{F}_p$ are discussed with the conditions $u_1^3 = 0, u_2^3 = 0$ and $u_1 \cdot u_2 = u_2 \cdot u_1 = 0$ and the results of their Gray images are examined and interpreted.

In the last section, a general conclusion of the first four sections is drawn.

Year : 2025

Number of Pages : 97

Keywords : Coding Theory, Finite Rings, Cyclic Code, Constacyclic Code, Gray Map

TEŞEKKÜR

Bu çalışma boyunca bilgi ve deneyimleriyle bana rehberlik eden, değerli katkıları ve yol gösterici destekleri için danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Mustafa ÖZKAN'a teşekkür ederim. Eğitim sürecim boyunca her daim yanımda olan, sabırları, anlayışları ve sevgileriyle beni her koşulda destekleyen aileme minnettarım. Özellikle fedakârlıklarıyla bana güç veren anneme ve babama ayrıca teşekkür ederim. Aynı zamanda, her zaman yanımda olduğunu hissettiren ve moral desteğini esirgemeyen sevgili kardeşime de gönülden teşekkür ederim.

Habibe Rana KAŞDAŞ

İÇİNDEKİLER

ÖZET iv
ABSTRACT v
TEŞEKKÜR vi
İÇİNDEKİLER vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ ix
ÇİZELGELER DİZİNİ x
BÖLÜM 1 1
GİRİŞ 1
BÖLÜM 2 4
GENEL TANIMLAR 4
2.1. Genel Bilgiler 4
2.2. Kodlarla İlgili Temel Tanımlar ve Kavramlar 7
2.3. Lineer Kodlar 8
2.4. Devirli Kodlar 9
BÖLÜM 3 11
KATSAYILARI $\mathbb{F}_2$ CİSMİNDE OLAN SONLU HALKADA SABİT DEVİRLİ KODLAR VE GRAY GÖRÜNTÜLERİ……11
3.1. $\mathbb{F}_2[u_1,u_2]/\langle {u_1}^3, {u_2}^3, u_1 \cdot u_2\rangle$ Halkasının Yapısı ve $(1+{u_1}^2)$ sabit devirli Kodların Gray Görüntüleri ……....11
BÖLÜM 4 45
KATSAYILARIN $\mathbb{F}_p$ CİSMİNDE OLAN SONLU HALKALARDA DEVİRLİ KODLAR VE GRAY GÖRÜNTÜLERİ 45

4.1. $\mathbb{F}_3[u_1,u_2]/\langle {u_1}^3,{u_2}^3,u_1\cdot u_2\rangle$ Halkasının Yapısı ve Devirli Kodların Gray Görüntüleri 46

4.2. $\mathbb{F}_p[u_1,u_2]/\langle {u_1}^3,{u_2}^3,u_1\cdot u_2\rangle$ Halkasının Yapısı ve Devirli Kodların Gray Görüntüleri 69

BÖLÜM 5 82
SONUÇLAR VE TARTIŞMA 82
KAYNAKLAR 84
TEZ ÖĞRENCİSİNE AİT BİLİMSEL ÇIKTILAR 86
ÖZGEÇMİŞ 87

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Kısaltmalar

(n, M, d)_kod : Uzunluğu n, eleman sayısı M ve minimum uzaklığı d olan bir kod parametresi

$[n, k, d]$_kod : Uzunluğu n, boyutu k ve minimum uzaklığı d olan bir lineer kod parametresi

$|C|$: C kodunun eleman sayısı

$d_{hom}(C)$: C kodunun minimum homogeneous uzaklıklığı

$d_L(C_1)$: C_1 kodunun minimum Lee uzaklığı

$d_H(C_2)$: C_2 kodunun minimum Hamming uzaklığı

$w_R(C)$: C kodunun R halkası üzerindeki minimum ağırlığı

$w_L(C_1)$: C_1 kodunun minimum Lee ağırlığı

$w_H(C_2)$: C_2 kodunun minimum Hamming ağırlığı

$w_S(D)$: D kodunun S halkası üzerinde minimum ağırlığı

$w_{hom}(D_1)$: D_1 kodunun minimum homogeneous ağırlığı

$w_H(D_2)$: D_2 kodunun minimum Hamming ağırlığı

$\mathbb{F}_p$: p elemanlı Galois cismi

$P(C)$: C kodunun polinom gösterimi

Φ : R halkasında Gray dönüşümü

Φ_1 : R_1 halkasında Gray dönüşümü

Ψ : S halkasında Gray dönüşümü

Ψ_1 : S_1 halkasında Gray dönüşümü

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1. *R* üzerinde toplama işlemi 13

Çizelge 3.2. *R* üzerinde çarpma işlemi 17

BÖLÜM 1

GİRİŞ

(n, M, d) Parametreli bir kod denildiğinde burada n kodun uzunluğunu, M kod sözcüklerinin sayısını ve d ise kodun minimum uzaklığını belirtmektedir. Bu parametreler, kod sözcüklerinin iletimi açısından önemli özellikler taşır. Kod sözcükleri, şifrelenmiş mesajlar olduğundan, iletimin daha hızlı gerçekleşebilmesi adına mümkün olduğunca kısa tutulması gerekir. Bu da n parametresinin olabildiğince az olması beklenir. Buna ilaveten daha çok mesaj şifrelenebilmesi için M'nin büyük olması aynı zamanda kodun hata belirleme ve düzeltme kapasitesi için d'nin de büyük olması istenir. Kodlama teorisinde bu üç parametreyi birlikte optimize etmek önemlidir ve kodlama teorisinin asıl problemleri arasında yer almaktadır. Kodlama teorisi, cebirsel yapıların yoğun olarak kullanıldığı bu alanda literatüre önemli katkılar sunan birçok çalışmaya konu olmuştur.

Bu alandaki temel problemlerden biri, yeni ve etkili kodların geliştirilmesidir. Bu amaçla çeşitli yöntemler kullanılmaktadır. Bu yöntemlerden bir tanesi mevcut kodlar üzerinde yapılan işlemlerle yeni kodlar elde etmektir. Bu tezin üçüncü ve dördüncü bölümünde bu tür bir yaklaşım uygulanmıştır ve daha önce çalışılmamış halka yapıları üzerine belirli kod türleri tanımlanmış ve bu kodların bilinen kodlarla olan ilişkileri kurulmuştur. Bu çalışmalar ile kodlama teorisine yeni katkılar sunulmuştur.

1970'li yıllar, kodlama teorisinin yalnızca cisimler değil, aynı zamanda halkalar üzerinde de geliştirilebileceğinin anlaşıldığı bir dönem olmuştur. Bu bağlamda, Blake

(1972) tarafından yayımlanan “Codes over Certain Rings” başlıklı çalışma, halkalar üzerindeki kodların yapısını sistematik biçimde inceleyen öncü nitelikteki çalışmalardan biri olmuştur.

Ayrıca, 1980’li yılların sonlarına doğru, halka teorisi ile kodlama teorisi arasındaki bağ giderek güçlenmiştir. Greferath gibi araştırmacılar, modüler halkalar ve $\mathbb{Z}_4$ halkası üzerinde tanımlı kodların özelliklerini incelemiş ve bu halkaların klasik lineer kodlardan farklı olarak daha zengin yapılar sunduğunu göstermiştir.

Kodlama teorisinin gelişiminde halkalar, modüller ve polinomlar gibi cebirsel ifadelerin rolü giderek artmıştır. Bu sürecin önemli eserlerinden biri olan Roman (1992) tarafından kaleme alınan “Coding and Information Theory” adlı çalışma, kodlama teorisinin yalnızca mühendislik temelli değil, aynı zamanda derin cebirsel temellere dayandığını açıkça ortaya koymuştur.

2000’lerin başında, kodlama teorisinin yalnızca sonlu cisimler çerçevesinde değil, daha genel cebirsel yapılarda da incelenebileceği fikri giderek daha fazla kabul görmeye başlamıştır. Özellikle halka, modüller ve grup gibi cebirsel yapılar üzerine yapılan çalışmalar, kodlama kuramının cebirsel temellerini derinleştirmiştir. Bu dönemde Ling ve Xing (2004) tarafından yayımlanan Coding Theory: A First Course adlı eser, hem temel hem de ileri düzey kodlama kuramını sistematik bir biçimde ele alarak, devirli kodlar ve cebirsel yapıların ilişkisini açıkça ortaya koymuştur.

Qian, Zhang ve Zhu, 2006 yılında makalelerinde $u_2{}^2 = 0$ olmak üzere

$\mathbb{F}_2 + u_2\mathbb{F}_2$ ve $u_2{}^3 = 0$ olmak üzere $\mathbb{F}_2 + u_2\mathbb{F}_2 + u_2{}^2\,\mathbb{F}_2$ sonlu zincir halkaları üzerinde tanımlanan sabit devirli kodları incelemiş ve bu kodların ikili (binary) kodlar ile olan ilişkilerini değerlendirmişlerdir.

Bu iki çalışma, halkalar üzerinde tanımlı kodların yapısını anlamak ve bu kodların özelliklerini belirlemek adına önemli katkılar sağlamıştır. 2010’lu yıllar ve sonrasında iki değişkenli halkalar tanımlanmıştır. Bu iki değişkenli halkalarda lineer kodlar ve devirli kodların farklı çeşitleri literatürde yer almıştır.

2010’lu yıllar, halkalar üzerine yapılan çalışmaların hem teori düzeyinde derinleştiği hem de uygulamalı matematik ve mühendislik disiplinleriyle güçlü bağlar kurduğu bir dönem olmuştur. Bu dönemde T. Honold, halkalar üzerindeki kodlar

bağlamında birçok yenilikçi yaklaşım geliştirmiştir. Özellikle Frobenius halkaları üzerinde tanımlanan kodların dualite teorisi, homomorfik özellikleri ve Gray dönüşümleri ayrıntılı biçimde incelenmiş; bu tür halkaların klasik doğrusal kodlardan daha esnek ve güçlü yapılar sunduğu gösterilmiştir.

Alkenani, Ashraf ve Mohammad (2020), iki değişkenli halka yapısı olan $\mathbb{F}_q[u_1,u_2]\Big/\langle u_1^2-u_1, u_2^2-u_2, u_1u_2-u_2u_1\rangle$ üzerinde constacyclic kodları incelemiş ve bu kodların Gray dönüşümleri aracılığıyla kuantum hata düzeltici kodlara dönüştürülebileceğini göstermiştir.

Tezin üçüncü bölümünde, bu çalışmalar doğrultusunda ${u_2}^3=0$ durumunda $\mathbb{F}_2+u_2\mathbb{F}_2+{u_2}^2\,\mathbb{F}_2$ ve ${u_1}^3=0$ durumunda $\mathbb{F}_2+u_1\mathbb{F}_2+{u_1}^2\,\mathbb{F}_2$ halkaları için $u_2\cdot u_1=u_1\cdot u_2=0$ koşulları sabit tutularak $\mathbb{F}_2+u_1\mathbb{F}_2+u_2\mathbb{F}_2+{u_1}^2\mathbb{F}_2+{u_2}^2\mathbb{F}_2$ sonlu halkası üzerinde yeni bir Gray dönüşümü tanımlanarak çalışılmıştır.

Literatürde, sonlu zincir halkaların devirli, yarı devirli ve sabit devirli kodlar olup olmadığıyla ilgili çeşitli araştırmalar yapılmıştır. Bu tez çalışmasının dördüncü bölümünde ise, idealleri belirli bir kurala göre oluşturulmayan farklı halka yapıları incelenmiş; bu halkalar üzerinde devirli ve yarı devirli kodlar çalışılmıştır. Bu tip kodların Galois cisimlerine karşı gelen kodlarla ilişkileri kurulmuştur.

Tezin dördüncü bölümünde ${u_2}^3=0$, ${u_1}^3=0$ ve $u_2\cdot u_1=u_1\cdot u_2=0$ $\mathbb{F}_p[u_2,u_1]\Big/\langle {u_2}^3,{u_1}^3,u_2.u_1\rangle$ ve $\mathbb{F}_p+u_1\mathbb{F}_p+u_2\mathbb{F}_p+{u_1}^2\mathbb{F}_p+{u_2}^2\mathbb{F}_p$ halkalarına izomorftur. $\mathbb{F}_2+u_1\mathbb{F}_2+u_2\mathbb{F}_2+{u_1}^2\mathbb{F}_2+{u_2}^2\mathbb{F}_2$ halkasında devirli kodlar ile $\mathbb{F}_2$ Galois cisminde yarı devirli kodlar oluşturulmuştur. $p\geq 3$ asal sayı alınırsa $\mathbb{F}_p+u_1\mathbb{F}_p+u_2\mathbb{F}_p+{u_1}^2\mathbb{F}_p+{u_2}^2\mathbb{F}_p$ halkalarında devirli kodlar ile $\mathbb{F}_p$ Galois cisminde yarı devirli kodlar ele alınmıştır.

Son bölüm de ise 3. ve 4. bölümlerde elde edilen bulgular yorumlanmıştır

BÖLÜM 2

GENEL TANIMLAR

Bu bölümde cebirsel kodlama teorisi ile ilgili temel tanımlar, teoremler, önermeler ve genel bilgiler verilmiştir.

2.1. GENEL BİLGİLER

Bu alt bölümde cebirsel temel bilgiler sunulmuştur.

2.1.1. Tanım: $G_2 \neq \emptyset$ ve $*$, G_2 üzerinde tanımlı bir ikili işlem olmak üzere eğer $*$ işlemi aşağıdaki özellikleri taşıyor ise $(G_2, *)$ cebirsel yapısına bir grup adı verilir.

i. Her $x_1, x_2, x_3 \in G_2$ için $x_1 * (x_2 * x_3) = (x_1 * x_2) * x_3$ sağlanırsa $*$ işleminin G_2 kümesi üzerinde birleşme özelliği vardır denir.

ii. Bir $e \in G_2$ elemanı vardır ki her $x_2 \in G_2$ için $x_2 * e = e * x_2 = x_2$ sağlanırsa G_2'in $*$ işlemine göre etkisiz elemanı vardır denir.

iii. Her $x_2 \in G_2$ için $x_2 * a = a * x_2 = e$ olacak şekilde bir $a \in G_2$ sağlanırsa G_2'deki her elemanın $*$ işlemine göre tersi vardır denir (Çallıalp, 2011).

2.1.2. Tanım: $(G_2, *)$ bir grup olsun. Eğer her $x_2, y_2 \in G_2$ için $x_2 * y_2 = y_2 * x_2$ ise bu gruba bir değişmeli grup veya Abel grubu denir. (Çallıalp, 2011).

2.1.3. Örnek: Tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}$, toplama işlemi altında birleşme, birim eleman ve ters eleman özelliklerini sağlayarak değişmeli bir grup oluşturur.

2.1.4. Tanım: Boştan farklı T kümesi üzerinde toplama $(+)$ ve çarpma $(\cdot)$ ikili işlemleri tanımlanmış olsun. Aşağıda verilen koşulları sağladığı takdirde $(T,+,\cdot)$ cebirsel yapısına bir halka denir.

i. $(T,+)$ değişmeli bir gruptur.

ii. T kümesinin çarpma işlemine göre birleşme özelliği vardır. Her $t_1, t_2, t_3 \in T$ için

$$t_1 \cdot (t_2 \cdot t_3) = (t_1 \cdot t_2) \cdot t_3$$

iii. T kümesi üzerinde çarpma işleminin toplama işlemi üzerinde sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır. Her $t_1, t_2, t_3 \in T$ için

$$t_1 \cdot (t_2 + t_3) = t_1 \cdot t_2 + t_1 \cdot t_3$$
$$(t_2 + t_3) \cdot t_1 = t_2 \cdot t_1 + t_3 \cdot t_1$$

dır.

$(T,+,\cdot)$ halkası kısaca T ile gösterilecek ve $t_1 \cdot t_2$ yerine $t_1 t_2$ kullanılacaktır (Taşçı, 2018).

2.1.5. Tanım: Bir R halkası her $x, y \in R$ için $xy = yx$ koşulunu sağlıyorsa R ye değişmeli halka denir. (Taşçı, 2018).

2.1.6. Tanım: 0_R, halkanın etkisiz elemanı ise R halkasında $0_R \neq x_1 \in R$ için $x_1 \cdot y_1 = y_1 \cdot x_1 = 0_R$ olmak üzere bir $0_R \neq y_1 \in R$ varsa x_1'e R halkasının sıfır böleni, böyle bir y_1 bulunamıyorsa sıfır böleni değildir denir (Çallıalp, 2011).

2.1.7. Tanım: Her $x \in R$ için $x \cdot 1_R = 1_R \cdot x = x$ olacak şekilde bir $1 = 1_R \in R$ varsa R halkasına birimi $1_R \in R$ olan birimli halka denir (Çallıalp, 2011).

2.1.8. Tanım: R bir halka olarak alalım. I boştan farklı ve R halkasının herhangi bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa I kümesi R halkasının bir ideali denir (Taşçı, 2018).

i. Her $m_1, m_2 \in I$ için $m_1 - m_2 \in I$

ii. Her $m_1 \in I$ ve her $r \in R$ için $m_1 \cdot r \in I$ ve $r \cdot m_1 \in I$

2.1.9. Örnek: Bir R halkasında $\{0\}$ ve R ideallerine R halkasının aşikar idealleri, R halkasından farklı ideallere ise öz ideal denir.

2.1.10. Tanım: Birimli ve değişmeli R halkasında $x \in R$ için $\langle x \rangle = \{r \cdot x | r \in R\}$ kümesi R halkasının bir idealidir ve bu idealle x elemanı tarafından üretilen esas ideal denir (Taşçı, 2018).

2.1.11. Tanım: $(R, +, \cdot)$ ve $(T, +, \cdot)$ iki halka ve $h: R \to T$ dönüşümü ile her $a_1, a_2 \in R$ için aşağıdaki koşullar sağlıyorsa h ye bir halka homomorfizması denir (Aydın, N. & Kandamar, 2015).

i. $h(a_1 + a_2) = h(a_1) + h(a_2)$

ii. $h(a_1 \cdot a_2) = h(a_1) \cdot h(a_2)$

2.1.12. Tanım: R ve T iki halka ve $h: R \to T$ bir honomorfizma olsun.

i. h birebir ise h ye halka monomorfizması.

ii. h örten ise h ye halka epimorfizması,

iii. h birebir ve örten ise h ye halka izomorfizması,

denir. Eğer $h: R \to T$ bir izomorfizma ise R ve T izomorfiktir denir ve $R \cong T$ ile gösterilir. Eğer $h: R \to R$ bir homomorfizma ise h ye halka endomorfizması $h: R \to R$ bir izomorfizma ise h ye halka otomorfizması denir (Aydın, N. & Kandamar, 2015).

2.1.13. Tanım R, birimli ve değişmeli bir halka olsun. R nin sıfırdan farklı her elemanının çarpma işlemine göre tersi varsa bu halkaya cisim denir (Taşçı, 2018).

2.1.14. Tanım: R bir halka ve x bir bilinmeyen olsun. Kat sayıları R halkasından alınan

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, a_i \in R$$

gösterimine katsayıları R de olan polinom denir ve katsayıları R halkasından alınan tüm polinomların kümesine $R[x]$ şeklinde gösterilir (Aydın, N. & Kandamar, 2015).

2.1.15. Tanım: p bir asal sayı ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $q = p^n$ elemana sahip cisme Galois cismi denir ve $\mathbb{F}_q$ ile gösterilir (Roman,1992).

2.1.16. Tanım: M bir halka ve G değişmeli bir grup olsun.

$$\cdot: M\ x\ G\ \rightarrow G$$

$$(m, g) \mapsto m\ \cdot\ g$$

i. Her $m_1, m_2 \in M$ ve $g \in G$ için $(m_1 + m_2).g = m_1 \cdot g + m_2 \cdot g$

ii. Her $m_1, m_2 \in M$ ve $g \in G$ için $(m_1 \cdot m_2) \cdot g = m_1 \cdot (m_2 \cdot g)$

iii. Her $m \in M$ ve $g_1, g_2 \in G$ için $m \cdot (g_1 + g_2) = m \cdot g_1 + m \cdot g_2$

eğer birimli halka ise;

iv. Her $g \in G$ için $1 \cdot g = G$

bu koşullar altında tanımlanan G yapısına $M-$ modül denir ve bu yapı, cebirsel sistemlerin halkalar üzerinden genellenmesinde temel rol oynar.

2.2. Kodlarla İlgili Temel Tanımlar ve Kavramlar

Bu alt bölümde kodlama teorisi için belirli temel tanımlar ve örnekler verilmiştir.

2.2.1. Tanım: $\mathbb{F}_q = \{c_1, c_2, \dots, c_q\}$ q-ary kod, q elemanlı bir sonlu alfabe kümesinden seçilen elemanlarla oluşturulan sabit uzunluktaki diziler kümesidir. $(F_q)^n = \{(c_1, c_2, \dots, c_n) | \alpha_i \in F_q, i = 1,2, \dots, n\}$ kümesinin elemanlarına sözcük denir. Kümenin herhangi bir C alt kümesine uzunluğu n olan bir q –ary kod ve C kodunun elemanları kod sözcüğü olarak adlandırılır (Ling & Xing, 2004).

2.2.2. Tanım: $(\mathbb{F}_q)^n$, $\mathbb{F}_q$ sonlu cisiminde n uzunlukta vektör uzayı olmak üzere $(\mathbb{F}_q)^n$'nin M elemanlı bir C alt kümesi (n, M) $-$koddur denir. (Ling & Xing, 2004).

Bazı cisimler üzerinde tanımlanan kodlar aşağıdaki şekilde adlandırılmıştır.

$\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ ikili (binary) kod, $\mathbb{F}_3 = \{0,1,2\}$ üçlü (ternary) kod ve $\mathbb{F}_4 = \{0,1,2,3\}$ dörtlü (quaternary) koddur.

İkili (binary) kod örnekleri aşağıdaki gibi verilebilir:

$C_1 = \{00,01,10,11\}$ kümesi bir $(2,4)$ kodudur.

Üçlü (ternary) kod örnekleri aşağıdaki gibi verilebilir:

$C_2 = \{000,111,222\}$ kümesi bir (3,3) kodudur.

2.2.3. Tanım: Bir C kodunun minimum (Hamming) uzaklığı

$d(C) = min\,\{d(x,y)|\ x \neq y\ ve\ \ x,y \in C\}$ şeklinde tanımlanır. (Ling & Xing, 2004).

Uzunluğu n, eleman sayısı M ve minimum uzaklığı d olduğunda bu C kod, (n,M,d) −koddur.

2.2.4. Tanım: C, $\mathbb{F}_q$ üzerinde n uzunluğa sahip bir kod olmak üzere

$m = (m_0, m_1, \dots, m_n) \in C$ olsun. m kod sözcüğünün sıfırdan farklı elemanlarının sayısına Hamming ağırlığı (Hamming weight) denir. $w_H(m) = |\{i \mid m_i \neq 0\}|$olarak tanımlanır. Bir C kodunun sıfırdan farklı tüm elemanlarının ağırlıklarının en küçüğüne C kodunun minimum Hamming ağırlığı denir ve C ile H gösterilir. (Ling & Xing, 2004).

2.2.5. Örnek: $\mathbb{F}_2$ üzerinde tanımlanan 5 uzunluğa sahip $m = (00111)$ olmak üzere $w_H(m) = 3$ olur.

2.2.6. Teorem: $u_1, u_2 \in \mathbb{F}_q^n$ olmak üzere $d_H(u_1,u_2) = w_H(u_1 - u_2)$ eşitliği sağlanır (Ling & Xing, 2004).

2.3. Lineer Kodlar

2.3.1. Tanım: $(K,+)$ bir değişmeli grup ve $\mathbb{F}_q$ sonlu bir cisim olsun. $\mathbb{F}_q$ cisminin elemanları ile K kümesinin elemanları arasında skaler çarpma işlemi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa K ye $\mathbb{F}_q$ üzerinde vektör uzayı denir. $\forall\, u_2, u_1 \in K$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}_q$ için;

i. $\alpha \cdot u_2 \in K$
ii. $\alpha \cdot (u_1 + u_2) = \alpha \cdot u_1 + \alpha \cdot u_2$ ve $(\alpha + \beta) \cdot u_2 = \alpha \cdot u_2 + \beta \cdot u_1$
iii. $(\alpha \cdot \beta) \cdot u_1 = \alpha \cdot (\beta \cdot u_1)$
iv. $\mathbb{F}_q$ cisminin birim elemanı $1_{\mathbb{F}_q}$olmak üzere $1_{\mathbb{F}_q} \cdot u_1 = u_1$ (Ling & Xing, 2004).

2.3.2. Tanım: Bir K vektör uzayının boştan farklı C alt kümesi K de tanımlı toplama ve skalerle çarpma işlemiyle birlikte bir vektör uzayı oluşturuyorsa C ye K'nin

alt uzayı denir. (Ling & Xing, 2004).

2.3.3. Teorem: Boş olmayan bir C alt kümesinin K vektör uzayının bir alt uzayı olabilmesi için gerek ve yeterli koşul $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{F}_q$ ve $x, y \in C$ için $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in C$ olmasıdır. (Ling & Xing, 2004).

2.3.4. Tanım: K , $\mathbb{F}_q$ cisminde tanımlı bir vektör uzayı ve

$S = \{m_1, m_2, m_3, \dots, m_n\}$, K'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun.

$$\langle S \rangle = \left\{ \alpha_1 \cdot m_1 + \alpha_2 \cdot m_2 + \cdots + \alpha_n \cdot m_n \middle| \alpha_i \in \mathbb{F}_q \right\}$$

Biçiminde tanımlanan kümeye K nin S tarafından üretilen alt uzayı denir. Knin bir C alt uzayı için $C = \langle S \rangle$ olacak şekilde C bir S kümesi tarafından geriliyorsa, S ye C nin üreteç kümesi denir (Ling & Xing, 2004).

2.3.5. Tanım: K, $\mathbb{F}_q$ cismi üzerinde tanımlanan bir vektör uzayı ve $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n \in K$ olsun. Hepsi birden sıfır olmayan $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_n \in \mathbb{F}_q$ için

$\alpha_1 \cdot m_1 + \alpha_2 \cdot m_2 + \cdots + \alpha_n \cdot m_n = 0$ ise $\{m_1, m_2, m_3, \dots, m_n\}$ vektörlerin kümesi lineer bağımlı $\alpha_1 \cdot m_1 + \alpha_2 \cdot m_2 + \cdots + \alpha_n \cdot m_n = 0$ olduğunda

$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ oluyorsa $\{m_1, m_2, m_3, \dots, m_n\}$ kümesi lineer bağımsız olarak adlandırılır (Ling & Xing, 2004).

2.3.6. Teorem: C, $\mathbb{F}_q$ üzerinde bir lineer kod ise bu durumda $d(C) = w(C)$ eşitliği sağlanır (Ling & Xing, 2004).

2.4. Devirli Kodlar

2.4.1. Tanım: $C \subseteq \mathbb{F}_q^n$ olsun. Eğer $(c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}) \in C$ iken $(c_{n-1}, c_0, c_1, \dots, c_{n-2}) \in C$ oluyorsa C kümesine devirli küme denir. C devirli kümesi aynı zamanda bir lineer kod ise C ye devirli kod denir (Hill,1986).

2.4.2. Teorem: R sonlu bir halka olsun. C, R üzerinde tanımlı n uzunluğa sahip bir lineer kod olmak üzere $c = (c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}) \in C$ için

$$\pi: R^n \to {R[x]}/{\langle x^n - 1\rangle}$$

$$c = (c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}) \mapsto \pi(c) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \cdots + c_{n-1} \cdot x^{n-1} + \langle x^n - 1\rangle$$

dönüşümü verilsin. C kodu devirli bir koddur ancak ve ancak $\pi(C)$ kümesi ${R[x]}/{\langle x^n - 1\rangle}$ kümesinin bir idealidir (Ling & Xing, 2004).

2.4.3. Teorem: R sonlu bir halka olsun. C, R üzerinde tanımlı n uzunluğa sahip bir lineer kod olmak üzere $c = (c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}) \in C$ için

$$\pi: R^n \to {R[x]}/{\langle x^n - \lambda\rangle}$$

$$c = (c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}) \mapsto \pi(c) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \cdots + c_{n-1} \cdot x^{n-1} + \langle x^n - \lambda\rangle$$

dönüşümü verilsin. C kodunun λ −sabit devirli kod olması için yeterli ve gerek koşul $\pi(C)$ kümesinin ${R[x]}/{\langle x^n - \lambda\rangle}$ halkasının bir ideali olmasıdır (Ling & Xing, 2004).

BÖLÜM 3

KATSAYILARI $\mathbb{F}_2$ CİSMİNDE OLAN SONLU HALKADA SABİT DEVİRLİ KODLAR VE GRAY GÖRÜNTÜLERİ

Bu bölümde, p bir asal sayı alındığında; ${u_1}^3 = 0$, ${u_2}^3 = 0$ ve $u_1 \cdot u_2 = u_2 \cdot u_1 = 0$ durumunda $\mathbb{F}_p[u_1, u_2] \Big/ \langle {u_1}^3, {u_2}^3, u_1 \cdot u_2 \rangle$ halkaları çalışılmıştır. p^5 elemanlı halkalar çerçevesinde devirli kodların temel özellikleri, söz konusu kodların Gray dönüşümleri ve ilgili ağırlık fonksiyonları kapsamlı biçimde incelenmiştir. Ayrıca, bu halkalarla sonlu zincir halkaları üzerindeki kodlar arasında ilişkiler ortaya konulmuştur.

İlk olarak $p = 2$ alındığında, $\mathbb{F}_p + u_1\mathbb{F}_p + u_2\mathbb{F}_p + {u_1}^2\mathbb{F}_p + {u_2}^2\mathbb{F}_p$ kümesinin halka belirttiği ve $(1 + {u_1}^2) -$ sabit devirli kodlar çalışılmıştır. Ayrıca bu kodların Gray görüntüleri 3.1. bölümünde detaylı incelenmiştir.

3.1. $\mathbb{F}_2[u_1, u_2] \Big/ \langle {u_1}^3, {u_2}^3, u_1 \cdot u_2 \rangle$ Halkasının Yapısı ve $(1 + {u_1}^2)$ sabit devirli Kodların Gray Görüntüleri

İlk olarak $\mathbb{F}_2[u_1, u_2] \Big/ \langle {u_1}^3, {u_2}^3, u_1 \cdot u_2 \rangle$ halkasının tanımı verilmiş ve cebirsel yapısı detaylı olarak incelenmiştir. Gösterim kolaylığı olması açısından

$\mathbb{F}_2[u_1,u_2]/\langle {u_1}^3,{u_2}^3,u_1\cdot u_2\rangle$ halkası yerine ona izomorf olan

$\mathbb{F}_2+u_1\mathbb{F}_2+u_2\mathbb{F}_2+{u_1}^2\mathbb{F}_2+{u_2}^2\mathbb{F}_2$ halkası kullanılacaktır.

Bu halkadan $\mathbb{F}_2+u_2\mathbb{F}_2+{u_2}^2\mathbb{F}_2$ sonlu zincir halkasına tarafımızdan yeni bir Gray dönüşümü tanımlanmış ve buna uygun yeni bir ağırlık fonksiyonu geliştirilmiştir. Ayrıca devirli kod, sabit devirli kod, yarı devirli tanımına yer verilmiştir.

$\mathbb{F}_2+u_2\mathbb{F}_2+{u_2}^2\mathbb{F}_2$ nin toplama ve çarpma işlemleriyle birlikte bir halka olduğu ve ${u_2}^3=0$ koşulu altında $\mathbb{F}_2[u_2]/\langle {u_2}^3\rangle$ halkasına izomorf olduğu bilinmektedir. Burada $\mathbb{F}_2$ cismi için ${u_1}^3=0$ olmak üzere $R'=\mathbb{F}_2+u_1\mathbb{F}_2+{u_1}^2\mathbb{F}_2$ halkası alındığında, ${u_2}^3=0$ olmak üzere $R'+u_2R'+{u_2}^2R'$ kümesi yazabiliriz. Aşağıdaki gibi ifade edersek;

$$R'+u_2R'+{u_2}^2R'$$

$$=(\mathbb{F}_2+u_1\mathbb{F}_2+{u_1}^2\mathbb{F}_2)+u_2(\mathbb{F}_2+u_1\mathbb{F}_2+{u_1}^2\mathbb{F}_2)+{u_2}^2(\mathbb{F}_2+u_1\mathbb{F}_2+{u_1}^2\mathbb{F}_2)$$

$$=\mathbb{F}_2+u_1\mathbb{F}_2+{u_1}^2\mathbb{F}_2+u_2\mathbb{F}_2+u_2u_1\mathbb{F}_2+u_2{u_1}^2\mathbb{F}_2+{u_2}^2\mathbb{F}_2+{u_2}^2u_1\mathbb{F}_2+{u_2}^2{u_1}^2\mathbb{F}_2$$

olduğu görülür. $(\mathbb{F}_2+u_2\mathbb{F}_2+{u_2}^2\mathbb{F}_2,+,\cdot)$ halkasında ${u_2}^3=0$ olması ve $(R',+,\cdot)$ halkasında ${u_1}^3=0$ olması koşullarına ilave olarak $u_2\cdot u_1=u_1\cdot u_2=0$ koşulu konulursa $u_2\cdot {u_1}^2=u_2\cdot(u_1\cdot u_1)=(u_2\cdot u_1)\cdot u_1=0\cdot u_1=0$,

${u_2}^2\cdot u_1=(u_2\cdot u_2)\cdot u_1=u_2\cdot(u_2\cdot u_1)=u_2\cdot 0=0$ ve

${u_2}^2\cdot {u_1}^2=(u_2\cdot u_2)\cdot(u_1\cdot u_1)$

$=u_2\cdot(u_2u_1)\cdot u_1=u_2\cdot 0\cdot u_1=0$ olacağından $R'+u_2R'+{u_2}^2R'$ kümesi

$R=\mathbb{F}_2+u_1\mathbb{F}_2+u_2\mathbb{F}_2+{u_1}^2\mathbb{F}_2+{u_2}^2\mathbb{F}_2$ kümesine eşit olacaktır. Buradan;

${u_2}^3=0,{u_1}^3=0$ ve $u_2\cdot u_1=u_1\cdot u_2=0$ olmak üzere,

$$R=\mathbb{F}_2+u_1\mathbb{F}_2+u_2\mathbb{F}_2+{u_1}^2\mathbb{F}_2+{u_2}^2\mathbb{F}_2=\{0,1,u_1,u_2,{u_1}^2,{u_2}^2,1+u_1,1+u_2,$$

$$1+{u_1}^2,1+{u_2}^2,u_1+u_2,u_1+{u_1}^2,u_1+{u_2}^2,u_2+{u_1}^2,u_2+{u_2}^2,{u_1}^2+{u_1}^2,$$

$$1+u_1+u_2,1+u_1+{u_1}^2,1+u_1+{u_2}^2,1+u_2+{u_1}^2,1+u_2+{u_2}^2,$$

$$1+{u_1}^2+{u_2}^2,u_1+u_2+{u_2}^2,u_1+{u_1}^2+{u_2}^2,u_1+u_2+{u_1}^2,u_2+{u_1}^2+{u_2}^2,$$

$$1+u_1+u_2+{u_2}^2,1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2,1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2,1+u_1+u_2+{u_1}^2,$$

$u_1 + u_2 + {u_1}^2 + {u_2}^2, 1 + u_1 + u_2 + {u_1}^2 + {u_2}^2\}$ bulunur.

R kümesi aşağıdaki gibi tanımlamış olduğumuz Tablo 3.1 ve Tablo 3.2 toplama ve çarpma işlemleri şartları ile bir halka yapısı taşır ve bu halka $\mathbb{F}_2[u_1, u_2]\Big/\langle {u_1}^3, {u_2}^3, u_1 \cdot u_2\rangle$ halkasına izomorf olur.

Çizelge 3.1. R üzerinde toplama işlemi

$\oplus$	0	1	u_1	u_2	${u_1}^2$	${u_2}^2$	$1+u_1$	$1+u_1$
0	0	1	u_1	u_2	${u_1}^2$	${u_2}^2$	$1+u_1$	$1+u_2$
1	1	0	$1+u_1$	$1+u_2$	$1+{u_1}^2$	$1+{u_2}^2$	u_1	u_2
u_1	u_1	$1+u_1$	0	u_1+u_2	$u_1+{u_1}^2$	$u_1+{u_2}^2$	1	$1+u_1+u_2$
u_2	u_2	$1+u_2$	u_1+u_2	0	$u_1+{u_1}^2$	$u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2$	1
${u_1}^2$	${u_1}^2$	$1+{u_1}^2$	$u_1+{u_1}^2$	$u_2+{u_1}^2$	0	${u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2$	$1+u_2+{u_1}^2$
${u_2}^2$	${u_2}^2$	$1+{u_2}^2$	$u_1+{u_2}^2$	$u_2+{u_2}^2$	${u_1}^2+{u_2}^2$	0	$1+u_1+u_2$	$1+u_2+{u_2}^2$
$1+u_1$	$1+u_1$	u_1	1	$1+u_1+u_2$	$1+u_1+{u_1}^2$	$1+u_1+{u_2}^2$	0	u_1+u_2
$1+u_2$	$1+u_2$	u_2	$1+u_1+u_2$	1	$1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_2+{u_2}^2$	u_1+u_2	0
$1+{u_1}^2$	$1+{u_1}^2$	${u_1}^2$	$1+u_1+{u_1}^2$	$1+u_2+{u_1}^2$	1	$1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+{u_1}^2$	$u_2+{u_1}^2$
$1+{u_2}^2$	$1+{u_2}^2$	${u_2}^2$	$1+u_1+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_2}^2$	$1+{u_1}^2+{u_2}^2$	1	u_1+u_2	$u_2+{u_2}^2$
u_1+u_2	u_1+u_2	$1+u_1+u_2$	u_2	u_1	$u_1+u_2+{u_1}^2$	$u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_2$	$1+u_1$
$u_1+{u_1}^2$	$u_1+{u_1}^2$	$1+u_1+{u_1}^2$	${u_1}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2$	u_1	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$
$u_1+{u_2}^2$	$u_1+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_2}^2$	${u_1}^2$	$u_1+u_2+{u_2}^2$	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	u_1	$1+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$
$u_2+{u_1}^2$	$u_2+{u_1}^2$	$1+u_2+{u_1}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2$	${u_1}^2$	u_2	$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+{u_1}^2$
$u_2+{u_2}^2$	$u_2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_2}^2$	${u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2$	u_2	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+{u_2}^2$
${u_1}^2+{u_2}^2$	${u_1}^2+{u_2}^2$	$1+{u_2}^2+{u_1}^2$	$u_1+u_1^2+{u_2}^2$	$u_2+u_1^2+{u_2}^2$	${u_2}^2$	${u_1}^2$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$
$1+u_2+u_2$	$1+u_1+u_2$	u_1+u_2	$1+u_2$	$1+u_1$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	u_2	u_1
$1+u_1+{u_1}^2$	$1+u_1+{u_1}^2$	$u_1+{u_1}^2$	$1+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	${u_1}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2$
$1+u_1+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_2}^2$	$u_1+{u_2}^2$	$1+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1$	${u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_2}^2$
$1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_2+{u_1}^2$	$u_2+{u_1}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+{u_1}^2$	$1+u_2$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2$	${u_2}^2$
$1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_2}^2$	$u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2$	$u_1+u_2+{u_2}^2$	${u_2}^2$
$1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+{u_1}^2+{u_2}^2$	${u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+{u_2}^2$	$1+{u_1}^2$	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$
$u_1+u_2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	${u_2}^2+{u_2}^2$	$u_1+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	u_1+u_2	$1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_2}^2$
$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	${u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+{u_2}^2$	$u_1+{u_1}^2$	$1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$
$u_1+u_2+{u_1}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$u_2+{u_1}^2$	$u_1+{u_1}^2$	u_1+u_2	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+{u_1}^2$
$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	${u_1}^2+{u_2}^2$	$u_2+{u_2}^2$	$u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+{u_1}^2+{u_2}^2$
$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+{u_1}^2$
$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1$	$u_1+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_2}^2$
$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+{u_2}^2$	$1+{u_1}^2$	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$
$u_1+u_2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$u_2+{u_2}^2$	$u_1+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	u_1+u_2	$1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_2}^2$
$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	${u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+{u_2}^2$	$u_1+{u_1}^2$	$1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$
$u_1+u_2+{u_1}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$u_2+{u_1}^2$	$u_1+{u_1}^2$	u_1+u_2	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+{u_1}^2$
$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	${u_1}^2+{u_2}^2$	$u_2+{u_2}^2$	$u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+{u_1}^2+{u_2}^2$
$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$u_2+{u_1}^2$	$u_1+{u_1}^2$
$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_2}^2$
$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$

Çizelge 3.1. R üzerinde toplama işlemi (devamı)

$\oplus$	$1+{u_1}^2$	$1+{u_2}^2$	u_1+u_2	$u_1+{u_1}^2$	$u_1+{u_2}^2$	$u_2+{u_1}^2$	$u_2+{u_2}^2$	${u_1}^2+{u_2}^2$
0	$1+{u_1}^2$	$1+{u_2}^2$	u_1+u_2	$u_1+{u_1}^2$	$u_1+{u_2}^2$	$u_2+{u_1}^2$	$u_2+{u_2}^2$	${u_1}^2+{u_2}^2$
1	${u_1}^2$	${u_2}^2$	$1+u_1+u_2$	$1+u_1+{u_1}^2$	$1+u_1+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_2+{u_2}^2$	$1+{u_1}^2+{u_2}^2$
u_1	$1+u_1+{u_1}^2$	$1+u_1+{u_2}^2$	u_2	${u_1}^2$	${u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2$	$u_1+u_2+{u_2}^2$	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$
u_2	$1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_2+{u_2}^2$	u_1	$u_1+u_2+{u_1}^2$	$u_1+u_2+{u_2}^2$	${u_1}^2$	${u_2}^2$	$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$
${u_1}^2$	1	$1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2$	u_1	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	u_2	$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	${u_2}^2$
${u_2}^2$	$1+{u_1}^2+{u_2}^2$	1	$u_1+u_2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	u_1	$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	u_2	${u_1}^2$
$1+u_1$	$u_1+{u_1}^2$	$u_1+{u_2}^2$	$1+u_2$	$1+{u_1}^2$	$1+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$
$1+u_2$	$u_2+{u_1}^2$	$u_2+{u_2}^2$	$1+u_1$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+{u_1}^2$	$1+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$
$1+{u_1}^2$	0	${u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+{u_2}^2$
$1+{u_2}^2$	${u_1}^2+{u_2}^2$	0	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2$	$1+{u_1}^2$
u_1+u_2	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	0	$u_2+{u_1}^2$	$u_2+{u_2}^2$	$u_1+{u_1}^2$	$u_1+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$
$u_1+{u_1}^2$	$1+u_1$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_2+{u_1}^2$	0	${u_1}^2+{u_2}^2$	u_1+u_2	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+{u_2}^2$
$u_1+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1$	$u_2+{u_2}^2$	${u_1}^2+{u_2}^2$	0	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	u_1+u_2	$u_1+{u_1}^2$
$u_2+{u_1}^2$	$1+u_2$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+{u_1}^2$	u_1+u_2	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	0	${u_1}^2+{u_2}^2$	$u_2+{u_2}^2$
$u_2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2$	$u_1+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	u_1+u_2	${u_1}^2+{u_2}^2$	0	${u_1}^2+{u_1}^2$
${u_1}^2+{u_2}^2$	$1+{u_2}^2$	$1+{u_1}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+{u_2}^2$	$u_1+{u_1}^2$	$u_2+{u_2}^2$	$u_2+{u_1}^2$	0
$1+u_2+u_2$	$u_1+u_2+{u_1}^2$	$u_1+u_2+{u_2}^2$	1	$1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2$	$1+u_1+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$
$1+u_1+{u_1}^2$	u_1	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2$	1	$1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_2}^2$
$1+u_1+{u_2}^2$	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	u_1	$1+u+u^2$	$1+v^2+u^2$	1	$1+v+u+v^2+u^2$	$1+v+u$	$1+v+v^2$
$1+u_2+{u_1}^2$	u	$u+v^2+u^2$	$1+u_1+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	1	$1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_2}^2$
$1+u_2+{u_2}^2$	$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	u_2	$1+u_1+u_2^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2$	$1+{u_1}^2+{u_2}^2$	1	$1+u_2+{u_1}^2$
$1+{u_1}^2+{u_2}^2$	u^2	v^2	$1+v+u+v^2+u^2$	$1+v+u^2$	$1+v+v^2$	$1+u+u^2$	$1+u+v^2$	1
$u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2$	${u_2}^2$	$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	u_2	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	u_1	$u_1+u_2+{u_1}^2$
$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2^2$	$1+u_1+{u_1}^2$	$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	${u_2}^2$	${u_1}^2$	$u_1+u_2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2$	u_1
$u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	${u_1}^2$	u_2	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	u_1	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_2}^2$
$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2+u_2^2$	$1+u_2+{u_1}^2$	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+u_2^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2$	${u_2}^2$	${u_1}^2$	u_2
$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	u_1+u_2	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+{u_1}^2$	$1+u_2$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$
$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	u_1+u_2	$1+u_2^2$	$1+u_2$	$1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$
$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2$	$1+u_2^2$	$1+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$
$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	u_1+u_2	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2$	$1+u_2$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$
$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	u_1+u_2	$1+u_2^2$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$
$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	u_1+u_2	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2$	$1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1$
$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	${u_1}^2+{u_2}^2$	${u_2}^2+{u_2}^2$	${u_2}^2+{u_1}^2$	$u_1+{u_2}^2$	$u_1+{u_1}^2$	u_1+u_2
$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2$

Çizelge 3.1. R üzerinde toplama işlemi (devamı)

$\oplus$	$u_1+u_2+{u_1}^2$	${u_2}+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$
0	$u_1+u_2+{u_1}^2$	${u_2}+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$
1	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2$	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	${u_2}+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$
u_1	${u_2}+{u_1}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_2+{u_2}^2$	$1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	${u_2}+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$
u_2	$u_1+{u_1}^2$	${u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2$	$1+u_1+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$
${u_1}^2$	u_1+u_2	${u_2}+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$
${u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	${u_2}+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2$	$1+u_1+{u_1}^2$	$1+u_2+{u_1}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$
$1+u_1$	$1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	${u_2}+{u_1}^2$	${u_2}+{u_2}^2$	${u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	${u_2}+{u_1}^2+{u_2}^2$
$1+u_2$	$1+u_1+{u_1}^2$	$1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+{u_1}^2$	$1+u_1+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	${u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$
$1+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2$	$1+u_2+{u_2}^2$	u_1+u_2	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+{u_2}^2$	${u_2}+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_2}^2$
$1+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	u_1+u_2	$u_1+{u_1}^2$	${u_2}+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2$
u_1+u_2	${u_1}^2$	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+{u_1}^2$	$1+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	${u_1}^2+{u_2}^2$	$1+{u_1}^2+{u_2}^2$
$u_1+{u_1}^2$	u_2	$u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_2$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	${u_2}+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_2}^2$
$u_1+{u_2}^2$	${u_2}+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2$	$1+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	${u_2}+{u_1}^2$	$1+u_2+{u_1}^2$
${u_2}+{u_1}^2$	u_1	${u_2}^2$	$1+u_1$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+{u_2}^2$	$u_1+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_2}^2$
${u_2}+{u_2}^2$	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	${u_1}^2$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+{u_1}^2$	$u_1+{u_1}^2$	$1+u_1+{u_1}^2$
${u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_2}^2$	${u_2}$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1$	$1+u_2$	u_1+u_2	$1+u_1+u_2$
$1+u_2+u_2$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	${u_1}^2$	${u_2}^2$	${u_2}+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+{u_1}^2+{u_2}^2$
$1+u_1+{u_1}^2$	$1+{u_2}^2$	$1+u_2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	${u_2}$	${u_2}+{u_1}^2+{u_2}^2$	${u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_2}^2$
$1+u_1+{u_2}^2$	$1+{u_1}^2$	$1+u_1+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	${u_2}$	${u_1}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_2+{u_1}^2$
$1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1$	$1+u_2^2$	u_1	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_2}^2$	${u_2}^2$	$1+u_1+{u_2}^2$
$1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+{u_1}^2$	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	u_1	$u_1+u_2+{u_1}^2$	${u_1}^2$	$1+u_1+{u_1}^2$
$1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1$	$1+u_2$	u_1+u_2	$1+u_2$
${u_1}+{u_2}+{u_1}^2+{u_2}^2$	u_1+u_2	$u_1+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$
$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$
$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$
$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1$	$1+u_1+u_2$	$1+u_2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1$	$1+u_2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$
$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2$	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_2}^2$	1	$1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+{u_1}^2$	$1+{u_1}^2$
$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	0	${u_2}+{u_2}^2$	u_1+u_2	$1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1$	$1+u_1+u_2$	$1+u_2$
$u_1+u_2+{u_1}^2$	u_1+u_2	$u_1+{u_2}^2$	1	$1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_2}^2$	${u_2}^2$	$1+{u_2}^2$
${u_2}+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+{u_2}^2$	0	$1+u_1+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2$	1	u_1	$1+u_1$
$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	1	$1+u_1$	0	${u_1}^2+{u_2}^2$	${u_2}+{u_2}^2$	$u_1+{u_2}^2$	$1+{u_2}^2$	${u_2}^2$
$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2$	${u_1}^2+{u_2}^2$	0	${u_2}+{u_1}^2$	$u_1+{u_1}^2$	$1+{u_1}^2$	${u_1}^2$
$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2$	${u_2}+{u_2}^2$	${u_2}+{u_2}^2$	0	u_1+u_2	$1+u_2$	${u_2}$
$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2^2$	1	$1+u_1+u_2^2$	${u_2}+{u_1}^2$	u_1+u_2	0	$1+u_1$	u_1
$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	${u_2}^2$	u_1	$1+{u_2}^2$	$1+{u_1}^2$	$1+u_2$	$1+u_1$	0	1
$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+{u_2}^2$	$1+u_1$	${u_2}^2$	${u_1}^2$	u_2	u_1	1	0

Çizelge 3.1. R üzerinde toplama işlemi (devamı)

$\oplus$	$1+u_1+{u_1}^2$	$1+u_1+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_2+{u_2}^2$	$1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_2}^2$	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$
0	$1+u_1+{u_1}^2$	$1+u_1+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_2+{u_2}^2$	$1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_2}^2$	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$
1	$u_1+{u_1}^2$	$u_1+{u_2}^2$	$u_2+{u_1}^2$	$u_2+{u_2}^2$	${u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$
u_1	$1+{u_1}^2$	$1+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_2+{u_2}^2$	${u_1}^2+{u_2}^2$
u_2	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+{u_1}^2$	$1+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$
${u_1}^2$	$1+u_1$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+{u_2}^2$
${u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2$	$1+{u_1}^2$	u_1+u_2	$u_1+{u_1}^2$
$1+u_1$	${u_1}^2$	${u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2$	$u_1+u_2+{u_2}^2$	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_2}^2$	$1+{u_1}^2+{u_2}^2$
$1+u_2$	$v+u_2+{u_1}^2$	$u_1+u_2+{u_2}^2$	${u_1}^2$	${u_2}^2$	$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$
$1+{u_1}^2$	u_1	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	u_2	$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	${u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_2}^2$
$1+{u_2}^2$	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	u_1	$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	u_2	${u_1}^2$	$1+u_1+u_2$	$1+u_1+{u_1}^2$
u_1+u_2	$1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2$	$1+u_1+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	${u_2}^2$	$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$
$u_1+{u_1}^2$	1	$1+u_1+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_2}^2$	$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	${u_2}^2$
$u_1+{u_2}^2$	$1+{u_1}^2+{u_2}^2$	1	$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2$	$1+u_1+{u_1}^2$	u_2	${u_1}^2$
$u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	1	$1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_2}^2$	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$
$u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2$	$1+{u_1}^2+{u_2}^2$	1	$1+u_2+{u_1}^2$	u_1	$u_1+u_2+{u_1}^2$
${u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2$	$1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2$	1	$u_1+u_2+{u_1}^2$	u_1
$1+u_2+u_2$	$u_2+{u_1}^2$	$1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2$	$u_1+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$
$1+u_1+{u_1}^2$	0	$u_1+{u_2}^2$	u_1+u_2	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+{u_2}^2$
$1+u_1+{u_2}^2$	${u_1}^2+{u_2}^2$	0	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	u_1+u_2	$u_1+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2$	$1+{u_1}^2$
$1+u_2+{u_1}^2$	u_1+u_2	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	0	${u_1}^2+{u_2}^2$	$u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$
$1+u_2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	u_1+u_2	${u_1}^2$	0	$u_2+{u_1}^2$	$1+u_1$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$
$1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+{u_2}^2$	$u_1+{u_1}^2$	$u_2+{u_2}^2$	$u_2+{u_1}^2$	0	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1$
$u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	0	$u_2+{u_1}^2$
$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u^2$	$1+v^2$	$1+v+u+u^2$	$1+v+u+v^2$	$1+v$	$u+v^2$	0
$u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_2$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	${u_1}^2+{u_2}^2$	$u_2+{u_2}^2$
$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+v+u+u^2$	$1+v+u+v^2$	$1+u^2$	$1+v^2$	$1+u$	$v+v^2$	$v+u$
$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	u_2	$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	u_q	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_2}^2$
$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	u_2	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	u_1	$u_1+u_2+{u_1}^2$	1	$1+u_2+{u_1}^2$
$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	${u_2}^2$	${u_1}^2$	$u_1+u_2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2$	u_1	$1+u_2+{u_1}^2$	1
$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2$	${u_2}^2$	${u_1}^2$	u_2	$1+u_1+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2$
$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2$	${u_1}^2$	$1+u_2$
$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_2+{u_2}^2$	$u_2+{u_1}^2$	$u_1+{u_2}^2$	$u_1+{u_1}^2$	u_1+u_2	$1+{u_1}^2$	$1+u_2$

Çizelge 3.2. R üzerinde çarpma işlemi

$\otimes$	0	1	u_1	u_2	u_1^2	u_2^2	$1+u_1$	$1+u_2$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	u_1	u_2	u_1^2	u_2^2	$1+u_1$	$1+u_2$
u_1	0	u_1	u_1^2	0	0	0	$u_1+u_1^2$	u_1
u_2	0	u_2	0	u_2^2	0	0	u_2	$u_2+u_2^2$
u_1^2	0	u_1^2	0	0	0	0	u_1^2	u_1^2
u_2^2	0	u_2^2	0	0	0	0	u_2^2	u_2^2
$1+u_1$	0	$1+u_1$	$u_1+u_1^2$	u	u_1^2	u_2^2	$1+u_1^2$	$1+u_1+u_2$
$1+u_2$	0	$1+u_2$	u_1	$u_2+u_2^2$	u_1^2	u_2^2	$1+u_1+u_2$	$1+u_2^2$
$1+u_1^2$	0	$1+u_1^2$	u_1	u_2	u_1^2	u_2^2	$1+u_1+u_1^2$	$1+u_2+u_1^2$
$1+u_2^2$	0	$1+u_2^2$	u_1	u_2	u_1^2	u_2^2	$1+u_1+u_2^2$	$1+u_2+u_1^2$
u_1+u_2	0	u_1+u_2	u_1^2	u_2^2	0	0	$u_1+u_2+u_1^2$	$u_1+u_2+u_2^2$
$u_1+u_1^2$	0	$u_1+u_1^2$	u_1^2	0	0	0	u_1	$u_1+u_1^2$
$u_1+u_2^2$	0	$u_1+u_2^2$	u_1^2	0	0	0	$u_1+u_1^2+u_2^2$	$u_1+u_2^2$
$u_2+u_1^2$	0	$u_2+u_1^2$	0	u_2^2	0	0	$u_2+u_1^2$	$u_2+u_2^2+u_1^2$
$u_2+u_2^2$	0	$u_2+u_2^2$	0	u_2^2	0	0	$u_2+u_2^2$	u_2
$u_1^2+u_2^2$	0	$u_1^2+u_2^2$	0	0	0	0	$u_1^2+u_2^2$	$u_1^2+u_2^2$
$1+u_2+u_2$	0	$1+u_1+u_2$	$u_1+u_1^2$	$u_2+u_2^2$	u_1^2	u_2^2	$1+u_1+u_2+u_1^2$	$1+u_1+u_2^2$
$1+u_1+u_1^2$	0	$1+u_1+u_1^2$	$u_1+u_1^2$	u_2	u_1^2	u_2^2	1	$1+u_1+u_2^2$
$1+u_1+u_2^2$	0	$1+u_1+u_2^2$	$u_1+u_1^2$	u_2	u_1^2	u_2^2	$1+u_1^2+u_2^2$	$1+u_1+u_2+u_2^2$
$1+u_2+u_1^2$	0	$1+u_2+u_1^2$	u_1	$u_2+u_2^2$	u_1^2	u_2^2	$1+u_1+u_2+u_1^2$	$1+u_2^2+u_1^2$
$1+u_2+u_2^2$	0	$1+u_2+u_2^2$	u_1	$u_2+u_2^2$	u_1^2	u_2^2	$1+u_1+u_2+u_2^2$	1
$1+u_1^2+u_2^2$	0	$1+u_1^2+u_2^2$	u_1	u_2	u_1^2	u_2^2	$1+u_1+u_1^2+u_2^2$	$u_2+u_1^2+u_2^2$
$u_1+u_2+u_2^2$	0	$u_1+u_2+u_2^2$	u_1^2	u_2^2	0	0	$u_1+u_2+u_1^2+u_2^2$	u_1+u_2
$u_1+u_1^2+u_2^2$	0	$u_1+u_1^2+u_2^2$	u_1^2	0	0	0	$u_1+u_2^2$	$u_1+u_1^2+u_2^2$
$u_1+u_2+u_1^2$	0	$u_1+u_2+u_1^2$	u_1^2	u_2^2	0	0	u_1+u_2	$u_1+u_2+u_1^2+u_2^2$
$u_2+u_1^2+u_2^2$	0	$u_2+u_1^2+u_2^2$	0	u_2^2	0	0	$u_2+u_1^2+u_2^2$	$u_2+u_1^2$
$1+u_1+u_2+u_1^2$	0	$1+u_1+u_2+u_1^2$	$u_1+u_1^2$	$u_2+u_2^2$	u_1^2	u_2^2	$1+u_2$	$1+u_1+u_1^2+u_2^2$
$1+u_1+u_2+u_2^2$	0	$1+u_1+u_2+u_2^2$	$u_1+u_1^2$	$u_2+u_2^2$	u_1^2	u_2^2	$1+u_2+u_1^2+u_2^2$	$1+u_1$
$1+u_1+u_2^2+u_2^2$	0	$1+u_1+u_1^2+u_2^2$	$u_1+u_1^2$	u_2	u_1^2	u_2^2	$1+u_2^2$	$1+u_1+u_2+u_1^2+u_2^2$
$1+u_2+u_1^2+u_2^2$	0	$1+u_2+u_1^2+u_2^2$	u_1	$u_2+u_2^2$	u_1^2	u_2^2	$1+u_1+u_2+u_1^2+u_2^2$	$1+u_1^2$
$u_1+u_2+u_1^2+u_2^2$	0	$u_1+u_2+u_1^2+u_2^2$	u_1^2	u_2^2	0	0	$u_1+u_2+u_2^2$	$u_1+u_2+u_1^2$
$1+u_1+u_2+u_1^2+u_2^2$	0	$1+u_1+u_2+u_1^2+u_2^2$	$u_1+u_1^2$	$u_2+u_2^2u+u^2$	u_1^2	u_2^2	$1+u_2+u_2^2$	$1+u_1+u_1^2$

Çizelge 3.2. R üzerinde çarpma işlemi (devamı)

$\otimes$	$1+u_1^2$	$1+u_2^2$	u_1+u_2	$u_1+u_1^2$	$u_1+u_2^2$	$u_2+u_1^2$	$u_2+u_2^2$	$u_1^2+u_2^2$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	$1+u_1^2$	$1+u_2^2$	u_1+u_2	$u_1+u_1^2$	$u_1+u_2^2$	$u_2+u_1^2$	$u_2+u_2^2$	$u_1^2+u_2^2$
u_1	u_1	u_1	u_1^2	u_1^2	u_1^2	0	0	0
u_2	u_2	u_2	u_2^2	0	0	u_2^2	u_2^2	0
u_1^2	u_1^2	u_1^2	0	0	0	0	0	0
u_2^2	u_2^2	u_2^2	0	0	0	0	0	0
$1+u_1$	$1+u_1+u_1^2$	$1+u_1+u_2^2$	$u_1+u_2+u_1^2$	u_1	$u_1+u_1^2+u_2^2$	$u_2+u_1^2$	$u_2+u_2^2$	$u_1^2+u_2^2$
$1+u_2$	$1+u_2+u_1^2$	$1+u_2+u_1^2$	$u_1+u_2+u_2^2$	$u_1+u_1^2$	$u_1+u_2^2$	$u_2+u_1^2+u_2^2$	u_2	$u_1^2+u_2^2$
$1+u_1^2$	1	$1+u_1^2+u_2^2$	u_1+u_2	$u_1+u_1^2$	$u_1+u_2^2$	$u_2+u_1^2$	$u_2+u_2^2$	$u_1^2+u_2^2$
$1+u_2^2$	$1+u_1^2+u_2^2$	1	u_1+u_2	$u_1+u_1^2$	$u_1+u_2^2$	$u_2+u_1^2$	$u_2+u_2^2$	$u_1^2+u_2^2$
u_1+u_2	u_1+u_2	u_1+u_2	$u_1^2+u_2^2$	u_1^2	u_1^2	u_2^2	u_2^2	0
$u_1+u_1^2$	$u_1+u_1^2$	$u_1+u_1^2$	u_1^2	u_1^2	u_1^2	u_2^2	0	0
$u_1+u_2^2$	$u_1+u_2^2$	$u_1+u_2^2$	u_1^2	u_1^2	u_1^2	u_2^2	0	0
$u_2+u_1^2$	$u_2+u_1^2$	$u_2+u_1^2$	u_2^2	0	0	0	u_2^2	0
$u_2+u_2^2$	$u_2+u_2^2$	$u_2+u_2^2$	u_2^2	0	0	0	u_2^2	0
$u_1^2+u_2^2$	$u_1^2+u_2^2$	$u_1^2+u_2^2$	0	0	0	0	0	0
$1+u_2+u_2$	$1+u_1+u_2+u_1^2$	$1+u_1+u_2+u_1^2$	$u_1+u_2+u_1^2+u_2^2$	u_1	$u_1+u_1^2+u_2^2$	$u_2+u_1^2+u_2^2$	u_2	$u_1^2+u_2^2$
$1+u_1+u_1^2$	$1+u_1$	$1+u_1+u_1^2+u_2^2$	$u_1+u_2+u_1^2$	u_1	$u_1+u_1^2+u_2^2$	$u_2+u_1^2+u_2^2$	$u_2+u_2^2$	$u_1^2+u_2^2$
$1+u_1+u_2^2$	$1+u_1+u_2^2+u_1^2$	$1+u_1$	$u_1+u_2+u_1^2$	$u_1+u_1^2$	$u_1+u_1^2+u_2^2$	$u_2+u_1^2+u_2^2$	$u_2+u_2^2$	$u_1^2+u_2^2$
$1+u_2+u_1^2$	$1+u_2$	$u_2+u_1^2+u_2^2$	$u_1+u_2+u_2^2$	$u_1+u_1^2$	$u_1+u_2^2$	$u_2+u_1^2$	u_2	$u_1^2+u_2^2$
$1+u_2+u_2^2$	$1+u_2+u_1^2+u_2^2$	$1+u_2$	$u_1+u_2+u_2^2$	$u_1+u_1^2$	$u_1+u_2^2$	$u_2+u_1^2$	u_2	$u_1^2+u_2^2$
$1+u_1^2+u_2^2$	$1+u_2^2$	$1+u_1^2$	u_1+u_2	$u_1+u_1^2$	$u_1+u_2^2$	$u_2+u_1^2$	$u_2+u_2^2$	$u_1^2+u_2^2$
$u_1+u_2+u_2^2$	$u_1+u_2+u_2^2$	$u_1+u_2+u_2^2$	$u_1^2+u_2^2$	u_1^2	$u_1+u_2^2$	$u_2+u_1^2$	u_2^2	0
$u_1+u_1^2+u_2^2$	$u_1+u_1^2+u_2^2$	$u_1+u_1^2+u_2^2$	u_1^2	u_1^2	u_1^2	u_2^2	0	0
$u_1+u_2+u_1^2$	$u_1+u_2+u_1^2$	$u_1+u_2+u_1^2$	$u_1^2+u_2^2$	u_1^2	u_1^2	u_2^2	u_2^2	0
$u_2+u_1^2+u_2^2$	$u_2+u_1^2+u_2^2$	$u_2+u_1^2+u_2^2$	u_2^2	0	0	0	u_2^2	0
$1+u_1+u_2+u_1^2$	$1+u_1+u_2$	$1+u_1+u_2+u_1^2+u_2^2$	$u_1+u_2+u_1^2+u_2^2$	u_1	$u_1+u_1^2+u_2^2$	$u_2+u_1^2+u_2^2$	u_2	$u_1^2+u_2^2$
$1+u_1+u_2+u_2^2$	$1+u_1+u_2+u_1^2+u_2^2$	$1+u_1+u_2$	$u_1+u_2+u_1^2+u_2^2$	u_1	$u_1+u_1^2+u_2^2$	$u_2+u_1^2+u_2^2$	u_2	$u_1^2+u_2^2$
$1+u_1+u_2^2+u_2^2$	$1+u_1+u_2^2$	$1+u_1+u_1^2$	$u_1+u_2+u_1^2$	u_1	$u_1+u_1^2+u_2^2$	$u_2+u_1^2+u_2^2$	$u_2+u_2^2$	$u_1^2+u_2^2$
$1+u_2+u_1^2+u_2^2$	$1+u_2+u_2^2$	$1+u_2+u_1^2$	$u_1+u_2+u_2^2$	$u_1+u_1^2$	$u_1+u_2^2$	$u_2+u_1^2$	u_2	$u_1^2+u_2^2$
$u_1+u_2+u_1^2+u_2^2$	$u_2+u_2^2$	$u_1+u_2+u_1^2+u_2^2$	$u_1^2+u_2^2$	u_1^2	u_1^2	u_2^2	u_2^2	0
$1+u_1+u_2+u_1^2+u_2^2$	$1+u_2+u_1^2+u_2^2$	$1+u_1+u_2+u_1^2$	$u_1+u_2+u_1^2+u_2^2$	u_1	$u_1+u_1^2+u_2^2$	$u_2+u_1^2+u_2^2$	u_2	$u_1^2+u_2^2$

Çizelge 3.2. R üzerinde çarpma işlemi (devamı)

$\otimes$	$1+u_1+u_2$	$1+u_1+u_1^2$	$1+u_1+u_2^2$	$1+u_2+u_1^2$	$1+u_2+u_2^2$	$1+u_1^2+u_2^2$	$u_1+u_2+u_2^2$	$u_1+u_1^2+u_2^2$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	$1+u_1+u_2$	$1+u_1+u_1^2$	$1+u_1+u_2^2$	$1+u_2+u_1^2$	$1+u_2+u_2^2$	$1+u_1^2+u_2^2$	$u_1+u_2+u_2^2$	$u_1+u_1^2+u_2^2$
u_1	$u_1+u_1^2$	$u_1+u_1^2$	$u_1+u_1^2$	u_1	u_1	u_1	u_1^2	u_1^2
u_2	$u_2+u_2^2$	u_2	u_2	$u_2+u_2^2$	$u_2+u_2^2$	u_2	u_2^2	0
u_1^2	u_1^2	u_1^2	u_1^2	u_1^2	u_1^2	u_1^2	0	0
u_2^2	u_2^2	u_2^2	u_2^2	u_2^2	u_2^2	u_2^2	0	0
$1+u_1$	$1+u_2+u_1^2$	1	$1+u_1^2+u_2^2$	$1+u_1+u_2+u_1^2$	$1+u_1+u_2+u_2^2$	$1+u_1+u_1^2+u_2^2$	$u_1+u_2+u_1^2+u_2^2$	$u_1+u_2^2$
$1+u_2$	$1+u_1+u_2^2$	$1+u_1+u_2+u_1^2$	$1+u_1+u_2+u_2^2$	$1+u_1^2+u_2^2$	1	$1+u_2+u_1^2+u_2^2$	u_1+u_2	$u_1+u_1^2+u_2^2$
$1+u_1^2$	$1+u_1+u_2+u_1^2$	$1+u_1$	$1+u_1+u_1^2+u_2^2$	$1+u_2$	$1+u_2+u_1^2+u_2^2$	$1+u_2^2$	$u_1+u_2+u_2^2$	$u_1+u_1^2+u_2^2$
$1+u_2^2$	$1+u_1+u_2+u_2^2$	$1+u_1+u_1^2+u_2^2$	$1+u_1$	$1+u_2+u_1^2+u_2^2$	$1+u_2$	$1+u_1^2$	$u_1+u_2+u_1^2$	$u_1+u_1^2+u_2^2$
u_1+u_2	$u_1+u_2+u_1^2+u_2^2$	$u_1+u_2+u_1^2$	$u_1+u_2+u_1^2$	$u_1+u_2+u_2^2$	$u_1+u_2+u_2^2$	u_1+u_2	$u_1^2+u_2^2$	u_1^2
$u_1+u_1^2$	u_1	u_1	u_1	$u_1+u_1^2$	$u_1+u_1^2$	$u_1+u_1^2$	u_1^2	u_1^2
$u_1+u_2^2$	$u_1+u_1^2+u_2^2$	$u_1+u_1^2+u_2^2$	$u_1+u_1^2+u_2^2$	$u_1+u_2^2$	$u_1+u_2^2$	$u_1+u_2^2$	u_1^2	u_1^2
$u_2+u_1^2$	$u_2+u_1^2+u_2^2$	$u_2+u_1^2$	$u_2+u_1^2$	$u_2+u_1^2+u_2^2$	$u_2+u_1^2+u_2^2$	$u_2+u_1^2$	u_2^2	0
$u_2+u_2^2$	u_2	$u_2+u_2^2$	$u_2+u_2^2$	u_2	u_2	$u_2+u_2^2$	u_2^2	0
$u_1^2+u_2^2$	$u_1^2+u_2^2$	$u_1^2+u_2^2$	$u_1^2+u_2^2$	$u_1^2+u_2^2$	$u_1^2+u_2^2$	$u_1^2+u_2^2$	0	0
$1+u_2+u_2$	$1+u_1^2+u_2^2$	$1+u_2$	$1+u_2+u_1^2+u_2^2$	$1+u_1+u_1^2+u_2^2$	$1+u_1$	$1+u_1+u_2+u_1^2+u_2^2$	$u_1+u_2+u_1^2$	$u_1+u_2^2$
$1+u_1+u_1^2$	$1+u_2$	$1+u_1^2$	$1+u_2^2$	$1+u_1+u_2$	$1+u_2+u_2^2+u_1+u_1^2$	$1+u_2+u_2^2$	$u_1+u_2+u_1^2+u_2^2$	$u_1+u_2^2$
$1+u_1+u_2^2$	$1+u_2+u_1^2+u_2^2$	$1+u_2^2$	$1+u_1^2$	$1+u_1+u_2+u_1^2+u_2^2$	$1+u_1+u_2$	$1+u_1+u_1^2$	$u_1+u_2+u_1^2+u_2^2$	$u_1+u_2^2$
$1+u_2+u_1^2$	$1+u_1+u_1^2+u_2^2$	$1+u_1+u_2$	$1+u_1+u_2+u_1^2+u_2^2$	$1+u_2^2$	$1+u_1^2$	$1+u_2+u_2^2$	u_1+u_2	$u_1+u_1^2+u_2^2$
$1+u_2+u_2^2$	$1+u_1$	$1+u_1+u_2+u_1^2+u_2^2$	$1+u_1+u_2$	$1+u_1^2$	$1+u_2^2$	$1+u_2+u_1^2$	u_1+u_2	$u_1+u_1^2+u_2^2$
$1+u_1^2+u_2^2$	$1+u_1+u_2+u_1^2+u_2^2$	$1+u_1+u_2^2$	$1+u_1+u_1^2$	$1+u_2+u_2^2$	$1+u_2+u_1^2$	1	$u_1+u_2+u_2^2$	$u_1+u_1^2+u_2^2$
$u_1+u_2+u_2^2$	$u_1+u_2+u_1^2$	$u_1+u_2+u_1^2+u_2^2$	$u_1+u_2+u_1^2+u_2^2$	u_1+u_2	u_1+u_2	$u_1+u_2+u_2^2$	$u_1^2+u_2^2$	u_1^2
$u_1+u_1^2+u_2^2$	$u_1+u_2^2$	$u_1+u_2^2$	$u_1+u_2^2$	$u_1+u_1^2+u_2^2$	$u_1+u_1^2+u_2^2$	$u_1+u_1^2+u_2^2$	u_1^2	u_1^2
$u_1+u_2+u_1^2$	$u_1+u_2+u_2^2$	u_1+u_2	u_1+u_2	$u_1+u_2+u_1^2+u_2^2$	$u_1+u_2+u_1^2+u_2^2$	$u_1+u_2+u_1^2$	$u_1^2+u_2^2$	u_1^2
$u_2+u_1^2+u_2^2$	$u_2+u_1^2$	$u_2+u_1^2+u_2^2$	$u_2+u_1^2+u_2^2$	$u_2+u_1^2$	$u_2+u_1^2$	$u_2+u_1^2+u_2^2$	u_2^2	0
$1+u_1+u_2+u_1^2+u_2^2$	u_2^2	$1+u_2+u_1^2$	$1+u_2+u_2^2$	$1+u_1+u_2^2$	$1+u_1+u_1^2$	$1+u_1+u_2+u_2^2$	$u_1+u_2+u_1^2$	$u_1+u_2^2$
$1+u_1+u_2+u_2^2$	u_1^2	$1+u_2+u_2^2$	$1+u_2+u_1^2$	$1+u_1+u_1^2$	$1+u_1+u_2^2$	$1+u_1+u_2+u^2$	$u_1+u_2+u_1^2$	$u_1+u_2^2$
$1+u_1+u_2^2+u_2^2$	$1+u_2+u_2^2$	$1+u_2^2+u_1^2$	1	$u_1+u_2+u_2^2$	$1+u_1+u_2+u_1^2$	$1+u_1$	$u_1+u_2+u_1^2+u_2^2$	$u_1+u_2^2$
$1+u_2+u_1^2+u_2^2$	$1+u_1+u_1^2$	$1+u_1+u_2+u_2^2$	$1+u_1+u_2+u_1^2$	1	$1+u_1^2+u_2^2$	$1+u_2$	u_1+u_2	$u_1+u_1^2+u_2^2$
$u_1+u_2+u_1^2+u_2^2$	u_1+u_2	$u_1+u_2+u_2^2$	$u_1+u_2+u_2^2$	$u_1+u_2+u_1^2$	$u_1+u_2+v^2$	$u_1+u_2+u_1^2+u_2^2$	$u_1^2+u_2^2$	u_1^2
$1+u_1+u_2+u_1^2+u_2^2$	1	$1+u_2+u_2^2+u_1^2$	$1+u_2$	$1+u_1$	$1+u_1+u_1^2+u_2^2$	$1+u_1+u_2$	$u_1+u_2+u_1^2$	$u_1+u_2^2$

Çizelge 3.2. R üzerinde çarpma işlemi (devamı)

$\otimes$	$u_1+u_2+{u_1}^2$	$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	$u_1+u_2+{u_1}^2$	$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$
u_1	${u_1}^2$	0	$u_1+{u_1}^2$	$u_1+{u_1}^2$	$u_1+{u_1}^2$	u_1	${u_1}^2$	$u_1+{u_1}^2$
u_2	${u_2}^2$	${u_2}^2$	$u_2+{u_2}^2$	$u_2+{u_2}^2$	u_2	$u_2+{u_2}^2$	${u_2}^2$	$u_2+{u_2}^2$
${u_1}^2$	0	0	${u_1}^2$	${u_1}^2$	${u_1}^2$	${u_1}^2$	0	${u_1}^2$
${u_2}^2$	0	0	${u_2}^2$	${u_2}^2$	${u_2}^2$	${u_2}^2$	0	${u_2}^2$
$1+u_1$	u_1+u_2	$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_2}^2$
$1+u_2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+{u_1}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+{u_1}^2$
$1+{u_1}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2$	$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$
$1+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2$	$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2$	$1+u_1+{u_1}^2$	$1+u_2+{u_1}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$
u_1+u_2	${u_1}^2+{u_2}^2$	${u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2$	$u_1+u_2+{u_2}^2$	${u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$
$u_1+{u_1}^2$	${u_1}^2$	0	u_1	u_1	u_1	$u_1+{u_1}^2$	${u_1}^2$	u_1
$u_1+{u_2}^2$	${u_1}^2$	0	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+{u_2}^2$	${u_1}^2$	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$
$u_2+{u_1}^2$	${u_2}^2$	${u_2}^2$	$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_2+{u_1}^2$	$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	${u_2}^2$	$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$
$u_2+{u_2}^2$	${u_2}^2$	${u_2}^2$	u_2	u_2	$u_2+{u_2}^2$	u_2	${u_2}^2$	u_2
${u_1}^2+{u_2}^2$	0	0	${u_1}^2+{u_2}^2$	${u_1}^2+{u_2}^2$	${u_1}^2+{u_2}^2$	${u_1}^2+{u_2}^2$	0	${u_1}^2+{u_2}^2$
$1+u_2+u_2$	$u_1+u_2+{u_2}^2$	$u_2+{u_1}^2$	$1+{u_2}^2$	$1+{u_1}^2$	$1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_1+{u_1}^2$	u_1+u_2	1
$1+u_1+{u_1}^2$	u_1+u_2	$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_2+{u_2}^2$	$1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$
$1+u_1+{u_2}^2$	u_1+u_2	$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2$	1	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$u_1+u_2+{u_2}^2$	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$
$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2^2$	$1+u_1+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	1	$u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1$
$1+u_2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$
$1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2$	$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2$	$1+u_1$	$1+u_2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2$
$u_1+u_2+{u_2}^2$	${u_1}^2+{u_2}^2$	${u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	u_1+u_2	${u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2$
$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	${u_1}^2$	0	$u_1+{u_2}^2$	$u_1+u_2^2$	${u_2}^2$	$u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	${u_1}^2$	$u_1+u_2^2$
$u_1+u_2+{u_1}^2$	${u_1}^2+{u_2}^2$	${u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+u_2^2$	u_1+u_2	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	${u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_2}^2$
$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	${u_2}^2$	${u_2}^2$	$u_2+{u_1}^2$	$u_2+{u_1}^2$	$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_2+{u_1}^2$	${u_2}^2$	$u_2+{u_1}^2$
$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$u_1+u_2+u_2^2$	$u_2+{u_1}^2$	$1+u_1^2+{u_2}^2$	1	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1$	u_1+u_2	$1+{u_1}^2$
$1+u_1+u_2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+u_2^2$	$u_2+{u_1}^2$	1	$1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	u_1+u_2	$1+u_2^2$
$1+u_1+{u_2}^2+{u_2}^2$	u_1+u_2	$u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_2$	$1+u_1+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2$	$u_1+u_2+{u_2}^2$	$1+u_2+{u_1}^2$
$1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_2+{u_1}^2$	$1+u_1$	$1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2$	$1+u_1+u_2$	$1+u_2^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+{u_2}^2$
$u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	${u_1}^2+{u_2}^2$	${u_2}^2$	u_1+u_2	u_1+u_2	$u_1+u_2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+{u_1}^2$	${u_1}^2+{u_2}^2$	u_1+u_2
$1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2$	$u_1+u_2+u_2^2$	$u_2+{u_1}^2$	$1+{u_1}^2$	$1+u_2^2$	$1+u_1+u_2+{u_1}^2$	$1+u_1+u_2^2$	u_1+u_2	$1+{u_1}^2+{u_2}^2$

3.1.1 Tanım: $u_1^3 = 0$, $u_2^3 = 0$ ve $u_1 \cdot u_2 = u_2 \cdot u_1 = 0$ koşulları ile

$R = \mathbb{F}_2 + u_1\mathbb{F}_2 + u_2\mathbb{F}_2 + {u_1}^2\mathbb{F}_2 + {u_2}^2\mathbb{F}_2$ ve $R_1 = \mathbb{F}_2 + u_2\mathbb{F}_2 + {u_2}^2\mathbb{F}_2$ olmak üzere;

$$\Phi: R \to R_1^4$$

$$a + bu_1 + cu_2 + d{u_1}^2 + e{u_2}^2 \mapsto \Phi(a + bu_1 + cu_2 + d{u_1}^2 + e{u_2}^2)$$

$$\Phi(a + bu_1 + cu_2 + d{u_1}^2 + e{u_2}^2) = \Phi(x + yu_1 + z{u_1}^2)$$

$$= (z, x + z, y + z, x + y + z)$$

biçiminde tanımlanan Φ dönüşümüne, R halkası üzerinde Gray dönüşümü denir. Burada

$$x = a + cu_2 + e{u_2}^2$$

$$y = b + au_2 + (a + c){u_2}^2$$

$$z = d + (a + b)u_2 + (b + c){u_2}^2$$

$a, b, c, d, e \in \mathbb{F}_2$ olmak üzere Φ dönüşümü,

$\Phi(t_o, t_1, \dots, t_{n-1}) = (z_o, z_1, \dots, z_{n-1}, x_o + z_o, x_1 + z_1, \dots, x_{n-1} + z_{n-1},$

$y_o + z_o, y_o + z_o, y_1 + z_1, \dots, y_{n-1} + z_{n-1}, x_o + y_o + z_o, x_1 + y_1 + z_1, \dots,$

$x_{n-1} + y_{n-1} + z_{n-1})$ biçiminde R^n e genişletilebilir. Burada,

3.1.2. Tanım: $u_2^3 = 0$ koşulu ile $R_1 = \mathbb{F}_2 + u_2\mathbb{F}_2 + {u_2}^2\mathbb{F}_2$ halkası üzerinde $x', y', z' \in \mathbb{F}_2$ olmak üzere;

$$\Phi_1: R_1 \to \mathbb{F}_2^4$$

$$x' + y'u_2 + z'{u_2}^2 \longmapsto \Phi_1(x' + y'u_2 + z'{u_2}^2)$$

$$\Phi_1(x' + y'u_2 + z'{u_2}^2) = (z', x' + z', y' + z', x' + y' + z')$$

biçiminde tanımlanan Φ_1 bu dönüşümüne R_1 halkası üzerinde tanımlı Gray dönüşümü denir.

Aşağıdaki gibi Φ_1 dönüşümü R_1^n'e aşağıdaki gibi genişletilebilir. Burada

$i = 0,1, \dots, n-1$ için $t_i = x_i + y_iu_1 + z_i{u_1}^2$, $x_i = a_i + c_iu_2 + e_i{u_2}^2$,

$y_i = b_i + a_iu_2 + (a_i + c_i){u_2}^2$ ve $z_i = d_i + (a_i + b_i)u_2 + (b_i + c_i){u_2}^2$ olmak üzere;

$$\Phi_1 : R_1^n \to \mathbb{F}_2^{4n}$$

$$(b_0, b_1, \dots b_{n-1}) \mapsto \Phi_1(b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$$

$\Phi_1(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) = (z'_0, z'_1, \dots, z'_{n-1}, x'_0 + z'_0, x'_1 + z'_1, \dots,$

$x'_{n-1} + z'_{n-1}, y'_0 + z'_0, y'_1 + z'_1, \dots, y'_{n-1} + z'_{n-1}, \dots, , x'_0 + y'_0 + z'_0,$

$x'_1 + y'_1 + z'_1, \dots, x'_{n-1} + y'_{n-1} + z'_{n-1})$

olur. R halkasında 32 eleman vardır. Aşağıda bu 32 elemanın Φ Gray görüntüleri sunulmuştur.

$$\Phi : R \to R_1^4$$

- 0 elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi(0) = (0,0,0,0)$
- (1) elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi(1) = (u_2, 1 + u_2, {u_2}^2, 1 + {u_2}^2)$
- (u_1) elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi(u_1) = (u_2 + {u_2}^2, u_2 + {u_2}^2, 1 + u_2 + {u_2}^2, 1 + u_2 + {u_2}^2)$
- (u_2) elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi(u_2) = ({u_2}^2, u_2 + {u_2}^2, 0, u_2)$
- $({u_1}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi({u_1}^2) = (1,1,1,1)$
- $({u_2}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi({u_2}^2) = (0, {u_2}^2, 0, {u_2}^2)$
- $(1 + u_1)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi(1 + u_1) = ({u_2}^2, 1 + {u_2}^2, 1 + u_2, u_2)$
- $(1 + u_2)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi(1 + u_2) = (u_2 + {u_2}^2, 1 + {u_2}^2, {u_2}^2, 1 + u_2 + {u_2}^2)$
- $(1 + {u_1}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi(1 + {u_1}^2) = (1 + u_2, u_2, 1 + {u_2}^2, {u_2}^2)$
- $(1 + {u_2}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi(1 + {u_2}^2) = (u_2, 1 + u_2 + {u_2}^2, {u_2}^2, 1)$
- $(u_1 + u_2)$ elemanının Gray Görüntüsü;

$\Phi(u_1 + u_2) = (u_2, 0, 1 + u_2 + {u_2}^2, 1 + {u_2}^2)$

- $(u_1 + {u_1}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi(u_1 + {u_1}^2) = (1 + u_2 + {u_2}^2, 1 + u_2 + {u_2}^2, u_2 + {u_2}^2, u_2 + {u_2}^2)$
- $(u_1 + {u_2}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi(u_1 + {u_2}^2) = (u_2 + {u_2}^2, u_2, 1 + u_2 + {u_2}^2, 1 + u_2)$
- $(u_2 + {u_1}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi(u_2 + {u_1}^2) = (1 + {u_2}^2, 1 + u_2 + {u_2}^2, 1, 1 + u_2)$
- $(u_2 + {u_2}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi(u_2 + {u_2}^2) = ({u_2}^2, u_2, 0, u_2 + {u_2}^2)$
- $({u_1}^2 + {u_2}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi({u_1}^2 + {u_2}^2) = (1, 1 + {u_2}^2, 1, 1 + {u_2}^2)$
- $(1 + u_1 + u_2)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi(1 + u_1 + u_2) = (0, 1 + u_2, 1 + u_2, 0)$
- $(1 + u_1 + {u_1}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi(1 + u_1 + {u_1}^2) = (1 + {u_2}^2, {u_2}^2, u_2, 1 + u_2)$
- $(1 + u_1 + {u_2}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi(1 + u_1 + {u_2}^2) = ({u_2}^2, 1, 1 + u_2, u_2 + {u_2}^2)$
- $(1 + u_2 + {u_1}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi(1 + u_2 + {u_1}^2) = (1 + u_2 + {u_2}^2, {u_2}^2, 1 + {u_2}^2, u_2 + {u_2}^2)$
- $(1 + u_2 + {u_2}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi(1 + u_2 + {u_2}^2) = (u_2 + {u_2}^2, 1, {u_2}^2, 1 + u_2)$
- $(1 + {u_1}^2 + {u_2}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi(1 + {u_1}^2 + {u_2}^2) = (1 + u_2, u_2 + {u_2}^2, 1 + {u_2}^2, 0)$
- $(u_1 + u_2 + {u_2}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi(u_1 + u_2 + {u_2}^2) = (u_2, {u_2}^2, 1 + u_2 + {u_2}^2, 1)$
- $(u_1 + {u_1}^2 + {u_2}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi(u_1 + {u_1}^2 + {u_2}^2) = (1 + u_2 + {u_2}^2, 1 + u_2, u_2 + {u_2}^2, u_2)$
- $(u_1 + u_2 + {u_1}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi(u_1 + u_2 + {u_1}^2) = (1 + u_2, 1, u_2 + {u_2}^2, {u_2}^2)$
- $(u_2 + {u_1}^2 + {u_2}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi(u_2 + {u_1}^2 + {u_2}^2) = (1 + {u_2}^2, 1 + u_2, 1, 1 + u_2 + {u_2}^2)$

- $(1+u_1+u_2+{u_1}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi(1+u_1+u_2+{u_1}^2)=(1,u_2,u_2,1)$
- $(1+u_1+u_2+{u_2}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi(1+u_1+u_2+{u_2}^2)=(0,1+u_2+{u_2}^2,1+u_2,{u_2}^2)$
- $(1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi(1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2)=(1+{u_2}^2,0,u_2,1+u_2+{u_2}^2)$
- $(1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi(1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2)=(1+u_2+{u_2}^2,0,1+{u_2}^2,u_2)$
- $(u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi(u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2)=(1+u_2,1+{u_2}^2,u_2+{u_2}^2,0)$
- $(1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi(1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2)=(1,u_2+{u_2}^2,u_2,1+{u_2}^2)$

R halkasının 32 elemanı için Φ görüntüsünü yukarıda hesaplanmıştır. R_1^4'deki bu 32 elemanın Φ_1 dönüşümü ile görüntüleri aşağıda sunulmuştur.

$$\Phi_1: R_1^4 \to \mathbb{F}_2^{16}$$

- $(0,0,0,0)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi_1(0,0,0,0)=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)$
- $(u_2,1+u_2,{u_2}^2,1+{u_2}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi_1(u_2,1+u_2,{u_2}^2,1+{u_2}^2)=(0,0,1,1,0,1,1,0,1,1,1,1,1,0,1,0)$
- $(u_2+{u_2}^2,u_2+{u_2}^2,1+u_2+{u_2}^2,1+u_2+{u_2}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi_1(u_2+{u_2}^2,u_2+{u_2}^2,1+u_2+{u_2}^2,1+u_2+{u_2}^2)$
  $=(1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,1,1)$
- $({u_2}^2,u_2+{u_2}^2,0,u_2)$ elemanının Gray Görüntüsü; $\Phi_1({u_2}^2,u_2+{u_2}^2,0,u_2)$
  $=(1,1,0,0,1,1,0,0,1,0,0,1,1,0,0,1)$
- $(1,1,1,1)$ elemanının Gray Görüntüsü; $\Phi_1(1,1,1,1)$
  $=(0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,1,1,1,1)$
- $(0,{u_2}^2,0,{u_2}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi_1(0,{u_2}^2,0,{u_2}^2)=(0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1)$
- $({u_2}^2,1+{u_2}^2,1+u_2,u_2)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi_1({u_2}^2,1+{u_2}^2,1+u_2,u_2)=(1,1,0,0,1,0,1,0,1,1,1,1,1,0,0,1)$

- $(u_2 + {u_2}^2, 1 + {u_2}^2, {u_2}^2, 1 + u_2 + {u_2}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü; $\Phi_1(u_2 + {u_2}^2, 1 + {u_2}^2, {u_2}^2, 1 + u_2 + {u_2}^2) = (1,1,1,1,1,0,1,0,0,1,1,0,0,0,1,1)$
- $(1 + u_2, u_2, 1 + {u_2}^2, {u_2}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü; $\Phi_1(1 + u_2, u_2, 1 + {u_2}^2, {u_2}^2) = (0,0,1,1,1,0,0,1,1,1,1,1,0,1,0,1)$
- $(u_2, 1 + u_2 + {u_2}^2, {u_2}^2, 1)$ elemanının Gray Görüntüsü; $\Phi_1(u_2, 1 + u_2 + {u_2}^2, {u_2}^2, 1) = (0,1,1,0,0,0,1,1,1,0,1,0,1,1,1,1)$
- $(u_2, 0,1 + u_2 + {u_2}^2, 1 + {u_2}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü; $\Phi_1(u_2, 0,1 + u_2 + {u_2}^2, 1 + {u_2}^2) = (0,0,1,1,0,0,0,0,1,0,0,1,1,0,1,0)$
- $(1 + u_2 + {u_2}^2, 1 + u_2 + {u_2}^2, u_2 + {u_2}^2, u_2 + {u_2}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü; $\Phi_1(1 + u_2 + {u_2}^2, 1 + u_2 + {u_2}^2, u_2 + {u_2}^2, u_2 + {u_2}^2) = (1,1,1,1,0,0,1,1,0,0,0,0,1,1,0,0)$
- $(u_2 + {u_2}^2, u_2, 1 + u_2 + {u_2}^2, 1 + u_2)$ elemanının Gray Görüntüsü; $\Phi_1(u_2 + {u_2}^2, u_2, 1 + u_2 + {u_2}^2, 1 + u_2) = (1,0,1,0,1,0,0,1,0,1,0,1,0,1,1,0)$
- $(1 + {u_2}^2, 1 + u_2 + {u_2}^2, 1,1 + u_2)$ elemanının Gray Görüntüsü; $\Phi_1(1 + {u_2}^2, 1 + u_2 + {u_2}^2, 1,1 + u_2) = (1,1,0,0,0,0,1,1,1,0,0,1,0,1,1,0)$
- $({u_2}^2, u_2, 0, u_2 + {u_2}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü; $\Phi_1({u_2}^2, u_2, 0, u_2 + {u_2}^2) = (1,0,0,1,1,0,0,1,1,1,0,0,1,1,0,0)$
- $(1,1 + {u_2}^2, 1,1 + {u_2}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü; $\Phi_1(1,1 + {u_2}^2, 1,1 + {u_2}^2) = (0,1,0,1,1,0,1,0,0,1,0,1,1,0,1,0)$
- $(0,1 + u_2, 1 + u_2, 0)$ elemanının Gray Görüntüsü; $\Phi_1(0,1 + u_2, 1 + u_2, 0) = (0,0,0,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,0,0,0)$
- $(1 + {u_2}^2, {u_2}^2, u_2, 1 + u_2)$ elemanının Gray Görüntüsü; $\Phi_1(1 + {u_2}^2, {u_2}^2, u_2, 1 + u_2) = (1,1,0,0,0,1,0,1,1,1,1,1,0,1,1,0)$
- $({u_2}^2, 1,1 + u_2, u_2 + {u_2}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü; $\Phi_1({u_2}^2, 1,1 + u_2, u_2 + {u_2}^2) = (1,0,0,1,1,1,1,1,1,0,1,0,1,1,0,0)$
- $(1 + u_2 + {u_2}^2, {u_2}^2, 1 + {u_2}^2, u_2 + {u_2}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü; $\Phi_1(1 + u_2 + {u_2}^2, {u_2}^2, 1 + {u_2}^2, u_2 + {u_2}^2) = (1,1,1,1,0,1,0,1,0,1,1,0,1,1,0,0)$
- $(u_2 + {u_2}^2, 1, {u_2}^2, 1 + u_2)$ elemanının Gray Görüntüsü; $\Phi_1(u_2 + {u_2}^2, 1, {u_2}^2, 1 + u_2) = (1,0,1,0,1,1,1,1,0,0,1,1,0,1,1,0)$
- $(1 + u_2, u_2 + {u_2}^2, 1 + {u_2}^2, 0)$ elemanının Gray Görüntüsü;

$\Phi_1(1+u_2, u_2+{u_2}^2, 1+{u_2}^2, 0) = (0,1,1,0,1,1,0,0,1,0,1,0,0,0,0,0)$

- $(u_2, {u_2}^2, 1+u_2+{u_2}^2, 1)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi_1(u_2, {u_2}^2, 1+u_2+{u_2}^2, 1) = (0,1,1,0,0,1,0,1,1,1,0,0,1,1,1,1)$
- $(1+u_2+{u_2}^2, 1+u_2, u_2+{u_2}^2, u_2)$ elemanının Gray Görüntüsü; $\Phi_1(1+u_2+{u_2}^2, 1+u_2, u_2+{u_2}^2, u_2) = (1,0,1,0,0,1,1,0,0,1,0,1,1,0,0,1)$
- $(1+u_2, 1, u_2+{u_2}^2, {u_2}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi_1(1+u_2, 1, u_2+{u_2}^2, {u_2}^2) = (0,0,1,1,1,1,1,1,1,0,0,1,0,1,0,1)$
- $(1+{u_2}^2, 1+u_2, 1, 1+u_2+{u_2}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi_1(1+{u_2}^2, 1+u_2, 1, 1+u_2+{u_2}^2) = (1,0,0,1,0,1,1,0,1,1,0,0,0,0,1,1)$
- $(1, u_2, u_2, 1)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi_1(1, u_2, u_2, 1) = (0,0,0,0,1,0,0,1,0,1,1,0,1,1,1,1)$
- $(0, 1+u_2+{u_2}^2, 1+u_2, {u_2}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi_1(0, 1+u_2+{u_2}^2, 1+u_2, {u_2}^2) = (0,1,0,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,1,0,1)$
- $(1+{u_2}^2, 0, u_2, 1+u_2+{u_2}^2)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi_1(1+{u_2}^2, 0, u_2, 1+u_2+{u_2}^2) = (1,0,0,1,0,0,0,0,1,0,1,0,0,0,1,1)$
- $(1+u_2+{u_2}^2, 0, 1+{u_2}^2, u_2)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi_1(1+u_2+{u_2}^2, 0, 1+{u_2}^2, u_2) = (1,0,1,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,0,0,1)$
- $(1+u_2, 1+{u_2}^2, u_2+{u_2}^2, 0)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi_1(1+u_2, 1+{u_2}^2, u_2+{u_2}^2, 0) = (0,1,1,0,1,0,1,0,1,1,0,0,0,0,0,0)$
- $(1+u_2, 1+{u_2}^2, u_2+{u_2}^2, 0)$ elemanının Gray Görüntüsü;
  $\Phi_1(1+u_2, 1+{u_2}^2, u_2+{u_2}^2, 0) = (0,1,1,0,1,0,1,0,1,1,0,0,0,0,0,0)$

3.1.3. Tanım: $R = \mathbb{F}_2 + u_1\mathbb{F}_2 + u_2\mathbb{F}_2 + {u_1}^2\mathbb{F}_2 + {u_2}^2\mathbb{F}_2$ halkası üzerinde;

Her $r \in R$ için

$$w_R(r) = \begin{cases} 0; r = 0 \\ 4; r = 1+u_1+u_2 \\ 6; r = u_1+u_2, 1+{u_1}^2+{u_2}^2, 1+u_1+{u_1}^2+{u_2}^2, 1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2, u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2 \\ 8; r = diğer\ durumlar\ için \\ 10; r = 1, 1+u_1, 1+u_2, 1+{u_1}^2, 1+{u_2}^2, 1+u_1+{u_1}^2, 1+u_1+{u_2}^2, 1+u_2+{u_2}^2, u_1+u_2+{u_2}^2, u_1+u_2 \end{cases}$$

biçiminde yazılan parçalı fonksiyon, R üzerindeki ağırlık fonksiyonu olarak adlandırılır.

Bu durumda her $r = (r_0, r_1, r_2, r_3, \dots, r_{n-1}) \in R^n$ için $w_R(r) = \sum_{i=0}^{n-1} w_R(r_i)$'dir.

3.1.4. Tanım: $R_1 = \mathbb{F}_2 + u_2\mathbb{F}_2 + {u_2}^2\mathbb{F}_2$ halkası üzerinde;

Her $t \in R_1$için

$$w_L(t) = \begin{cases} 0; t = 0 \\ 4; t = {u_2}^2 \\ 2; diğer\ durumlar \end{cases}$$

biçiminde yazılan parçalı fonksiyon, R_1 üzerinde Lee ağırlık fonksiyonu olarak adlandırılır. Bu durumda her $t = (t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) \in R_1^n$ için $w_L(t) \sum_{i=0}^{n-1} w_L(t_i)$ eşitliği gerçekleşir.

3.1.5. Tanım: $\mathbb{F}_2$ cismi üzerinde;

$w_H(0) = 0,\ w_H(1) = 1$ biçiminde tanımlanan fonksiyona $\mathbb{F}_2$ üzerinde Hamming ağırlık fonksiyonu adı verilir.

Bu durumda her $c = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) \in \mathbb{F}_2^n$ için $w_H(c) = \sum_{i=0}^{n-1}(c_i)$ olur.

3.1.6. Tanım: Her $r_1, r_2 \in R^n$, $r_1 \neq r_2$ için r_1 ve r_2 arasındaki d_R uzaklığı $w_R(r_1 - r_2)$biçiminde yazılır. C, R^n üzerinde tanımlı bir kod olsun. C kodunun minimum uzaklığı, her $r_1, r_2 \in C$ ve $r_1 \neq r_2$ için aşağıdaki şekilde belirlenir:

$d_R(C) = min\{d_R(r_1, r_2)\}$ biçiminde tanımlanır.

R^n üzerinde yazılan yukarıdaki 3.1.6 tanım ile aynı şekilde R_1^n ve $\mathbb{F}_2^n$ üzerinde de gerçekleşir. Burada R_1^n'deki C_1 ve $\mathbb{F}_2^n$'deki C_2 kodlarının minimum uzaklıkları sırasıyla $d_L(C_1)$ ve $d_H(C_2)$ biçiminde gösterilir.

3.1.7. Önerme: Φ ve Φ_1 dönüşümleri 3.1.1 Tanım ve 3.1.2 Tanımdaki şeklinde olmak üzere. Φ dönüşümü (R^n, d_R) den (R_1^{4n}, d_L) e, Φ_1 dönüşümü (R_1^{4n}, d_L) den $(\mathbb{F}_2^{16n}, d_H)$ e bir izometridir. Bunun sonucu olarak $\Phi_1 \circ \Phi$ dönüşümü de (R^n, d_L) den $(\mathbb{F}_2^{16n}, d_H)$ e bir izometridir.

Kanıt: Her $m, k \in R^n$, $m \neq k$ için $m = a_1 + a_2u_1 + a_3u_2 + a_4{u_1}^2 + a_5{u_2}^2$,

$k = {a_1}' + {a_2}'u_1 + {a_3}'u_2 + {a_4}'{u_1}^2 + {a_5}'{u_2}^2$

$a_1, {a_1}', a_2, {a_2}', a_3, {a_3}', a_4, {a_4}', a_5, {a_5}' \in \mathbb{F}_2^n$ olsun.

$x = a_1 + a_3u_2 + a_5{u_2}^2 \in R_1^n$, $y = a_2 + a_1u_2 + (a_1 + a_3){u_2}^2 \in R_1^n$,

$z = a_4 + (a_1 + a_2)u_2 + (a_2 + a_3){u_2}^2 \in R_1^n$

$x' = a_1' + a_3'u_2 + a_5'u_2^2 \in R_1^n$, $y' = a_2' + a_1'u_2 + (a_1' + a_3')u_2^2 \in R_1^n$,

$z' = a_4' + (a_1' + a_2')u_2 + (a_2' + a_3')u_2^2 \in R_1^n$ olarak alındığında

$m = a_1 + a_2u_1 + a_3u_2 + a_4u_1^2 + a_5u_2^2 = x + yu_1 + zu_1^2$,

$k = a_1' + a_2'u_1 + a_3'u_2 + a_4'u_1^2 + a_5'u_2^2 = x' + y'u_1 + z'u_1^2$ biçiminde yazılır.

$$d_R(m,k) = w_R(m-k)$$

$= w_R((a_1 + a_2u_1 + a_3u_2 + a_4u_1^2 + a_5u_2^2) -$

$(a_1' + a_2'u_1 + a_3'u_2 + a_4'u_1^2 + a_5'u_2^2))$

$= w_R\left((x + yu_1 + zu_1^2) - \left(x' + y'u_1 + z'u_1^2\right)\right)$

$= w_R\left((x - x') + (y - y')u_1 + (z - z')u_1^2\right)$

$= w_L(z - z', (x - x') + (z - z'), (y - y') + (z - z'), (x - x') + (y - y') + (z - z'))$

$= w_L((a_4 + (a_1 + a_2)u_2 + (a_2 + a_3)u_2^2) - (a_4' + (a_1' + a_2')u_2 + (a_2' + a_3')u_2^2),$

$(a_1 + a_3u_2 + a_5u_2^2) - (a_1' + a_3'u_2 + a_5'u_2^2) +$

$(a_4 + (a_1 + a_2)u_2 + (a_2 + a_3)u_2^2) -$

$(a_4' + (a_1' + a_2')u_2 + (a_2' + a_3')u_2^2, (a_2 + a_1u_2 + (a_1 + a_3)u_2^2) -$

$(a_2' + a_1'u_2 + (a_1' + a_3')u_2^2) + (a_4 + (a_1 + a_2)u_2 + (a_2 + a_3)u_2^2) -$

$(a_4' + (a_1' + a_2')u_2 + (a_2' + a_3')u_2^2), (a_1 + a_3u_2 + a_5u_2^2) -$

$(a_1' + a_3'u_2 + a_5'u_2^2) + (a_2 + a_1u_2 + (a_1 + a_3)u_2^2) - (a_2' + a_1'u_2 +$
$(a_1' + a_3')u_2^2) + (a_4 + (a_1 + a_2)u_2 + (a_2 + a_3)u_2^2) - (a_4' + (a_1' + a_2')u_2 +$
$(a_2' + a_3')u_2^2 \in R_1^n)$,

$y = a_2 + a_1u_2 + (a_1 + a_3)u_2^2 \in R_1^n$, $z = a_4 + (a_1 + a_2)u_2 + (a_2 + a_3)u_2^2 \in R_1^n$,

$x = a_1 + a_3u_2 + a_5u_2^2 \in R_1^n$

$= w_H(a_2 - a_2' + a_3 - a_3', a_2 - a_2' + a_3 - a_3' + a_5 - a_5', a_1 - a_1' + a_2 - a_2',$

$a_1 - a_1' + a_2 - a_2' + a_5 - a_5', a_2 - a_2' + a_3 - a_3' + a_4 - a_4',$

$a_1 - a_1' + a_2 - a_2' + a_3 - a_3' + a_4 - a_4' + a_4 - a_5',$

$a_1 - a_1' + a_4 - a_4', a_4 - a_4' + a_5 - a_5',$

$a_1 - a_1' + a_3 - a_3', a_1 - a_1' + a_5 - a_5', a_1 - a_1', a_1 - a_1' + a_3 - a_3' + a_5 - a_5',$

$a_1 - a_1' + a_3 - a_3' + a_4 - a_4', a_4 - a_4' + a_5 - a_5', a_1 - a_1' + a_2 - a_2' + a_4 - a_4',$

$a_2 - a_2' + a_3 - a_3' + a_4 - a_4' + a_5 - a_5')$

3.1.8. Tanım: C, $R = \mathbb{F}_2 + u_1\mathbb{F}_2 + u_2\mathbb{F}_2 + {u_1}^2\mathbb{F}_2 + {u_2}^2\mathbb{F}_2$ halkası ile n uzunluğunda bir lineer kod olmak üzere

$$\sigma: R^n \to R^n$$

$$(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) \longmapsto \sigma(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) = (c_{n-1}, c_0, \dots, c_{n-2})$$

permütasyonu tanımlansın.

Eğer bu permütasyon için $\sigma(C) = C$ şartı sağlanıyor ise C koduna R^n'de tanımlı bir devirli kod denir.

3.1.9. Tanım: C, $R = \mathbb{F}_2 + u_1\mathbb{F}_2 + u_2\mathbb{F}_2 + {u_1}^2\mathbb{F}_2 + {u_2}^2\mathbb{F}_2$ halkası ile n uzunluğunda bir lineer kod olmak üzere;

$$\gamma: R^n \to R^n$$

$$(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) \longmapsto \gamma(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) = ((1 + {u_1}^2) \cdot c_{n-1}, c_0, \dots, c_{n-2})$$

permütasyonu tanımlansın.

Eğer bu permütasyon $\gamma(C) = C$ şartını sağlıyorsa C kodu R^n'de bir $(1 + {u_1}^2) -$ sabit devirli kod denir.

C, R halkası üzerinde yazılan bir kod olmak üzere; n uzunluğundaki bir

$c = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$ kod sözcüğü $R[x]$ halkası üzerinde $c(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot x^i$ biçimde gösterilir. Bu notasyon R_1 halkası ve $\mathbb{F}_2$ cisminde de benzer biçimde yazılır.

3.1.10. Önerme: C, R halkasında uzunluğu n olan bir lineer kod olarak tanımlarsak;

Bu kod için polinom gösterimi $P(C) = \left\{\sum_{i=0}^{n-1} r_i x^i \,\middle|\, (r_0, r_1, \dots, r_{n-1}) \in C\right\}$ şekilde ifade edilir. Buradan;

i. R halkasında tanımladığımız C kodunun devirli bir kod olması için gerekli ve yeterli şart $P(C)$ nin $R[x]/\langle x^n - 1\rangle$ in bir ideali olmasıdır.

ii. R halkasında tanımladığımız C kodunun $(1 + {u_1}^2) -$ sabit devirli bir kod olması için gerekli ve yeterli şart $P(C)$ nin $R[x]/\langle x^n - (1 + {u_1}^2)\rangle$ in bir ideali olmasıdır.

Kanıt: $u_1^3 = 0, u_2^3 = 0, u_1 u_2 = 0$ koşulları ile

$R = \mathbb{F}_2 + u_1\mathbb{F}_2 + u_2\mathbb{F}_2 + {u_1}^2\mathbb{F}_2 + {u_2}^2\mathbb{F}_2$ halkası üzerinde çalışalım.

$\emptyset \neq C \subseteq R^n$, C bir devirli kod olsun.

$P(C) = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + \langle x^n - 1\rangle | (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in C\}$

$\subseteq R[x]/\langle x^n - 1\rangle$ kümesinin $R[x]/\langle x^n - 1\rangle$ halkasının bir ideali olduğunu gösterelim.

C, n uzunluğunda bir kod olsun. $(0,0,\ldots,0) \in C$ olduğundan

$P(0,0,\ldots,0) = \langle x^n - 1\rangle \in P(C)$ olur. O halde $P(C) \neq \emptyset$ dir.

Her $a = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + \langle x^n - 1\rangle$,

$b = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} + \langle x^n - 1\rangle \in P(C)$ için C'nin lineer kod olduğu kullanılarak

$a - b = (a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + \langle x^n - 1\rangle) - (b_0 + b_1 x + \cdots +$

$b_{n-1}x^{n-1} + \langle x^n - 1\rangle)$ olur. Buradan

$a - b = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \cdots + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \langle x^n - 1\rangle \in P(C)$
olduğu görülür.

Her $a = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + \langle x^n - 1\rangle \in P(C)$ ve

Her $f = f_0 + f_1 x + \cdots + f_{n-1}x^{n-1} + \langle x^n - 1\rangle \in R[x]/\langle x^n - 1\rangle$ için

C'nin devirli kod olduğunu kullanarak;

$a \cdot f = (a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + \langle x^n - 1\rangle) \cdot (f_0 + f_1 x + \cdots + f_{n-1}x^{n-1} +$

$\langle x^n - 1\rangle \in R[x]/\langle x^n - 1\rangle)$

$a \cdot f = (a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}) \cdot (f_0 + f_1x + \cdots + f_{n-1}x^{n-1}) + \langle x^n - 1\rangle$

$= f_0 \cdot (a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}) + f_1x \cdot (a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}) + \cdots +$
$f_{n-1}x^{n-1} \cdot (a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}) + \langle x^n - 1\rangle$

$= f_0 \cdot (a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}) + f_1 \cdot (a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}) + \cdots +$

$f_{n-1} \cdot (a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}) + \langle x^n - 1\rangle \in P(C)$ olduğu görülür.

O halde $P(C), {R[x]}/{\langle x^n - 1\rangle}$ halkasının bir idealidir.

Tersine $P(C), {R[x]}/{\langle x^n - 1\rangle}$' in ideali olsun.

O halde $P(C) \neq \emptyset, P(C) \subseteq {R[x]}/{\langle x^n - 1\rangle} \Longrightarrow C \neq \emptyset, C \in R^n$ olur. Her

$c, d \in C$, Her $\alpha, \beta \in R$ için

$\alpha c + \beta d \in C$ olduğunu gösterelim.

$e, r \in C \Longrightarrow P(e), P(r) \in P(C)$

$\Longrightarrow \alpha P(e) + \beta P(r) \in P(C)$, her $\alpha, \beta \in R$ için

$\Longrightarrow \alpha P(e) + \beta P(r) = P(\alpha e + \beta r) \in P(C) \Longrightarrow \alpha e + \beta r \in C$

O halde C lineer kod olur.

Her $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) \in C$ alalım.

$P(C), {R[x]}/{\langle x^n - 1\rangle}$' in bir ideali olduğundan

$c_0 + c_1x + \cdots + c_{n-1}x^{n-1} + \langle x^n - 1\rangle \in P(C), x + \langle x^n - 1\rangle \in {R[x]}/{\langle x^n - 1\rangle}$ için

$(x + \langle x^n - 1\rangle)(c_0 + c_1x + \cdots + c_{n-1}x^{n-1} + \langle x^n - 1\rangle) = c_{n-1} + c_0x + \cdots +$
$c_{n-2}x^{n-1} + \langle x^n - 1\rangle \in P(C)$

$\Rightarrow (c_{n-1}, c_0, \dots, c_{n-2}) \in C$ olur.

O halde C bir devirli koddur.

3.1.11. Önerme: $R = \mathbb{F}_2 + u_1\mathbb{F}_2 + u_2\mathbb{F}_2 + {u_1}^2\mathbb{F}_2 + {u_2}^2\mathbb{F}_2$ halkası için n tek doğal sayı olmak üzere;

$$\mu: {}^{R[x]}\!/_{\langle x^n-1\rangle} \longrightarrow {}^{R[x]}\!/_{\langle x^n-(1+{u_1}^2)\rangle}$$

$$c(x) \longmapsto \mu\big(c(x)\big) = c((1+{u_1}^2)x)$$

dönüşümü bir izomorfizmadır.

Kanıt: Her $c_1(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + \langle x^n - 1\rangle$,

$c_2(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} + \langle x^n - 1\rangle \in {}^{R[x]}\!/_{\langle x^n-1\rangle}$için

$\mu(c_1(x)) = \mu(c_2(x))$ ise $c_1((1+{u_1}^2)x) = c_2((1+{u_1}^2)x)$ olsun. Buradan

$a_0 + a_1(1+{u_1}^2)x + a_2(1+{u_1}^2)^2x^2 + \cdots + a_{n-1}(1+{u_1}^2)^{n-1}x^{n-1} +$

$\langle(1+{u_1}^2)^nx^n - 1\rangle = b_0 + b_1(1+{u_1}^2)x + b_2(1+{u_1}^2)^2x^2 + \cdots +$

$b_{n-1}(1+{u_1}^2)^{n-1}x^{n-1} + \langle(1+{u_1}^2)^nx^n - 1\rangle$ dır. İfadesi düzenlendiğinde

$a_0 + a_1(1+{u_1}^2)x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + \langle(1+{u_1}^2)^nx^n - 1\rangle$

$= b_0 + b_1(1+{u_1}^2)x + b_2x^2 + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} + \langle(1+{u_1}^2)^nx^n - 1\rangle$ olur. Böylece

$(a_0 - b_0) + \big(a_1(1+{u_1}^2) - b_1(1+{u_1}^2)\big)x + (a_2 - b_2)x^2 + \cdots +$

$(a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \langle(1+{u_1}^2)^nx^n - 1\rangle = \langle(1+{u_1}^2)^nx^n - 1\rangle$ bulunur. Buradan

$a_0 = b_0$, $a_1(1+{u_1}^2) = b_1(1+{u_1}^2)$, $a_2 = b_2, \dots, a_{n-1} = b_{n-1}$

$\Rightarrow a_0 = b_0, a_1 + a_1{u_1}^2 = b_1 + b_1{u_1}^2, a_2 = b_2, \ldots, a_{n-1} = b_{n-1}$

$\Rightarrow a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \ldots.,\ a_{n-1} = b_{n-1}$

$\Rightarrow a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + \langle x^n - 1\rangle = b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} + \langle x^n - 1\rangle$

$\Rightarrow c_1(x) = c_2(x)$ olur.

O halde μ 1-1'dir.

Her $t(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + \langle x^n - (1+{u_1}^2)\rangle \in {}^{R[x]}\!/_{\langle x^n-(1+{u_1}^2)\rangle}$

için,

$\exists c(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} + \langle x^n - 1\rangle \in {}^{R[x]}\!/_{\langle x^n-1\rangle}\ni \mu\big(c(x)\big) = t(x)$

olduğunu göstermek için öncelikle $\langle(1+{u_1}^2)^n \cdot x^n - 1\rangle = \langle x^n - (1+{u_1}^2)\rangle$ olduğunu gösterelim. n tek doğal sayı olduğu için $(1+{u_1}^2)^n = (1+{u_1}^2)$ olacağından

$\langle(1+{u_1}^2) \cdot x^n - 1\rangle = \langle x^n - (1+{u_1}^2)\rangle$ olduğunu gösterelim.

Her $p(x) \in \langle x^n - (1+{u_1}^2)\rangle$ alalım. Buradan

$\exists g(x) \in R[x] \ni q(x) = \big((1+{u_1}^2)x^n - 1\big)g(x)$ olur. Böylece

$(1+{u_1}^2) \cdot q(x) = \big(x^n - (1+{u_1}^2)\big) \cdot g(x)$

$\Rightarrow (1+{u_1}^2)^2 \cdot q(x) = \big(x^n - (1+{u_1}^2)\big) \cdot g(x) \cdot (1+{u_1}^2)$

$\Rightarrow \exists g_1(x) \in R[x] \ni q(x) = \big(x^n - (1+{u_1}^2)\big) \cdot g_1(x)$ yazılır.

Yani $q(x) \in \langle x^n - (1+{u_1}^2)\rangle$ dir.

O halde $\langle(1+{u_1}^2)^n x^n - 1\rangle \subseteq \langle x^n - (1+{u_1}^2)\rangle$ olur.

Her $p(x) \in \langle x^n - (1+{u_1}^2)\rangle$ alalım. Buradan

$\exists g_1(x) \in R[x] \ni q(x) = \big(x^n - (1+{u_1}^2)\big) \cdot g_1(x)$ dir. Böylece

$(1+{u_1}^2)^2 \cdot q(x) = \big(x^n - (1+{u_1}^2)\big) \cdot (1+{u_1}^2)^2 \cdot g(x)$

$\Rightarrow p(x) = \big((1+{u_1}^2) \cdot x^n - 1\big) \cdot (1+{u_1}^2) \cdot g(x)$

$\Rightarrow \exists\ g(x) \in R[x] \ni q(x) = ((1+{u_1}^2)x^n - 1) \cdot g(x)$ yazılır.

$\Rightarrow p(x) \in \langle(1+{u_1}^2)x^n - 1\rangle$ dir.

O halde $\langle x^n - (1+{u_1}^2)\rangle \subseteq \langle(1+{u_1}^2) \cdot x^n - 1\rangle$ olur.

Buradan $\langle(1+{u_1}^2) \cdot x^n - 1\rangle = \langle x^n - (1+{u_1}^2)\rangle$ sağlanır. O zaman

$\mu\big(c(x)\big) = t(x) \Leftrightarrow c\big((1+{u_1}^2)x\big) = t(x)$

$\Leftrightarrow b_0 + b_1 \cdot (1+{u_1}^2) \cdot x + \cdots + b_{n-1} \cdot (1+{u_1}^2)^{n-1} \cdot x^{n-1} + \langle(1+{u_1}^2)^n \cdot x^n - 1\rangle$

$= a_0 + a_1 \cdot x + \cdots + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \langle x^n - (1+{u_1}^2)\rangle$

$\Leftrightarrow b_0 + b_1 \cdot (1+{u_1}^2) \cdot x + \cdots + b_{n-1} \cdot (1+{u_1}^2)^{n-1} \cdot x^{n-1} + \langle(1+{u_1}^2)^n \cdot x^n - 1\rangle$

$= a_0 + a_1 \cdot x + \cdots + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \langle x^n - (1+{u_1}^2)\rangle$

$\Leftrightarrow b_0 + b_1 \cdot (1+{u_1}^2) \cdot x + \cdots + b_{n-1} \cdot x^{n-1} + \langle x^n - (1+{u_1}^2)\rangle$

$= a_0 + a_1 \cdot x + \cdots + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \langle x^n - (1 + {u_1}^2) \rangle$

$\Leftrightarrow (b_0 - a_0) + (b_1 \cdot (1 + {u_1}^2) - a_1) \cdot x + \cdots + (b_{n-1} - a_{n-1}) \cdot x^{n-1}$

$+ \langle x^n - (1 + {u_1}^2) \rangle = \langle x^n - (1 + {u_1}^2) \rangle$

$\Leftrightarrow b_0 = a_0, b_1 \cdot (1 + {u_1}^2) = a_1, \dots, b_{n-1} = a_{n-1}$

$\Leftrightarrow b_0 = a_0, b_1 = a_1 \cdot (1 + {u_1}^2), \dots, b_{n-1} = a_{n-1}$

Her $t(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + \langle x^n - (1 + {u_1}^2) \rangle \in {R[x]}/{\langle x^n - (1 + {u_1}^2) \rangle}$ için,

$\exists c(x) = b_0 + b_1 \cdot x + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} + \langle x^n - 1 \rangle \in {R[x]}/{\langle x^n - 1 \rangle} \ni \mu\big(c(x)\big) = t(x)$

dır. O halde μ örtendir.

μ fonksiyonunun bir homomorfizma olduğunu gösterelim.

Her $c_1(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + \langle x^n - 1 \rangle$, $c_2(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} + \langle x^n - 1 \rangle \in {R[x]}/{\langle x^n - 1 \rangle}$ için

i) $\mu\big(c_1(x) + c_2(x)\big) = \mu(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + \langle x^n - 1 \rangle + b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} + \langle x^n - 1 \rangle$

$= \mu((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) \cdot x + \cdots + (a_{n-1} + b_{n-1}) \cdot x^{n-1} + \langle x^n - 1 \rangle)$

$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) \cdot (1 + {u_1}^2) x + \cdots +$

$(a_{n-1} + b_{n-1}) \cdot (1 + {u_1}^2)^{n-1} x^{n-1} + \langle x^n - 1 \rangle$

$= a_0 + a_1 \cdot (1 + {u_1}^2) x + \cdots + a_{n-1} \cdot (1 + {u_1}^2)^{n-1} x^{n-1} +$

$\langle x^n - (1 + {u_1}^2) \rangle + b_0 + b_1 \cdot (1 + {u_1}^2) x + \cdots +$

$b_{n-1} \cdot (1 + {u_1}^2)^{n-1} x^{n-1} + \langle x^n - (1 + {u_1}^2) \rangle$

$= c_1\big((1 + {u_1}^2) \cdot x\big) + c_2\big((1 + {u_1}^2) \cdot x\big)$

$= \mu\big(c_1(x)\big) + \mu(c_2(x))$ olarak bulunur.

ii) $\mu\big(c_1(x) \cdot c_2(x)\big)$

$= \mu((a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + \langle x^n - 1 \rangle) \cdot (b_0 + b_1 x + \cdots +$

$b_{n-1} x^{n-1} + \langle x^n - 1 \rangle))$

$= \mu((a_0 b_0) + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x + \cdots + \sum_{i+j=n-1} a_i b_j x^{n-1} + \langle x^n - 1 \rangle$

$$= ((a_0b_0) + (a_1b_0 + a_0b_1)(1 + {u_1}^2)x + \cdots + \sum_{i+j=n-1} a_ib_j(1 + {u_1}^2)^{n-1}x^{n-1} + \langle x^n - 1\rangle \quad (1)$$

$$\mu(c_1(x)).\mu(c_2(x)) = (a_0 + a_1(1 + {u_1}^2)x + \cdots + a_{n-1}(1 + {u_1}^2)^{n-1}x^{n-1} + \langle x^n - (1 + {u_1}^2)\rangle).(b_0 + b_1(1 + {u_1}^2)x + \cdots + b_{n-1}(1 + {u_1}^2)^{n-1}x^{n-1} + \langle x^n - (1 + {u_1}^2)\rangle)$$

$$= a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)(1 + {u_1}^2)x + \cdots + \sum_{i+j=n-1} a_ib_j(1 + {u_1}^2)^{n-1}x^{n-1} \quad (2)$$

(1) ve (2) den $\mu(c_1(x).c_2(x)) = \mu(c_1(x)).\mu(c_2(x))$ olur. O halde μ homomorfizmadır.

Böylece μ bir izomorfizma olur.

3.1.12. Tanım: C_1, R_1 halkası üzerinde $4n$ uzunluğunda bir lineer kod olsun.

$$\sigma_1 : R_1^{4n} \longrightarrow R_1^{4n}$$

$$(d_0, d_1, \dots, d_{4n-1}) \mapsto \sigma_1(d_0, d_1, \dots, d_{4n-1}) = (d_{4n-1}, d_0, \dots, d_{4n-2})$$

permütasyonu için $\sigma_1(C_1) = C_1$ koşulu sağlanıyorsa C_1 koduna R_1^{4n}'de devirli kod adı verilir.

3.1.13. Tanım: C_1, R_1 halkasında tanımlanan ve uzunluğu $4n$ olan bir lineer kod olsun.

$$\gamma_1 : R_1^{4n} \to R_1^{4n}$$

$$(d_0, d_1, \dots, d_{4n-1}) \mapsto \gamma_1(d_0, d_1, \dots, d_{4n-1}) = ((1 + {u_2}^2) \cdot d_{4n-1}, d_0, \dots, d_{4n-2})$$

permütasyonu için $\gamma_1(C_1) = C_1$ şartı sağlanıyor ise C_1 koduna R_1 üzerinde bir $(1 + {u_2}^2) -$ sabit devirli kod denir.

3.1.14. Tanım: C_1, R_1 halkası üzerinde $4n$ uzunluğunda bir lineer kod olsun.

$${\sigma_1}^{\otimes 2} : R_1^{4n} \longrightarrow R_1^{4n}$$

$$(d_0, d_1, \dots, d_{4n-1}) \mapsto {\sigma_1}^{\otimes 2}(d_0, d_1, \dots, d_{4n-1})$$

$${\sigma_1}^{\otimes 2}(d_0, d_1, \dots, d_{4n-1}) = (d_{2n-1}, d_0, \dots, d_{2n-2}, d_{4n-1}, d_{4n}, \dots, d_{4n-2})$$

permütasyonu için $\sigma_1{}^{\otimes 2}(C_1) = C_1$ koşulu sağlanıyorsa C_1 koduna R_1^{4n}'de 2'inci mertebeden yarı devirli kod adı verilir.

3.1.15. Önerme: C_1, R_1 halkasında tanımlı uzunluğu $4n$ olan bir lineer koddur ve buna göre C_1 kodunun polinom gösterimi

$P_1(C_1) = \left\{\sum_{i=0}^{4n-1} s_i x^i \,\middle|\, (s_0, s_1, \dots, s_{4n-1}) \epsilon\, C_1\right\}$ Buradan;

i. C_1 R_1 halkasında tanımlanan bir devirli kod olması için gerekli ve yeterli şart $P_1(C_1)$ nin $R[x]/\langle x^n - 1\rangle$ in bir ideali olmasıdır.

ii. C_1 R_1halkası üzerinde bir $(1 + u_2{}^2) -$ sabit devirli kod olması için gerekli ve yeterli şart $P_1(C_1)$ nin $R_1[x]/\langle x^n - (1 + u_2{}^2)\rangle$ in bir ideali olmasıdır.

3.1.16. Tanım: $\mathbb{F}_2$ cisminde tanımlanan uzunluğu $2n$ olan lineer bir kodu C_2 olarak tanımlayalım.

$$\sigma_2 : \mathbb{F}_2^{2n} \longrightarrow \mathbb{F}_2^{2n}$$

$$(b_0, b_1, \dots, b_{2n-1}) \mapsto \sigma_2(b_0, b_1, \dots, b_{2n-1}) = (b_{2n-1}, b_0, \dots, b_{2n-2})$$

permütasyonu için $\sigma_2(C_2) = C_2$ koşulu sağlanıyorsa C_2 koduna $\mathbb{F}_2^{2n}$ üzerinde bir devirli kod denir.

3.1.17. Tanım: $\mathbb{F}_2$ cisminde tanımlanan uzunluğu $16n$ olan lineer bir kodu C_2 olarak tanımlayalım. $0 \le k \le 16n - 1$, $1 \le i \le 2$ ve $1 \le j \le 8$ olmak üzere $b_k \in \mathbb{F}_2$ ve $d_{ij} \in \mathbb{F}_2^{2n}$ için

$d_{11} = (b_0, \dots, b_{2n-1})$, $d_{21} = (b_{2n-1}, b_0, \dots, b_{2n-2})$,

$d_{12} = (b_{2n}, \dots, b_{4n-1})$, $d_{22} = (b_{4n-1}, b_{2n}, \dots, b_{4n-2})$,

$d_{13} = (b_{4n}, \dots, b_{6n-1})$, $d_{23} = (b_{6n-1}, b_{4n}, \dots, b_{6n-2})$,

. .

. .

. .

$d_{18}(b_{14n}, \dots, b_{16n-1})$, d_{28}=$(b_{16n-1}, b_{14}, \dots, b_{16n-2})$

olsun.

$$\sigma_2{}^{\otimes 8}: \mathbb{F}_2^{16n} \longrightarrow \mathbb{F}_2^{16n}$$

$$(d_{11}|d_{12}|d_{13}|\dots|d_{18}) \mapsto \sigma_2{}^{\otimes 8}(d_{11}|d_{12}|d_{13}|\dots|d_{18})$$

$$= (\sigma_2(d_{11})|\sigma_2(d_{12})|\dots|\sigma_2(d_{18})) = (d_{21}|d_{22}|d_{23}|\dots|d_{28})$$

permütasyonu için $\sigma_2{}^{\otimes 8}(C_2) = C_2$ şartı sağlanır ise C_2 koduna $\mathbb{F}_2^{16n}$ üzerinde 8'inci mertebeden bir yarı devirli kod denir.

n bir tek doğal sayı olduğunda $(1 + u_1{}^2)^n = (1 + u_1{}^2)$ ve n bir çift doğal sayı olduğundan $(1 + u_1{}^2)^n = 1$ olduğunda bu kısımda n bir tek doğal sayı olarak işleme girecektir.

3.1.18. Önerme: $\mu: {R[x]}/{\langle x^n - 1\rangle} \longrightarrow {R[x]}/{\langle x^n - (1 + u_1{}^2)\rangle}$

$$r(x) \longmapsto r((1 + u_1{}^2).x)$$

dönüşüm μ verildiğinde, n tek doğal sayı ise, μ dönüşümü halka izomorfizması özelliği gösterir.

Kanıt: n tek doğal sayı ise $(1 + u_1{}^2)^n = (1 + u_1{}^2)$ olduğu biliniyor.

$a_1(x) \equiv a_2(x)\ mod(x^n - 1)$ olsun. Buradan

$a_1(x) - a_2(x) = (x^n - 1) \cdot s(x), (x) \in R[x]$ dir ve x yerine $(1 + u_1{}^2) \cdot x$ yazdığımızda aşağıdaki gibi bir eşitlik elde ederiz. Buradan

$a_1\big((1 + u_1{}^2) \cdot x\big) - a_2\big((1 + u_1{}^2) \cdot x\big) = ((1 + u_1{}^2)^n \cdot x^n - 1)$

$\cdot\, q\big((1 + u_1{}^2) \cdot x\big), s\big((1 + u_1{}^2) \cdot x\big)R[x]$

$= \big((1 + u_1{}^2) \cdot x^n - 1\big) \cdot s\big((1 + u_1{}^2) \cdot x\big)$

$= \big((1 + u_1{}^2) \cdot x^n - (1 + u_1{}^2)^2\big)s\big((1 + u_1{}^2) \cdot x\big)$

$= (1 + u_1{}^2) \cdot \big(x^n - (1 + u_1{}^2)\big)s\big((1 + u_1{}^2) \cdot x\big)$

$= \big(x^n - (1 + u_1{}^2)\big) \cdot s\big((1 + u_1{}^2) \cdot x\big)(1 + u_1{}^2)$

$= \big(x^n - (1 + u_1{}^2)\big) \cdot p(x), p(x) \in R[x]$ olur.

Böylece $a\big((1 + u_1{}^2) \cdot x\big) = b((1 + u_1{}^2) \cdot x)\ (mod(\big(x^n - (1 + u_1{}^2)\big)$ olduğu görülür.

Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.1.19. Sonuç: I nın $R[x]/\langle x^n - 1\rangle$ nin bir ideali olması durumunda gerekli ve yeterli şart $\mu(I)$ nın $R[x]/\langle x^n - (1+u_1{}^2)\rangle$ nin bir ideali olmasıdır.

3.1.20. Teorem: $\bar{\mu}$: $R^n \to R^n$

$$(r_0, r_1, .., r_{n-1}) \mapsto (r_0, (1+u_1{}^2)\cdot r_1, \dots, (1+u_1{}^2)^i \cdot r_i, (1+u_1{}^2)^{n-1}, r_{n-1})$$

verilen dönüşüm altında, C kodunun R^n'de tanımlanan ve uzunluğu n olan bir devirli kod olarak tanımlanabilmesi için gerekli şart $\bar{\mu}(C)$ nin R^n üzerinde n uzunluğunda bir $(1+u_1{}^2) -$ sabit devirli kod olmasıdır.

Kanıt: 3.1.20 teoremin kanıtı aşağıdaki gibi verilir.

C devirli kod olsun.

Her $(a_0, (1+u_1{}^2)\cdot a_1, (1+u_1{}^2)\cdot a_2, \dots, (1+u_1{}^2)\cdot a_{n-1}) \in \bar{\mu}(C)$ için

$((1+u_1{}^2)a_{n-1}, a_0, (1+u_1{}^2)a_1, (1+u_1{}^2)a_2, \dots, (1+u_1{}^2)a_{n-2}) \in \bar{\mu}(C)$ olduğunu gösterelim.

C bir devirli kod olduğunda,

$(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in C \Rightarrow (a_{n-1}, a_0, a_1, \dots, a_{n-2}) \in C$ dir.

Buradan $(a_{n-1}, (1+u_1{}^2)\cdot a_0, \dots, a_{n-2}) \in \bar{\mu}$(C)

$\Rightarrow (1+u_1{}^2)\cdot(a_{n-1}, (1+u_1{}^2)\cdot a_0, \dots, a_{n-2}) = ((1+u_1{}^2)\cdot a_{n-1}, a_0,$

$(1+u_1{}^2)\cdot a_1, a_2, \dots, (1+u_1{}^2)\cdot a_{n-2}) \in \bar{\mu}(C)$ olur.

3.1.21. Sonuç: R^n'de $\bar{\mu}(C)$ kodu $(1+u_1{}^2) -$ sabit devirli kod olur.

$\Leftarrow \bar{\mu}(C), (1+u_1{}^2) -$ sabit devirli kod olsun.

Her $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in C \Rightarrow (a_{n-1}, a_0, a_1, \dots, a_{n-2}) \in C$ olduğunu gösterelim.

Her $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in C$ ise $\bar{\mu}(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$

$= (a_0, (1+u_1{}^2)\cdot a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in \bar{\mu}(C)$ bulunur.

$n+1$ kez değiştirdiğimizde $\bar{\mu}(C)$, $(1+u_1{}^2) -$ sabit devirli kod olduğundan $(a_{n-1}, (1+u_1{}^2)\cdot a_0, (1+u_1{}^2)^2\cdot a_1, \dots, (1+u_1{}^2)^{n-1}\cdot a_{n-2}) \in \bar{\mu}(C)$ bulunur.

Buradan $(a_{n-1}, a_0, a_1, \dots, a_{n-2}) \in C$ olduğu görülür.

Aşağıda, R^n halkasında tanımlı $(1+{u_1}^2)-$sabit devirli kodların Gray dönüşümleri sonucunda R_1 halkası üzerinde çift uzunluklu kodlar olduğu kanıtlanmıştır.

3.1.22. Önerme: γ dönüşümü R^n üzerinde, ${\sigma_1}^{\otimes 2}$ dönüşümü R_1^{4n} üzerinde bir permütasyon olsun. Φ, R^n den R_1^{4n} e yukarıda tanımlanan Gray dönüşümü olmak üzere $\Phi \circ \gamma = {\sigma_1}^{\otimes 2} \circ \Phi$ eşitliği sağlanır.

Kanıt: Her $0 \le i \le n-1$ için $c_i = x_i + y_i u_1 + z_i {u_1}^2$ olmak üzere

$c = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) \in R^n$ olsun. Bu durumda $c \in R^n$ in Gray görüntüsü

$$\Phi(c) = \Phi(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$$

$$= \Phi(x_0 + y_0 u_1 + z_0 {u_1}^2, x_1 + y_1 u_1 + z_1 {u_1}^2, .., x_{n-1} + y_{n-1} u_1 + z_{n-1} {u_1}^2)$$

$$= (z_0, z_1, .., z_{n-1}, x_0 + z_0, x_1 + z_1, \dots x_{n-1} + z_{n-1}, y_0 + z_0, y_1 + z_1, \dots,$$

$$y_{n-1} + z_{n-1}, x_0 + y_0 + z_0, x_1 + y_1 + z_1, \dots, x_{n-1} + y_{n-1} + z_{n-1})$$

olarak bulunur. Burada ${\sigma_1}^{\otimes 2}$ dönüşümü uygulandığında

${\sigma_1}^{\otimes 2}\big(\Phi(c)\big) = {\sigma_1}^{\otimes 2}(z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, x_0 + z_0, \dots, x_{n-1} + z_{n-1}, y_0 + z_0, \dots,$

$y_{n-1} + z_{n-1}, x_0 + y_0 + z_0, \dots, x_{n-1} + y_{n-1} + z_{n-1})$

$= (x_{n-1} + z_{n-1}, z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, x_0 + z_0, \dots, x_{n-2} + z_{n-2}, y_0 + z_0, \dots,$

$y_{n-1} + z_{n-1}, x_0 + y_0 + z_0, \dots, x_{n-2} + y_{n-2} + z_{n-2})$ elde edilir.

Diğer taraftan;

$(1+{u_1}^2) \cdot c_{n-1} = (1+{u_1}^2) \cdot (x_{n-1} + y_{n-1} u_1 + z_{n-1} {u_1}^2)$

$= x_{n-1} + y_{n-1} u_1 + x_{n-1} {u_1}^2 + z_{n-1} {u_1}^2$

$= x_{n-1} + y_{n-1} u_1 + (x_{n-1} + z_{n-1}) {u_1}^2$ olur.

$\gamma(c) = \gamma(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$

$= ((1+{u_1}^2) \cdot c_{n-1}, c_0, c_1, \dots, c_{n-2})$

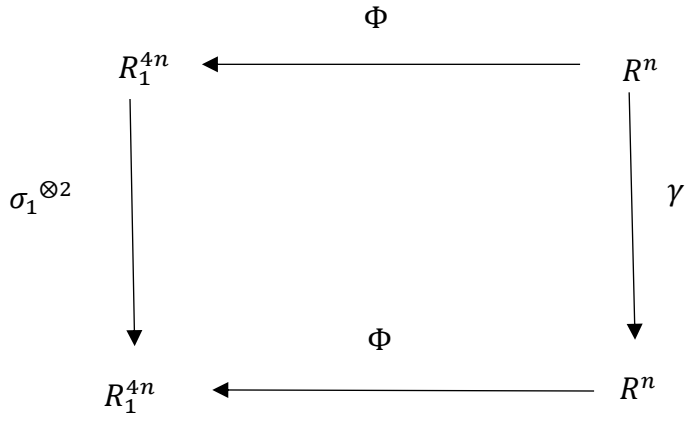
$= (x_{n-1} + y_{n-1} u_1 + (x_{n-1} + z_{n-1}) \cdot {u_1}^2, x_0 + y_0 u_1 + z_0 {u_1}^2, \dots,$

$x_{n-2} + y_{n-2} u_1 + z_{n-2} {u_1}^2)$

$= (x_{n-1} + z_{n-1}, z_0, \dots, z_{n-2}, z_{n-1}, x_0 + z_0, \dots, x_{n-2} + z_{n-2},$

$x_{n-1} + y_{n-1} + z_{n-1}, y_0 + z_0, \dots, y_{n-2} + z_{n-2}, y_{n-1} + z_{n-1}, x_0 + y_0 + z_0, \dots,$

$x_{n-2} + y_{n-2} + z_{n-2}$) olur. Böylece



diyagramı gerçekleşmiş olur.

3.1.23. Teorem: R halkası üzerinde C kodunun n uzunluğunda bir $(1 + u_1{}^2)$ −sabit devirli kod olması için gerekli ve yeterli şart $\Phi(C)$ nin R_1 halkası üzerinde $4n$ uzunluğunda 2'inci mertebeden yarı devirli kod olmasıdır.

Kanıt: R halkasında C kodunun n uzunluğunda bir $(1 + u_1{}^2)$ −sabit devirli koddur. Buradan $\gamma(C) = C$ olur. Denklemin Φ görüntüsü alındığında $\Phi(\gamma(C)) = \Phi(C)$ elde edilir. 3.1.22. Önermeden da anlaşılacağı gibi $\sigma_1{}^{\otimes 2}(\Phi(C)) = \Phi(\gamma(C)) = \Phi(C)$ bulunur. $\Phi(C)$ nin bir 2'inci mertebeden yarı devirli kod olduğu kanıtlanır. Tersine $\Phi(C)$ 2'inci mertebeden yarı devirli kod olduğu durumda ise $\sigma_1{}^{\otimes 2}(\Phi(C)) = \Phi(\gamma(C))$ elde edilir. 3.1.22. Önermeden $\sigma_1{}^{\otimes 2}(\Phi(C)) = \Phi(\gamma(C)) = \Phi(C)$ bulunur. Φ birebir fonksiyon olduğu için $\gamma(C) = C$ olur. O halde C bir $(1 + u_1{}^2)$ − sabit devirli koddur.

3.1.24. Önerme: γ_1 dönüşümü R_1^{4n} üzerinde, $\sigma_1{}^{\otimes 2}$ dönüşümü $\mathbb{F}_2^{16n}$ üzerinde bir permütasyon olsun. Φ_1, R_1^{4n} den $\mathbb{F}_2^{16n}$ e yukarıda tanımlanan Gray dönüşümü olmak üzere $\sigma_1{}^{\otimes 2} \circ \Phi_1 = \Phi_1 \circ \gamma_1$ eşitliği sağlanmaktadır.

Kanıt: Her $0 \le i \le 4n - 1$ için $t_i = x_i + y_i u_2 + z_i u_2{}^2$ olmak üzere $t = (t_0, t_1, \dots, t_{4n-1}) \in R_1^{4n}$ olsun.

$\gamma_1(t) = \gamma_1(t_0, t_1, \dots, t_{4n-1}) = ((1 + u_2{}^2) \cdot t_{4n-1}, t_0, \dots, t_{4n-2})$ dir.

Burada $(1 + u_2{}^2) \cdot t_{4n-1}$bileşeni düzenlendiğinde

$(1+{u_2}^2)\cdot t_{4n-1} = (1+{u_2}^2)\cdot(x_{4n-1}+y_{4n-1}u_2+z_{4n-1}{u_2}^2)$

$= x_{4n-1}+y_{4n-1}u_2+(x_{4n-1}+z_{4n-1}){u_2}^2$ bulunur. Gray görüntüsü alınarak

$$\Phi_1\big(\gamma_1(t)\big) = \Phi_1\big((1+{u_2}^2)\cdot t_{4n-1}, t_0, \dots, t_{4n-2}\big)$$

$= \Phi_1(x_{4n-1}+y_{4n-1}u_2+(x_{4n-1}+z_{4n-1}){u_2}^2, x_0+y_0u_2+z_0{u_2}^2, \dots,$

$x_{4n-2}+y_{4n-2}u_2+z_{4n-2}{u_2}^2)$

$= (x_{4n-1}+z_{4n-1}, z_0, z_1, \dots, z_{4n-2}, z_{4n-1}, x_0+z_0, \dots x_{4n-2}+z_{4n-2},$

$x_{4n-1}+y_{4n-1}+z_{4n-1}, y_0+z_0, \dots, y_{4n-2}+z_{4n-2}, y_{4n-1}+z_{4n-1},$

$x_0+y_0+z_0, \dots, x_{4n-2}+y_{4n-2}+z_{4n-2})$ elde edilir.

Diğer taraftan;

$\Phi_1(t) = \Phi_1(t_0, t_1, \dots, t_{4n-1}) = (z_0, z_1, \dots, z_{4n-1}, x_0+z_0, \dots,$

$x_{4n-1}+z_{4n-1}, y_0+z_0, \dots, y_{4n-1}+z_{4n-1}, x_0+y_0+z_0, \dots, x_{4n-1}+y_{4n-1}+z_{4n-1})$ olur.

Buradan,

${\sigma_1}^{\otimes 2}\big(\Phi_1(t)\big) = {\sigma_1}^{\otimes 2}(z_0, z_1, \dots, z_{4n-1}, x_0+z_0, \dots, x_{4n-1}+z_{4n-1}, y_0+z_0, \dots,$

$y_{4n-1}+z_{4n-1}, x_0+y_0+z_0, \dots, x_{4n-1}+y_{4n-1}+z_{4n-1})$

$= (x_{4n-1}+z_{4n-1}, z_0, z_1, \dots, z_{4n-1}, x_0+z_0, \dots, x_{4n-2}+z_{4n-2}, y_0+z_0, \dots,$

$y_{4n-1}+z_{4n-1}, x_0+y_0+z_0, \dots, x_{4n-2}+y_{4n-2}+z_{4n-2})$ elde edilir.

3.1.25. Teorem: C_1 kodunun R_1 halkasında $4n$ uzunluklu bir $(1+{u_2}^2)$ −sabit devirli kod olabilmesi için gerekli ve yeterli şart $\Phi_1(C_1)$ nin $\mathbb{F}_2$ cismi üzerinde $16n$ uzunluklu 2'inci mertebeden bir yarı devirli kod olmasıdır.

Kanıt: C_1 bir $(1+{u_2}^2)-$ sabit devirli kod ise $\gamma_1(C_1) = C_1$ dir. Eşitliğin her iki tarafının Φ_1 görüntüsü alındığında $\Phi_1\big(\gamma_1(C_1)\big) = \Phi_1(C_1)$ elde edilir. 3.1.24. Önermeden ${\sigma_1}^{\otimes 2}(\Phi_1(C_1)) = \Phi_1\big(\gamma_1(C_1)\big) = \Phi_1(C_1)$ bulunur. Böylece $\Phi_1(C_1)$ nin 2'inci mertebeden bir yarı devirli kod olduğu görülür. Diğer taraftan $\Phi_1(C_1)$, 2'inci mertebeden bir yarı-devirli kod ise ${\sigma_1}^{\otimes 2}(\Phi_1(C_1)) = \Phi_1(C_1)$ sağlanır. 3.1.24. Önermeden ${\sigma_1}^{\otimes 2}(\Phi_1(C_1)) = \Phi_1\big(\gamma_1(C_1)\big) = \Phi_1(C_1)$ bulunur. Φ birebir bir dönüşüm

olduğundan $\gamma_1(C_1) = C_1$ olur. Böylelikle C_1'nin bir $(1 + {u_2}^2)$ −sabit devirli kod olduğu görülür.

3.1.26. Sonuç: $\gamma(C)$ kodunun, R halkası üzerinde n uzunluğunda bir $(1 + {u_1}^2)$ −sabit devirli kod olması için gerekli ve yeterli koşul $\Phi_1(\Phi(\gamma(C)))$ kodunun $\mathbb{F}_2$ cismi üzerinde $16n$ uzunluğundaki 8'inci mertebeden bir yarı devirli kod olmasıdır.

Kanıt: $R = \mathbb{F}_2 + u_1\mathbb{F}_2 + u_2\mathbb{F}_2 + {u_1}^2\mathbb{F}_2 + {u_2}^2\mathbb{F}_2$ ve $R_1 = \mathbb{F}_2 + u_2\mathbb{F}_2 + {u_2}^2\mathbb{F}_2$, Φ, Φ_1, ${\sigma_2}^{\otimes 8}$ yukarıda tanımlandığı biçimde olsun.

$a, b, c, d, e \in \mathbb{F}_2$ ve $x, y, z \in R_1$için

$$x = a + cu_2 + eu_2{}^2$$

$$y = b + au_2 + (a + c)u_2{}^2$$

$$z = d + (a + b)u_2 + (b + c)u_2{}^2$$

aldığımızda, $\Phi(a + bu_1 + cu_2 + du_1{}^2 + eu_2{}^2)$

$= \Phi(x + yu_1 + zu_1{}^2) = (z, x + z, y + z, x + y + z)$ olur. Buradan

$\Phi\big(\gamma(x + yu_1 + zu_1{}^2)\big) =$

$((a_{n-1} + d_{n-1}) + (a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1})u_2 + (b_{n-1} + c_{n-1} + e_{n-1})u_2{}^2,$

$d_0 + (a_0 + b_0)u_2 + (b_0 + c_0)u_2{}^2, \dots,$

$d_{n-2} + (a_{n-2} + b_{n-2})u_2 + (b_{n-2} + c_{n-2})u_2{}^2,$

$d_{n-1} + (a_{n-1} + b_{n-1})u_2 + (b_{n-1} + c_{n-1})u_2{}^2,$

$(a_0 + d_0) + (a_0 + (b_0 + c_0)u_2 + (b_0 + c_0 + e_0)u_2{}^2, \dots,$

$(a_{n-2} + d_{n-2}) + (a_{n-2} + b_{n-2} + c_{n-2})u_2 + (b_{n-2} + c_{n-2} + e_{n-2})u_2{}^2,$

$(a_{n-1} + b_{n-1} + d_{n-1}) + (b_{n-1} + c_{n-1})u_2 + (a_{n-1} + b_{n-1} + e_{n-1})u_2{}^2,$

$(b_0 + d_0) + b_0u_2 + (a_0 + b_0)u_2{}^2, \dots,$

$(b_{n-2} + d_{n-2}) + b_{n-2}u_2 + (a_{n-2} + b_{n-2})u_2{}^2,$

$(b_{n-1} + d_{n-1}) + b_{n-1}u_2 + (a_{n-1} + b_{n-1})u_2{}^2,$

$(a_0 + b_0 + d_0) + (b_0 + c_0)u_2 + (a_0 + b_0 + e_0)u_2{}^2, \dots,$

$(a_{n-2}+b_{n-2}+d_{n-2})+(b_{n-2}+c_{n-2})u_2+(a_{n-2}+b_{n-2}+e_{n-2}){u_2}^2)$

bulunur. Sonrasında Φ_1 görüntüsü alınırsa

$\Phi_1(\Phi(\gamma(x+yu_1+z{u_1}^2))$

$=(b_{n-1}+c_{n-1}+e_{n-1}, b_0+c_0, \dots, b_{n-2}+c_{n-2}, b_{n-1}+c_{n-1}, b_0+c_0+e_0, \dots,$

$b_{n-2}+c_{n-2}+e_{n-2}, a_{n-1}+b_{n-1}+e_{n-1}, a_0+b_0, \dots, a_{n-2}+b_{n-2}, a_{n-1}+b_{n-1},$

$a_0+b_0+e_0, \dots, a_{n-2}+b_{n-2}+e_{n-2}, a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}+d_{n-1}+e_{n-1},$

$b_0+c_0+d_0, \dots, b_{n-2}+c_{n-2}+d_{n-2}, b_{n-1}+c_{n-1}+d_{n-1},$

$a_0+b_0+c_0+d_0+e_0, \dots, a_{n-2}+b_{n-2}+c_{n-2}+d_{n-2}+e_{n-2}, d_{n-1}+e_{n-1},$

$a_0+d_0, \dots, a_{n-2}+d_{n-2}, a_{n-1}+d_{n-1}, d_0+e_0, \dots, d_{n-2}+e_{n-2}, a_{n-1}+e_{n-1},$

$a_0+c_0, \dots, a_{n-2}+c_{n-2}, a_{n-1}+c_{n-1}, a_0+e_0, \dots, a_{n-2}+e_{n-2},$

$a_{n-1}+c_{n-1}+e_{n-1}, a_0, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_0+c_0+e_0, \dots, a_{n-2}+c_{n-2}+e_{n-2},$

$d_{n-1}+e_{n-1}, a_0+c_0+d_0, \dots, a_{n-2}+c_{n-2}+d_{n-2}, a_{n-1}+c_{n-1}+d_{n-1},$

$d_0+e_0, \dots, d_{n-2}+e_{n-2}, b_{n-1}+c_{n-1}+d_{n-1}+e_{n-1}, a_0+b_0+d_0, \dots,$

$a_{n-2}+b_{n-2}+d_{n-2}, a_{n-1}+b_{n-1}+d_{n-1}, b_0+c_0+d_0+e_0, \dots,$

$b_{n-2}+c_{n-2}+d_{n-2}+e_{n-2})$

olarak bulunur. Diğer taraftan $x+yu_1+z{u_1}^2$ elemanının Φ Gray görüntüsü,

$\Phi(x+yu_1+z{u_1}^2)=(d_0+(a_0+b_0)u_2+(b_0+c_0){u_2}^2, \dots,$

$d_{n-1}+(a_{n-1}+b_{n-1})u_2+(b_{n-1}+c_{n-1}){u_2}^2,$

$(a_0+d_0)+(a_0+b_0+c_0)u_2+(b_0+c_0+e_0){u_2}^2, \dots,$

$(a_{n-1}+d_{n-1})+(a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1})u_2+(b_{n-1}+c_{n-1}+e_{n-1}){u_2}^2,$

$(b_0+d_0)+b_0u_2+(a_0+b_0){u_2}^2, \dots,$

$(b_{n-1}+d_{n-1})+b_{n-1}u_2+(a_{n-1}+b_{n-1}){u_2}^2,$

$(a_0+b_0+d_0)+(b_0+c_0)u_2+(a_0+b_0+e_0){u_2}^2, \dots,$

$(a_{n-1}+b_{n-1}+d_{n-1})+(b_{n-1}+c_{n-1})u_2+(a_{n-1}+b_{n-1}+e_{n-1}){u_2}^2)$ biçimindedir.

Φ_1 Gray görüntüsünü aldığımızda

$\Phi_1\big(\Phi(x+yu_1+zu_1{}^2)\big) = (b_0+c_0,\dots,b_{n-1}+c_{n-1},b_0+c_0+e_0,\dots,$

$b_{n-1}+c_{n-1}+e_{n-1},a_0+b_0,\dots,a_{n-1}+b_{n-1},a_0+b_0+e_0,\dots,$

$a_{n-1}+b_{n-1}+e_{n-1},b_0+c_0+d_0,\dots,b_{n-1}+c_{n-1}+d_{n-1},$

$a_0+b_0+c_0+d_0+e_0,\dots,a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}+d_{n-1}+e_{n-1},a_0+d_0,\dots,$

$a_{n-1}+d_{n-1},d_0+e_0,\dots,d_{n-1}+e_{n-1},a_0+c_0,\dots,a_{n-1}+c_{n-1},a_0+e_0,\dots,$

$a_{n-1}+e_{n-1},a_0,\dots,a_{n-1},a_0+c_0+e_0,\dots.,a_{n-1}+c_{n-1}+e_{n-1},$

$a_0+c_0+d_0,\dots,a_{n-1}+c_{n-1}+d_{n-1},d_0+e_0,\dots.,d_{n-1}+e_{n-1},$

$a_0+b_0+d_0,\dots,a_{n-1}+b_{n-1}+d_{n-1},b_0+c_0+d_0+e_0,\dots,$

$b_{n-1}+c_{n-1}+d_{n-1}+e_{n-1})$ olur. Son olarak $\sigma_2{}^{\otimes 8}$ dönüşümü uyguladığımızda

$\sigma_2{}^{\otimes 8}(\Phi_1\big(\Phi(x+yu_1+zu_1{}^2)\big) = (b_{n-1}+c_{n-1}+e_{n-1},b_0+c_0,\dots,$

$b_{n-2}+c_{n-2},b_{n-1}+c_{n-1},b_0+c_0+e_0,\dots,b_{n-2}+c_{n-2}+e_{n-2},$

$a_{n-1}+b_{n-1}+e_{n-1},a_0+b_0,\dots,a_{n-2}+b_{n-2},a_{n-1}+b_{n-1},a_0+b_0+e_0,\dots,$

$a_{n-2}+b_{n-2}+e_{n-2},a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}+d_{n-1}+e_{n-1},b_0+c_0+d_0,\dots,$

$b_{n-2}+c_{n-2}+d_{n-2},b_{n-1}+c_{n-1}+d_{n-1},a_0+b_0+c_0+d_0+e_0,\dots,$

$a_{n-2}+b_{n-2}+c_{n-2}+d_{n-2}+e_{n-2},d_{n-1}+e_{n-1},a_0+d_0,\dots,a_{n-2}+d_{n-2},$

$a_{n-1}+d_{n-1},d_0+e_0,\dots,d_{n-2}+e_{n-2},a_{n-1}+e_{n-1},a_0+c_0,\dots,a_{n-2}+c_{n-2},$

$a_{n-1}+c_{n-1},a_0+e_0,\dots,a_{n-2}+e_{n-2},a_{n-1}+c_{n-1}+e_{n-1},a_0,\dots,a_{n-2},a_{n-1},$

$a_0+c_0+e_0,\dots.,a_{n-2}+c_{n-2}+e_{n-2},d_{n-1}+e_{n-1},a_0+c_0+d_0,\dots,$

$a_{n-2}+c_{n-2}+d_{n-2},a_{n-1}+c_{n-1}+d_{n-1},d_0+e_0,\dots,d_{n-2}+e_{n-2},$

$b_{n-1}+c_{n-1}+d_{n-1}+e_{n-1},a_0+b_0+d_0,\dots,a_{n-2}+b_{n-2}+d_{n-2},$

$a_{n-1}+b_{n-1}+d_{n-1},b_0+c_0+d_0+e_0,\dots,b_{n-2}+c_{n-2}+d_{n-2}+e_{n-2})$

elde edilir.

BÖLÜM 4

KATSAYILARI $\mathbb{F}_p$ CİSMİNDE OLAN SONLU HALKALARLA DEVİRLİ KODLAR VE GRAY GÖRÜNTÜLERİ

$p \geq 3$ bir asal sayı olmak üzere $\mathbb{F}_p + u_2\mathbb{F}_p + {u_2}^2\mathbb{F}_p$ nin toplama ve çarpma işlemleri ile ${u_2}^3 = 0$ koşulunda bir halka olduğu ve $\mathbb{F}_p[u_2]/\langle {u_2}^3 \rangle$ halkasına izomorf olduğu görünmektedir. Burada $\mathbb{F}_p$ cismi kaldırılıp ${u_1}^3 = 0$ olmak üzere yerine

$S' = \mathbb{F}_p + u_1\mathbb{F}_p + {u_1}^2\mathbb{F}_p$ halkası alındığında, ${u_2}^3 = 0$ olmak üzere $S' + u_2S' + {u_2}^2S'$ kümesi oluşturulur. Daha ayrıntılı bir biçimde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$S' + u_2S' + {u_2}^2S'$$

$$= (\mathbb{F}_p + u_1\mathbb{F}_p + {u_1}^2\mathbb{F}_p) + u_2(\mathbb{F}_p + u_1\mathbb{F}_p + {u_1}^2\mathbb{F}_p) + {u_2}^2(\mathbb{F}_p + u_1\mathbb{F}_p + {u_1}^2\mathbb{F}_p)$$

$$= \mathbb{F}_p + u_1\mathbb{F}_p + {u_1}^2\mathbb{F}_p + u_2\mathbb{F}_p + u_2u_1\mathbb{F}_p + u_2{u_1}^2\mathbb{F}_p + {u_2}^2\mathbb{F}_p + {u_2}^2u_1\mathbb{F}_p + {u_2}^2{u_1}^2\mathbb{F}_p$$

olduğu görülür. $(\mathbb{F}_p + u_2\mathbb{F}_p + {u_2}^2\mathbb{F}_p, +, \cdot\ )$ halkasında ${u_2}^3 = 0$ olması ve $(S', +, \cdot)$ halkasında ${u_1}^3 = 0$ olması koşullarına ek olarak $u_2 \cdot u_1 = u_1 \cdot u_2 = 0$ koşulu konulursa $u_2 \cdot {u_1}^2 = u_2 \cdot (u_1 \cdot u_1) = (u_2 \cdot u_1) \cdot u_1 = 0 \cdot u_1 = 0$,

$u_2{}^2 \cdot u_1 = (u_2 \cdot u_2) \cdot u_1$

$= u_2 \cdot (u_2 u_1) = u_2 \cdot 0 = 0$ ve $u_2{}^2 \cdot u_1{}^2 = (u_2 u_2) \cdot (u_1 u_1) = u_2 \cdot (u_2 u_1) \cdot u_1$

$= u_2 \cdot 0 \cdot u_1 = 0$ olacağından $S' + u_2 S' + u_2{}^2 S'$ kümesi

$S = \mathbb{F}_p + u_1 \mathbb{F}_p + u_2 \mathbb{F}_p + u_1{}^2 \mathbb{F}_p + u_2{}^2 \mathbb{F}_p$ kümesine eşit olacaktır. Bu

$S = \mathbb{F}_p + u_1 \mathbb{F}_p + u_2 \mathbb{F}_p + u_1{}^2 \mathbb{F}_p + u_2{}^2 \mathbb{F}_p$ için koşul $u_2{}^3 = 0$, $u_1{}^3 = 0$ ve

$u_2 \cdot u_1 = u_1 \cdot u_2 = 0$ olur.

Aşağıda $\mathbb{F}_3$ ve $\mathbb{F}_p$ katsayılı halkalarda devirli kodlar ve Gray görüntüleri alt başlıklar incelenmiştir.

4.1. $\mathbb{F}_3[u_1, u_2] \Big/ \langle u_1{}^3, u_2{}^3, u_1 \cdot u_2 \rangle$ Halkasının Yapısı ve Devirli Kodların Gray Görüntüleri

$\mathbb{F}_3 + u_2 \mathbb{F}_3 + u_2{}^2 \mathbb{F}_3$ nin toplama ve çarpma işlemleriyle bir halka olduğu ve $u_2{}^3 = 0$ olmak üzere $\mathbb{F}_3[u_2] \Big/ \langle u_2{}^3 \rangle$ halkasına izomorf olduğu bilinmektedir. Burada $\mathbb{F}_3$ cismi kaldırılıp $u_1{}^3 = 0$ olmak üzere yerine $S' = \mathbb{F}_3 + u_1 \mathbb{F}_3 + u_1{}^2 \mathbb{F}_3$ halkası alındığında, $u_2{}^3 = 0$ olmak üzere $S' + u_2 S' + u_2{}^2 S'$ kümesi elde edilir.

$$S' + u_2 S' + u_2{}^2$$

$$= (\mathbb{F}_3 + u_1 \mathbb{F}_3 + u_1{}^2 \mathbb{F}_3) + u_2 (\mathbb{F}_3 + u_1 \mathbb{F}_3 + u_1{}^2 \mathbb{F}_3) + u_2{}^2 (\mathbb{F}_3 + u_1 \mathbb{F}_3 + u_1{}^2 \mathbb{F}_3)$$

$$= \mathbb{F}_3 + u_1 \mathbb{F}_3 + u_1{}^2 \mathbb{F}_3 + u_2 \mathbb{F}_3 + u_2 u_1 \mathbb{F}_3 + u_2 u_1{}^2 \mathbb{F}_3 + u_2{}^2 \mathbb{F}_3 + u_2{}^2 u_1 \mathbb{F}_3 + u_2{}^2 u_1{}^2 \mathbb{F}_3$$

olduğu görülür. $(\mathbb{F}_3 + u_2 \mathbb{F}_3 + u_2{}^2 \mathbb{F}_3, +, \cdot)$ halkasında $u_2{}^3 = 0$ olması ve $(S', +, \cdot)$ halkasında $u_1{}^3 = 0$ olması şartlarına ilave olarak $u_2 u_1 = u_1 u_2 = 0$ koşulu konulursa $u_2 \cdot u_1{}^2 = u_2 \cdot (u_1 \cdot u_1) = (u_2 \cdot u_1) \cdot u_1 = 0 \cdot u_1 = 0$,

$u_2{}^2 \cdot u_1 = (u_2 \cdot u_2) \cdot u_1 = u_2 \cdot (u_2 \cdot u_1) = u_2 \cdot 0 = 0$ ve

$u_2{}^2 \cdot u_1{}^2 = (u_2 \cdot u_2) \cdot (u_1 \cdot u_1) = u_2 \cdot (u_2 \cdot u_1) \cdot u_1 = u_2 \cdot 0 \cdot u_1 = 0$ olacağından

$S' + u_2S' + u_2{}^2S'$ kümesi $S = \mathbb{F}_3 + u_1\mathbb{F}_3 + u_2\mathbb{F}_3 + u_1{}^2\mathbb{F}_3 + u_2{}^2\mathbb{F}_3$ kümesine eşit olacaktır. $u_2{}^3 = 0$, $u_1{}^3 = 0$ ve $u_2 \cdot u_1 = u_1 \cdot u_2 = 0$ olur.

$$S = \mathbb{F}_3 + u_1\mathbb{F}_3 + u_2\mathbb{F}_3 + u_1{}^2\mathbb{F}_3 + u_2{}^2\mathbb{F}_3$$

$= \{0,1,2, u_2, 2u_2, u_1, 2u_1, u_2{}^2, 2u_2{}^2, u_1{}^2, 2u_1{}^2, 1 + u_2 + u_2, 1 + 2u_2, 2 + 2u_2,$

$1 + u_1, 2 + u_1, 1 + 2u_1, 2 + 2u_1, 1 + u_2{}^2, 2 + u_2{}^2, 1 + 2u_2{}^2, 2 + 2u_2{}^2, 1 + u_1{}^2,$

$2 + u_1{}^2, 1 + 2u_1{}^2, 2 + 2u_1{}^2, u_1 + u_2, u_2 + 2u_1, 2u_2 + u_1, u_2 + 2u_1, u_1 + 2u_2,$

$2u_2 + 2u_1, u_1 + u_2{}^2, u_2 + 2u_2{}^2, 2u_2 + u_2{}^2, 2u_2 + 2u_2{}^2, u_1 + u_1{}^2, u_1 + 2u_1{}^2,$

$2u_1 + u_1{}^2, 2u_1 + 2u_1{}^2, u_1{}^2 + u_2{}^2, 2u_1{}^2 + u_2{}^2, u_1{}^2 + 2u_2{}^2, 2u_1{}^2 + 2u_2{}^2,$

$1 + u_1 + u_2, 1 + 2u_2 + u_1, 1 + 2u_1 + u_2, 1 + 2u_1 + 2u_2, 2 + u_1 + u_2,$

$2 + u_1 + 2u_2, 2 + 2u_1 + u_2, 2 + 2u_1 + 2u_2, \dots\}$

$|S| = 243$'tür.

4.1.1. Tanım: $S = \mathbb{F}_3 + u_1\mathbb{F}_3 + u_2\mathbb{F}_3 + u_1{}^2\mathbb{F}_3 + u_2{}^2\mathbb{F}_3$ ve

$R_1 = \mathbb{F}_3 + u_2\mathbb{F}_3 + u_2{}^2\mathbb{F}_3$ olmak üzere;

$$\Psi: S \to S_1^9$$

$$a + bu_1 + cu_2 + du_1{}^2 + eu_2{}^2 \mapsto \Psi(a + bu_1 + cu_2 + du_1{}^2 + eu_2{}^2)$$

$$\Psi(a + bu_1 + cu_2 + du_1{}^2 + eu_2{}^2) = (x + yu_1 + zu_1{}^2)$$

$= (z, y + z, 2y + z, x + z, x + y + z, x + 2y + z, 2x + z, 2x + y + z, 2x + 2y + z)$

biçiminde tanımlanan Ψ dönüşümüne S halkası üzerinde Gray dönüşümü adı verilir. Burada

$$x = a + cu_2 + eu_2{}^2$$

$$y = b + au_2 + (a + c)u_2{}^2$$

$$z = d + (a + b)u_2 + (b + c)u_2{}^2$$

$a, b, c, d, e \in \mathbb{F}_3$ olmak üzere Ψ dönüşümü, $\Psi(t_o, t_1, .. t_{n-1}) = (z_0, z_1, \dots, z_{n-1},$

$y_0 + z_0, y_1 + z_1, \dots, y_{n-1} + z_{n-1}, 2y_0 + z_0, 2y_1 + z_1, 2y_{n-1} + z_{n-1}, x_0 + z_0,$

$x_1 + z_1, \dots, x_{n-1} + z_{n-1}, x_0 + y_0 + z_0, x_1 + y_1 + z_1, \dots, x_{n-1} + y_{n-1} + z_{n-1},$

$x_0 + 2y_0 + z_0, x_1 + 2y_1 + z_1, \dots, x_{n-1} + 2y_{n-1} + z_{n-1}, 2x_0 + z_0,$

$2x_1 + z_1, \dots, 2x_{n-1} + z_{n-1}, 2x_0 + y_0 + z_0, 2x_1 + y_1 + z_1, \dots,$

$2x_{n-1} + y_{n-1} + z_{n-1}, 2x_0 + 2y_0 + z_0,$

$2x_1 + 2y_1 + z_1, \dots, 2x_{n-1} + 2y_{n-1} + z_{n-1})$

biçiminde S^n e genişletilebilir. Burada, $i = 0,1, \dots, n-1$ için $t_i = x_i + y_i u_1 + z_i {u_1}^2$, $x_i = a_i + b_i u_2 + d_i {u_2}^2$, $y_i = c_i + e_i u_2 + (b_i + e_i){u_2}^2$ ve

$z_i = d_i + (a_i + c_i)u_2 + (a_i + e_i){u_2}^2$ biçimindedir.

4.1.2. Tanım: $S_1 = \mathbb{F}_3 + u_2\mathbb{F}_3 + {u_2}^2\mathbb{F}_3$, $x', y', z' \in \mathbb{F}_3$ olmak üzere

$$\Psi_1 : S_1 \to \mathbb{F}_3^9$$

$$x' + y'u_2 + z'{u_2}^2 \mapsto \Psi_1(x' + y'u_2 + z'{u_2}^2)$$

$$\Psi_1(x' + y'u_2 + z'{u_2}^2) = (z', y' + z', 2y' + z', x' + z', x' + y' + z',$$

$$x' + 2y' + z', 2x' + z', 2x' + y' + z', 2x' + 2y' + z')$$

biçiminde ifade edilen Ψ_1 dönüşümüne, S_1 halkası üzerindeki Gray dönüşümü denir.

Ψ_1 dönüşümünü, S_1^n e aşağıdaki şekilde genişletilebilir.

$$\Psi_1 : S_1^n \to \mathbb{F}_3^{9n}$$

$$(b_0, b_1, \dots b_{n-1}) \mapsto \Psi_1(b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$$

$\Psi_1(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) = ({z'}_0, {z'}_1, \dots, {z'}_{n-1}, {y'}_0 + {z'}_0, {y'}_1 + {z'}_1, \dots, {y'}_{n-1} + {z'}_{n-1},$

$2{y'}_0 + {z'}_0, 2{y'}_1 + {z'}_1, 2{y'}_{n-1} + {z'}_{n-1}, {x'}_0 + {z'}_0, {x'}_1 + {z'}_1, \dots, {x'}_{n-1} + {z'}_{n-1},$

${x'}_0 + {y'}_0 + {z'}_0, {x'}_1 + {y'}_1 + {z'}_1, \dots, {x'}_{n-1} + {y'}_{n-1} + {z'}_{n-1}, {x'}_0 + 2{y'}_0 + {z'}_0,$

${x'}_1 + 2{y'}_1 + {z'}_1, \dots, {x'}_{n-1} + 2{y'}_{n-1} + {z'}_{n-1}, 2{x'}_0 + {z'}_0, 2{x'}_1 + {z'}_1, \dots,$

$2{x'}_{n-1} + {z'}_{n-1}, 2{x'}_0 + {y'}_0 + {z'}_0, 2{x'}_1 + {y'}_1 + {z'}_1, \dots, 2{x'}_{n-1} + {y'}_{n-1} + {z'}_{n-1},$

$2x'_0 + 2y'_0 + z'_0, 2x'_1 + 2y'_1 + z'_1, \dots, 2x'_{n-1} + 2y'_{n-1} + z'_{n-1})$

S halkasında 243 eleman vardır. Aşağıda S halkasının bazı elemanlarının Ψ dönüşümü altında görüntüleri ve daha sonra S_1^9 üzerindeki bu elemanların Ψ_1 dönüşümü ile $\mathbb{F}_3^{81}$ görüntüleri sunulmuştur.

- (1) elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi(1) = (u_2, 2u_2 + {u_2}^2, 2{u_2}^2, 1 + u_2, 1 + u_2 + {u_2}^2, 1 + 2{u_2}^2, 2 + u_2,$

$2 + 2u_2 + {u_2}^2, 2 + 2{u_2}^2)$

$(u_2, 2u_2 + {u_2}^2, 2{u_2}^2, 1 + u_2, 1 + 2u_2 + {u_2}^2, 1 + 2{u_2}^2, 2 + u_2, 2 + 2u_2 + {u_2}^2,$

$2 + 2{u_2}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi_1(u_2, 2u_2 + {u_2}^2, 2{u_2}^2, 1 + u_2, 1 + 2u_2 + {u_2}^2, 1 + 2{u_2}^2, 2 + u_2, 2 + 2u_2 + {u_2}^2,$

$2 + 2{u_2}^2)$

$= (0,1,2,0,1,2,0,1,2,1,0,2,1,0,2,1,0,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,0,1,2,1,2,0,2,0,1,1,0,$

$2,2,1,0,0,2,1,2,2,2,0,0,0,1,1,1,0,1,2,2,0,1,1,2,0,1,0,2,0,2,1,2,1,0,2,2,2,1,1,1,0,0,0)$

- (u_2) elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi(u_2) = ({u_2}^2, 2{u_2}^2, 0, u_2 + {u_2}^2, u_2 + 2{u_2}^2, u_2, 2u_2 + {u_2}^2, 2u_2 + 2{u_2}^2, 2u_2)$

$({u_2}^2, 2{u_2}^2, 0, u_2 + {u_2}^2, u_2 + 2{u_2}^2, u_2, 2u_2 + {u_2}^2, 2u_2 + 2{u_2}^2, 2u_2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi_1({u_2}^2, 2{u_2}^2, 0, u_2 + {u_2}^2, u_2 + 2{u_2}^2, u_2, 2u_2 + {u_2}^2, 2u_2 + 2{u_2}^2, 2u_2)$

$= (1,2,0,1,2,0,1,2,0,1,2,0,2,0,1,0,1,2,1,2,0,0,1,2,2,0,1,1,2,0,1,2,0,1,2,0,1,2,0,2,0,1,0,1,2,1,2,0,0,1,2,2,0,1,$

$2,0,2,0,1,0,1,2,1,2,0,0,1,2,2,0,1,1,2,0,1,2,0,1,2,0,1,2,0,2,0,1,0,1,2,1,2,0,0,1,2,2,0,1)$

- $(1 + u_1)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi(1 + u_1) = (2u_2 + {u_2}^2, 1 + 2{u_2}^2, 2 + u_2, 1 + 2u_2 + {u_2}^2, 2 + 2{u_2}^2, u_2,$

$2 + 2u_2 + {u_2}^2, 2{u_2}^2, 1 + u_2)$

$(2u_2 + {u_2}^2, 1 + 2{u_2}^2, 2 + u_2, 1 + 2u_2 + {u_2}^2, 2 + 2{u_2}^2, u_2, 2 + 2u_2 + {u_2}^2, 2{u_2}^2,$

$1 + u_2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi_1(2u_2 + {u_2}^2, 1 + 2{u_2}^2, 2 + u_2, 1 + 2u_2 + {u_2}^2, 2 + 2{u_2}^2, u_2,$

$2 + 2u_2 + {u_2}^2, 2{u_2}^2, 1 + u_2)$

$= (1,2,0,1,2,0,1,2,0,0,2,1,0,2,1,0,2,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,1,0,2,2,1,0,0,2,1,0,0,0,1,1,1,$

$2,2,2,\ 2,0,1,0,1,2,1,2,0,1,1,1,0,0,0,2,2,2,0,1,2,2,0,1,1,2,0,2,1,0,1,0,2,0,2,1)$

- $(2 + 2u_1 + u_2 + {u_2}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi(2 + 2u_1 + u_2 + {u_2}^2) = (u_2, 2,1 + 2u_2, 2 + 2u_2 + {u_2}^2, 1 + u_2 + {u_2}^2, {u_2}^2,$

$u_2 + 2u^2, 2u_2 + 2{u_2}^2, 2 + u_2 + 2u_2)$

$(u_2, 2,1 + 2u_2, 2 + 2u_2 + {u_2}^2, 1 + u_2 + {u_2}^2, {u_2}^2, u_2 + 2u^2, 2u_2 + 2{u_2}^2,$

$2 + u_2 + 2u_2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi_1(u_2, 2,1 + 2u_2, 2 + 2u_2 + {u_2}^2, 1 + u_2 + {u_2}^2, {u_2}^2, u_2 + 2u^2, 2u_2 + 2{u_2}^2,$

$2 + u_2 + 2u_2) =$

$(0,0,0,1,1,1,2,2,2,1,0,2,0,2,1,2,1,0,2,0,1,2,0,1,2,0,1,0,2,1,0,2,1,0,2,1,1,$

$2,0,2,0,1,0,1,2,2,2,2,1,1,1,0,0,0,0,1,2,2,0,1,1,2,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,1,0,0,1,1,0,2)$

- $(1 + u_2 + {u_1}^2 + {u_2}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi(1 + u_2 + {u_1}^2 + {u_2}^2) = (1 + u_2 + {u_2}^2, 1 + 2u_2, 1 + 2{u_2}^2, 2 + 2u_2 + 2{u_2}^2,$

$2 + {u_2}^2, 2 + {u_2}^2, 2 + u_2, 0, u_2 + 2{u_2}^2, 2u_2 + {u_2}^2)$

$(1 + u_2 + {u_2}^2, 1 + 2u_2, 1 + 2{u_2}^2, 2 + 2u_2 + 2{u_2}^2, 2 + {u_2}^2, 2 + {u_2}^2, 2 + u_2, 0,$

$u_2 + 2{u_2}^2, 2u_2 + {u_2}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi_1(1 + u_2 + {u_2}^2, 1 + 2u_2, 1 + 2{u_2}^2, 2 + 2u_2 + 2{u_2}^2, 2 + {u_2}^2, 2 + {u_2}^2,$

$2 + u_2, 0, u_2 + 2{u_2}^2, 2u_2 +$

${u_2}^2)$=(1,0,2,2,1,0,0,2,1,2,2,2,1,1,1,0,0,0,0,1,2,0,1,2,0,2,2,2,1,0,1,0,2,0,2,1,

$0,0,0,0,0,\ 0,0,0,0,1,2,0,2,0,1,0,1,2,0,2,1,0,2,1,0,2,1,1,1,1,2,2,2,0,0,0,2,0,1,1,2,0,0,1,1)$

- $(u_1 + 2{u_1}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi(u_1 + 2{u_1}^2) = (2 + u_2 + {u_2}^2, u_2 + {u_2}^2, 1 + u_2 + {u_2}^2, 2 + u_2 + {u_2}^2,$

$u_2 + {u_2}^2, 1 + u_2 + {u_2}^2, 2 + u_2 + {u_2}^2, u_2 + {u_2}^2, 1 + u_2 + {u_2}^2)$

$(2+u_2+{u_2}^2, u_2+{u_2}^2, 1+u_2+{u_2}^2, 2+u_2+{u_2}^2, u_2+{u_2}^2, 1+u_2+{u_2}^2,$

$2+u_2+{u_2}^2, u_2+{u_2}^2, 1+u_2+{u_2}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi_1(2+u_2+{u_2}^2, u_2+{u_2}^2, 1+u_2+{u_2}^2, 2+u_2+{u_2}^2, u_2+{u_2}^2, 1+u_2+{u_2}^2,$

$2+u_2+{u_2}^2, u_2+{u_2}^2, 1+u_2+{u_2}^2)$

$= (1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,2,0,1,2,0,1,2,1,$

$2,0,1,2,0,1,2,0,2,0,1,2,0,1,2,0,1,2,1,0,2,1,0,2,1,0,0,2,1,0,2,1,0,2,1,1,0,2,1,0,2,1,0,2)$

- $(2u_2+{u_2}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi(2u_2+{u_2}^2) = (2{u_2}^2, {u_2}^2, 0, 2u_2, 2u_2+2{u_2}^2, 2u_2+{u_2}^2, u_2+{u_2}^2, u_2, u_2+2{u_2}^2)$

$(2{u_2}^2, {u_2}^2, 0, 2u_2, 2u_2+2{u_2}^2, 2u_2+{u_2}^2, u_2+{u_2}^2, u_2, u_2+2{u_2}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi_1(2{u_2}^2, {u_2}^2, 0, 2u_2, 2u_2+2{u_2}^2, 2u_2+{u_2}^2, u_2+{u_2}^2, u_2, u_2+2{u_2}^2)$

$= (2,1,0,0,2,1,1,0,2,2,1,0,2,1,0,2,1,0,1,1,0,1,0,2,0,2,1,2,1,0,0,2,1,1,0,$

$2,2,1,0,2,1,0,2,1,0,2,1,0,1,0,2,0,2,1,2,1,0,0,2,1,1,0,2,2,1,0,2,1,0,2,1,0,2,1,0,1,0,2,0,2,1)$

- $(1+u_1+{u_1}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi(1+u_1+{u_1}^2) = (1+2u_2+2{u_2}^2, 2+2{u_2}^2, u_2, 2+2u_2+{u_2}^2, 2{u_2}^2,$

$1+u_2, 2u_2+{u_2}^2, 1+2{u_2}^2, 2+u_2)$

$(1+2u_2+2{u_2}^2, 2+2{u_2}^2, u_2, 2+2u_2+{u_2}^2, 2{u_2}^2, 1+u_2, 2u_2+{u_2}^2,$

$1+2{u_2}^2, 2+u_2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi_1(1+2u_2+2{u_2}^2, 2+2{u_2}^2, u_2, 2+2u_2+{u_2}^2, 2{u_2}^2, 1+u_2, 2u_2+{u_2}^2,$

$1+2{u_2}^2, 2+u_2)$

$= (1,2,0,1,2,0,1,2,0,0,2,1,0,2,1,0,2,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,0,0,2,1,1,0,1,1,$

$1,1,2,2,2,0,0,0,0,1,2,1,2,0,2,0,1,0,0,0,2,2,2,1,1,1,2,0,1,1,2,0,0,1,2,1,0,20,2,0,2,1,2)$

- $(2+u_1+u_2+{u_1}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi(2+u_1+u_2+{u_1}^2) = (1+2{u_2}^2, 2+2u_2+2{u_2}^2, u_2+2{u_2}^2, u_2+2{u_2}^2,$

$1+2{u_2}^2, 2+2u_2+2{u_2}^2, 2+2u_2+2{u_2}^2, u_2+2{u_2}^2, 1+2{u_2}^2)$

$(1+2{u_2}^2, 2+2u_2+2{u_2}^2, u_2+2{u_2}^2, u_2+2{u_2}^2, 1+2{u_2}^2, 2+2u_2+2{u_2}^2,$

$2+2u_2+2{u_2}^2, u_2+2{u_2}^2, 1+2{u_2}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi_1(1+2{u_2}^2, 2+2u_2+2{u_2}^2, u_2+2{u_2}^2, u_2+2{u_2}^2, 1+2{u_2}^2, 2+2u_2+2{u_2}^2,$

$2+2u_2+2{u_2}^2, u_2+2{u_2}^2, 1+2{u_2}^2)$

$=$ (2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,1,0,02,1,1,0,2,2,0,1,1,2,0,0,1,2,0,1,2,2,0,1,1,

2,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,2,1,10,2,2,1,0,1,0,2,2,1,0,0,2,1,1,2,0,0,1,2,2,0,1,1,2,1,1,1,2,2,1,1)

- $(2+2u_1+u_2+{u_2}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi(2+2u_1+u_2+{u_2}^2) = (u_2, 2, 1+2u_2, 2+2u_2+{u_2}^2, 1+u_2+{u_2}^2, {u_2}^2,$

$1+2{u_2}^2, 2u_2+2{u_2}^2, 2+u_2+2{u_2}^2)$

$(u_2, 2, 1+2u_2, 2+2u_2+{u_2}^2, 1+u_2+{u_2}^2, {u_2}^2, 1+2{u_2}^2, 2u_2+2{u_2}^2,$

$2+u_2+2{u_2}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi_1(u_2, 2, 1+2u_2, 2+2u_2+{u_2}^2, 1+u_2+{u_2}^2, {u_2}^2, 1+2{u_2}^2, 2u_2+2{u_2}^2,$

$2+u_2+2{u_2}^2)$

$=$ (0,0,0,1,1,1,2,2,2,1,0,2,0,2,1,2,1,0,2,0,1,2,0,1,2,0,1,0,2,1,0,2,1,0,2,1,1,2

0,2,0,1,0,1,2,2,2,2,1,1,1,0,0,0,0,1,2,2,0,1,1,2,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,1,0,0,2,1,1,0,2)

- $(1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi(1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2) = (1+u_2+{u_2}^2, 1+2u_2, 1+2{u_2}^2, 2+u_2+2{u_2}^2,$

$2+{u_2}^2, 2+u_2, 0, u_2+2{u_2}^2, 2u_2+{u_2}^2)$

$1+u_2+{u_2}^2, 1+2u_2, 1+2{u_2}^2, 2+u_2+2{u_2}^2, 2+{u_2}^2, 2+u_2, 0,$

$u_2+2{u_2}^2, 2u_2+{u_2}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi_1(1+u_2+{u_2}^2, 1+2u_2, 1+2{u_2}^2, 2+u_2+2{u_2}^2, 2+{u_2}^2, 2+u_2, 0,$

$u_2+2{u_2}^2, 2u_2+{u_2}^2)$

$=$ (1,0,2,2,1,0,0,2,1,2,2,2,1,1,1,0,0,0,0,1,2,0,12,0,2,2,2,1,0,1,0,2,0,2,1,

0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,2,0,2,0,1,0,1,2,0,2,1,0,2,1,0,2,1,1,1,1,2,2,2,0,0,0,2,0,1,1,2,0,0,1,1)

- $(u_1+2{u_1}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi(u_1 + 2{u_1}^2) = (2 + u_2 + {u_2}^2, u_2 + {u_2}^2, 1 + u_2 + {u_2}^2, 2 + u_2 + {u_2}^2,$

$u_2 + {u_2}^2, 1 + u_2 + {u_2}^2, 2 + u_2 + {u_2}^2, u_2 + u^2, 1 + u_2 + {u_2}^2)$

$(2 + u_2 + {u_2}^2, u_2 + {u_2}^2, 1 + u_2 + {u_2}^2, 2 + u_2 + {u_2}^2, u_2 + {u_2}^2, 1 + u_2 + {u_2}^2,$

$2 + u_2 + {u_2}^2, u_2 + u^2, 1 + u_2 + {u_2}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi_1(2 + u_2 + {u_2}^2, u_2 + {u_2}^2, 1 + u_2 + {u_2}^2, 2 + u_2 + {u_2}^2, u_2 + {u_2}^2, 1 + u_2 + {u_2}^2,$

$2 + u_2 + {u_2}^2, u_2 + u^2, 1 + u_2 + {u_2}^2)$

$= (1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,2,0,1,2,0,1,$

$2,1,2,0,1, 2,0,1,2,0,2,0,1,2,0,1,2,0,1,2,1,0,2,1,0,2,1,0,0,2,1,0,2,1,0,2,1,1,0,2,1,0,2,1,0,2)$

- $(2u_1 + 2u_2 + {u_1}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi(2u_1 + 2u_2 + {u_1}^2) = (1 + 2u_2 + {u_2}^2, 1 + 2u_2, 1 + 2u_2 + 2{u_2}^2,$

$1 + u_2 + {u_2}^2, 1 + u_2, 1 + u_2 + 2{u_2}^2, 1 + {u_2}^2, 1,1 + 2{u_2}^2)$

$(1 + 2u_2 + {u_2}^2, 1 + 2u_2, 1 + 2u_2 + 2{u_2}^2, 1 + u_2 + {u_2}^2, 1 + u_2, 1 + u_2 + 2{u_2}^2,$

$1 + {u_2}^2, 1,1 + 2{u_2}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi_1(1 + 2u_2 + {u_2}^2, 1 + 2u_2, 1 + 2u_2 + 2{u_2}^2, 1 + u_2 + {u_2}^2, 1 + u_2,$

$1 + u_2 + 2{u_2}^2, 1 + {u_2}^2, 1,1 + 2{u_2}^2)$

$= (1,0,2,1,0,2,1,0,2,0,2,1,2,1,0,1,0,2,2,1,0,0,2,1,1,0,2,2,1,0,2,1,0,2,1,0,$

$1,0,2,0,2,1,2,1,0,0,2 1,1,0,2,2,1,0,0,2,1,0,2,1,0,2,1,2,1,0,1,0,2,0,2,1,1,0,2,2,1,0,0,2,1)$

- $(u_2 + {u_2}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi(u_2 + {u_2}^2) = ({u_2}^2, 2{u_2}^2, 0, u_2 + 2{u_2}^2, u_2, u_2 + {u_2}^2, 2u_2, 2u_2 + {u_2}^2, 2u_2 + 2{u_2}^2)$

$({u_2}^2, 2{u_2}^2, 0, u_2 + 2{u_2}^2, u_2, u_2 + {u_2}^2, 2u_2, 2u_2 + {u_2}^2, 2u_2 + 2{u_2}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi_1({u_2}^2, 2{u_2}^2, 0, u_2 + 2{u_2}^2, u_2, u_2 + {u_2}^2, 2u_2, 2u_2 + {u_2}^2, 2u_2 + 2{u_2}^2)$

$= (1,2,0,2,0,1,0,1,2,1,2,0,0,1,2,2,0,1,1,2,0,1,2,01,2,0,1,2,0,2,0,1,0,1,2,1,2,0,$

$0,1,2,2,0, 1,1,2,0,1,2,0,1,2,0,1,2,0,2,0,1,0,1,2,12,0,0,1,2,2,0,1,1,2,0,1,2,0,1,2,0)$

- $(1 + u_1 + 2u_2 + {u_1}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi(1+u_1+2u_2+{u_1}^2)=(1+2u_2,2,u_2,2+u_2,u_2,1,0,1+u_2,2+2u_2)$

$(1+2u_2,2,u_2,2+u_2,u_2,1,0,1+u_2,2+2u_2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi_1(1+2u_2,2,u_2,2+u_2,u_2,1,0,1+u_2,2+2u_2)$

$=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,2,0,1,1,2,0,0,1,2,1,0,2,2,1,0,0,2,1,1,2,0,2,0,1,0,1,$

$2,0,2,1,0,2,1,0,2,1,2,2,2,1,1,2,,0,0,0,2,1,0,1,0,2,0,2,1,1,1,1,2,2,2,0,0,0,0,1,2,0,1,2,0,1,2)$

- $(2+{u_2}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi(2+{u_2}^2)=(2u_2,u_2+2{u_2}^2,{u_2}^2,2+2u_2+{u_2}^2,2+u_2,2+2{u_2}^2,$

$1+2u_2+2{u_2}^2,1+u_2+{u_2}^2,1)$

$(2u_2,u_2+2{u_2}^2,{u_2}^2,2+2u_2+{u_2}^2,2+u_2,2+2{u_2}^2,1+2u_2+2{u_2}^2,$

$1+u_2+{u_2}^2,1)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi_1(2u_2,u_2+2{u_2}^2,{u_2}^2,2+2u_2+{u_2}^2,2+u_2,2+2{u_2}^2,1+2u_2+2{u_2}^2,$

$1+u_2+{u_2}^2,1)$

$=(0,2,1,1,0,2,2,1,0,2,0,1,0,1,2,1,2,0,1,1,1,2,2,2,0,0,0,0,2,1,0,2,2,0,2,0,$

$2,0,1,2,0,1,2,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,0,2,1,2,1,0,1,0,2,2,0,1,1,2,0,0,1,2,1,1,1,0,0,0,2,2,2)$

- $(1+2u_2+{u_2}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi(1+2u_2+{u_2}^2)=(u_2+2{u_2}^2,2u_2+2{u_2}^2,2{u_2}^2,1,1+u_2,1+2u_2,$

$2+2u_2+{u_2}^2,2+{u_2}^2,2+u_2+{u_2}^2)$

$(u_2+2{u_2}^2,2u_2+2{u_2}^2,2{u_2}^2,1,1+u_2,1+2u_2,2+2u_2+{u_2}^2,2+{u_2}^2,$

$2+u_2+{u_2}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi_1(u_2+2{u_2}^2,2u_2+2{u_2}^2,2{u_2}^2,1,1+u_2,1+2u_2,2+2u_2+{u_2}^2,2+{u_2}^2,$

$2+u_2+{u_2}^2)$

$=(2,2,2,0,0,0,1,1,1,0,1,2,0,1,2,0,1,2,0,1,2,1,,0,2,0,2,1,2,1,0,2,2,2,1,1,1,0,0,0,0,$

$1,2,1,2,0,2,0,1,1,0,2,1,0,2,1,0,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,0,1,2,2,0,1,1,2,0,1,0,2,2,1,0,0,2,1)$

- $(1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi(1+u_1+u_2+{u_1}^2+{u_2}^2)=(1+2u_2+2{u_2}^2,2+{u_2}^2,u_2,2,u_2+2{u_2}^2,$

$1 + 2u_2 + {u_2}^2, u_2 + {u_2}^2, 1 + 2{u_2}^2, 2 + 2{u_2}^2)$

$(1 + 2u_2 + 2{u_2}^2, 2 + {u_2}^2, u_2, 2, u_2 + 2{u_2}^2, 1 + 2u_2 + {u_2}^2, u_2 + {u_2}^2, 1 + 2{u_2}^2,$

$2 + 2{u_2}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi_1(1 + 2u_2 + 2{u_2}^2, 2 + {u_2}^2, u_2, 2, u_2 + 2{u_2}^2, 1 + 2u_2 + {u_2}^2, u_2 + {u_2}^2,$

$1 + 2{u_2}^2, 2 + 2{u_2}^2)$

$= (2,1,0,0,2,1,1,0,2,1,1,1,0,0,0,2,2,2,0,1,2,0,1,2,0,1,2,0,0,0,2,2,2,1,1,1,2,0,$

$1,2,0,1,2,0,1,1,0,2,2,1,0,0,2,1,1,2,0,1,2,0,1,2,0,0,2,1,1,0,2,2,1,0,2,2,2,1,1,1,0,0,0)$

- $(2 + u_1 + 2u_2 + {u_1}^2 + 2{u_2}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi(2 + u_1 + 2u_2 + {u_1}^2 + 2{u_2}^2) = (1,2 + 2u_2 + {u_2}^2, u_2 + 2{u_2}^2, 2u_2 + 2{u_2}^2,$

$1 + u_2, 2 + {u_2}^2, 2 + u_2 + {u_2}^2, 2{u_2}^2, 1 + u_2)$

$(1,2 + 2u_2 + {u_2}^2, u_2 + 2{u_2}^2, 2u_2 + 2{u_2}^2, 1 + u_2, 2 + {u_2}^2, 2 + u_2 + {u_2}^2, 2{u_2}^2,$

$1 + u_2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi_1(1,2 + 2u_2 + {u_2}^2, u_2 + 2{u_2}^2, 2u_2 + 2{u_2}^2, 1 + u_2, 2 + {u_2}^2,$

$2 + u_2 + {u_2}^2, 2{u_2}^2, 1 + u_2)$

$= (0,1,2,2,0,1,1,2,0,0,0,0,1,1,1,2,2,2,0,2,1,0,2,1,0,2,1,1,0,2,2,1,0,0,2,1,$

$1,2,0,1,2,0,1,2,0,1,1,1,0,0,0,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,1,0,1,0,2,0,2,1,2,0,1,0,1,2,1,2,0)$

- $(u_1 + {u_1}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi(u_1 + {u_1}^2) = (1 + u_2 + {u_2}^2, 2 + u_2 + {u_2}^2, u_2 + {u_2}^2, 1 + u_2 + {u_2}^2,$

$2 + u_2 + {u_2}^2, u_2 + {u_2}^2, 1 + u_2 + {u_2}^2, 2 + u_2 + {u_2}^2, u_2 + {u_2}^2)$

$(1 + u_2 + {u_2}^2, 2 + u_2 + {u_2}^2, u_2 + {u_2}^2, 1 + u_2 + {u_2}^2, 2 + u_2 + {u_2}^2, u_2 + {u_2}^2,$

$1 + u_2 + {u_2}^2, 2 + u_2 + {u_2}^2, u_2 + {u_2}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi_1(1 + u_2 + {u_2}^2, 2 + u_2 + {u_2}^2, u_2 + {u_2}^2, 1 + u_2 + {u_2}^2, 2 + u_2 + {u_2}^2, u_2 + {u_2}^2,$

$1 + u_2 + {u_2}^2, 2 + u_2 + {u_2}^2, u_2 + {u_2}^2)$

$= (1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,0,0,0,0,0,0,0,0,0,2,0,1,2,0,1,2,0,1,2,0,1,0,$

$1,2,0,1,2, 0,1,2,1,2 ,0,1,2,0,1,2,0,0,2,1,0,2,1,0,2,1,1,0,2,1,0,2,1,0,2,2,1,0,2,1,0,2,1,0)$

- $(2u_1 + u_2 + {u_2}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi(2u_1 + u_2 + {u_2}^2)(2u_1 + u_2 + {u_2}^2) = (2u_2, 2 + 2u_2 + {u_2}^2,$

$1 + 2u_2 + 2{u_2}^2, {u_2}^2, 2 + 2{u_2}^2, 1, u_2 + 2{u_2}^2, 2 + u_2, 1 + u_2 + {u_2}^2)$

$(2u_2, 2 + 2u_2 + {u_2}^2, 1 + 2u_2 + 2{u_2}^2, {u_2}^2, 2 + 2{u_2}^2, 1, u_2 + 2{u_2}^2, 2 + u_2,$

$1 + u_2 + {u_2}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi_1(2u_2, 2 + 2u_2 + {u_2}^2, 1 + 2u_2 + 2{u_2}^2, {u_2}^2, 2 + 2{u_2}^2, 1, u_2 + 2{u_2}^2, 2 + u_2,$

$1 + u_2 + {u_2}^2)$

$= (0,1,2,1,2,0,2,0,1,2,0,1,1,2,0,0,1,2,1,2,0,1,2,0,1,2,0,0,0,0,1,1,1,2,2,2,2,$

$2,2,1,1,1,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,0,2,1,1,0,2,2,1,0,2,1,0,1,0,2,0,2,1,1,0,2,1,0,2,1,0,2)$

- $(1 + {u_1}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi(1 + {u_1}^2) = (2u_2 + {u_2}^2, 1 + 2{u_2}^2, 2 + u_2, 1 + 2u_2 + {u_2}^2, 2 + 2{u_2}^2, u_2,$

$2 + 2u_2 + {u_2}^2, 2{u_2}^2, 1 + u_2)$

$(2u_2 + {u_2}^2, 1 + 2{u_2}^2, 2 + u_2, 1 + 2u_2 + {u_2}^2, 2 + 2{u_2}^2, u_2, 2 + 2u_2 + {u_2}^2, 2{u_2}^2,$

$1 + u_2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi_1(2u_2 + {u_2}^2, 1 + 2{u_2}^2, 2 + u_2, 1 + 2u_2 + {u_2}^2, 2 + 2{u_2}^2, u_2,$

$2 + 2u_2 + {u_2}^2, 2{u_2}^2, 1 + u_2)$

$= (1,2,0,1,2,0,1,2,0,0,2,1,0,2,1,0,2,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,1,0,2,2,1,0,0,2,$

$1,0,0,0,1, 1,1,2,2,2,2,0,1,0,1,2,1,2,0,1,1,1,0,0,0,2,2,2,0,1,2,2,0,1,1,2,0,2,1,0,1,0,2,0,2,1)$

- $(2 + {u_2}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi(2 + {u_2}^2) = (2u_2, u_2 + 2{u_2}^2, {u_2}^2, 2 + 2u_2 + {u_2}^2, 2 + u_2, 2 + 2{u_2}^2,$

$1 + 2u_2 + 2{u_2}^2, 1 + u_2 + {u_2}^2, 1)$

$(2u_2, u_2 + 2{u_2}^2, {u_2}^2, 2 + 2u_2 + {u_2}^2, 2 + u_2, 2 + 2{u_2}^2, 1 + 2u_2 + 2{u_2}^2,$

$1 + u_2 + {u_2}^2, 1)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi_1(2u_2, u_2 + 2{u_2}^2, {u_2}^2, 2 + 2u_2 + {u_2}^2, 2 + u_2, 2 + 2{u_2}^2, 1 + 2u_2 + 2{u_2}^2,$

$1 + u_2 + {u_2}^2, 1)$

$= (0,2,1,10,2,2,1,0,2,0,1,0,1,2,1,2,0,1,1,1,2,2,2,0,0,0,0,2,1,0,2,1,0,2,1,2,0,$

$1,2,0,\ 1,2,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,0,2,1,2,1,0,1,0,2,2,0,1,1,2,0,0,1,2,1,1,1,0,0,0,2,2,2)$

- $(2 + u_1 + u_2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi(2 + u_1 + u_2) = (2{u_2}^2, 1 + 2u_2 + 2{u_2}^2, 2 + u_2 + 2{u_2}^2, 2 + u_2 + 2{u_2}^2,$

$1 + 2u_2 + 2{u_2}^2, 1 + 2u_2 + 2{u_2}^2, 2 + u_2 + 2{u_2}^2, 2{u_2}^2)$

$(2{u_2}^2, 1 + 2u_2 + 2{u_2}^2, 2 + u_2 + 2{u_2}^2, 2 + u_2 + 2{u_2}^2, 1 + 2u_2 + 2{u_2}^2,$

$1 + 2u_2 + 2{u_2}^2, 2 + u_2 + 2{u_2}^2, 2{u_2}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi_1(2{u_2}^2, 1 + 2u_2 + 2{u_2}^2, 2 + u_2 + 2{u_2}^2, 2 + u_2 + 2{u_2}^2, 1 + 2u_2 + 2{u_2}^2,$

$1 + 2u_2 + 2{u_2}^2, 2 + u_2 + 2{u_2}^2, 2{u_2}^2)$

$= (2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,1,0,0,2,1,1,0,2,2,0,1,1,2,0,0,1,2,2,0,1,1,2,0,0,1,2,$

$2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,1,0,0,2,1,1,0,2,2,1,0,0,2,1,1,0,2,2,0,1,1,2,0,0,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2)$

- $({u_1}^2 + {u_2}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi({u_1}^2 + {u_2}^2) = (1,1,1,1 + {u_2}^2, 1 + {u_2}^2, 1 + {u_2}^2, 1 + 2{u_2}^2, 1 + 2{u_2}^2, 1 + 2{u_2}^2)$

$(1,1,1,1 + {u_2}^2, 1 + {u_2}^2, 1 + {u_2}^2, 1 + 2{u_2}^2, 1 + 2{u_2}^2, 1 + 2{u_2}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi_1(1,1,1,1 + {u_2}^2, 1 + {u_2}^2, 1 + {u_2}^2, 1 + 2{u_2}^2, 1 + 2{u_2}^2, 1 + 2{u_2}^2)$

$= (0,0,0,1,1,1,2,2,2,0,0,0,1,1,1,2,2,2,0,0,0,1,1,1,2,2,2,1,1,1,2,2,2,0,0,0,1,1,$

$1,2,2,2,0,0,0,1,1,1,2,2,2,0,0,0,2,2,2,0,0,0,1,1,1,2,2,2,0,0,0,1,1,1,2,2,2,0,0,0,1,1,1)$

- $(1 + 2u_1 + 2u_2 + {u_1}^2 + {u_2}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi(1 + 2u_1 + 2u_2 + {u_1}^2 + {u_2}^2) = (1 + {u_2}^2, u_2 + {u_2}^2, 2 + 2u_2 + {u_2}^2,$

$2 + 2u_2 + 2{u_2}^2, 1 + 2{u_2}^2, u_2 + 2{u_2}^2, u_2, 2 + 2u_2, 1)$

$(1 + {u_2}^2, u_2 + {u_2}^2, 2 + 2u_2 + {u_2}^2, 2 + 2u_2 + 2{u_2}^2, 1 + 2{u_2}^2, u_2 + 2{u_2}^2, u_2,$

$2 + 2u_2, 1)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi_1(1 + {u_2}^2, u_2 + {u_2}^2, 2 + 2u_2 + {u_2}^2, 2 + 2u_2 + 2{u_2}^2, 1 + 2{u_2}^2, u_2 + 2{u_2}^2, u_2,$

$2 + 2u_2, 1)$

$= (1,1,1,2,2,2,0,0,0,1,2,0,1,2,0,1,2,0,1,0,2,0,2,1,2,1,0,2,1,0,1,0,2,0,2,1,2,$

$2,2,0,0,0,1,1,1,2,0,1,2,0,1,2,0,1,0,1,2,0,1,2,0,1,2,0,2,1,2,1,0,1,0,1,0,0,0,1,1,1,2,2,2)$

- $(u_1{}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi(u_1{}^2) = (1,1,1,1,1,1,1,1)$

$(1,1,1,1,1,1,1,1)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi_1(1,1,1,1,1,1,1,1)$

$= (0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,$

$1,1,1,\ 1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2)$

- $(1 + u_2{}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi(1 + u_2{}^2) = (u_2, 2u_2 + u_2{}^2, u_2{}^2, 1 + u_2 + u_2{}^2, 1 + 2u_2 + 2u_2{}^2, 1,$

$2 + u_2 + 2u_2{}^2, 2 + 2u_2, 2 + u_2{}^2)$

$(u_2, 2u_2 + u_2{}^2, u_2{}^2, 1 + u_2 + u_2{}^2, 1 + 2u_2 + 2u_2{}^2, 1,2 + u_2 + 2u_2{}^2, 2 + 2u_2,$

$2 + u_2{}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi_1(u_2, 2u_2 + u_2{}^2, u_2{}^2, 1 + u_2 + u_2{}^2, 1 + 2u_2 + 2u_2{}^2, 1,2 + u_2 + 2u_2{}^2, 2 + 2u_2,$

$2 + u_2{}^2)$

$= (0,1,1,1,2,0,2,0,1,1,0,1,2,1,0,0,2,1,2,2,2,0,0,0,1,1,1,0,1,1,2,0,1,1,2,0,1,$

$0,1,0,2,1,2,1,0,2,2,1,1,1,1,0,0,0,0,1,1,0,1,2,0,1,2,1,0,1,1,0,2,1,0,2,2,2,1,2,2,2,2,2,2,2)$

- $(1 + 2u_1 + 2u_2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi(1 + 2u_1 + 2u_2) = (u_2{}^2, 2 + u_2 + u_2{}^2, 1 + 2u_2 + u_2{}^2, 1 + 2u_2 + u_2{}^2, u_2{}^2,$

$2 + u_2 + u_2{}^2, 2 + u_2 + u_2{}^2, 1 + 2u_2 + u_2{}^2, u_2{}^2)$

$(u_2{}^2, 2 + u_2 + u_2{}^2, 1 + 2u_2 + u_2{}^2, 1 + 2u_2 + u_2{}^2, u_2{}^2, 2 + u_2 + u_2{}^2,$

$2 + u_2 + u_2{}^2, 1 + 2u_2 + u_2{}^2, u_2{}^2)$ elemanının Gray görüntüsü;

$\Psi_1(u_2{}^2, 2 + u_2 + u_2{}^2, 1 + 2u_2 + u_2{}^2, 1 + 2u_2 + u_2{}^2, u_2{}^2, 2 + u_2 + u_2{}^2,$

$2 + u_2 + u_2{}^2, 1 + 2u_2 + u_2{}^2, u_2{}^2)$

$= (1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,0,0,1,2,2,0,1,1,0,2,2,1,0,0,2,1,1,0,2,2,1,0,0,$

2,1,1,1,1, 1,1,1,1,1,1,1,2,0,0,1,2,2,0,1,1,2,0,0,1,2,2,0,1,1,0,2,2,1,0,0,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1)

4.1.3. Tanım: $S = \mathbb{F}_3 + u_1\mathbb{F}_3 + u_2\mathbb{F}_3 + {u_1}^2\mathbb{F}_3 + {u_2}^2\mathbb{F}_3$ halkası üzerinde,

her $s \in S$ için

$$w_S(s) = \begin{cases} 0; s = 0 \\ 63; s = 1 + 2u_1 + 2u_2, 2 + u_1 + u_2 \\ 48; s = 2u_1 + u_2, u_1 + 2u_2\ , 1 + u_1 + u_2, 1 + 2u_1 + u_2, 2 + u_1 + 2u_2, 2 + 2u_1 + u_2, \\ 2 + 2u_2 + 2{u_1}^2 + 2{u_2}^2,\ 1 + u_2 + {u_1}^2 + {u_2}^2, 1 + u_1 + 2u_2 + {u_1}^2, 2 + 2u_1 + u_2 + 2{u_1}^2 \\ 54; s = 1 + u_1 + u_2 + {u_1}^2 + {u_2}^2, u_1 + {u_1}^2, {u_1}^2, u_1 + 2{u_1}^2, 2u_1 + 2u_2 + 2{u_2}^2, 2 + u_1 + u_2 + {u_1}^2, 2u_2 + {u_2}^2 \\ 57; diğer\ durumlar \end{cases}$$

biçiminde yazılan parçalı fonksiyon S üzerindeki ağırlık fonksiyonu olarak isimlendirilir.

Bu durumda her $s = (s_0, s_1, s_2, s_3, \dots, s_{n-1}) \in S^n$ için $w_R(s) = \sum_{i=0}^{n-1} w_R(s_i)$'dir

4.1.4. Tanım: $S_1 = \mathbb{F}_3 + u_2\mathbb{F}_3 + {u_2}^2\mathbb{F}_3$ halkası üzerinde;

her $l \in S_1$ için

$$w_{hom}(l) = \begin{cases} 6, l \in S_1 - S_1 \cdot {u_2}^2 \\ 9, l \in S_1 \cdot {u_2}^2 - \{0\} \\ 0, l = 0 \end{cases}$$

biçiminde belirtilen parçalı fonksiyona, S_1 üzerinde homogeneous ağırlık fonksiyonu adı verilir.

Bu durumda her $l = (l_0, l_1, \dots, l_{n-1}) \in R_1$ için $w_{hom}(l) = \sum_{i=0}^{n-1} w_{hom}(l_i)$ dir.

4.1.5. Tanım: $\mathbb{F}_3$ cismi üzerinde;

$w_H(0) = 0$, $w_H(1) = 1$ve $w_H(2) = 1$ biçiminde ifade edilen fonksiyona $\mathbb{F}_3$ üzerinde Hamming ağırlık fonksiyonu denir.

Bu durumda her $d = (d_0, d_1, \dots, d_{n-1}) \in \mathbb{F}_3^n$ için $w_H(d) = \sum_{i=0}^{n-1}(d_i)$ olur.

4.1.6. Tanım: Her $s_1, s_2 \in S^n$, $s_1 \neq s_2$ için s_1 ve s_2 arasındaki d_R uzaklığı $w_R(s_1 - s_2)$ olarak tanımlanır. D, S^n üzerinde bir kod olsun ve D kodunun minimum uzaklığı her $s_1, s_2 \in D$, $s_1 \neq s_2$ için $d_S(D) = min\{d_S(s_1, s_2)\}$ şeklinde ifade edilir.

S^n üzerinde yazılan yukarıdaki 4.1.6. Tanım aynı şekilde S_1^n ve $\mathbb{F}_3^n$ üzerinde de verilir. Burada S_1^n ve $\mathbb{F}_3^n$ üzerinde D kodunun minimum uzaklığı sırasıyla bu şekilde gösterilir: $d_{hom}(D_1)$ ve $d_H(D_2)$.

4.1.7. Önerme: Ψ ve Ψ_1 dönüşümleri 4.1.1. Tanım ve 4.1.2. Tanımdaki gibi olsun. Ψ dönüşümü (S^n, d_R) den (S_1^{9n}, d_{hom}) e, Ψ_1 dönüşümü (S_1^{9n}, d_{hom}) den $(\mathbb{F}_3^{81n}, d_H)$ e bir izometridir. Bunun sonucu olarak $\Psi_1 \circ \Psi$ dönüşümü de (S^n, d_{hom}) den $(\mathbb{F}_3^{81n}, d_H)$ e bir izometridir.

Kanıt: Her $m, k \in S^n$, $m \neq k$ için $m = a_1 + a_2u_1 + a_3u_2 + a_4{u_1}^2 + a_5{u_2}^2$,

$k = a_1' + a_2'u_1 + a_3'u_2 + a_4'{u_1}^2 + a_5'{u_2}^2$

$a_1, a_1', a_2, a_2', a_3, a_3', a_4, a_4', a_5, a_5' \in \mathbb{F}_3^n$ olsun.

$x = a_1 + a_3u_2 + a_5{u_2}^2 \in S_1^n$, $y = a_2 + a_1u_2 + (a_1 + a_3){u_2}^2 \in S_1^n$,

$z = a_4 + (a_1 + a_2)u_2 + (a_2 + a_3){u_2}^2 \in S_1^n$

$x' = a_1' + a_3'u_2 + a_5'{u_2}^2 \in S_1^n$, $y' = a_2' + a_1'u_2 + (a_1' + a_3'){u_2}^2 \in S_1^n$,

$z' = a_4' + (a_1' + a_2')u_2 + (a_2' + a_3'){u_2}^2 \in S_1^n$ olarak alındığında

$m = a_1 + a_2u_1 + a_3u_2 + a_4{u_1}^2 + a_5{u_2}^2 = x + yu_1 + z{u_1}^2$,

$k = a_1' + a_2'u_1 + a_3'u_2 + a_4'{u_1}^2 + a_5'{u_2}^2 = x' + y'u_1 + z'{u_1}^2$ biçiminde yazılır.

$d_S(m, k) = w_S(m - k)$

$= w_S((a_1 + a_2u_1 + a_3u_2 + a_4{u_1}^2 + a_5{u_2}^2) -$

$(a_1' + a_2'u_1 + a_3'u_2 + a_4'{u_1}^2 + a_5'{u_2}^2))$

$= w_S\left((x + yu_1 + z{u_1}^2) - \left(x' + y'u_1 + z'{u_1}^2\right)\right)$

$= w_S\big((x - x') + (y - y')u_1 + (z - z'){u_1}^2\big)$

$= w_{hom}(z - z', (y - y') + (z - z'), 2(y - y') + (z - z'), (x - x') + (z - z'),$

$(x - x') + (y - y') + (z - z'), (x - x') + 2(y - y') + (z - z'),$

$2(x - x') + (z - z'), 2(x - x') + (y - y') + (z - z'),$

$2(x - x') + 2(y - y') + (z - z'))$

$= w_L((a_4 + (a_1 + a_2)u_2 + (a_2 + a_3){u_2}^2) - (a_4' + (a_1' + a_2')u_2 + (a_2' + a_3'){u_2}^2),$

$(a_2 + a_1u_2 + (a_1 + a_3){u_2}^2) - (a_2' + a_1'u_2 + (a_1' + a_3'){u_2}^2) +$

$(a_4 + (a_1 + a_2)u_2 + (a_2 + a_3){u_2}^2) - ({a_4}' + ({a_1}' + {a_2}')u_2 + ({a_2}' + {a_3}'){u_2}^2,$

$2(a_2 + a_1u_2 + (a_1 + a_3){u_2}^2) - 2({a_2}' + {a_1}'u + ({a_1}' + {a_3}'){u_2}^2) +$

$(a_4 + (a_1 + a_2)u_2 + (a_2 + a_3){u_2}^2) - ({a_4}' + ({a_1}' + {a_2}')u_2 + ({a_2}' + {a_3}'){u_2}^2),$

$(a_1 + a_3u_2 + a_5{u_2}^2) - ({a_1}' + {a_3}'u_2 + {a_5}'{u_2}^2) + (a_4 + (a_1 + a_2)u_2 + (a_2 + a_3){u_2}^2) - ({a_4}' + ({a_1}' + {a_2}')u_2 + ({a_2}' + {a_3}'){u_2}^2,$

$(a_1 + a_3u_2 + a_5{u_2}^2) - ({a_1}' + {a_3}'u_2 + {a_5}'{u_2}^2) + (a_2 + a_1u_2 + (a_1 + a_3){u_2}^2) - ({a_2}' + {a_1}'u_2 + ({a_1}' + {a_3}'){u_2}^2) + (a_4 + (a_1 + a_2)u_2 + (a_2 + a_3){u_2}^2) - ({a_4}' + ({a_1}' + {a_2}')u_2 + ({a_2}' + {a_3}'){u_2}^2),$

$(a_1 + a_3u_2 + a_5u^2) - ({a_1}' + {a_3}'u_2 + {a_5}'{u_2}^2) + 2(a_2 + a_1u_2 + (a_1 + a_3){u_2}^2) - 2({a_2}' + {a_1}'u_2 + ({a_1}' + {a_3}'){u_2}^2) + (a_4 + (a_1 + a_2)u_2 + (a_2 + a_3){u_2}^2) - ({a_4}' + ({a_1}' + {a_2}')u_2 + ({a_2}' + {a_3}'){u_2}^2),$

$2(a_1 + a_3u_2 + a_5{u_2}^2) - 2({a_1}' + {a_3}'u_2 + {a_5}'{u_2}^2) + (a_4 + (a_1 + a_2)u_2 + (a_2 + a_3){u_2}^2) - ({a_4}' + ({a_1}' + {a_2}')u_2 + ({a_2}' + {a_3}'){u_2}^2),$

$2(a_1 + a_3u_2 + a_5{u_2}^2) - 2({a_1}' + {a_3}'u_2 + {a_5}'{u_2}^2) + (a_2 + a_1u_2 + (a_1 + a_3){u_2}^2) - ({a_2}' + {a_1}'u_2 + ({a_1}' + {a_3}'){u_2}^2) + (a_4 + (a_1 + a_2)u_2 + (a_2 + a_3){u_2}^2) - ({a_4}' + ({a_1}' + {a_2}')u_2 + ({a_2}' + {a_3}'){u_2}^2),$

$2(a_1 + a_3u_2 + a_5{u_2}^2) - 2({a_1}' + {a_3}'u_2 + {a_5}'{u_2}^2) + 2(a_2 + a_1u_2 + (a_1 + a_3){u_2}^2) - 2({a_2}' + {a_1}'u_2 + ({a_1}' + {a_2}')u_2^2) + (a_4 + (a_1 + a_2)u_2 + (a_2 + a_3){u_2}^2) - ({a_4}' + ({a_1}' + {a_2}')u_2 + ({a_2}' + {a_3}'){u_2}^2))$

$= w_H(a_2 - {a_2}' + a_3 - {a_3}', a_1 - {a_1}' + a_3 - {a_3}' + a_2 - {a_2}' + a_3 - {a_3}',$

$2(a_1 - {a_1}') + a_2 - {a_2}', a_5 - {a_5}' + a_2 - {a_2}' + a_3 - {a_3}',$

$a_5 - {a_5}' + a_1 - {a_1}' + a_3 - {a_3}' + a_2 - {a_2}' + a_3 - {a_3}',$

$a_5 - {a_5}' + 2(a_1 - {a_1}') + a_2 - {a_2}', 2(a_5 - {a_5}') + a_2 - {a_2}' + a_3 - {a_3}',$

$2(a_5 - {a_5}') + a_1 - {a_1}' + a_3 - {a_3}' + a_2 - {a_2}' + a_3 - {a_3}',$

$2(a_5 - {a_5}') + 2(a_1 - {a_1}') + a_2 - {a_2}',$

$a_1 - {a_1}' + a_2 - {a_2}' + a_2 - {a_2}' + a_3 - {a_3}',$

$a_3 - a_3' + a_2 - a_2' + a_2 - a_2' + a_3 - a_3', 2(a_1 - a_1') + a_2 - a_2' + a_2 - a_2',$

$a_3 - a_3' + a_5 - a_5' + a_1 - a_1' + a_2 - a_2' + a_2 - a_2' + a_3 - a_3',$

$a_5 - a_5' + a_2 - a_2' + a_2 - a_2', a_5 - a_5' + a_1 - a_1' + a_2 - a_2' + a_3 - a_3',$

$2(a_5 - a_5') + a_1 - a_1' + a_2 - a_2' + a_2 - a_2',$

$2(a_5 - a_5') + a_2 - a_2' + a_2 - a_2' + a_3 - a_3',$

$2(a_5 - a_5') + 2(a_1 - a_1' + a_3 - a_3') + a_2 - a_2' + a_2 - a_2', 2(a_1 - a_1') + a_3 - a_3',$

$a_3 - a_3' + 2(a_1 - a_1') + a_3 - a_3', a_2 - a_2', a_5 - a_5' + 2(a_1 - a_1'), a_5 - a_5',$

$2(a_3 - a_3') + a_5 - a_5' + 2(a_1 - a_1'),$

$a_3 - a_3' + 2(a_5 - a_5') + 2(a_1 - a_1') + a_3 - a_3', 2(a_5 - a_5') + 2(a_1 - a_1'),$

$2(a_5 - a_5') + 2(a_1 - a_1') + a_3 - a_3', a_4 - a_4' + a_2 - a_2' + a_3 - a_3',$

$a_2 - a_2' + a_1 - a_1' + a_3 - a_3' + a_4 - a_4' + a_2 - a_2' + a_3 - a_3',$

$2(a_1 - a_1') + a_4 - a_4', a_1 - a_1' + a_5 - a_5' + a_4 - a_4' + a_2 - a_2' + a_3 - a_3',$

$a_1 - a_1' + a_5 - a_5' + a_2 - a_2' + a_1 - a_1' + a_3 - a_3' + a_4 - a_4' + a_2 - a_2' + a_3 - a_3', a_5 - a_5' + a_4 - a_4',$

$2(a_5 - a_5') + a_2 - a_2' + a_3 - a_3' + a_4 - a_4' + a_2 - a_2' + a_3 - a_3',$

$2(a_5 - a_5') + a_3 - a_3' + a_4 - a_4' + a_3 - a_3',$

$a_4 - a_4' + a_1 - a_1' + a_2 - a_2' + a_2 - a_2' + a_3 - a_3',$

$a_3 - a_3' + a_4 - a_4' + a_3 - a_3', 2(a_1 - a_1') + a_4 - a_4' + a_2 - a_2',$

$a_1 - a_1' + a_3 - a_3' + a_5 - a_5' + a_4 - a_4' + a_1 - a_1' + a_2 - a_2' + a_2 - a_2' + a_3 - a_3', a_5 - a_5' + a_2 - a_2' + a_4 - a_4' + a_1 - a_1' + a_2 - a_2',$

$a_3 - a_3' + a_5 - a_5' + a_4 - a_4' + a_2 - a_2', 2(a_5 - a_5') + a_4 - a_4' + a_2 - a_2',$

$2(a_5 - a_5') + a_1 - a_1' + a_4 - a_4' + a_1 - a_1' + a_3 - a_3',$

$2(a_3 - a_3' + a_5 - a_5') + 2(a_1 - a_1' + a_1 - a_1') + a_4 - a_4' + a_2 - a_2',$

$a_4 - a_4' + 2(a_1 - a_1') + a_3 - a_3',$

$a_3 - a_3' + a_4 - a_4' + 2(a_1 - a_1') + a_2 - a_2' + a_3 - a_3'$,

$a_4 - a_4' + 2(a_1 - a_1' + a_2 - a_2'), a_5 - a_5' + a_5 - a_5' + a_4 - a_4'$,

$a_5 - a_5' + a_2 - a_2' + a_4 - a_4' + a_3 - a_3'$,

$a_5 - a_5' + 2(a_3 - a_3') + a_4 - a_4' + 2(a_2 - a_2')$,

$a_1 - a_1' + a_3 - a_3' + 2(a_5 - a_5') + a_4 - a_4' + a_3 - a_3'$,

$2(a_5 - a_5') + a_2 - a_2' + a_4 - a_4' + a_1 - a_1'$,

$a_3 - a_3' + 2(a_5 - a_5') + 2(a_2 - a_2') + a_4 - a_4' + a_1 - a_1'$,

$2(a_4 - a_4') + a_2 - a_2' + a_3 - a_3', a_1 - a_1' + a_3 - a_3' + 2(a_4 - a_4') + a_3 - a_3'$,

$a_2 - a_2' + 2(a_1 - a_1') + 2(a_4 - a_4') + a_2 - a_2', a_2 - a_2' + 2(a_4 - a_4') + a_2 - a_2'$,

$2(a_1 - a_1') + a_5 - a_5' + 2(a_4 - a_4') + a_2 - a_2' + a_3 - a_3'$,

$a_5 - a_5' + a_3 - a_3' + 2(a_4 - a_4') + a_3 - a_3'$,

$a_1 - a_1' + a_5 - a_5' + 2(a_3 - a_3') + 2(a_4 - a_4') + 2(a_2 - a_2') + a_3 - a_3'$,

$a_1 - a_1' + 2(a_5 - a_5') + 2(a_4 - a_4') + a_2 - a_2' + a_3 - a_3'$,

$a_1 - a_1' + 2(a_5 - a_5') + a_1 - a_1' + a_3 - a_3' + 2(a_4 - a_4') + a_3 - a_3'$,

$2(a_5 - a_5') + a_2 - a_2' + a_2 - a_2', 2(a_4 - a_4') + a_1 - a_1' + 2(a_2 - a_2') + a_3 - a_3'$,

$a_3 - a_3' + 2(a_4 - a_4') + a_2 - a_2' + a_3 - a_3', 2(a_1 - a_1') + 2(a_4 - a_4')$,

$a_3 - a_3' + a_5 - a_5' + 2(a_4 - a_4') + a_2 - a_2' + a_2 - a_2' + a_3 - a_3'$,

$a_5 - a_5' + a_1 - a_1' + 2(a_4 - a_4') + a_1 - a_1' + a_2 - a_2'$,

$a_5 - a_5' + a_1 - a_1' + 2(a_4 - a_4') + a_3 - a_3'$,

$a_1 - a_1' + 2(a_5 - a_5') + 2(a_4 - a_4') + a_1 - a_1' + a_2 - a_2' + a_2 - a_2'$,

$2(a_5 - a_5') + 2(a_4 - a_4') + a_1 - a_1' + a_2 - a_2' + a_3 - a_3'$,

$2(a_5 - a_5') + 2(a_3 - a_3') + 2(a_4 - a_4'), 2(a_4 - a_4') + 2(a_1 - a_1') + a_3 - a_3'$,

$2(a_2 - a_2') + a_3 - a_3' + 2(a_4 - a_4') + 2(a_1 - a_1') + a_3 - a_3'$,

$a_2 - a_2' + 2(a_4 - a_4') + 2(a_1 - a_1')$,

$2(a_1 - a_1') + a_5 - a_5' + 2(a_4 - a_4') + 2(a_1 - a_1')$,

$2\big(a_5 - a_5' + 2(a_2 - a_2')\big) + a_1 - a_1' + 2(a_4 - a_4') + a_3 - a_3'$,

$a_5 - a_5' + 2(a_3 - a_3') + 2(a_4 - a_4') + a_1 - a_1' + a_2 - a_2'$,

$a_3 - a_3' + 2(a_5 - a_5') + 2(a_4 - a_4') + a_3 - a_3'$,

$2(a_5 - a_5') + 2(a_4 - a_4') + 2(a_2 - a_2')$,

$2(a_5 - a_5') + a_2 - a_2' + 2(a_4 - a_4') + a_3 - a_3')$

4.1.8 Tanım: D, $S = \mathbb{F}_3 + u_1\mathbb{F}_3 + u_2\mathbb{F}_3 + {u_1}^2\mathbb{F}_3 + {u_2}^2\mathbb{F}_3$ halkası üzerinde n uzunluğunda bir lineer kod olsun.

$$\tau: S^n \to S^n$$

$$(d_0, d_1, \dots, d_{n-1}) \longmapsto \tau(d_0, d_1, \dots, d_{n-1}) = (d_{n-1}, d_0, \dots, d_{n-2})$$

permütasyonu için $\tau(D) = D$ koşulu sağlanıyorsa bu koda S^n'de tanımlanan bir devirli kod denir.

4.1.9. Tanım: D_1, S_1 halkası üzerinde $9n$ uzunluğunda bir lineer kod olsun.

$$\tau_1: S_1^{9n} \to S_1^{9n}$$

$$(d_0, d_1, \dots, d_{9n-1}) \longmapsto \tau_1(d_0, d_1, \dots, d_{9n-1}) = (d_{9n-1}, d_0, \dots, d_{9n-2})$$

$\tau_1(D_1) = D_1$ şartı sağlanıyorsa D_1 koduna S_1^{9n} üzerinde bir devirli kod denir.

4.1.10. Tanım: D_1, S_1 halkası üzerinde tanımlanan uzunluğu $9n$ olan bir lineer kod olsun.$i = 0,1, \dots ,8$, $a \in S_1^{9n}$ olmak üzere $a^{(i)} \in S_1^n$ ve

$a = (a_0, a_1, \dots, a_{9n-1}) = (a^{(0)}\big|a^{(1)}\big| \dots \big|a^{(8)}) \in S_1^{9n}$ için

$a^{(0)} = (a_0, \dots, a_{n-1})$,

$a^{(1)} = (a_n, \dots, a_{2n-1})$,

$\vdots$

$a^{(8)} = (a_{8n}, \dots, a_{9n-1})$

olsun.

$$\tau_1{}^{\otimes 9}: S_1^{9n} \to S_1^{9n}$$

$$a \longmapsto \tau_1{}^{\otimes 9}(a) = (\tau_1(a^{(0)})|\tau_1(a^{(1)})| \dots |\tau_1(a^{(8)}))$$

permütasyonu için $\tau_1{}^{\otimes 9}(D_1) = D_1$ koşulu sağlanıyorsa D_1 koduna S_1^{9n} üzerinde bir 9'uncu mertebeden yarı devirli kod adı verilir.

4.1.11. Önerme: τ dönüşümü S^n üzerinde bir permütasyon, $\tau_1{}^{\otimes 9}$ dönüşümü S_1^{9n} üzerinde bir permütasyon ve Ψ, S^n den S_1^{9n} e yukarıda tanımlanan Gray dönüşümünü ise $\Psi \circ \tau = \tau_1{}^{\otimes 9} \circ \Psi$ eşitliği sağlanır.

Kanıt: Her $0 \leq i \leq n-1$ için $d_i = x_i + y_i u_1 + z_i {u_1}^2$ olmak üzere $d = (d_0, d_1, \dots, d_{n-1}) \in S^n$ olsun. Bu durumda $d \in S^n$ in Gray görüntüsü

$$\Psi(d) = \Psi(d_0, d_1, \dots, d_{n-1})$$

$$= \Psi(x_0 + y_0 u_1 + z_0 {u_1}^2, x_1 + y_1 u_1 + z_1 {u_1}^2, \dots, x_{n-1} + y_{n-1} u_1 + z_{n-1} {u_1}^2)$$

$$= (z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, y_0 + z_0, y_1 + z_1, \dots, y_{n-1} + z_{n-1}, 2y_0 + z_0, 2y_1 + z_1, \dots,$$

$$2y_{n-1} + z_{n-1}, x_0 + z_0, x_1 + z_1, \dots, x_{n-1} + z_{n-1}, x_0 + y_0 + z_0, x_1 + y_1 + z_1, \dots,$$

$$x_{n-1} + y_{n-1} + z_{n-1}, x_0 + 2y_0 + z_0, x_1 + 2y_1 + z_1, \dots, x_{n-1} + 2y_{n-1} + z_{n-1},$$

$$2x_0 + z_0, 2x_1 + z_1, \dots, 2x_{n-1} + z_{n-1}, 2x_0 + y_0 + z_0, 2x_1 + y_1 + z_1, \dots,$$

$$2x_{n-1} + y_{n-1} + z_{n-1}, 2x_0 + 2y_0 + z_0, 2x_1 + 2y_1 + z_1, \dots, 2x_{n-1} + 2y_{n-1} + z_{n-1})$$

olur. Böylece $\tau_1{}^{\otimes 9}$ dönüşümü uyguladığımızda

$$\tau_1{}^{\otimes 9}(z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, y_0 + z_0, y_1 + z_1, \dots, y_{n-1} + z_{n-1}, 2y_0 + z_0, 2y_1 + z_1, \dots,$$

$$2y_{n-1} + z_{n-1}, x_0 + z_0, x_1 + z_1, \dots, x_{n-1} + z_{n-1}, x_0 + y_0 + z_0, x_1 + y_1 + z_1, \dots,$$

$$x_{n-1} + y_{n-1} + z_{n-1}, x_0 + 2y_0 + z_0, x_1 + 2y_1 + z_1, \dots, x_{n-1} + 2y_{n-1} + z_{n-1},$$

$$2x_0 + z_0, 2x_1 + z_1, \dots, 2x_{n-1} + z_{n-1}, 2x_0 + y_0 + z_0, 2x_1 + y_1 + z_1, \dots,$$

$$2x_{n-1} + y_{n-1} + z_{n-1}, 2x_0 + 2y_0 + z_0, 2x_1 + 2y_1 + z_1, \dots, 2x_{n-1} + 2y_{n-1} + z_{n-1})$$

$$= (z_{n-1}, z_0, z_1, \dots, z_{n-2}, y_{n-1} + z_{n-1}, y_0 + z_0, \dots, y_{n-2} + z_{n-2}, 2y_{n-1} + z_{n-1},$$

$$2y_0 + z_0, \dots, 2y_{n-2} + z_{n-2}, x_{n-1} + z_{n-1}, x_0 + z_0, \dots, x_{n-2} + z_{n-2},$$

$x_{n-1}+y_{n-1}+z_{n-1}, x_0+y_0+z_0, \dots, x_{n-2}+y_{n-2}+z_{n-2}, x_{n-1}+2y_{n-1}+z_{n-1},$

$x_0+2y_0+z_0, \dots, x_{n-2}+2y_{n-2}+z_{n-2}, 2x_{n-1}+z_{n-1}, 2x_0+z_0, \dots,$

$2x_{n-2}+z_{n-2}, 2x_{n-1}+y_{n-1}+z_{n-1}, 2x_0+y_0+z_0, \dots, 2x_{n-2}+y_{n-2}+z_{n-2},$

$2x_{n-1}+2y_{n-1}+z_{n-1}, 2x_0+2y_0+z_0, \dots, 2x_{n-2}+2y_{n-2}+z_{n-2})$

elde ederiz. Diğer taraftan;

$\tau(d)=\tau(d_0,d_1,\dots,d_{n-1})=(d_{n-1},d_0,\dots,d_{n-2})$ koduna Ψ Gray dönüşümü uyguladığımızda

$\Psi(\tau(d))=\Psi(d_{n-1},d_0,\dots,d_{n-2})=\Psi(x_{n-1}+y_{n-1}u_1+z_{n-1}{u_1}^2,$

$x_0+y_0u_1+z_0{u_1}^2,\dots,x_{n-2}+y_{n-2}u_1+z_{n-2}{u_1}^2)$

$=(z_{n-1},z_0,z_1,\dots,z_{n-2},y_{n-1}+z_{n-1},y_0+z_0,\dots,y_{n-2}+z_{n-2},2y_{n-1}+z_{n-1},$

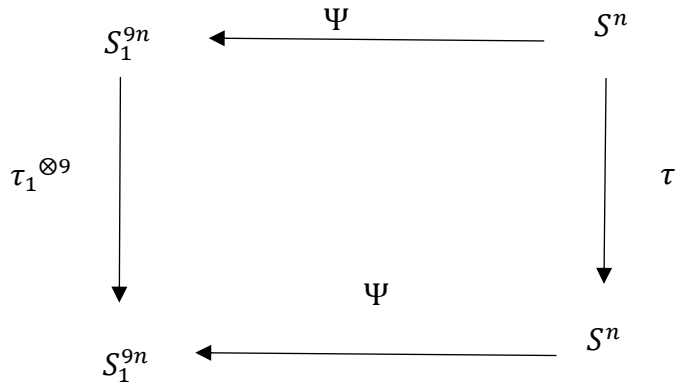
$2y_0+z_0,\dots,2y_{n-2}+z_{n-2},x_{n-1}+z_{n-1},x_0+z_0,\dots,x_{n-2}+z_{n-2},$

$x_{n-1}+y_{n-1}+z_{n-1}, x_0+y_0+z_0, \dots, x_{n-2}+y_{n-2}+z_{n-2}, x_{n-1}+2y_{n-1}+z_{n-1},$

$x_0+2y_0+z_0, \dots, x_{n-2}+2y_{n-2}+z_{n-2}, 2x_{n-1}+z_{n-1}, 2x_0+z_0, \dots,$

$2x_{n-2}+z_{n-2}, 2x_{n-1}+y_{n-1}+z_{n-1}, 2x_0+y_0+z_0, \dots, 2x_{n-2}+y_{n-2}+z_{n-2},$

$2x_{n-1}+2y_{n-1}+z_{n-1}, 2x_0+2y_0+z_0, \dots, 2x_{n-2}+2y_{n-2}+z_{n-2})$ elde ederiz. Böylece



diyagramı gerçekleşmiş olur.

4.1.12. Teorem: S halkası üzerinde, D kodunun n uzunluklu bir devirli kod olabilmesi için gerekli ve yeterli şart $\Psi(D)$ nin S_1 halkası üzerinde $9n$ uzunluklu 9'uncu

mertebeden bir yarı devirli kod olmasıdır.

Kanıt: D kodu S halkasında devirli kod olsun. Böylelikle $\tau(D) = D$ olur. Denklemin Ψ görüntüsü alındığında $\Psi\left(\tau(D)\right) = \Psi(D)$ elde edilir. 4.1.11. Önermeden $\Psi\big(\tau(D)\big) = {\tau_1}^{\otimes 9}\big(\Psi(D)\big) = \Psi(D)$ bulunur. Böylece $\Psi(D)$'nin 9'uncu mertebeden bir yarı devirli kod olur. Tersine $\Psi(D)$, 9'uncu mertebeden bir yarı devirli kod ise ${\tau_1}^{\otimes 9}\big(\Psi(D)\big) = \Psi(D)$ elde edilir. 4.1.11. Önermeden

$\Psi\big(\tau(D)\big) = {\tau_1}^{\otimes 9}\big(\Psi(D)\big) = \Psi(D)$ bulunur. Böylece Ψ bire bir dönüşüm olduğu için $\tau(D) = D$ olur. O halde D bir devirli koddur.

4.1.13. Tanım: $\mathbb{F}_3$ cisminde tanımlanan uzunluğu $9n$ olan lineer bir kodu D_2 olarak tanımlayalım.

$$\tau_2 \colon \mathbb{F}_3^{9n} \longrightarrow \mathbb{F}_3^{9n}$$

$$(b_0, b_1, \dots, b_{9n-1}) \mapsto \tau_2(b_0, b_1, \dots, b_{9n-1}) = (b_{9n-1}, b_0, \dots, b_{9n-2})$$

permütasyonu için $\tau_2(D_2) = D_2$ koşulu sağlanıyorsa D_2 koduna $\mathbb{F}_3^{9n}$ üzerinde bir devirli kod denir.

4.1.14. Tanım: D_2, $\mathbb{F}_3$ cismi üzerinde tanımlanan uzunluğu $81n$ olan lineer kod olsun. $i = 0,1, \dots ,8$, $b \in \mathbb{F}_3^{81n}$ olmak üzere $b^{(i)} \in \mathbb{F}_3^{9n}$ ve

$b = (b_0, b_1, \dots, b_{81n-1}) = (b^{(0)}\big|b^{(1)}\big| \dots \big|b^{(8)}) \in \mathbb{F}_3^{81n}$ için

$b^{(0)} = (b_0, \dots, b_{9n-1})$,

$b^{(1)} = (b_{9n}, \dots, b_{18n-1})$,

$\vdots$

$b^{(8)} = (b_{72n}, \dots, b_{81n-1})$

olsun.

$$\tau_2^{\otimes 9} \colon \mathbb{F}_3^{81n} \to \mathbb{F}_3^{81n}$$

$$b \longmapsto \tau_2^{\otimes 9}(b) = (\tau_2(b^{(0)})\big|\tau_2\big(b^{(1)}\big)\big| \dots \big|\tau_2(b^{(8)})\big)$$

permütasyonu için $\tau_2^{\otimes 9}(D_2) = D_2$ koşulu sağlanıyorsa D_2 koduna $\mathbb{F}_3^{81n}$ üzerinde bir 9'uncu mertebeden yarı devirli kod denir.

4.1.15. Önerme: τ_1 dönüşümü, S_1^{9n} üzerinde bir $\tau_2^{\otimes 9}$ dönüşümü $\mathbb{F}_3^{81n}$ üzerinde bir permütasyon Ψ_1, S_1^{9n} den $\mathbb{F}_3^{81n}$ e yukarıda tanımlanan Gray dönüşümü olsun.

$\Psi_1 \circ \tau_1 = \tau_2^{\otimes 9} \circ \Psi_1$ eşitliği sağlanır.

Kanıt: Her $0 \leq i \leq 9n-1$ için $t_i = x_i + y_i u_1 + z_i {u_1}^2$ olmak üzere

$t = (t_0, t_1, \dots, t_{9n-1}) \in S_1^{9n}$ olsun.

Burada $\tau_1(t) = \tau_1(t_0, t_1, \dots, t_{9n-1}) = (t_{9n-1}, t_0, t_1, \dots, t_{9n-2})$ bu ifadenin Ψ_1 Gray görüntüsü alındığında

$\Psi_1(\tau_1(t)) = \Psi_1(t_{9n-1}, t_0, t_1, \dots, t_{9n-2}) = (z_{9n-1}, z_0, z_1, \dots, z_{9n-2}, y_{9n-1} + z_{9n-1},$

$y_0 + z_0, \dots, y_{9n-2} + z_{9n-2}, 2y_{9n-1} + z_{9n-1}, 2y_0 + z_0, \dots, 2y_{9n-2} + z_{9n-2},$

$x_{9n-1} + z_{9n-1}, x_0 + z_0, \dots, x_{9n-2} + z_{9n-2}, x_{9n-1} + y_{9n-1} + z_{9n-1},$

$x_0 + y_0 + z_0, \dots, x_{9n-2} + y_{9n-2} + z_{9n-2}, x_{9n-1} + 2y_{9n-1} + z_{9n-1},$

$x_0 + 2y_0 + z_0, \dots, x_{9n-2} + 2y_{9n-2} + z_{9n-2}, 2x_{9n-1} + z_{9n-1}, 2x_0 + z_0, \dots,$

$2x_{9n-2} + z_{9n-2}, 2x_{9n-1} + y_{9n-1} + z_{9n-1}, 2x_0 + y_0 + z_0, \dots,$

$2x_{9n-2} + y_{9n-2} + z_{9n-2}, 2x_{9n-1} + 2y_{9n-1} + z_{9n-1}, 2x_0 + 2y_0 + z_0, \dots,$

$2x_{9n-2} + 2y_{9n-2} + z_{9n-2})$

elde edilir.

Bununla birlikte $t \in S_1^{9n}$ in Ψ_1 Gray görüntüsü;

$\Psi_1(t) = \Psi_1(t_0, t_1, \dots, t_{9n-1}) = (z_0, z_1, \dots, z_{9n-1}, y_0 + z_0, y_1 + z_1, \dots,$

$y_{9n-1} + z_{9n-1}, 2y_0 + z_0, 2y_1 + z_1, \dots, 2y_{9n-1} + z_{9n-1}, x_0 + z_0, x_1 + z_1, \dots,$

$x_{9n-1} + z_{9n-1}, x_0 + y_0 + z_0, x_1 + y_1 + z_1, \dots, x_{9n-1} + y_{9n-1} + z_{9n-1},$

$x_0 + 2y_0 + z_0, x_1 + 2y_1 + z_1, \dots, x_{9n-1} + 2y_{9n-1} + z_{9n-1}, 2x_0 + z_0,$

$2x_1 + z_1, \dots, 2x_{9n-1} + z_{9n-1}, 2x_0 + y_0 + z_0, 2x_1 + y_1 + z_1, \dots,$

$2x_{9n-1} + y_{9n-1} + z_{9n-1}, 2x_0 + 2y_0 + z_0, 2x_1 + 2y_1 + z_1, \dots,$

$2x_{9n-1} + 2y_{9n-1} + z_{9n-1})$

olarak bulunur. Buradan $\tau_2^{\otimes 9}$ dönüşümü uyguladığımızda

$$\tau_2^{\otimes 9}\big(\Psi_1(t)\big) = \tau_2^{\otimes 9}(z_0, z_1, \dots, z_{9n-1}, y_0 + z_0, y_1 + z_1, \dots, y_{9n-1} + z_{9n-1},$$

$$2y_0 + z_0, 2y_1 + z_1, \dots, 2y_{9n-1} + z_{9n-1}, x_0 + z_0, x_1 + z_1, \dots, x_{9n-1} + z_{9n-1},$$

$$x_0 + y_0 + z_0, x_1 + y_1 + z_1, \dots, x_{9n-1} + y_{9n-1} + z_{9n-1}, x_0 + 2y_0 + z_0,$$

$$x_1 + 2y_1 + z_1, \dots, x_{9n-1} + 2y_{9n-1} + z_{9n-1}, 2x_0 + z_0, 2x_1 + z_1, \dots,$$

$$2x_{9n-1} + z_{9n-1}, 2x_0 + y_0 + z_0, 2x_1 + y_1 + z_1, \dots, 2x_{9n-1} + y_{9n-1} + z_{9n-1},$$

$$2x_0 + 2y_0 + z_0, 2x_1 + 2y_1 + z_1, \dots, 2x_{9n-1} + 2y_{9n-1} + z_{9n-1})$$

$$= (z_{9n-1}, z_0, z_1, \dots, z_{9n-2}, y_{9n-1} + z_{9n-1}, y_0 + z_0, \dots, y_{9n-2} + z_{9n-2},$$

$$2y_{9n-1} + z_{9n-1}, 2y_0 + z_0, \dots, 2y_{9n-2} + z_{9n-2}, x_{9n-1} + z_{9n-1}, x_0 + z_0, \dots,$$

$$x_{9n-2} + z_{9n-2}, x_{9n-1} + y_{9n-1} + z_{9n-1}, x_0 + y_0 + z_0, \dots,$$

$$x_{9n-2} + y_{9n-2} + z_{9n-2}, x_{9n-1} + 2y_{9n-1} + z_{9n-1}, x_0 + 2y_0 + z_0, \dots,$$

$$x_{9n-2} + 2y_{9n-2} + z_{9n-2}, 2x_{9n-1} + z_{9n-1}, 2x_0 + z_0, \dots, 2x_{9n-2} + z_{9n-2},$$

$$2x_{9n-1} + y_{9n-1} + z_{9n-1}, 2x_0 + y_0 + z_0, \dots, 2x_{9n-2} + y_{9n-2} + z_{9n-2},$$

$$2x_{9n-1} + 2y_{9n-1} + z_{9n-1}, 2x_0 + 2y_0 + z_0, \dots, 2x_{9n-2} + 2y_{9n-2} + z_{9n-2})$$

elde ederiz.

4.1.16. Teorem: S_1 halkası üzerinde D_1 kodunun $9n$ uzunluklu bir devirli kod olabilmesi için gereken şart $\Psi_1(D_1)$ nin $\mathbb{F}_3$ cisminde $81n$ uzunluklu 9'uncu mertebeden bir yarı devirli kod olmasıdır.

Kanıt: D_1 bir devirli kod olarak ele alındığında $\tau_1(D_1) = D_1$ dir. Eşitliğin her iki tarafının Ψ_1 görüntüsü alındığında $\Psi_1\big(\tau_1(D_1)\big) = \Psi_1(D_1)$ elde edilir. 4.1.15. Önermeden $\tau_2^{\otimes 9}\big(\Psi_1(D_1)\big) = \Psi_1\big(\tau_1(D_1)\big) = \Psi_1(D_1)$ bulunur. Böylelikle $\Psi_1(D_1)$'nin 9'uncu mertebeden, yarı devirli kod olduğu görülür. Diğer taraftan $\Psi_1(D)$ 9'uncu mertebeden bir yarı-devirli kod ise $\tau_2^{\otimes 9}\big(\Psi_1(D_1)\big) = \Psi_1(D_1)$ sağlanır. 4.1.15. Önermeden $\tau_2^{\otimes 9}\big(\Psi_1(D_1)\big) = \Psi_1\big(\tau_1(D_1)\big) = \Psi_1(D_1)$ bulunur.

4.1.17. Sonuç: D kodunun S halkasında n uzunluklu bir devirli kod olması için yeterli ve gerekli şart $\Psi_1(\Psi(D))$ nin $\mathbb{F}_3$ cisminde $81n$ uzunluklu 9'uncu mertebeden bir yarı devirli kod olmasıdır.

Kanıt: D kodunun önce Ψ görüntüsü sonra Ψ_1 görüntüsü alındığında 4.1.12. Teorem ve 4.1.16. Teoremleri yardımıyla kanıt aşikardır.

4.2. $\mathbb{F}_p[u_1, u_2] / \langle u_1{}^3, u_2{}^3, u_1 \cdot u_2 \rangle$ Halkasının Yapısı ve Devirli Kodların Gray Görüntüleri

4.2.1. Tanım: $\mathbb{F}_p$ cisminde;

Her $d \in \mathbb{F}_p$ için $w_H(d) = \begin{cases} 0, d = 0 \\ 1, d \neq 0 \end{cases}$ biçiminde tanımlanan fonksiyona $\mathbb{F}_p$ cisminde hamming ağırlık fonksiyonu denir.

Bu durumda her $d = (d_0, d_1, \dots, d_{n-1}) \in \mathbb{F}_p$ için $w_H(d) = \sum_{i=0}^{n-1} w_H(d_i)$ dir.

4.2.2. Tanım: $S_1 = \mathbb{F}_p + u_2\mathbb{F}_p + u_2{}^2\mathbb{F}_p$ halkası üzerinde

Her $s \in S_1$ için

$$w_{hom}(s) = \begin{cases} p^2 - p, s \in S_1 - S_1 \cdot u_2{}^2 \\ p^2, s \in S_1 \cdot u_2{}^2 - \{0\} \\ 0, s = 0 \end{cases}$$

şeklinde adlandırılan parçalı fonksiyona S_1'de tanımlanan homogeneous ağırlık fonksiyonu denir. Bu halde

her $s = (s_0, s_1, \dots, s_{n-1}) \in S_1{}^n$ için $w_{hom}(s) = \sum_{i=0}^{n-1} w_{hom}(s_i)$ dir.

4.2.3. Tanım: $S = \mathbb{F}_p + u_1\mathbb{F}_p + u_2\mathbb{F}_p + u_1{}^2\mathbb{F}_p + u_2{}^2\mathbb{F}_p$ halkası üzerinde; S halkasının elemanların ağırlıkları 0 ile p^4 arasında ayrıca herhangi bir elemanı $\mathbb{F}_p$'deki bir elemanla çarpımı yine aynı ağırlığı verir. $k \in \mathbb{F}_p$ ve $r \in R$ tanımı için

$w_S(k \cdot r) = w_S(r)$ olur.

4.2.4. Tanım: Her $m, k \in S^n$, $m \neq k$ için m ve k arasındaki d_S uzaklığı

$w_S(m - k)$ olarak tanımlanır. D, S^n üzerinde bir kod olsun. D kodunun minimum uzaklığı $\forall\, m, k \in D$ ve $m \neq k$ için $d_S(D) = min\{d_S(m, k)\}$ olduğunu söyleriz.

S^n üzerinde tanımlanan 4.2.4 tanım biçiminde ${S_1}^n$ ve $\mathbb{F}_p^n$ üzerinde de tanımlanabilir. ${S_1}^n$ ve $\mathbb{F}_p^n$, D kodunun minimum uzaklığı sırasıyla $d_{hom}(D_1)$ ve $d_H(D_2)$ ile ifade edilir.

4.2.5. Tanım: $u_1^3 = 0$, $u_2^3 = 0$ ve $u_1 \cdot u_2 = u_2 \cdot u_1 = 0$ koşulları ile

$S = \mathbb{F}_p + u_1\mathbb{F}_p + u_2\mathbb{F}_p + {u_1}^2\mathbb{F}_p + {u_2}^2\mathbb{F}_p$ ve $S_1 = \mathbb{F}_p + u_2\mathbb{F}_p + {u_2}^2\mathbb{F}_p$ olmak üzere;

$$\Psi: S \to S_1^{p^2}$$

$$a + bu_1 + cu_2 + d{u_1}^2 + e{u_2}^2 \mapsto \Psi(a + bu_1 + cu_2 + d{u_1}^2 + e{u_2}^2)$$

$$\Psi(a + bu_1 + cu_2 + d{u_1}^2 + e{u_2}^2) = (x + yu_1 + z{u_1}^2)$$

biçiminde oluşturulan dönüşüme S halkası üzerindeki Gray dönüşümü denir. Burada her $i = 0,1, \dots, p-1$ için $t_i \in \mathbb{F}_p^p$ olsun.

$\Psi(a + bu_1 + cu_2 + d{u_1}^2 + e{u_2}^2) = (t_0|t_1| \dots |t_{p-1})$ yazılır. Buradan da;

$t_0 = (z, y + z, 2y + z \dots, (p-1)y + z)$,

$t_1 = (x + z, x + y + z, x + 2y + z, \dots, x + (p-1)y + z)$,

$\vdots$

$t_{p-1} = \big((p-1)x + z, (p-1)x + y + z, \dots, (p-1)x + (p-1)y + z\big)$

olur. Ayrıca $a, b, c, d, e \in \mathbb{F}_p$ için

$$x = a + cu_2 + e{u_2}^2$$

$$y = b + au_2 + (a + c){u_2}^2$$

$$z = d + (a + b)u_2 + (b + c){u_2}^2$$

dir.

4.2.6. Tanım: $u_2^3 = 0$ koşulu ile $S_1 = \mathbb{F}_p + u_2\mathbb{F}_p + {u_2}^2\mathbb{F}_p$, $x', y', z' \in \mathbb{F}_p$ olmak üzere;

$$\Psi_1: S_1 \to \mathbb{F}_p^{p^2}$$

$$x' + y'u + z'u^2 \longmapsto \Psi_1(x' + y'u_2 + z'{u_2}^2)$$

her $i = 0,1, \dots, p-1$ için $t_i \in \mathbb{F}_p^p$ olsun. $\Psi_1(x' + y'u_2 + z'{u_2}^2) = (t_0|t_1| \dots |t_{p-1})$

yazılır. Buradan da;

$t_0 = (z', y' + z', 2y' + z' \dots, (p-1)y' + z'),$

$t_1 = (x' + z', x' + y' + z', x' + 2y' + z', \dots, x' + (p-1)y' + z'),$

$\vdots$

$t_{p-1} = \left((p-1)x' + z', (p-1)x' + y' + z', \dots, (p-1)x' + (p-1)y' + z'\right)$

tanımı verilen S_1 halkası üzerine uygulanan dönüşüme Gray dönüşümü denir.

Ψ_1 dönüşümünü, S_1^n e biçimde genişletilebilir.

4.2.7. Örnek: $p = 5$ durumunda $S = \mathbb{F}_5 + u_1\mathbb{F}_5 + u_2\mathbb{F}_5 + {u_1}^2\mathbb{F}_5 + {u_2}^2\mathbb{F}_5$ halkasının bazı elemanları için 4.2.1 tanım ve 4.2.2 tanım da bulunan Gray dönüşümleri yapılarak aşağıdaki gibi örneklendirilebilir.

- $(1 + u_1 + u_2 + {u_1}^2 + {u_2}^2)$ elemanının Ψ Gray görüntüsü;

$$(1 + u_1 + u_2 + {u_1}^2 + {u_2}^2) = (1 + 2u_2 + 2{u_2}^2, 2 + 3u_2 + 4{u_2}^2,$$
$$3 + 4u_2 + {u_2}^2, 4 + 3{u_2}^2, u_2, 2 + 3u_2 + 3{u_2}^2, 3 + 4u_2, 4 + 2{u_2}^2,$$
$$u_2 + 4{u_2}^2, 1 + 2u_2 + {u_2}^2, 3 + 4u_2 + 4{u_2}^2, 4 + {u_2}^2, u_2 + 3{u_2}^2,$$
$$1 + 2u_2, 2 + 3u_2 + 2{u_2}^2, 4, u_2 + 2{u_2}^2, 1 + 2u_2 + 4{u_2}^2,$$
$$2 + 3u_2 + {u_2}^2, 3 + 4u_2 + 3{u_2}^2, u_2 + {u_2}^2, 1 + 2u_2 + 3{u_2}^2,$$
$$2 + 3u_2, 3 + 4u_2 + 2{u_2}^2, 4 + 4{u_2}^2)$$

$\Psi_1(1 + 2u_2 + 2{u_2}^2, 2 + 3u_2 + 4{u_2}^2, 3 + 4u_2 + {u_2}^2, 4 + 3{u_2}^2, u_2,$

$2 + 3u_2 + 3{u_2}^2, 3 + 4u_2, 4 + 2{u_2}^2, u_2 + 4{u_2}^2, 1 + 2u_2 + {u_2}^2, 3 + 4u_2 + 4{u_2}^2,$

$4 + {u_2}^2, u_2 + 3{u_2}^2, 1 + 2u_2, 2 + 3u_2 + 2{u_2}^2, 4, u_2 + 2{u_2}^2, 1 + 2u_2 + 4{u_2}^2,$

$2 + 3u_2 + {u_2}^2, 3 + 4u_2 + 3{u_2}^2, u_2 + {u_2}^2, 1 + 2u_2 + 3{u_2}^2, 2 + 3u_2,$

$3 + 4u_2 + 2{u_2}^2, 4 + 4{u_2}^2) = (2,4,1,3, \dots, 0)$

- $(3 + 3u_1 + 2u_2)$ elemanının Ψ Gray görüntüsü;

$(3 + 3u_1 + 2u_2) = (u_2, 3 + 4u_2, 1 + 2u_2, 4, 2 + 3u_2, 3 + 3u_2, 1 + u_2,$

$4 + 4u_2, 2 + 2u_2, 0, 1, 4 + 3u_2, 2 + u_2, 4u_2, 3 + 2u_2, 4 + 2u_2, 2, 3u_2,$

$3 + u_2, 1 + 4u_2, 2 + 4u_2, 2u_2, 3, 1 + 3u_2, 4 + u_2)$

$\Psi_1(u_2, 3+4u_2, 1+2u_2, 4, 2+3u_2, 3+3u_2, 1+u_2, 4+4u_2, 2+2u_2, 0, 1,$

$4+3u_2, 2+u_2, 4u_2, 3+2u_2, 4+2u_2, 2, 3u_2, 3+u_2, 1+4u_2, 2+4u_2, 2u_2, 3,$

$1+3u_2, 4+u_2) = (0,0,0,0 \ldots, 1,2,3,4,0,1 \ldots, 1,0)$

- $(1+4u_1)$ elemanının Ψ Gray görüntüsü;

$(1+4u_1) = (4{u_2}^2, 4+u_2+4{u_2}^2, 3+3u_2+4{u_2}^2,$

$2+3u_2+4{u_2}^2, 1+4u_2+4{u_2}^2, 1+4{u_2}^2, u_2+4{u_2}^2,$

$4+2u_2+4{u_2}^2, 3+3u_2+4{u_2}^2, 2+4u_2+4{u_2}^2, 2+4{u_2}^2,$

$1+u_2+4{u_2}^2, 2u_2+4{u_2}^2, 4+3u_2+4{u_2}^2, 3+4u_2+4{u_2}^2,$

$3+4{u_2}^2, 2+u_2+4{u_2}^2, 1+2u_2+4{u_2}^2, 3u_2+4{u_2}^2,$

$4+4u_2+4{u_2}^2, 4+4{u_2}^2, 3+u_2+4{u_2}^2, 2+2u_2+4{u_2}^2,$

$1+3u_2+4{u_2}^2, 4u_2+4{u_2}^2)$

$\Psi_1(4{u_2}^2, 4+u_2+4{u_2}^2, 3+3u_2+4{u_2}^2, 2+3u_2+4{u_2}^2, 1+4u_2+4{u_2}^2,$

$1+4{u_2}^2, u_2+4{u_2}^2, 4+2u_2+4{u_2}^2, 3+3u_2+4{u_2}^2, 2+4u_2+4{u_2}^2,$

$2+4{u_2}^2, 1+u_2+4{u_2}^2, 2u_2+4{u_2}^2, 4+3u_2+4{u_2}^2, 3+4u_2+4{u_2}^2,$

$3+4{u_2}^2, 2+u_2+4{u_2}^2, 1+2u_2+4{u_2}^2, 3u_2+4{u_2}^2, 4+4u_2+4{u_2}^2,$

$4+4{u_2}^2, 3+u_2+4{u_2}^2, 2+2u_2+4{u_2}^2, 1+3u_2+4{u_2}^2, 4u_2+4{u_2}^2) =$
$(4,4,4,4, \ldots, 0,0)$

4.2.8. Önerme: Ψ ve Ψ_1 dönüşümleri 4.2.5. tanım ve 4.2.6. tanımdaki gibi olsun. Ψ dönüşümü (S^n, d_S) den $\left(S_1^{p^2 n}, d_{hom}\right)$ e, S_1 dönüşümü $\left(S_1^{p^2 n}, d_{hom}\right)$ den $\left(\mathbb{F}_p^{p^4 n}, d_H\right)$ e bir izometridir. Bunun sonucu olarak $\Psi_1 \circ \Psi$ dönüşümü de (S^n, d_{hom}) den $\left(\mathbb{F}_p^{p^4 n}, d_H\right)$ e bir izometridir.

Kanıt: Her $s_1, s_2 \in S^n$, $s_1 \neq s_2$ için

$d_S(s_1, s_2) = w_S(s_1 - s_2) = w_L\big(\Psi(s_1 - s_2)\big) = w_L\big(\Psi(s_1) - (s_2)\big)$

$= d_{hom}\big(\Psi(s_1), \Psi(s_2)\big) = w_H\left(\Psi_1\big(\Psi(s_1) - \Psi(s_2)\big)\right) = w_H(\Psi_1\big(\Psi(s_1 - s_2)\big)$

$= w_H(\Psi_1 \circ \Psi(s_1 - s_2) = w_H\big(\Psi_1 \circ \Psi(s_1) - \Psi_1 \circ \Psi(s_2)\big)$

$= d_H(\Psi_1 \circ \Psi(s_1), \Psi_1 \circ \Psi(s_2))$

4.2.9. Tanım: D, $S = \mathbb{F}_p + u_1\mathbb{F}_p + u_2\mathbb{F}_p + {u_1}^2\mathbb{F}_p + {u_2}^2\mathbb{F}_p$ halkası üzerinde n uzunluğunda bir lineer kod olsun.

$$\tau: S^n \to S^n$$

$$(d_0, d_1, \dots, d_{n-1}) \longmapsto \tau(d_0, d_1, \dots, d_{n-1}) = (d_{n-1}, c_0, \dots, d_{n-2})$$

permütasyonu için $\tau(D) = D$ koşulu sağlanıyorsa D kodu S^n üzerinde devirli kod denir.

4.2.10. Tanım: D_1, S_1 halkası üzerinde tanımlanan uzunluğu p^2n olan bir lineer kod olsun. $i = 0,1, \dots, (p^2 - 1)$, $a \in S_1^{p^2n}$ olmak üzere $a^{(i)} \in S_1^n$ ve

$a = \big(a_0, a_1, \dots, a_{p^2n-1}\big) = (a^{(0)}\big|a^{(1)}\big| \dots \big|a^{(p^2-1)}) \in S_1^{p^2n}$ için

$a^{(0)} = (a_0, \dots, a_{n-1})$,

$a^{(1)} = (a_n, \dots, a_{2n-1})$,

$\vdots$

$a^{(p^2-1)} = (a_0, \dots, a_{p^2n-1})$

olsun.

$$\tau_1^{\otimes p^2}: S_1^{p^2n} \to S_1^{p^2n}$$

$$a \longmapsto \tau_1^{\otimes p^2}(a) = (\tau_1(a^{(0)})\big|\tau_1(a^{(1)})\big| \dots \big|\tau_1(a^{(p^2-1)}))$$

permütasyonu için $\tau_1^{\otimes p^2}(D_1) = D_1$ koşulu sağlanıyorsa D_1 koduna $S_1^{p^2n}$ üzerinde bir 9'uncu mertebeden yarı devirli kod denir.

4.2.11. Önerme: τ dönüşümü S^n üzerinde bir permütasyon $\tau_1^{\otimes p^2}$ dönüşümü $S_1^{p^2n}$ üzerinde bir permütasyon ve Ψ, S^n den $S_1^{p^2n}$ e yukarıda tanımlanan Gray dönüşümünü ise $\Psi \circ \tau = \tau_1^{\otimes p^2} \circ \Psi$ eşitliği sağlanır.

Kanıt: Her $0 \le i \le n - 1$ için $d_i = x_i + y_i u_1 + z_i {u_1}^2$ olmak üzere

$d = (d_0, d_1, \dots, d_{n-1}) \in S^n$ olsun. Bu durumda $d \in S^n$ in Ψ Gray görüntüsü

aldığımızda

$\Psi(d) = \Psi(d_0, d_1, \dots, d_{n-1}) = \Psi(x_0 + y_0u_1 + z_0{u_1}^2, x_1 + y_1u_1 + z_1{u_1}^2, \dots,$

$x_{n-1} + y_{n-1}u_1 + z_{n-1}{u_1}^2)$ elde ederiz.

$s = 0,1, \dots, p-1$ için $t_s \in \mathbb{F}_p^p$ olsun.

$\Psi(a + bu_1 + cu_2 + d{u_1}^2 + e{u_2}^2) = (t_0|t_1| \dots |t_{p-1})$ yazılır. Buradan da;

$t_0 = (z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, y_0 + z_0, y_1 + z_1, \dots, y_{n-1} + z_{n-1}, 2y_0 + z_0, 2y_1 + z_1, \dots,$

$2y_{n-1} + z_{n-1}, (p-1)y_0 + z_0, (p-1)y_1 + z_1, \dots, (p-1)y_{n-1} + z_{n-1}),$

$t_1 = (x_0 + z_0, x_1 + z_1, \dots, x_{n-1} + z_{n-1}, x_0 + y_0 + z_0, x_1 + y_1 + z_1, \dots,$

$x_{n-1} + y_{n-1} + z_{n-1}, x_0 + 2y_0 + z_0, x_1 + 2y_1 + z_1, \dots, x_{n-1} + 2y_{n-1} + z_{n-1}, \dots,$

$x_0 + (p-1)y_0 + z_0, x_1 + (p-1)y_1 + z_1, \dots, x_{n-1} + (p-1)y_{n-1} + z_{n-1}),$

$\vdots$

$t_{p-1} = ((p-1)x_0 + z_0, (p-1)x_1 + z_1, \dots, (p-1)x_{n-1} + z_{n-1},$

$(p-1)x_0 + y_0 + z_0, (p-1)x_1 + y_1 + z_1, \dots (p-1)x_{n-1} + y_{n-1} + z_{n-1},$

$(p-1)x_0 + (p-1)y_0 + z_0, (p-1)x_1 + (p-1)y_1 + z_1, \dots,$

$(p-1)x_{n-1} + (p-1)y_{n-1} + z_{n-1})$

olduğu görülür. Böylece $\tau_1^{\otimes p^2}$ dönüşümü uyguladığımızda

$$\tau_1^{\otimes p^2}(t_0|t_1| \dots |t_{p-1})$$

$t_0 = (z_{n-1}, z_0, \dots, z_{n-2}, y_{n-1} + z_{n-1}, y_0 + z_0, \dots, y_{n-2} + z_{n-2}, 2y_{n-1} + z_{n-1},$

$2y_0 + z_0, \dots, 2y_{n-2} + z_{n-2}, (p-1)y_{n-1} + z_{n-1}, (p-1)y_0 + z_0, \dots,$

$(p-1)y_0 + z_0, \dots, (p-1)y_{n-2} + z_{n-2})$

$t_1 = (x_{n-1} + z_{n-1}, x_0 + z_0, \dots, x_{n-2} + z_{n-2}, x_{n-1} + y_{n-1} + z_{n-1},$

$x_0 + y_0 + z_0, \dots, x_{n-2} + y_{n-2} + z_{n-2}, x_{n-1} + 2y_{n-1} + z_{n-1}, x_0 + 2y_0 + z_0, \dots,$

$x_{n-2} + 2y_{n-2} + z_{n-2}, \dots, x_{n-1} + (p-1)y_{n-1} + z_{n-1}, x_0 + (p-1)y_0 + z_0, \dots,$

$x_{n-2} + (p-1)y_{n-2} + z_{n-2}),$

$\vdots$

$t_{p-1} = ((p-1)x_{n-1} + z_{n-1}, (p-1)x_0 + z_0, \dots, (p-1)x_{n-2} + z_{n-2},$

$(p-1)x_{n-1} + y_{n-1} + z_{n-1}, (p-1)x_0 + y_0 + z_0, \dots,$

$(p-1)x_{n-2} + y_{n-2} + z_{n-2}, (p-1)x_{n-1} + (p-1)y_{n-1} + z_{n-1},$

$(p-1)x_0 + (p-1)y_0 + z_0, \dots, (p-1)x_{n-2} + (p-1)y_{n-2} + z_{n-2})$

olarak buluruz.

Diğer taraftan;

$\tau(d) = \tau(d_0, d_1, \dots, d_{n-1}) = (\, d_{n-1}, d_0, \dots, d_{n-2})$ kodunun Ψ Gray görüntüsünü aldığımızda

$\Psi\,(\tau(d)) = \Psi(d_{n-1}, d_0, \dots, d_{n-2}) = \Psi(x_{n-1} + y_{n-1}u_1 + z_{n-1}{u_1}^2,$

$x_0 + y_0u_1 + z_0{u_1}^2, \dots, x_{n-2} + y_{n-2}u_1 + z_{n-2}{u_1}^2)$

$t_0 = (z_{n-1}, z_0, \dots, z_{n-2}, y_{n-1} + z_{n-1}, y_0 + z_0, \dots, y_{n-2} + z_{n-2}, 2y_{n-1} + z_{n-1},$

$2y_0 + z_0, \dots, 2y_{n-2} + z_{n-2}, (p-1)y_{n-1} + z_{n-1}, (p-1)y_0 + z_0, \dots,$

$(p-1)y_0 + z_0, \dots (p-1)y_{n-2} + z_{n-2}),$

$t_1 = (x_{n-1} + z_{n-1}, x_0 + z_0, \dots, x_{n-2} + z_{n-2}, x_{n-1} + y_{n-1} + z_{n-1},$

$x_0 + y_0 + z_0, \dots, x_{n-2} + y_{n-2} + z_{n-2}, x_{n-1} + 2y_{n-1} + z_{n-1}, x_0 + 2y_0 + z_0, \dots,$

$x_{n-2} + 2y_{n-2} + z_{n-2}, \dots, x_{n-1} + (p-1)y_{n-1} + z_{n-1}, x_0 + (p-1)y_0 + z_0, \dots,$

$x_{n-2} + (p-1)y_{n-2} + z_{n-2}),$

$\vdots$

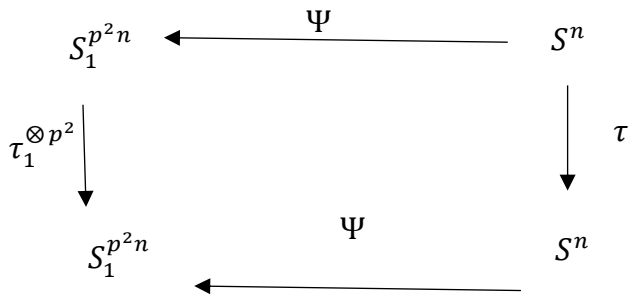
$t_{p-1} = ((p-1)x_{n-1} + z_{n-1}, (p-1)x_0 + z_0, \dots, (p-1)x_{n-2} + z_{n-2},$

$(p-1)x_{n-1} + y_{n-1} + z_{n-1}, (p-1)x_0 + y_0 + z_0, \dots,$

$(p-1)x_{n-2} + y_{n-2} + z_{n-2}, (p-1)x_{n-1} + (p-1)y_{n-1} + z_{n-1},$

$(p-1)x_0 + (p-1)y_0 + z_0, \dots, (p-1)x_{n-2} + (p-1)y_{n-2} + z_{n-2})$

elde edilir. Böylece



diyagramını elde ederiz.

4.2.12. Teorem: D kodunun S halkasında tanımlanan n uzunluğuna sahip bir devirli kod olması için gerekli ve yeterli şart $\Psi(D)$ nin S_1 halkası üzerinde p^2n uzunluğunda p^2'inci mertebeden bir yarı devirli kod olmasıdır.

Kanıt: S halkasında D, devirli kod olarak adlandırılır. Böylelikle $\sigma(D) = D$ olur. İki tarafının da Ψ görüntüsü alındığında $\Psi\big(\sigma(D)\big) = \Psi(D)$ elde edilir. 4.2.11. Önermeden $\Psi\big(\sigma(D)\big) = \sigma^{\otimes p^2}\big(\Psi(D)\big) = \Psi(D)$ bulunur. Böylelikle $\Psi(D)$ nin p^2'inci mertebeden bir yarı devirli kod olduğu kolaylıkla görülür. Tersine $\Psi(D)$, p^2'inci mertebeden bir yarı devirli kod ise $\sigma^{\otimes p^2}\big(\Psi(D)\big) = \Psi(D)$ elde edilir. 4.2.11. Önermeden $\Psi\big(\sigma(D)\big) = \sigma^{\otimes p^2}\big(\Psi(D)\big) = \Psi(D)$ bulunur.

4.2.13. Tanım: D_1, S_1 halkası üzerinde p^2n uzunluğunda bir lineer kod olsun.

$$\tau_1 : S_1^{p^2n} \to S_1^{p^2n}$$

$$\big(d_0, d_1, \dots, d_{p^2n-1}\big) \longmapsto \tau_1\big(d_0, d_1, \dots, d_{p^2n-1}\big) = \big(d_{p^2n-1}, d_0, \dots, d_{p^2n-2}\big)$$

permütasyonu için $\tau_1(D_1) = D_1$ koşulu sağlanıyorsa bu koda $S_1^{p^2n}$ üzerinde bir devirli kod adı verilir.

4.2.14. Tanım: $\mathbb{F}_p$ cisminde tanımlanan uzunluğu p^2n olan lineer bir kodu D_2 olarak tanımlayalım.

$$\tau_2 : \mathbb{F}_p^{p^2n} \longrightarrow \mathbb{F}_p^{p^2n}$$

$$\big(b_0, b_1, \dots, b_{p^2n-1}\big) \mapsto \tau_2\big(b_0, b_1, \dots, b_{p^2n-1}\big) = (b_{p^2n-1}, b_0, \dots, b_{p^2n-2})$$

permütasyonu için $\tau_2(D_2) = D_2$ koşulu sağlanıyorsa D_2 koduna $\mathbb{F}_p^{p^2n}$ üzerinde bir devirli kod denir.

4.2.15. Tanım: D_2, S_2 halkası üzerinde tanımlanan uzunluğu p^4n olan bir lineer kod olsun. $i = 0,1, \dots, (p^2-1)$, $b \in \mathbb{F}_p^{p^4n}$ olmak üzere $b^{(i)} \in \mathbb{F}_p^{p^4n}$ ve

$b = (b_0, b_1, \dots, b_{p^4n-1}) = (\tau_2(b^{(0)})|\tau_2(b^{(1)})| \dots |\tau_2(b^{(p^2-1)}))$ için,

$b^{(0)} = (b_0, \dots, b_{p^2n-1})$,

$b^{(1)} = (b_{p^2n}, \dots, b_{2p^2n-1})$,

$\vdots$

$b^{(p^2-1)} = (b_{(p^4-p^2)n}, \dots, b_{p^4n-1})$

olsun.

$$\tau_2^{\otimes p^2} : \mathbb{F}_p^{p^4n} \to \mathbb{F}_p^{p^4n}$$

$$b \longmapsto \tau_2^{\otimes p^2}(b) = (\tau_2(b^{(0)})|\tau_2(b^{(1)})| \dots |\tau_2(b^{(p^2-1)}))$$

permütasyonu için $\tau_2^{\otimes p^2}(D_2) = D_2$ şartı sağlanır ise bu koda $\mathbb{F}_p^{p^4n}$ üzerinde bir p^2'inci mertebeden yarı devirli kod adı verilir

4.2.16. Önerme: τ_1 dönüşümü $S_1^{p^2n}$ üzerinde bir permütasyon $\tau_2^{\otimes p^2}$ dönüşümü $\mathbb{F}_p^{p^4n}$ üzerinde bir permütasyon Ψ_1, $S_1^{p^2n}$ den $\mathbb{F}_p^{p^4n}$ e yukarıda tanımlanan Gray dönüşümü olsun. $\Psi_1 \circ \tau_1 = \tau_2^{\otimes p^2} \circ \Psi_1$ sağlanır.

Kanıt: Her $0 \le i \le p^2n - 1$ için $l_i = x_i + y_i u_1 + z_i {u_1}^2$ olmak üzere

$l = (l_0, l_1, \dots, l_{p^2n-1}) \in S_1^{p^2n}$ olsun. $s = 0,1, \dots, p-1$ için $t_s \in \mathbb{F}_p^p$ olsun.

$$\Psi_1(x' + y'u_2 + z'{u_2}^2) = (t_0|t_1| \dots |t_{p-1})$$

Burada $\tau(l) = \tau(l_0, l_1, \dots, l_{p^2n-1}) = (l_{p^2n-1}, l_0, l_1 \dots, l_{p^2n-2})$ permütasyonu uygulandığında ve bu ifadenin Ψ_1 Gray görüntüsü alındığında

$$\Psi_1(\tau(l)) = \Psi_1(l_{p^2n-1}, l_0, l_1 \dots, l_{p^2n-2})$$

$t_0 = (z_{p^2n-1}, z_0, \dots, z_{p^2n-2}, y_{p^2n-1} + z_{p^2n-1}, y_0 + z_0, \dots, y_{p^2n-2} + z_{p^2n-2},$

$2y_{p^2n-1}+z_{p^2n-1}, 2y_0+z_0, \dots, 2y_{p^2n-2}+z_{p^2n-2}, (p-1)y_{p^2n-1}+z_{p^2n-1},$

$(p-1)y_0+z_0, \dots, (p-1)y_0+z_0, \dots, (p-1)y_{p^2n-2}+z_{p^2n-2})$

$t_1 = (x_{p^2n-1}+z_{p^2n-1}, x_0+z_0, \dots, x_{p^2n-2}+z_{p^2n-2}, x_{p^2n-1}+y_{p^2n-1}+z_{p^2n-1},$

$x_0+y_0+z_0, \dots, x_{p^2n-2}+y_{p^2n-2}+z_{p^2n-2}, x_{p^2n-1}+2y_{p^2n-1}+z_{p^2n-1},$

$x_0+2y_0+z_0, \dots, x_{p^2n-2}+2y_{p^2n-2}+z_{p^2n-2}, \dots,$

$x_{p^2n-1}+(p-1)y_{p^2n-1}+z_{p^2n-1}, x_0+(p-1)y_0+z_0, \dots,$

$x_{p^2n-2}+(p-1)y_{p^2n-2}+z_{p^2n-2})$

$\vdots$

$t_{p-1} = ((p-1)x_{p^2n-1}+z_{p^2n-1}, (p-1)x_0+z_0, \dots,$

$(p-1)x_{p^2n-2}+z_{p^2n-2}, (p-1)x_{p^2n-1}+y_{p^2n-1}+z_{p^2n-1},$

$(p-1)x_0+y_0+z_0, \dots (p-1)x_{p^2n-2}+y_{p^2n-2}+z_{p^2n-2},$

$(p-1)x_{p^2n-1}+(p-1)y_{p^2n-1}+z_{p^2n-1},$

$(p-1)x_0+(p-1)y_0+z_0, \dots, (p-1)x_{p^2n-2}+(p-1)y_{p^2n-2}+z_{p^2n-2})$

elde edilir.

Diğer taraftan $l \in S_1^{p^2n}$ in Ψ_1 Gray görüntüsü;

$$\Psi_1(l) = \Psi_1(l_0, l_1, \dots, l_{p^2n-1}) = (t_0|t_1|\dots|t_{p-1})$$

$t_0 = (z_0, z_1, \dots, z_{p^2n-1}, y_0+z_0, y_1+z_1, \dots, y_{p^2n-1}+z_{p^2n-1}, 2y_0+z_0,$

$2y_1+z_1, \dots, 2y_{p^2n-1}+z_{p^2n-1}, (p-1)y_0+z_0, (p-1)y_1+z_1, \dots,$

$(p-1)y_{p^2n-1}+z_{p^2n-1})$,

$t_1 = (x_0+z_0, x_1+z_1, \dots, x_{p^2n-1}+z_{p^2n-1}, x_0+y_0+z_0, x_1+y_1+z_1, \dots,$

$x_{p^2n-1}+y_{p^2n-1}+z_{p^2n-1}, x_0+2y_0+z_0, x_1+2y_1+z_1, \dots,$

$x_{p^2n-1}+2y_{p^2n-1}+z_{p^2n-1}, \dots, x_0+(p-1)y_0+z_0, x_1+(p-1)y_1+z_1, \dots,$

$x_{p^2n-1}+(p-1)y_{p^2n-1}+z_{p^2n-1}),$

$\vdots$

$t_{p-1} = ((p-1)x_0 + z_0, (p-1)x_1 + z_1, \dots, (p-1)x_{p^2n-1} + z_{p^2n-1},$

$(p-1)x_0 + y_0 + z_0, (p-1)x_1 + y_1 + z_1, \dots,$

$(p-1)x_{p^2n-1} + y_{p^2n-1} + z_{p^2n-1}, (p-1)x_0 + (p-1)y_0 + z_0,$

$(p-1)x_1 + (p-1)y_1 + z_1, \dots, (p-1)x_{p^2n-1} + (p-1)y_{p^2n-1} + z_{p^2n-1})$

olarak bulunur. Buradan $\tau_2^{\otimes p^2}$ dönüşümü uygulandığında

$\tau_2^{\otimes p^2}(\Psi_1(l)) = (t_0|t_1|\dots|t_{p-1})$

$t_0 = (z_{p^2n-1}, z_0, \dots, z_{p^2n-2}, y_{p^2n-1} + z_{p^2n-1}, y_0 + z_0, \dots, y_{p^2n-2} + z_{p^2n-2},$

$2y_{p^2n-1} + z_{p^2n-1}, 2y_0 + z_0, \dots, 2y_{p^2n-2} + z_{p^2n-2}, (p-1)y_{p^2n-1} + z_{p^2n-1},$

$(p-1)y_0 + z_0, \dots, (p-1)y_0 + z_0, \dots (p-1)y_{p^2n-2} + z_{p^2n-2}),$

$t_1 = (x_{p^2n-1} + z_{p^2n-1}, x_0 + z_0, \dots, x_{p^2n-2} + z_{p^2n-2}, x_{p^2n-1} + y_{p^2n-1} + z_{p^2n-1},$

$x_0 + y_0 + z_0, \dots, x_{p^2n-2} + y_{p^2n-2} + z_{p^2n-2}, x_{p^2n-1} + 2y_{p^2n-1} + z_{p^2n-1},$

$x_0 + 2y_0 + z_0, \dots, x_{p^2n-2} + 2y_{p^2n-2} + z_{p^2n-2}, \dots,$

$x_{p^2n-1} + (p-1)y_{p^2n-1} + z_{p^2n-1}, x_0 + (p-1)y_0 + z_0, \dots,$

$x_{p^2n-2} + (p-1)y_{p^2n-2} + z_{p^2n-2}),$

$\vdots$

$t_{p-1} = ((p-1)x_{p^2n-1} + z_{p^2n-1}, (p-1)x_0 + z_0, \dots,$

$(p-1)x_{p^2n-2} + z_{p^2n-2}, (p-1)x_{p^2n-1} + y_{p^2n-1} + z_{p^2n-1},$

$(p-1)x_0 + y_0 + z_0, \dots (p-1)x_{p^2n-2} + y_{p^2n-2} + z_{p^2n-2},$

$(p-1)x_{p^2n-1} + (p-1)y_{p^2n-1} + z_{p^2n-1},$

$(p-1)x_0 + (p-1)y_0 + z_0, \dots, (p-1)x_{p^2n-2} + (p-1)y_{p^2n-2} + z_{p^2n-2})$

elde edilir.

4.2.17. Teorem: D_1 kodunun S_1 halkasında p^2n uzunluğunda bir devirli kodun elde edilebilmesi için gerekli şart ise $\Psi_1(D_1)$ nin $\mathbb{F}_p$ cismi üzerinde p^4n uzunluğunda

p^2'inci mertebeden bir yarı devirli kod olmasıdır.

Kanıt: D_1 bir devirli kod ise $\tau_1(D_1) = D_1$ dir. Denklemin Ψ_1 görüntüsü alındığında $\Psi_1(\tau_1(D_1)) = \Psi_1(D_1)$ ifadesi elde edilir. 4.2.16. Önermeden $\sigma_1^{\otimes p^2}(\Psi_1(D_1)) = \Psi_1(\tau_1(D_1)) = \Psi_1(D_1)$ bulunur. Böylelikle $\Psi_1(D_1)$, p^2'inci mertebeden bir yarı devirli kod olduğu görülür. Tersine $\Psi_1(D_1)$, p^2'inci mertebeden bir yarı devirli, kod ise $\tau_2^{\otimes p^2}(\Psi_1(D_1)) = \Psi_1(D_1)$ sağlanır. 4.2.16. Önermeden $\tau_2^{\otimes p^2}(\Psi_1(D_1)) = \Psi_1(\tau_1(D_1)) = \Psi_1(D_1)$ bulunur. Ψ_1 fonksiyonu bire bir olduğundan dolayı $\tau(D_1) = D_1$ olur. Böylelikle D_1 bir devirli kod olduğu görülür.

4.2.18. Sonuç: D nin S halkasında n uzunlukta bir devirli kod olması için yeterli ve gerekli koşul $\Psi_1(\Psi(D))$ nin $\mathbb{F}_p$ cismi üzerinde $p^4 n$ uzunluğunda, p^2'inci mertebeden bir yarı devirli kod olmasıdır.

Kanıt: Öncelikle D kodunun Ψ görüntüsü sonra da Ψ_1 görüntüsü alındığında 4.2.12. Teorem ve 4.2.17. Teoremleri yardımıyla kanıt aşikardır.

BÖLÜM 5

SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Tezde p asal sayı olmak üzere p^5 elemanlı halka yapısı tanımlanmıştır. $p = 2$ durumu için bu halkada sabit devirli kodlar $p \geq 3$ durumları için devirli kodların varlığı ve bu kodların zincir halkalarına giden Gray dönüşümleri tanımlanmıştır. Tezin ilk iki bölümünde cebirsel kavramlar ve kodların teorisi ile ilgili temel bilgiler sunulmuştur.

Bölüm 3'te ${u_2}^3 = 0$, ${u_1}^3 = 0$ ve $u_2 \cdot u_1 = u_1 \cdot u_2 = 0$ koşullarını gerçekleştiren iki değişkenli katsayıları $\mathbb{F}_2$ cisminden alınarak halkalar üzerinde devirli kodların yapısı incelenmiş ve bu kodlara karşılık gelen Gray görüntü kodları elde edilmiştir. Yeni oluşturduğumuz $\mathbb{F}_2[u_1, u_2] \Big/ \langle {u_1}^3, {u_2}^3, u_1 \cdot u_2 \rangle$ halkası üzerinde kod yazabilmemize olanak sağlamak için bir ağırlık fonksiyonu belirlenmiştir. Burada 3.1.23. Teorem ve 3.1.25. Teoremlerinin kanıtlanması $(1 + {u_1}^2)$ −sabit devirli kodun $\mathbb{F}_2$ cisim üzerinde sekizinci mertebeden yarı devirli bir kod olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Bölüm 4'te ise yine Bölüm 3'teki aynı koşullar altında $p = 3$, p asal sayıları için $\mathbb{F}_p[u_1, u_2] \Big/ \langle {u_1}^3, {u_2}^3, u_1 \cdot u_2 \rangle$ ifadesi ile tanımlanan bir halka yapısı oluşturulmuştur. Bu halkaya özgü bir Ağırlık fonksiyonu tanımlanarak, ilgili kodların oluşturulmasına olanak sağlanmıştır. Bunun yanı sıra bu halkadan bilinen bir tek değişkenli zincir halkasına Gray dönüşümü uygulanmıştır. Elde edilen bu bulgular

doğrultusunda, söz konusu halkalarda tanımlanan devirli kodlar incelenmiştir. 4.2.12. Teorem, 4.2.17. Teorem ve kanıtları neticesinde 4.2.18. Sonucunda $\mathbb{F}_p[u_1, u_2]/\langle {u_1}^3, {u_2}^3, u_1 \cdot u_2 \rangle$ bu halkada devirli bir kodun var olması, yalnızca bu kodun p^2'inci mertebesine sahip bir yarı devirli kod olması durumunda mümkündür.

KAYNAKLAR

Alkenani, A., Ashraf, M., & Mohammad, H. (2020). Quantum codes from constacyclic codes over the ring $\mathbb{F}_q[u_1, u_2] \Big/ \langle u_1^2 - u_1, u_2^2 - u_2, u_1u_2 - u_2u_1 \rangle$. *Mathematics and computer sciences*, *8*(5), 781.

Aydın, N. & Kandamar H. (2015), *Soyut Cebir*. Çanakkale: Paradigma Akademi.

Bandi, R. K., & Bhairwal, M. (2014, September). Codes over $Z_4 + vZ_4$. *International Conference on Advances in Computing*, *Communications and Informatics (ICACCI)* (pp. 422–427). IEEE.

Blake, I. F. (1972). Codes over certain rings. *Information and Control*, *20*(4), 396–404.

Chapman, H. (1996). *Coding theory* (2nd ed.). Butterworth Press.

Çallıalp, F. (2011). *Örneklerle soyut cebir*. Birsen Yayınevi.

Gao, Y., & Lai, C. (2017). Cyclic codes of odd length over $Z_4[u]/< u^k >$. *Cryptography and Communications, 9,* 599–624.

Gao, J., & Fu, F. W. (2015). Linear codes and $(1 + uv)$-constacyclic codes over $R[v]/(v^2 + v)$. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, 98*(4), 1044–1048.

Greferath, M., & Schmidt, S. E. (1988). Finite ring combinatorics and coding theory. In *Contemporary Mathematics* (Vol. 168, pp. 1–16). American Mathematical Society.

Hill, R. (1986), *A First Course in Coding Theory*. Oxford: Oxford University Press.

Honold, T., & Nechaev, A. (2011). Weighted modules and representations of codes over Frobenius rings. *Problems of Information Transmission, 47*(3), 265–278.

Ling, S., & Xing, C. (2004). *Coding theory: a first course.* Cambridge University Press.

MacWilliams, F. J. (1977). *The theory of error-correcting codes* (pp. 39–47).

Nguyen, B. T., Dinh, H. Q., & Maneejuk, P. (2022). Constacyclic codes of length $8p^s$over $\mathbb{F}_{p^m} + u\mathbb{F}_{p^m}$. *Advances in Mathematics of Communications, 16*(3), 525–570.

Qian, J.F., Zhang, L.N. & Zhu, S.X. (2006), (1+v)-Constacyclic and Cyclic Codes over $\mathbb{F}_2 + u\mathbb{F}_2$. *Applied Mathematics Letters, 19* (8), 820-823.

Qian, J.F., Zhang, L.N. & Zhu, S.X. (2006), Constacyclic and Cyclic Codes over $\mathbb{F}_2 + u\mathbb{F}_2 + u^2\mathbb{F}_2$. *IEICE Trans. Fundamentals, 89*-a (6), 1863-1865.

Pless, V. (2011). *Introduction to the theory of error-correcting codes*. John Wiley & Sons.

Richardson, T., & Urbanke, R. (2008). *Modern coding theory*. Cambridge University Press.

Roman, S. (1992). *Coding and information theory*. New York: Springer Verlag.

Taşçı, D. (2018), *Soyut Cebir*. Ankara: Gazi Kitapevi.

Wolfmann, J. (1999). Negacyclic and cyclic codes over Z_4. *IEEE Transactions on Information Theory, 45*, 2527–2532.

Xioafang, Xu (2013), (1+v)-Constacyclic Codes over $\mathbb{F}_2 + u\mathbb{F}_2 + v\mathbb{F}_2$. *Computer Engineering and Applications, 49* (12), 77-79.

Zhu, S., Wang, Y., & Shi, M. (2010). Some results on cyclic codes over $F_2 + vF_2$. *IEEE Transactions on Information Theory, 56*(4), 1680–1684.

TEZ ÖĞRENCİSİNE AİT BİLİMSEL ÇIKTILAR

Konferans Bildirileri

1. Kaşdaş, H. R. & Özkan, M. (2025). Gray Map In The Ring $\mathbb{Z}_2 + u_2\mathbb{Z}_2 + u_1\mathbb{Z}_2 + u_2^2\mathbb{Z}_2 + u_1^2\mathbb{Z}_2$. Akpınar Külekçi, E. *ICSAS 2nd International Coefficient On Mathematic* (39-45). Academy Global Conferences.

2. Kaşdaş, H. R. & Özkan, M. (2025). Exitence Of A New Ring With $\mathbb{Z}_2$ Coefficient. Bilgili, A. *ASERC 2nd International Coefficient On H., Eng., Arc and Mathematics* (195-208). Academy Global Conferences & Journals.

3. Kaşdaş, H. R. & Özkan, M. (2024). Finite Chain Rings and Their Ideals Under Binary Operations. Yıldırım, K. *8th International Conference On Mathematics* (681-688). ICOM 2024 Conference Proceeding Book.

ÖZGEÇMİŞ

İlköğretim ve ortaöğretim eğitimimi Edirne Merkez'deki Trakya Birlik İlkokulu'nda tamamladım. Lise öğrenimimin ilk iki yılını Yıldırım Beyazıt Anadolu Lisesi'nde, son iki yılını ise Bahçeşehir Fen Lisesi'nde sürdürdüm.

2017 yılında Trakya Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümüne kayıt yaptırdım ve Ağustos 2021'de mezun oldum.

Eylül 2022'de Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Hesaplamalı Bilimler Anabilim Dalı'nda tezli yüksek lisans programına başladım.