T.C.

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONUMA BAĞLI KÜTLELİ SCHRÖDINGER DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

RIDVAN AYAZ

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tez Danışmanı: DOÇ. DR. MEHMET SEZGİN

EDİRNE-2018

RIDVAN AYAZ'ın hazırladığı "Konuma Bağlı Kütleli Schrödinger Denkleminin Çözümü" başlıklı bu tez, tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından Matematik Anabilim Dalında bir Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

İmza

Prof. Dr. Mahmut ERGÜT .....

Prof. Dr. Figen KARACA BOZ .....

Doç.Dr. Deniz AĞIRSEVEN .....

Doç. Dr. Mehmet SEZGİN .....

Dr. Öğr. Üyesi Yasemen UÇAN .....

Tez Savunma Tarihi: 12/10/2018

Bu tezin bir Doktora tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

İmza

Doç. Dr. Mehmet SEZGİN .....
Tez Danışmanı

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

.....

Prof. Dr. Murat YURTCAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

T.Ü. FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI DOKTORA PROGRAMI
DOĞRULUK BEYANI

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında, tüm verilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini, kullanılan verilerde tahrifat yapılmadığını, tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını, kullanılan tüm literatür bilgilerinin bilimsel normlara uygun bir şekilde kaynak gösterilerek ilgili tezde yer aldığını ve bu tezin tamamı ya da herhangi bir bölümünün daha önceden Trakya Üniversitesi ya da farklı bir üniversitede tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

12 /10/2018

RIDVAN AYAZ

Doktora Tezi
Konuma Bağlı Kütleli Schrödinger Denkleminin Çözümü
T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

ÖZET

Bu çalışmanın birinci bölümünde grup kavramı, grubun bir parametreli alt gruplara göre açılımları, konuma bağlı kütleli Schrödinger denklemi, yansıma ve geçme katsayıları hakkında bilgi verildi. İkinci bölümde $SL(2,\mathbb{R})$ grubunun bir elemanın bir parametreli alt gruplara göre çeşitli açılımları ifade edildi. Ele alınan açılımlara göre $SL(2,\mathbb{R})$ grubunun üreteçleri ve Casimir operatörleri elde edildi. Casimir operatörü ile Hamiltonyen arasındaki $[C-q]=Q[H-E]$ ilişkisinden konuma bağlı kütleli Hamiltonyenler verildi. Daha sonra $H\psi=E\psi$ Schrödinger denkleminin sürekli hal çözümleri ve yansıma katsayıları elde edildi. Üçüncü bölümde, sonuçlar toplu olarak verildi.

Yıl : 2018
Sayfa Sayısı : 40
Anahtar Kelimeler : Grup, Casimir Operatörü, Schrödinger Denklemi

PhD Thesis

The solution of the Schrödinger equation with position dependent mass

Trakya University Institute of Natural Sciences

Department of Mathematics

ABSTRACT

In the first chapter of this study, the concept of group, the decompositions of the group according to one parameter subgroups , the Schrödinger equation related to the position dependent mass, reflection and transmission coefficients were given. In the second chapter, $SL(2,\mathbb{R})$ group's various decompositions of one element according to one parameter subgroups were expressed. According to the considered decompositions, the generators and Casimir operators of group $SL(2,\mathbb{R})$ were obtained. From the relationship of $[C-q]=Q[H-E]$ between Casimir operator and Hamiltonian, the position dependent mass Hamiltonians were given. Then the continuous state solutions of the $H\psi=E\psi$ Schrödinger equation and reflection coefficients were obtained. In the third chapter, the results were given collectively.

Year : 2018

Number of Pages : 40

Keywords : The Group, Casimir Operator, Schrödinger Equation

ÖNSÖZ

Tez çalışmalarım süresince bana her türlü desteği sağlayan sayın hocam Doç.Dr. Mehmet SEZGİN'e ve bilgilerinden faydalandığım değerli bölüm hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Rıdvan AYAZ

İÇİNDEKİLER

ÖZET iv
ABSTRACT v
ÖNSÖZ vi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ..... viii
ŞEKİLLER DİZİNİ..... ix
BÖLÜM 1 - GİRİŞ 1
1.1. Genel Bilgiler ve Tanımlamalar 1
1.2. Grubun Açılımları …..... 8
1.3. Konuma Bağlı Kütleli Schrödinger Denklemi 11
1.4. Yansıma ve Geçme Katsayıları 16

BÖLÜM 2 - KONUMA BAĞLI KÜTLELİ SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ 18
2.1. Iwasawa Açılımı..... 18
2.2.Cartan Açılımı..... 22
2.3. Gauss Açılımı..... 27
BÖLÜM 3 - SONUÇLAR 32
KAYNAKLAR 36
ÖZGEÇMİŞ 39
TEZ İLE İLGİLİ BİLİMSEL FAALİYETLER 40

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$I_n(x), J_\upsilon(x), K_n(x)$	Bessel fonksiyonları
C	Casimir operatörü
$\psi(x,t)$	Dalga fonksiyonu
E	Enerji
h	Fonksiyon
H	Hamilton operatörü
$F(a,b;c;z)$	Hipergeometrik fonksiyon
K, A, N	Kompakt, Değişmeli, Nilpotent grup
$[,]$	Komütatör
$m(x)$	Konuma bağlı kütle
∇^2	Laplace operatörü
$\mathfrak{g}$	Lie cebri
G	Lie grubu
j	Özdeğer
$V(x)$	Potansiyel
S	Saçılma matrisi
J_k	Sonsuz küçük operatörler
$T(g_0)$	Temsil
$t^j_{rs}(g)$	Temsilin matris elemanı
R, T	Yansıma ve geçme katsayısı
$W_{k,\upsilon}(y)$	Whittaker fonksiyonu
$\Big\vert_{\mathfrak{I}_{nk}}$	$\mathfrak{I}$ uzayına kısıtlama

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Sürekli ve bağlı hal çözüm bölgesi 12
Şekil 2. Yansıma ve geçme katsayısı 17

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Konuma bağlı kütleli fiziksel sistemlerin malzeme biliminde ve yoğun madde fiziği gibi alanlarda çeşitli uygulamaları vardır. Örneğin yarı iletkenlerin elektronik özelliklerinin, sıvı kristallerin ve kuantum sistemlerin incelenmesi gibi. Sabit kütleli Schrödinger denkleminin aksine konuma bağlı kütleli Schrödinger denklemi daha karışık ve çözümü zordur. Konuma bağlı kütleli Schrödinger denkleminin çözümü için nokta kanonik dönüşümü, Lie grup metodu, süper simetrik kuantum metodu (Aktaş, Sever, 2008; Koç, Koca, 2003; Quesne, Tkachuk, 2004; Roy, Roy, 2002;) gibi farklı metotlar kullanılabilir.

Grup teorisi metodunda fiziksel sistemin Hamiltonyeni ile grubun Casimir operatörü ilişkilendirilir. Daha sonra fiziksel sistemin dalga fonksiyonu, enerji özdeğeri ve potansiyel fonksiyonu verilir.

Bu çalışmada Lie grup teorisi tekniği kullanılmıştır. Lie grubu olarak $SL(2,\mathbb{R})$ grubu ele alınmış ve bu grubun bir parametreli alt gruplara göre Iwasawa, Cartan ve Gauss açılımlarına bağlı olarak $[C-q]=Q[H-E]$ ilişkisinden (Ghirardi, 1972) konuma bağlı kütleli Schrödinger denkleminin sürekli hal çözümleri ve yansıma katsayıları elde edilmiştir.

1.1. Genel Bilgiler ve Tanımlamalar

Grup teorisi özellikle uygulamalı matematik ve fizik alanındaki çalışmalarda çok önemli bir çalışma alanıdır. Denklemlerin çözülmesinde grup kavramını ilk kullananlardan biri Evariste Galois olmuştur. Daha sonra Sophus Lie sürekli dönüşüm gruplarıyla diferansiyel denklemler için benzer bir teori oluşturmuştur. Özellikle Lie

grupları ve cebirleri, farklı tipte fiziksel sistemlerin davranışlarını açıklamada ve yeni fiziksel teorilerin oluşmasında önemli bir yer tutmaktadır. Bugün grup teorisi matematikte, kuantum mekaniğinde, kimyada, kontrol teoride vb. diğer bilimsel alanlarda önemli rol oynamaktadır (Belinfante, Kolman, Smith, 1966; Belinfante, Kolman, 1972).

$G \neq \emptyset$ bir küme ve bu kümede $\circ : G \times G \to G$ ikili işlemi verilmiş olsun.

- $\forall a, b \in G$ için $a \circ b \in G$, (kapalılık özelliği)
- $\forall a, b, c \in G$ için $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$, (birleşme özelliği)
- $\circ$ işlemine göre G'de bir birim eleman vardır,
  $\exists\, e \in G \quad \ni \quad \forall a \in G$ için $a \circ e = e \circ a = a$.
- $\circ$ işlemine göre G'de verilen her elemanın bir tersi vardır,
  $\forall a \in G$ için $\exists\, a^{-1} \in G \quad \ni \quad a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Yukarıdaki özellikleri sağlayan $(G,\circ)$ cebirsel yapısına grup denir.

$\forall a, b \in G$ için $a \circ b = b \circ a$ değişme özelliği varsa, gruba değişmeli grup (Abel grubu) denir.

Çeşitli grup örnekleri verilebilir:

Tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}$, rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$, reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ ve kompleks sayılar kümesi $\mathbb{C}$, bilinen toplama işlemi altında değişmeli gruptur. $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$, $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ kümeleri ise çarpma işlemi altında değişmeli gruptur.

M , $d: M \times M \to \mathbb{R}$ uzunluk fonksiyonu ile bir metrik uzay olsun. M'deki her x, y elemanı için $d(\alpha x, \alpha y) = d(x, y)$ olacak şekilde uzunlukları koruyan bire bir $\alpha : M \to M$ dönüşümü M'nin izometrisidir. M'nin tüm izometrilerinin kümesi $Isom(M)$ fonksiyonların bileşkesi işlemi altında bir gruptur.

X, M'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. α bir izometri ise, $\alpha X = \{\alpha x \,|\, x \in X\}$ olmak üzere, X'in M metrik uzayına karşılık gelen simetri grubu $S_M(X) = \{\alpha \in Isom(M) |\, \alpha X = X\}$ şeklinde, X'i sabit bırakan tüm izometrilerin bir kümesi olup grup işlemi de fonksiyonların bileşkesi işlemidir.

X, boş olmayan bir küme olsun. $f: X \to X$ şeklinde tanımlanan bire bir fonksiyona X'in permütasyonu denir. Fonksiyon bileşkesi işlemi altında X'in tüm permütasyonlarının kümesi bir grup yapısı oluşturur. Bu gruba X'in simetri grubu denir ve $Sym\,(X)$ ile gösterilir.

$X = \{1,2, \dots, n\}$ ise, X'in simetri grubu S_n ile ifade edilir ve X'in n.dereceden simetri grubu olarak belirtilir. Tarihsel anlamda, üzerinde sistemli bir şekilde çalışılan ilk grup örneği permütasyon gruplarıdır.

G bir grup olmak üzere;

- G bir analitik manifold,
- $f: G \times G \to G$

  $(g, h) \to gh$ dönüşümü analitik
- $s: G \to G$

  $g \to g^{-1}$ dönüşümü de analitik

ise G grubuna bir Lie grubudur denir. Lie grubu hem grup hem de manifold yapısına sahiptir. Reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ bir Lie grubudur. Aşağıdaki gibi farklı türden Lie grubu örnekleri verilebilir.

Reel değerli tüm $n \times n$'lik matrislerin kümesi $M(n, \mathbb{R})$, matrisler üzerindeki toplama işlemi altında değişmeli bir Lie grubu oluşturur. $M(n, \mathbb{R})$ grubunun boyutu matris elemanlarının sayısına eşittir yani n^2 dir. Çarpma işlemine göre tüm matrislerin tersi olmadığından bu küme matrisler üzerindeki çarpma işlemine göre bir grup ifade etmez.

Reel değerli $n \times n$'lik tüm tersinir matrislerin kümesi

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) : detA \neq 0\}$$

matrisler üzerindeki çarpma işlemine göre genel lineer Lie grubunu oluşturur.

Reel değerli $n \times n$'lik tüm tersinir ve determinantları pozitif olan matrislerin kümesi

$$GL_+(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : detA > 0\}$$

$GL(n, \mathbb{R})$'nin bir alt grubudur. Bu iki grubun boyutları n^2 dir , yani n^2 adet reel parametreyle ifade edilir.

Reel değerli $n \times n$'lik tüm tersinir ve determinantları bire eşit olan özel lineer grup

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : detA = 1\}$$

olup, $GL(n, \mathbb{R})$'nin bir alt grubudur ve boyutu $n^2 - 1$ olan bir Lie grubudur.

$n \times n$'lik tüm reel ortogonal matrislerden oluşan ve reel ortogonal grup olarak isimlendirilen $O(n)$ grubu,

$$O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : A^T A = I\}$$

şeklinde ifade edilir ve $GL(n, \mathbb{R})$'nin bir alt grubudur olup $n(n-1)/2$ boyutlu bir Lie grubudur. Bu grup $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ kuadratik formunu invaryant bırakır.

Determinantı bire eşit olan ve özel ortogonal grup olarak isimlendirilen

$$SO(n) = \{A \in O(n) : detA = 1\}$$

ortogonal matrislerin grubu, $O(n)$'nin bir alt grubu olup, boyutu $n(n-1)/2$ dir.

$B = diag(\underbrace{-1, \dots, -1}_{p\ adet}, \underbrace{+1, \dots, +1}_{q\ adet})$ formunda diagonal bir matris olmak üzere tüm pseudo-ortogonal matrislerin grubu

$$O(p,q) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) : A^T BA = B\}$$

biçiminde tanımlanır ve $GL(n,\mathbb{R})$'nin bir alt grubudur. $O(p,q)$ pseudo-ortogonal grup olarak isimlendirilir ve boyutu $n(n-1)/2$ dir.

$0 < p \leq q$ olmak üzere, determinantı 1 olan tüm pseudo-ortogonal matrislerin grubu

$$SO(p,q) = \{A \in O(p,q) : detA = 1\}$$

biçiminde ifade edilir. Bu grup $O(p,q)$ grubunun bir alt grubu olup, özel pseudo ortogonal olarak grup olarak isimlendirilir ve boyutu $n(n-1)/2$ dir.

Benzer şekilde, $M(n,\mathbb{C}), GL(n,\mathbb{C})$ ve $SL(n,\mathbb{C})$ kompleks matris grupları da tanımlanabilir. Bu gruplar için boyutun $2n^2$ ve $2(n^2-1)$ olduğu aşikardır.

$O(n)$ reel ortogonal gruba benzer yaklaşımla, $A^\dagger = (\bar{A})^T$ hermitik eşlenik olmak üzere üniter matrislerden oluşan ve $GL(n,\mathbb{C})$'nin bir alt grubu olan

$$U(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) : A^\dagger A = I\}$$

biçiminde tanımlanan grup üniter grubu oluşturur ve n^2 boyutlu bir Lie grubudur.

$U(n)$'nin bir alt grubu ve determinantı bir olan üniter matrislerin grubu

$$SU(n) = \{A \in U(n) : detA = 1\}$$

biçiminde tanımlanır ve özel üniter grup olarak isimlendirilir. $SU(n)$ grubu n^2-1 boyutlu bir Lie grubudur. Bu grup $z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + \dots + z_n\bar{z}_n = 1$ kuadratik formunu invaryant bırakır.

$\mathbb{C}^n$, $n = p+q$ boyutlu kompleks uzayındaki lineer dönüşümlerin belirttiği matrisler ise $U(p,q)$ grubunu oluşturur ve $I = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{p\ tane}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{q\ tane})$ olmak üzere

$$U(p,q) = \{U \in GL(n,\mathbb{C}) \mid \bar{U}^t I U = I\}$$

şeklinde ifade edilir. Bu grubun bir elemanı $U \in U(p,q)$ olmak üzere

$$\det(\bar{U}^t I U) = (\det U)^2 = \det(I)$$

dolayısıyla $\det U = \pm 1$ olup $\det U = 1$ olan kompleks matrisler kümesi $U(p,q)$ grubunun bir alt grubunu oluşturur. Bu grup $SU(p,q)$ ile gösterilir ve

$$SU(p,q) = \{\ U \in\ U(p,q) \mid \det U = 1\ \}$$

şeklinde ifade edilir.

Eleman sayısı sonlu olan bir gruba sonlu grup denir. Grubun eleman sayısı grubun mertebesini belirtir. Örneğin $Z_2 = \{a,b\}$ grubu iki elemanlı, mertebesi iki olan çarpma işlemine göre bir abel grubudur. $O(n)$, $U(n)$ grupları sonsuz mertebeden sürekli Lie gruplarıdır.

G grubunu a,b elemanlarına grubun parametrik uzayında A,B noktaları karşı gelsin. Eğer A,B noktaları verilen bölgede sürekli bir yolla bağlantılı ise, a,b elemanları da G grubunda sürekli bir yolla bağlantılıdır denir. Eğer G grubunun herhangi iki elemanı bu şekilde bağlı ise G grubuna bağlantılıdır denir. $GL(n,\mathbb{C})$, $SL(n,\mathbb{C})$, $SL(n,\mathbb{R})$, $SO(n)$, $SU(n)$ ve $U(n)$ grupları bağlantılı, $GL(n,R)$, $O(n)$, $SO(p,q-p)$, $O(p,q-p)$ grupları bağlantılı değildir. Bağlantılı G grubunda, eğer herhangi kapalı bir eğri bir noktaya sürekli şekilde büzülebilirse grup basit bağlantılı, büzülemiyorsa grup çok bağlantılıdır denir. G grubunda tüm kapalı yollar belirli türden sınıflara ayrılırsa her biri diğerine sürekli olarak deforme edilebilir. Farklı sınıfların sayısı m ise G grubu m defa bağlantılıdır denir. $SL(n,\mathbb{C})$ ve $SU(n)$ grupları basit bağlantılı, $SO(3)$ grubu iki defa bağlantılıdır.

A ve B iki kare matris olsun. $[A,B]=AB-BA$ ifadesi A ve B'nin komütatörü olarak tanımlanır. Bu ifade ayni zamanda A ve B 'nin braketi olarak da ifade edilir.

G bir Lie grubu ve $\mathfrak{g}$ de onun Lie cebirini göstersin. Lie cebiri,

$$[.,.] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

bilineer işlemi altında aşağıdaki koşulları sağlayan bir vektör uzayıdır (Barut, Raczka, 1986).

$\forall A,B,C \in \mathfrak{g}$, $\forall \alpha,\beta \in R$ olmak üzere

1. $[\ \alpha A + \beta B,\ C\ ] = \alpha[\ A,C\ ] + \beta[\ B,C\ ]$ (Bilineerlik koşulu)
   $[A,\ \alpha B + \beta C\ ] = \alpha[\ A,B\ ] + \beta[A,C\ ]$
2. $[\ A,B\ ] = -[\ B,A\ ]$ (Anti simetrik koşulu)
3. $[\ A,[\ B,C\ ]\ ] + [\ B,[\ C,A\ ]\ ] + [\ C,[\ A,B\ ]\ ] = 0$ (Jacobi Özdeşliği koşulu)

Reel değerli tüm $n \times n$'lik matrislerden oluşan $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ reel vektör uzayı $A,B \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ olmak üzere $[\ A,B\ ] = AB - BA$ komütatörü ile reel bir Lie cebiridir.

A, $n \times n$ tipinde reel veya kompleks değerli bir matris olsun. $e^A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ olmak üzere $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ ifadesine A matrisinin üstel ifadesi denir. Üstel fonksiyonun matematiğin birçok dalında kullanım alanı vardır. Lie teorisinde bir matrisin üsteli, bir Lie cebiri ile ona karşılık gelen Lie grubu arasındaki ilişkiyi kurar.

G bir Lie matris grubu olsun. $Lie(G)$ vektör uzayı şöyle tanımlanır:

$$Lie(G) = \{\ A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid e^{tA} \in G\ ,\ \forall t \in \mathbb{R}\ \}.$$

Bu uzay Lie braketi işlemi altında kapalıdır. Bu tanım yardımıyla bilinen bazı klasik Lie gruplarına karşılık gelen Lie cebiri örnekleri verelim.

$G = SL(n, \mathbb{R})$ grubunun cebiri

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{\ A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} A = 0\ \}$$

$G = SO(n, \mathbb{R})$ grubunun cebiri

$$\mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) = \{\ A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid A + A^T = 0\ \}$$

$G = U(n, \mathbb{C})$ grubunun cebiri

$$\mathfrak{u}(n, \mathbb{R}) = \{\ A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid A + (\overline{A})^T = 0\ \}$$

$G = SU(n, \mathbb{C})$ grubunun cebiri

$$\mathfrak{su}(n, \mathbb{R}) = \{\ A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid A + (\overline{A})^T = 0,\ \operatorname{tr} A = 0\ \}$$

$G = SO(p, q)$ grubunun cebiri $(p + q = n)$

$$\mathfrak{so}(p, q) = \left\{\ A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \;\middle|\; I_{p,q}A + A^T I_{p,q} = 0\ \right\}$$

$G = SU(p, q)$ grubunun cebiri

$$\mathfrak{su}(p, q) = \left\{\ A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \;\middle|\; I_{p,q}A + (\overline{A})^T I_{p,q} = 0\ \right\}$$

olarak temsil edilir.

$X_i \in \mathfrak{g}$ ve r, $\mathfrak{g}$ vektör uzayının rankı olmak üzere $\{X_1, X_2, \dots, X_r\}$ elemanları kümesi $\mathfrak{g}$ Lie cebirini oluşturur denir.

Cebirin iki elemanının kömütatörü cebir elemanlarının lineer bir kombinasyonudur yani $[X_i, X_j] = \sum_k c_{ij}^k X_k$. Cebirin üç elemanının komütatörü Jacobi özdeşliğini sağlar, yani

$$[X_i, [X_j, X_k]] + [X_j, [X_k, X_i]] + [X_k, [X_i, X_j]] = 0.$$

Yukarıdaki c_{ij}^k katsayılarına Lie cebirinin yapı sabitleri denir. Ayrıca

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k \quad \text{ve} \quad c_{ij}^l c_{lk}^m + c_{jk}^l c_{li}^m + c_{ki}^l c_{lj}^m = 0$$

eşitlikleri sağlanır.

Örneğin $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ olmak üzere $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ Lie cebirini ele alalım. Bu cebir için

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

şeklinde üç elemanlı bazı seçebiliriz. Böylece $A = b\,X_1 + cX_2 + aX_3$ yazılabilir.

$$[X_1, X_2] = X_3\,, \quad [X_2, X_3] = 2X_2\,, \quad [X_3, X_1] = 2X_1$$

olup $c_{12}^3 = 1,\ c_{23}^2 = 2,\ c_{31}^1 = 2$ yapı sabitleridir.

Ayrıca bir G Lie grubunu g Lie cebirine $[A, B] = AB - BA$ komütasyon bağıntısıyla G de birinci mertebeden diferansiyel operatörlerin Lie cebiri olarak da bakılabilir. Başka sözle Lie cebiri türevlenebilir fonksiyonlar uzayında rol oynayan diferensiyel operatörlerle oluşturulabilir (Iachello, 2006). Örneğin *SO*(3) grubunun Lie cebiri *so*(3) elemanları üç tanedir ve *(x,y,z)* koordinatlar olmak üzere *f(x,y,z)* fonksiyonuna etki eden diferensiyel operatörler aşağıdaki gibi verilebilir.

$$X_1 = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\ , \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\ , \quad X_3 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\ .$$

Ayrıca bu operatörler komütasyon bağıntısını da sağlar

$$[X_1, X_2] = X_3\ , \ [X_2, X_3] = X_1\ , \ [X_3, X_1] = X_2\ .$$

Genel lineer dönüşümler grubu $GL(2,\mathbb{R})$'nun bir alt grubu olan özel lineer dönüşümler grubu $SL(2,\mathbb{R})$

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})\ , \det(g) = \alpha\delta - \beta\gamma\ , \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanır. Grubun bir g elemanının bir parametreli alt gruplarına göre farklı türden açılımları verilebilir. Burada grubun Cartan, Iwasawa ve Gauss açılımları ele alınmıştır.

Grubun bir parametreli alt gruplarına göre diferansiyel operatörleri ve bu operatörler yardımıyla Casimir operatörü oluşturulur. Bir g Lie cebrinin tüm elemanları için

$$[C, X_r] = 0 \quad , \ \forall X_r \in g$$

koşulunu sağlayan operatöre Casimir (İnvaryant) operatörü denir (Iachello, 2006).

Casimir operatörü ile Hamiltonyen arasında $H = f(C)$ şeklinde kurulan ilişkiden Hamiltonyen ifade edilebilir. Böylece Schrödinger denkleminin çözümü cebirsel bir probleme gelmiş olur(Cordero, Ghirardi, 1972).

$$H\psi(x)=\left[-\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right]\psi(x)=E\psi(x) \tag{1.1}$$

Burada kütle sabit durumdadır. Hamiltonyen lineer bir operatör olup fiziksel bir sistemin toplam enerji operatörü olarak tanımlanır. Bu çalışmada konuma bağlı kütleli Schrödinger denklemiyle ilgilenilmiştir. Bu durumda Schrödinger denklemi

$$H\psi(x)=\left[-\frac{1}{m(x)}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\dot{m}}{m^2}\frac{d}{dx}+V(x)\right]\psi(x)=E\psi(x) \tag{1.2}$$

şeklinde verilir. Denklemde konuma bağlı kütleli

$$H=-\frac{1}{m(x)}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\dot{m}}{m^2}\frac{d}{dx}+V(x)$$

biçimindeki Hamiltonyen literatürde BenDaniel ve Duke tarafından verilmiştir (BenDaniel, Duke, 1966).

1.2 Grubun Açılımları

Grubun açılımı, gruptaki bir elemanın bir parametreli alt gruplara göre çarpımsal olarak ifade edilmesi anlamına gelmektedir. Grubun açılımları, Lie grubu, cebiri ve temsiller teorisinde önemli rol oynar. Çoğu zaman işlemler bir parametreli alt gruplarla yapılır. Örneğin grup üç parametre ile verilmişse üç parametre ile aynı anda işlem yapmak zordur. Bu yüzden işlemlerde grubun bir elemanının farklı türlerden bir parametreli alt gruplara göre açılımları kullanılır. Bu açılımlar arasında en çok bilinenler Gauss, Cartan, Iwasawa, Birkhoff, Bruhat, Polar ve Gram açılımlarıdır.

Grubun bir $g \in G$ elemanının bir parametreli alt gruplara göre farklı türden birçok açılımı verilebilir. Bunlardan en çok kullanılanı ve faydalı olanı $g = bad$ şeklinde üç elemanın çarpımı biçiminde verilenidir. Bu elemanlar grubun bir parametreli alt gruplarıdır.

$(G,.)$ bir grup olmak üzere,

$$g : (\mathbb{R},+) \longrightarrow (G,.)$$
$$t \quad \longmapsto g(t)$$

şeklinde her reel sayıyı grubun bir elemanı ile eşleyelim. Eğer tüm $t,s \in \mathbb{R}$ için

$$g(t+s)=g(t).g(s) \tag{1.3}$$

ise $g(t)$, G grubunun bir parametreli alt grubunu oluşturur.

Diğer bir ifadeyle bir G Lie grubunda genellikle bir parametrizasyon $g_k(t) = g(0,...,t,0,...,0)$ formundaki elemanların kümesi olarak seçilebilir. Burada t, k koordinat, $g_k(t)$ G de bir parametreli alt gruplardır ve $g_k(t+s) = g_k(t)\,g_k(s)$, $1 \le k \le n$ eşitliği yazılabilir (Vilenkin, Klimyk, 1993). Bu parametrizasyon, kanonik parametrizasyon olarak da tanımlanır.

Örneğin, $SL(2,\mathbb{R})$ grubunun bazı bir parametreli alt grupları aşağıdaki gibi verilir.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}) \;;\; u \in \mathbb{R} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}) \;;\; v \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} e^{x} & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}) \;;\; x \in \mathbb{R} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}) \;;\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}) \;;\; \theta \in [0,2\pi) \right\}.$$

Düzlemde bir θ açısı ile yapılan dönmeler grubu $SO(2,\mathbb{R})$ 'nin elemanları

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO(2,\mathbb{R}) \;;\; \theta \in [0,2\pi) \right\}$$

ile verilirken $SO(3,\mathbb{R})$ grubunun bir parametreli alt grupları ise

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO(3,\mathbb{R}) \;;\; \theta \in [0,2\pi) \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 \\ \sinh t & \cosh t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(3,\mathbb{R}) \;;\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO(3,\mathbb{R}) \;;\; \theta \in [0,2\pi) \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(3,\mathbb{R}) \;;\; \theta \in [0,2\pi) \right\}$$

şeklinde verilir.

G bir bağlantılı Lie grubu, K,A,N grupları G'nin bir parametreli alt grupları olsun. K kompakt grup ve bağlantılı , A değişmeli grup ve basit bağlantılı, N Nilpotent grup ve basit bağlantılı olmak üzere, G'nin bir g elemanı, K,A,N alt gruplarının elemanlarının çarpımı

$$g = kan \;, \qquad k \in K, a \in A, n \in N$$

olmak üzere tek şekilde yazılabilir. Bu açılıma Iwasawa açılımı denir.

Örnek olarak, $G = SL(2,\mathbb{R})$ grubunu ele alalım. $g \in SL(2,\mathbb{R})$ için

$$g(\varphi,t,u) = kan = \begin{pmatrix} cos\varphi & sin\varphi \\ -sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$0 \le \varphi < 2\pi\ , -\infty < t < \infty, -\infty < u < \infty$$

verilir.

G bir Lie grubu, A, N bu grubun sürekli alt grupları olsun. A değişmeli ve N nilpotent alt gruplar olmak üzere G'nin bir $g \in G$ elemanı A ve N alt grupların elemanlarının bir çarpımı olarak

$$g = nan^{t} \quad , \qquad n, n^{t} \in N,\ a \in A$$

tek şekilde yazılabilir ki buna Gauss açılımı denir.

Örnek olarak $G = SL(2,\mathbb{R})$grubunu ele alalım. $g \in SL(2,\mathbb{R})$ için Gauss açılımı

$$g(v,t,u)=nan^{t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde verilir.

G basit bağlantılı bir Lie grubu olsun. K, G'nin bağlantılı, A değişmeli alt grupları olmak üzere G'nin bir $g \in G$ elemanı, K, A gruplarının elemanlarının bir çarpımı olarak

$$g = \acute{k}ak \quad , \quad a \in A, \quad k, \acute{k} \in K$$

şeklinde yazılır. Buna grubun bir g elemanının Cartan açılımı denir.

Örnek olarak $G = SO(1,2)$ grubunu ele alalım. $g \in SO(1,2)$ için Cartan açılımı

$$g(\varphi,\alpha,\psi) = \acute{k}ak = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\varphi & sin\varphi \\ 0 & -sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ch\alpha & 0 & sh\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ sh\alpha & 0 & ch\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\psi & sin\psi \\ 0 & -sin\psi & cos\psi \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılır.

Benzer şekilde Birkhoff, Bruhat, Polar ve Gram açılımları da ifade edilebilir (Helgason, 1984; Barut vd., 1986; Zelobenko, 1973). Bu çalışmada konuma bağlı kütle ile ilgilendiğimiz için grubun bir elemanının bir parametreli alt gruplara göre $g(x) = ba(x)d$ şeklinde bir açılım ele alınmıştır. Burada konumun koordinatları $a(x)$'de yer alsın yani ortadaki $a(x)$ elemanı konumu temsil etmiş olsun.

1.3. Konuma Bağlı Kütleli Schrödinger Denklemi

Erwin Schrödinger 1926 yılında kendi adıyla anılan

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}+V(x)\psi(x,t) \tag{1.4}$$

denklemini verdi (Schrödinger, 1926). Denklem lineer ikince mertebeden kısmi türevli bir denklemdir. Burada $\psi(x)$ dalga fonksiyonu, *V(x)* potansiyel enerjiyi temsil eden reel değerli bir fonksiyon, m parçacığın kütlesi, $\hbar$ da Planck sabitidir $(\hbar = 1.06\,10^{-34}\,J\,s)$.

Schrödinger denklemi zaman bağlı ve zamandan bağımsız olmak üzere iki forma sahiptir. Potansiyel enerji zamandan bağımsız ise değişkenlerine ayırma metodu kullanılarak zamandan bağımsız Schrödinger denklemi

$$H\psi(x)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+V\psi(x)=E\psi(x) \tag{1.5}$$

şeklinde elde edilir. Bu denklem ikinci mertebeden bir lineer diferansiyel denklemdir. Denklemde *H* operatörü parçacığın toplam enerjisini temsil eder. Enerji operatörü lineer bir operatör olup H ile gösterilir ve Hamiltonyen olarak da adlandırılır. Bu denklemin çözümü, incelenen fiziksel sistemin dalga fonksiyonlarını ve enerji öz değerlerini verir.

Zamandan bağımsız Schrödinger denkleminin çözümü olan dalga fonksiyonunun kabul edilebilir bir çözüm olması için $\psi(x)$ ve türevi $\psi'(x)$ fonksiyonlarının x'in bütün değerleri için sürekli ve tek değerli olması gerekir. Ayrıca dalga fonksiyonu normalize olmalıdır. Normalize olmayan çözümler parçacığı temsil etmez. $\psi_1(x)$ ve $\psi_2(x)$ gibi iki dalga fonksiyonunu farklı iki durumu temsil edebilmesi için bunların lineer bağımsız olması gerekir. Parçacığın herhangi bir yerde toplam bulunma olasılığı bir olmalı, yani $\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2dx=1$ olmalıdır. Bu ifade normalize olma koşulu olarak tanımlanır ve dalga fonksiyonu bunu sağlarsa normalize olduğu söylenir.

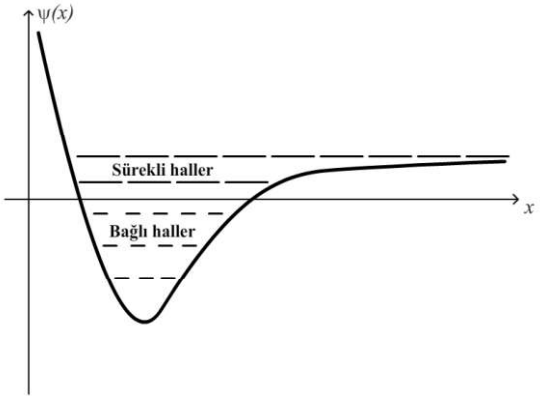
Schrödinger denklemi mikroskobik fiziksel sistemlerin davranışları hakkında bilgi verir ve bir parçacığın dalga fonksiyonu bu denklemin çözümünden elde edilir. Schrödinger denklemini çözmek, verilen potansiyel fonksiyonuna bağlı olarak yapılır. Schrödinger denklemi genelde üç potansiyel tipi için çözülür. Bunlar; $V(x)=0$ serbest parçacık durumu, $V(x)=c$ sabit potansiyel durumu ve $V(x)=\widetilde{V}(x)$ değişken potansiyel durumudur. Bilinen potansiyellerin bazıları; Morse, Pöschl-Teller, Scarf, Kratzer vb.

dir. Herhangi bir potansiyel ile verilen Schrödinger denklemi Kuantum teoride önemli bir yere sahiptir. Yukarıdaki verilen (1.4) denklemin çözüm kabul edilebilir bir *E* enerji değeri için $\psi(x,t) = ce^{-iEt/\hbar}\ \psi(x)$ şeklinde verilebilir. Enerji sabit ise enerji korunuyor denir ve enerji öz değerleri için $H\psi(x) = E\ \psi(x)$ denklemi çözülebilir.

Örneğin bir kutu içindeki parçacık $(V(x) = 0\ ,\ 0 \le x \le a\ \ ;\ V(x) = \infty\ ,\ x\langle 0\ ,\ x\rangle a)$ için zamandan bağımsız Schrödinger denkleminin çözümü $\psi(x) = B\sin(n\pi x/a)$ şeklinde verilir. Enerji sabit değilse enerji korunmuyor denir yani zamanla değişir. Bu durumda $i\psi_t(x,t) = H\psi(x,t)$ denklemi çözülür.

Schrödinger denkleminin iki tip çözümü verilebilir. Bu çözümler bağlı haller ve sürekli haller şeklinde belirtilir. Eğer *V(x)* potansiyel enerji parçacığın *E* toplam enerjisinden büyük $(E\langle V(x))$ ise parçacık potansiyel kuyusunda kalır, yani parçacık dönüm noktaları arasında gider gelir ve potansiyel kuyusundan çıkamaz. Bu durum bağlı hal olarak tanımlanır. Diğer taraftan *E* toplam enerji *V(x)* potansiyel enerjiden büyük $(E\rangle V(x))$ ise parçacık sonsuzdan gelir, potansiyelin etkisi altında yavaşlar veya hızlanarak sonsuza gider. Bu durum ise sürekli hal olarak tanımlanır. Bazı potansiyeller bağlı hal çözümlerini (Harmonik hareket) veya sürekli hal çözümlerini (çukur yer yoksa, serbest parçacık) içerir. Bazı potansiyeller ise iki durumu da gösterebilir. Bağlı halden sürekli hale geçebilmek için ilave enerjiye ihtiyaç vardır. Bağlı hallerde enerji özdeğerleri kesikli, sürekli hallerde ise sürekli değerler alır. Aynı enerji değerine birden fazla özfonksiyon karşılık gelirse enerji seviyelerinin dejenere olduğu söylenir. Dejenere enerji seviyelerine karşı gelen özfonksiyonlar genelde ortagonal değildir.

Schrödinger denkleminin çeşitli potansiyellere göre yaklaşık çözümleri de verilebilir.



Şekil 1. Sürekli ve bağlı hal çözüm bölgesi

Daha yüksek boyutlarda Schrödinger denklemi yazılabilir. Üç boyutta bir parçacık için denklem

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,y,z,t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x,y,z,t)+V(x,y,z)\psi(x,y,z,t) \tag{1.6}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ Laplace operatörüdür. Denklem daha yüksek boyutlarda *n* parçacık için aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x_1,x_2,...,x_n,t)=-\hbar^2\left(\frac{\nabla_1^2}{2m_1}+\frac{\nabla_2^2}{2m_2}+...+\frac{\nabla_n^2}{2m_n}\right)\psi+V(x_1,x_2,...,x_n,t)\psi(x_1,x_2,...,x_n,t) \tag{1.7}$$

Burada $\nabla_1^2,\nabla_2^2,...,\nabla_n^2$ Laplace operatörleridir.

Yukarıda verdiğimiz Schrödinger denklemi lineer kısmi türevli diferensiyel denklemdir. Lineer olmayan Schrödinger denklemi de aşağıdaki gibi verilebilir:

$$iu_t+u_{xx}+2|u|^2u=0 \tag{1.8}$$

Lineer olmayan Schrödinger denklemi, lineer olmayan ortamlarda dalga yayılımı, derin sularda yüzey dalgaları, optik fiberlerde sinyal yayılımı gibi çeşitli alanlarda çok önemli uygulamalara sahiptir (Aktosun, Busse, Demontis, van der Mee, 2009).

Yukarıda ifade ettiğimiz Schrödinger denkleminde *m* kütlesi sabittir. Kütle sabit olmasın yani *x*' e bağlı konumun bir fonksiyonu olarak verilsin. Bu durumda Hamiltonyen diğer bir deyişle Schrödinger denkleminin nasıl olacağına bakalım.

Kütle konumun bir fonksiyonu olduğunda $m(x)=m_oM(x)$; konuma bağlı kütle ve momentum operatörü sıra değiştirmediğinden ($[\hat{p},m]\neq 0$, $\hat{p}=-i\hbar\frac{d}{dx}$) Hamiltonyenin ifadesi açık değildir. Sabit kütleli Hamiltonyen $H=-\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)$ olarak verilirken, konuma bağlı kütle için farklı Hamilton operatörleri önerilmiştir (Gora, Williams, 1968; Killinbeck, 2011; Lévy-Leblond, 1995; Zhu, Kroemer, 1983;).

$$H_1=-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\frac{1}{m(x)}\frac{d}{dx}+V(x)$$

$$H_2=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{m(x)}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{m(x)}\right)+V(x)$$

$$H_3=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{m(x)}}\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{\sqrt{m(x)}}\right)+V(x)$$

$$H_4 = -\frac{1}{4}\left[\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{m(x)}}\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{m(x)}} + \frac{1}{\sqrt{m(x)}}\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{m(x)}}\frac{d}{dx}\right] + V(x)$$

Yukarıdaki Hamiltonyenler hermitik (Hermitik eşleniği kendisine eşit olan operatör) olup $m(x)$ kütlesi sabit olduğunda $H = -\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$, standart Hamiltonyen operatörüne dönüşür. Ayrıca yukarıdaki tüm operatörler Oldwig von Roos tarafından verilen (von Roos, O., 1983)

$$H = -\frac{1}{4}\left[m(x)^{\alpha}\frac{d}{dx}m(x)^{\beta}\frac{d}{dx}m(x)^{\gamma} + m(x)^{\gamma}\frac{d}{dx}m(x)^{\beta}\frac{d}{dx}m(x)^{\alpha}\right]$$

Hamiltonyenin özel durumlarıdır. Burada α, β, γ sabitler olup $\alpha + \beta + \gamma = -1$ dir. Hamiltonyen; $\alpha = 0, \beta = -1, \gamma = 0$ için H_1 , $\alpha = -1, \beta = 0, \gamma = 0$ için H_2, $\alpha = -1/2, \beta = 0$, $\gamma = -1/2$ için H_3 , $\alpha = 0, \beta = -1/2, \gamma = -1/2$ için H_4 olur.

Lévy-Leblond (Lévy-Leblond, 1995), bu Hamiltonyenlerin Galileo Galilei dönüşümleri altında invaryant olup olmadığını incelemiş, BenDaniel ve Duke formunda Hamiltonyen operatörünün Galileo Galilei dönüşümleri altında invaryant kaldığını göstermiştir. Biz de bu çalışmamızda H_1 BenDaniel ve Duke formundaki Hamiltonyeni ele aldık.

$$H_1 = -\frac{1}{m(x)}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\dot{m}}{m^2}\frac{d}{dx} + V(x) \qquad (1.9)$$

Burada $\dot{m} = \frac{dm}{dx}$ şeklinde kütlenin x'e göre türevini gösterir. Buna karşılık gelen Schrödinger denklemi ($H_1 = H$)

$$H\psi(x) = \left[-\frac{1}{m(x)}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\dot{m}}{m^2}\frac{d}{dx} + V(x)\right]\psi(x) = E\psi(x) \qquad (1.10)$$

olur. $m(x)$ konuma bağlı kütle x'in sürekli bir fonksiyonudur (Örneğin $m(x) = m_o + ax^2$, $m(x) = m_o/(a^2 + x^2)$, m_o , a pozitif sabitler). $m(x)$ fonksiyonu bazı noktalarda sıçrama süreksizliğine sahip olabilir. *m(x)* kütle fonksiyonunun süreksiz olduğu yerlerde $\psi(x)$ dalga fonksiyonu sürekli olmalı ve aynı zamanda dalga fonksiyonunu türevi $\psi'(x)$ aşağıdaki koşulu sağlamalıdır.

$$\left.\frac{1}{m(x)}\frac{d\psi}{dx}\right|_{-} = \left.\frac{1}{m(x)}\frac{d\psi}{dx}\right|_{+}$$

Burada $-,+$ indisleri sırasıyla kütlenin süreksiz olduğu noktanın sol ve sağ tarafını göstermektedir. Yukarıdaki koşullar $V(x)$ potansiyelinin söz konusu noktada sıçrama süreksizliğine sahip olduğu durumlarda da geçerlidir.

Yukarıda verdiğimiz konuma bağlı kütleli Schrödinger denklemi (1.10) zamandan bağımsızdır. Bu denklem zamana bağlı olarak da ifade edilebilir. Bu durumda zamana ve konuma bağlı kütleli Schrödinger denklemi

$$L\psi(x,t)=\left(i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}-H_{kbk}\right)\psi(x,t) \tag{1.11}$$

şeklinde yazılır (Nikitin, Zasadko, 2016). Denklemin hem konuma hem de zamana bağlı olması onun çözümünü daha da zorlaştırır.

V reel bir vektör uzayı, GL(V) de V vektör uzayından kendisine tanımlı tersi olan tüm lineer dönüşümlerin uzayı olsun. Bu durumda bir G grubunun temsili

$$T: G \to GL(V)$$
$$g \to T(g)$$

şeklinde tanımlanan bir homomorfizma ile ifade edilir.

Bu çalışmada konuma bağlı kütleli Schrödinger denkleminin grup teorisi tekniği ile incelenmesinde Kerimov'un verdiği yöntem kullanılmıştır (Kerimov, 2009). Bu yöntemde bir G grubunun temsili

$$T(g_0)f(g)=\left[\frac{h(gg_0)}{h(g)}\right]^{1/2}f(gg_0) \tag{1.12}$$

şeklinde ifade edilmiştir. Burada $g,g_0\in G$ olup $h(g)$ pozitif tanımlı bir fonksiyonudur. (1.12) ifadesinde $h(g)=1$ durumunda temsil operatörlerini $\widetilde{T}$ ile gösterirsek yukarıdaki temsil

$$\widetilde{T}(g_0)\widetilde{f}(g)=\widetilde{f}(gg_0) \tag{1.13}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade G grubunun sağ regüler temsilidir. $\widetilde{T}$ temsili T ye eşdeğerdir. Bu eşdeğerliği sağlayan bir W dönüşümü

$$W=f\to\widetilde{f}=h^{1/2}f \tag{1.14}$$

olarak ifade edilir (Kerimov, 2009; Arıcak, 2011).

G grubunun Casimir operatörü C, temsilin sonsuz küçük operatörleriyle ifade edilir. Temsilin sonsuz küçük operatörleri J_k

$$J_k = -i\frac{d}{dt}T(\omega_k(t))\Big|_{t=0} \tag{1.15}$$

ifadesinden bulunabilir. Bunun için G grubunun bir parametreli alt gruplara göre bir açılımını (parametrizasyonu) seçmek gerekir. Seçilen açılıma göre sonsuz küçük operatörleri J_k ve Casimir operatörü kolayca oluşturulabilir. Bu çalışmada Gauss, Cartan ve Iwasawa açılımlarına göre sonsuz küçük operatörler J_k ve Casimir operatörleri elde edilerek fiziksel sistemin Hamiltonyeni ile ilişkilendirilmiştir.

1.4. Yansıma ve Geçme Katsayıları

Atomların, moleküllerin ve temel parçacıkların yapısını öğrenmek için saçılma adıyla bilinen deneysel yöntem kullanılır. Bu yöntemde sabit tutulan bir hedef parçacık üzerine belirli bir enerjiye sahip diğer bir parçacık gönderilir ve saçılan parçacıkların yön ve enerjileri gözlenir.

Yansıma ve geçme katsayılarını saçılma matrisinin elemanlarıdır. Bir fiziksel olayda saçılma matrisi ortama gelen dalgaların asimptotik ifadesi ile ortamdan çıkan dalgaların asimptotik ifadesi arasında ilişki kurar. Saçılma matrisini oluşturmak için çözümlerin asimptotik davranışlarının bilinmesi gerekir. Bir boyutlu Schrödinger denkleminin çözümü olan dalga fonksiyonun asimptotik formu (Griffiths, 1995)

$$\psi(x) = c_1 e^{ikx} + c_2 e^{-ikx} \quad , \quad x \to \infty \quad , \; k = \sqrt{2mE/\hbar}$$

şeklinde verilir. Benzer durum $x \to -\infty$ için de yazılabilir. Burada e^{ikx} terimi parçacığın sağa doğru hareketine e^{-ikx} terimi de sola doğru hareketine karşılık gelir.

Saçılma teorisinde salınım bölgesinde saçılma matrisi iki farklı rol oynar. Birincisi; x değişkeninin büyük değerlerinde Schrödinger denkleminin çözümünün asimptotik davranışından elde edilir ve bu asimptotik saçılma matrisi olarak tanımlanır. Bu bize yansıma ve geçme katsayılarını belirlemede kolaylık sağlar. İkincisi; giden dalga çözümüyle gelen dalga çözümü arasında ilişki kurar. Bu da fonksiyonel saçılma matrisi olarak tanımlanır. Bu ikinci durum ters saçılmayı mümkün kılar. Asimptotik saçılma matrisinin sonucu ile fonksiyonel saçılma matrisinin sonucu aynı olmalıdır (Newton, 1984).

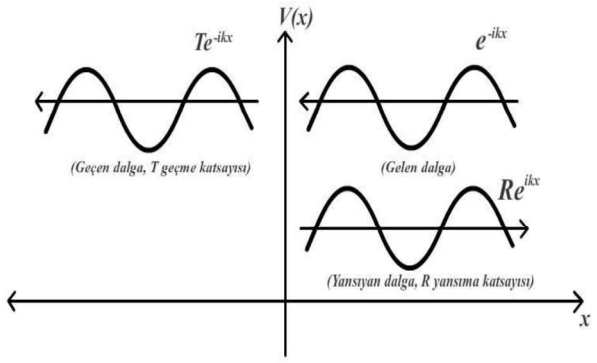
Bir boyutlu Schrödinger denklemini ele alalım. Denklemin soldan ve sağdan gelen ψ_l , ψ_r çözümleri

$$\psi_l(x)=\begin{cases} Te^{ikx} & , \ x\to\infty \\ e^{ikx}+Le^{-ikx}, & x\to-\infty \end{cases} \quad \text{ve} \quad \psi_r(x)=\begin{cases} e^{-ikx}+\mathrm{Re}^{ikx}, & x\to\infty \\ Te^{-ikx} & , \ x\to-\infty \end{cases} \tag{1.16}$$

fiziksel çözümleri sınır koşullarını sağlar. Burada T geçme katsayısını, L ve R ise soldan ve sağdan yansıma katsayılarını ifade eder (Aktosun, 1992). Böylece saçılma matrisi (veya S matris)

$$S=\begin{pmatrix} T & R \\ L & T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} T & R_r \\ R_l & T \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir. Saçılma matrisi bize parçacıkların bir engelden yansıması ve geçmesi yani saçılması hakkında $\psi^{giden}=S\psi^{gelen}$ bilgi verir (Kerimov, 2000). Saçılma matrisi özellikle elektrik, elektronik ve haberleşme sistemleri ile ilgili çalışmalarda da yer alır. Saçılma parametrelerinin tanımı ilk defa Vitold Belevitch'in 1945 tarihli tezinde yer almıştır. Belevitch'in çalışmasında S matrisi yerine kullanılan terim dağılım matrisidir. Saçılma matrisi terimi ise 1947 yılında radarlar üzerine çalışmalar yapan Robert Henry Dicke tarafından verilmiştir.



Şekil 2. Yansıma ve geçme katsayısı

BÖLÜM 2

KONUMA BAĞLI KÜTLELİ SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Konuma bağlı kütleli Schrödinger denkleminin analitik çözümünü elde etmek için nokta kanonik dönüşüm yöntemi, Lie grup teorisi yöntemi gibi farklı yöntemler verilmiş olup, bu çalışmada grup teorisi yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntemde fiziksel sistemin Hamiltonyeni ile ele alınan Lie grubunun Casimir operatörü arsında bir ilişki kurulmaya çalışılır. Bu çalışmada genel lineer dönüşümler grubu $GL(2,\mathbb{R})$'nin bir alt grubu olan

$$g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{R})\ ,\ \det(g)=\alpha\delta-\beta\gamma=1\ \ ,\ \alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanan özel lineer dönüşümler grubu $G=SL(2,\mathbb{R})$ ele alınmıştır. Bu G grubunun bir g elemanının bir parametreli alt gruplarına göre Iwasawa, Cartan ve Gauss açılımlarına bağlı olarak elde edilen Casimir operatörü ile Hamiltonyen arasındaki ilişkiden konuma bağlı kütleli Schrödinger denkleminin sürekli hal çözümleri ve yansıma katsayıları elde edilmiştir.

2.1 Iwasawa Açılımı :

$SL(2,\mathbb{R})$ grubunun bir g elemanının bir parametreli alt gruplara göre Iwasawa açılımı

$$g(\varphi,t,u)=k(\varphi)a(t)n(u)=\begin{pmatrix}\cos\varphi/2 & \sin\varphi/2\\ -\sin\varphi/2 & \cos\varphi/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{t/2} & 0\\ 0 & e^{-t/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$0\le\varphi<2\pi\ \ ,\ -\infty<t<\infty\ \ ,\ \ -\infty<u<\infty$$

formunda verilir. Grubun Casimir operatörünü oluşturmak için sonsuz küçük operatörlerin bilinmesi gerekir. Bu açılıma göre

$$J_k=-i\frac{d}{d\tau}T(\omega_k(\tau))\Big|_{\tau=0}\quad ,\quad k=1,2,3$$

bağıntısından grubun sonsuz küçük operatörler J_1,J_2,J_3

$$iJ_1 = -\frac{1}{\dot{t}}\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\dot{h}}{2h\dot{t}},$$
$$iJ_2 = \frac{u}{\dot{t}}\frac{\partial}{\partial x} - z\frac{\partial}{\partial \varphi} + (1-u^2+e^{-2t})\frac{\dot{h}}{2h\dot{t}}u, \qquad (2.1)$$
$$iJ_3 = -\frac{uz}{\dot{z}}\frac{\partial}{\partial x} - z\frac{\partial}{\partial \varphi} - (1+u^2-e^{-2t})\frac{\dot{h}}{2h\dot{t}}u .$$

olarak bulunur, burada $\dot{t} = \frac{dt}{dx}, \dot{h} = \frac{dh}{dx}$ dir. Bu operatörlere göre grubun Casimir operatörü,

$$C = J_1^2 + J_2^2 - J_3^2$$
$$= -\frac{1}{\dot{t}^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{\dot{t}^2}\left(\frac{\dot{h}}{h} - \frac{\ddot{t}}{\dot{t}} + \dot{t}\right)\frac{\partial}{\partial x} + 2e^{-t}\frac{\partial^2}{\partial u \partial \varphi} - e^{-2t}\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\dot{h}}{2h\dot{t}^2}\left(\frac{\dot{h}}{2h} - \frac{\ddot{h}}{\dot{h}} + \frac{\ddot{t}}{\dot{t}} - \dot{t}\right) \qquad (2.2)$$

olarak elde edilir (Arıcak, 2011).

$\Im_{n\lambda}$, $L^2(SL(2,R))$'nin $f(g)$ fonksiyonlarını içeren

$$f(g) = h^{-1/2}t^j_{n\lambda}(g) = e^{-in\varphi}e^{-i\lambda u}\psi(x) \qquad (2.3)$$

alt uzay olsun. Burada n ve λ tam ve yarı tam değerler alır. (2.2) de verilen Casimir operatörünün ifadesi $\Im_{n\lambda}$ alt uzayına kısıtlar ve düzenlersek operatörün yeni hali

$$\left[C + j(j+1)\right]_{\Im_{n\lambda}} = \frac{m}{\dot{t}^2}\left\{-\frac{1}{m}\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{m}\left(\frac{\dot{h}}{h} - \frac{\ddot{t}}{\dot{t}} + \dot{t}\right)\frac{d}{dx} + \frac{\dot{t}^2}{m}\left(-2e^{-t}n\lambda + \lambda^2 e^{-2t}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\dot{h}}{2mh}\left(\frac{\dot{h}}{2h} - \frac{\ddot{h}}{\dot{h}} + \frac{\ddot{t}}{\dot{t}} - \dot{t}\right) + \frac{\dot{t}^2}{m}j(j+1)\right\} \qquad (2.4)$$

şeklinde olur. Hamiltonyeni BenDaniel ve Duke formunda elde etmek için yani (2.4) denklemini

$$\left[C + j(j+1)\right]_{\Im_{nk}} = Q\left[H - E\right] = Q\left[-\frac{1}{m(x)}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\dot{m}}{m^2}\frac{d}{dx} + V(x) - E\right]$$

ile karşılaştırdığımız zaman h'ın sağlaması gereken denklem

$$\frac{\dot{m}}{m} = -\frac{\dot{h}}{h} + \frac{\ddot{t}}{\dot{t}} - \dot{t}$$

olur. Bu denklem çözülürse, h, $h = \dot{t}e^{-t}/m$ şeklinde bulunur. Bu durumda (2.4) ifadesini h ve $z = e^{-t}$ ile tekrar düzenlenirse

$$\left[C+j(j+1)\right]\Im_{n\lambda}=\frac{mz^2}{\dot{z}^2}\left\{-\frac{1}{m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\dot{m}}{m^2}\frac{d}{dx}+\frac{\dot{z}^2}{4mz^2}\left[4\lambda^2z^2-8n\lambda z+4\left(j+\frac{1}{2}\right)^2-1\right]\right.$$
$$\left.-\frac{\dddot{z}}{2m\dot{z}}+\frac{3}{4m}\frac{\ddot{z}^2}{\dot{z}^2}+\frac{\ddot{m}}{2m^2}-\frac{3}{4}\frac{\dot{m}^2}{m^3}\right\} \quad (2.5)$$

şeklinde bir ifade elde edilir.

Enerji öz değeri ile potansiyelin parametreler arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$-8n\lambda=g_1-\sigma_1E\ ,\quad 4\lambda^2=g_2-\sigma_2E\ ,\quad 1-4\left(j+1/2\right)^2=c_0E-h_0$$

Bu durumda (2.5) ifadesi

$$\left[C+j(j+1)\right]_{n\lambda}=\frac{mz^2}{\dot{z}^2}\left\{-\frac{1}{m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\dot{m}}{m^2}\frac{d}{dx}-\frac{\dot{z}^2}{4mz^2}R(z)E+\frac{\dot{z}^2}{4mz^2}\left(g_2z^2+g_1z+h_0\right)\right.$$
$$\left.-\frac{\dddot{z}}{2m\dot{z}}+\frac{3}{4m}\frac{\ddot{z}^2}{\dot{z}^2}+\frac{\ddot{m}}{2m^2}-\frac{3}{4}\frac{\dot{m}^2}{m^3}\right\} \quad (2.6)$$

haline dönüşür. Böylece Hamiltonyen

$$H=-\frac{1}{m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\dot{m}}{m^2}\frac{d}{dx}+V(x)=-\frac{1}{m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\dot{m}}{m^2}\frac{d}{dx}+\frac{g_2z^2+g_1z+h_0+1}{R}$$
$$+\frac{z^2}{R^2}\left[-\frac{5(\sigma_1^2-4\sigma_2c_0)}{4R}-\sigma_2+\frac{\sigma_1}{z}\right]+\frac{\ddot{m}}{4m^2}-\frac{7}{16}\frac{\dot{m}^2}{m^3} \quad (2.7)$$

formunda bulunur, burada $Q=\frac{mz^2}{\dot{z}^2}$, $\frac{\dot{z}^2R(z)}{4mz^2}=1$, $R(z)=\sigma_2z^2+\sigma_1z+c_0$ dir.

Hamiltonyen ifadesindeki potansiyel terimi Natanzon potansiyeli tipindedir. Natanzon potansiyelleri altı parametreye $(g_2,g_1,\sigma_1,\sigma_2,h_o,c_o)$ ve *z(x)* bağlı olarak en genel halde ifadesi aşağıdaki gibi verilir (Natanzon, 1971; Cordero, Salamo, 1994; Cooper, Ginocchio, 1987).

$$V(x)=\frac{g_2z^2+g_1z+h_0+1}{R}+\frac{z^2}{R^2}\left[-\frac{5(\sigma_1^2-4\sigma_2c_0)}{4R}-\sigma_2+\frac{\sigma_1}{z}\right]$$

Bu durumda (2.6) ile verilen Hamiltonyen içindeki potansiyelin ifadesi

$$V(x)=\frac{g_2z^2+g_1z+h_0+1}{R}+\frac{z^2}{R^2}\left[-\frac{5(\sigma_1^2-4\sigma_2c_0)}{4R}-\sigma_2+\frac{\sigma_1}{z}\right]+\frac{\ddot{m}}{4m^2}-\frac{7}{16}\frac{\dot{m}^2}{m^3}$$

şeklinde olur.

Sürekli halde temsilin matris elemanı

$$t^{j}_{n\lambda}(g)=\frac{2^{j+1}e^{-n\pi i}}{\pi\,\Gamma(-j+n)}\,|\,\lambda\,|^{-j-1}\;\;e^{-in\varphi}e^{-i\lambda u}\;\;W_{-n,j+\frac{1}{2}}\left(2|\lambda|e^{-t}\right) \tag{2.8}$$

şeklinde verilir (Vilenkin, Klimyk, 1993). Burada n tam ve j de kompleks değerler alır.

$f(g)$ fonksiyonunun yukarıda verilen (2.3) ifadesinden dalga fonksiyonu

$$\psi(x)=\psi(t(x))=m^{1/4}e^{t/2}\,\frac{2^{j+1}e^{-n\pi i}}{\pi\,\Gamma(-j+n)}\,|\,\lambda\,|^{-j-1}W_{-n,j+1/2}\left(2|\lambda|e^{-t}\right) \tag{2.9}$$

veya z cinsinden

$$\psi(z(x))=m^{1/2}z^{-1/2}\,\frac{2^{j+1}e^{-n\pi i}}{\pi\,\Gamma(-j+n)}\,|\,\lambda\,|^{-j-1}W_{-n,j+1/2}\left(2|\lambda|z\right)$$

olarak yazılır.

Bu çözümün asimptotik davranışını inceleyelim. Whitttaker fonksiyonunun (Bateman, 1953)

$$W_{k,\mu}(y)=e^{-x/2}\;\;x^{c/2}\;\;\Psi(a,c;y)$$

ifadesinden, (2.9) çözümündeki Whittaker fonksiyonu

$$k=-n\;\;,\;\;\mu=j+1/2\;\;,\;\;y=2|\lambda|e^{-t},\;\;a=n+j+1\;\;,c=2j+2$$

$$W_{-n,j+1/2}\left(2|\lambda|e^{-t}\right)=\left(2|\lambda|e^{-t}\right)^{j+1}e^{-|\lambda|e^{-t}}\,\Psi(n+j+1,2j+2,\,2|\lambda|e^{-t})$$

olarak yazılır. Whitttaker fonksiyonu içindeki $\Psi(a,c;y)$ fonksiyonunun ifadesi

$$\Psi(a,c;y)=\frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)}\,\Phi(a,c;y)+\frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)}\,\Phi(a-c+1,2-c;y)$$

şeklindedir. Buradan, Whittaker fonksiyonunun yeni ifadesi

$$W_{-n,j+1/2}\left(2|\lambda|e^{-t}\right)=\left(2|\lambda|e^{-t}\right)^{j+1}e^{-|\lambda|e^{-t}}\left\{\frac{\Gamma(-2j-1)}{\Gamma(-j+n)}\,\Phi(n+j+1,2j+2,\,2|\lambda|e^{-t})+\right.$$
$$\left.+\frac{\Gamma(2j+1)}{\Gamma(j+n+1)}\left(2|\lambda|e^{-t}\right)^{-2j-1}\Phi(-j+n,-2j,\,2|\lambda|e^{-t})\right\}$$

şeklinde yazılır. Bu ifade (2.9) çözümünde yerine yazılırsa dalga fonksiyonunun yeni ifadesi

$$\psi(x)=m^{\frac{1}{4}}e^{\frac{t}{2}}\frac{2^{2j+21}e^{-n\pi i}}{\pi\Gamma(-j+n)}\,e^{-|\lambda|e^{-t}}e^{-i\rho t}\left\{\frac{\Gamma(-2j-1)}{\Gamma(-j+n)}\Phi(n+j+1,2j+2,\,2|\lambda|e^{-t})+\right.$$
$$\left.+\frac{\Gamma(2j+1)}{\Gamma(j+n+1)}\left(2|\lambda|e^{-t}\right)^{-2i\rho}e^{2i\rho t}\;\Phi(-j+n,-2j,\,2|\lambda|e^{-t})\right\} \tag{2.10}$$

olarak bulunur. Buradan $x\to\infty$, $t(x)\to\infty$ durumunda çözüm

$$\underset{x\to\infty}{\psi(x)}=\frac{2^{2j+2}e^{-n\pi i}}{\pi\Gamma(-j+n)}\,\frac{\Gamma(2j+1)}{\Gamma(j+n+1)}\left(2|\lambda|\right)^{-2i\rho}e^{i\rho x}+\frac{2^{2j+2}e^{-n\pi i}}{\pi\Gamma(-j+n)}\,\frac{\Gamma(-2j-1)}{\Gamma(-j+n)}\left(2|\lambda|\right)^{-2i\rho}e^{-i\rho x}$$

$$=A_1e^{i\rho x}+A_2e^{-i\rho x}$$

ve yansıma katsayısı

$$R=\frac{\Gamma(2j+1)\Gamma(-j+n)\left(2|\lambda|\right)^{-2i\rho}}{\Gamma(j+n+1)\Gamma(-2j-1)}$$

şeklinde elde edilir.

2.2 Cartan Açılımı :

$SL(2,\mathbb{R})$ grubunun bir g elemanının bir parametreli alt gruplarına göre Cartan açılımı

$$g(\varphi,t,\theta)=k(\varphi)a(t)k'(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\varphi/2 & \sin\varphi/2\\ -\sin\varphi/2 & \cos\varphi/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{t/2} & 0\\ 0 & e^{-t/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta/2 & \sin\theta/2\\ -\sin\theta/2 & \cos\theta/2\end{pmatrix}$$

$$0\le\varphi<2\pi\,,\quad 0\le\theta<2\pi\,,\;t=t(x),\;0\le t<\infty$$

formunda verilir. Bu açılıma göre grubun sonsuz küçük operatörler J_1,J_2,J_3

$$iJ_1=-\frac{\cos\theta}{\dot{t}}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\sin\theta}{\sinh t}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{\sin\theta\coth t}{\dot{t}}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\dot{h}}{2h\dot{t}}\cos\theta$$

$$iJ_2=\frac{\sin\theta}{\dot{t}}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\cos\theta}{\sinh t}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\cos\theta\coth t\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\dot{h}}{2h\dot{t}}\sin\theta \tag{2.11}$$

$$iJ_3=-\frac{\partial}{\partial\theta}$$

olarak bulunur.

Buradan grubun Casimir operatörü de

$$C = J_1^2 + J_2^2 - J_3^2$$

$$= -\frac{1}{\dot{t}^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{\dot{t}^2}\left(\frac{\dot{h}}{h} - \frac{\ddot{t}}{\dot{t}} + \dot{t}\coth t\right)\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\sinh^2 t}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - 2\cosh t\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\theta} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right) + \frac{\dot{h}}{2h}\left(\frac{\dot{h}}{2h} - \frac{\ddot{h}}{\dot{h}} + \frac{\ddot{t}}{\dot{t}} - \dot{t}\coth t\right) \tag{2.12}$$

şeklinde elde edilir (Arıcak, 2011).

(2.12) Casimir peratörünü; $t_{nk}^{j}(g)$ temsilin matris elemanları olmak üzere,

$$f(g) = h^{-1/2}t_{nk}^{j}(g) = e^{-in\varphi}\,e^{-ik\theta}\psi(x) \tag{2.13}$$

fonksiyonlarını içeren $L^2(SL(2,R))$ uzayının bir alt uzayına $\Im_{nk}$ kısıtlar ve düzenlersek,

$$\left[C + j(j+1)\right]_{\Im_{nk}} = \frac{m}{\dot{t}^2}\left\{-\frac{1}{m}\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{m}\left(\frac{\dot{h}}{h} - \frac{\ddot{t}}{\dot{t}} + \dot{t}\coth t\right)\frac{d}{dx} - \frac{\dot{t}^2}{m\sinh^2 t}\left(-n^2 + 2nk\cosh t - k^2\right) + \frac{\dot{h}}{2mh}\left(\frac{\dot{h}}{2h} - \frac{\ddot{h}}{\dot{h}} + \frac{\ddot{t}}{\dot{t}} - \dot{t}\coth t\right) + \frac{\dot{t}^2}{m}j(j+1)\right\} \tag{2.14}$$

şeklinde sadece *x*'e bağlı olan (2.14) denklemini elde ederiz, burada n ve k tam ve yarı tam sayı değerler alır.

$$\left[C + j(j+1)\right]_{\Im_{nk}} = Q\left[H - E\right],\quad j = -\frac{1}{2} + i\rho,\quad 0 \le \rho < \infty$$

eşitliğini karşılaştırırsak h'ın sağlaması gereken denklem

$$\frac{\dot{m}}{m} = -\frac{\dot{h}}{h} + \frac{\ddot{t}}{\dot{t}} + \dot{t}\coth t$$

olur. Bu denklemi çözersek, *h*'ın ifadesi

$$h = \frac{\dot{t}}{m\sinh(t/2)\cosh(t/2)}$$

olarak bulunur.

Natanzon potansiyelleri ile karşılaştırabilmek amacıyla (2.14) ifadesinde $z = \tanh^2(t/2), (0 < z < 1)$ değişken dönüşümü yapalım. Buna göre (2.14) eşitliğinin *z* cinsinden ifadesi

$$\left[C+j(j+1)\right]\big|_{\Im_{nk}}=\frac{z(1-z)^2\ m}{\dot{z}^2}\left\{-\frac{1}{m}\frac{d^2}{dx^2}-\frac{\dot{m}}{m^2}\frac{d}{dx}-\frac{\dot{z}^2}{4mz^2}\left[\frac{1-(n-k)^2-z\left(1-(n+k)^2\right)}{1-z}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{z\left[1-(2j+1)^2\right]}{(1-z)^2}-\frac{\ddot{z}}{2m\dot{z}}+\frac{3}{4}\frac{\ddot{z}^2}{m\dot{z}^2}-\frac{\dot{z}^2}{4mz^2}+\frac{\ddot{m}}{2m^2}-\frac{3}{4}\frac{\dot{m}^2}{m^3}\right\} \tag{2.15}$$

şeklinde bulunur.

n,k ve j parametreleri, E enerjinin bir lineer fonksiyonu olarak Natanzon parametreleriyle

$$1-(n-k)^2=c_0E-h_0\,,\ \ 1-(n+k)^2=aE-f\,,\ 1-(2j+1)^2=c_1E-h_1$$

şeklinde ifade edilir. Buradan (2.15) eşitliği tekrar düzenlenirse

$$\left[C+j(j+1)\right]\big|_{\Im_{nk}}=\frac{z(1-z)^2\ m}{\dot{z}^2}\left\{-\frac{1}{m}\frac{d^2}{dx^2}-\frac{\dot{m}}{m^2}\frac{d}{dx}-\frac{\dot{z}^2}{4mz^2}\left[\frac{c_0-az}{1-z}+\frac{c_1z}{(1-z)^2}\right]E\right.$$
$$\left.-\frac{\dot{z}^2}{4mz^2}\left[\frac{-h_0+fz}{1-z}-\frac{h_1z}{(1-z)^2}\right]-\frac{\ddot{z}}{2m\dot{z}}+\frac{3}{4}\frac{\ddot{z}^2}{m\dot{z}^2}-\frac{\dot{z}^2}{4mz^2}+\frac{\ddot{m}}{2m^2}-\frac{3}{4}\frac{\dot{m}^2}{m^3}\right\} \tag{2.16}$$

olarak bulunur. $\left[C+j(j+1)\right]_{\Im_{nk}}=Q\left[H-E\right]$ eşitliğinden E'nin katsayısının 1 olması gerektiğinden z,

$$\frac{\dot{z}^2}{4mz^2(1-z)^2}R(z)=1$$

denklemini sağlamalıdır. Bu durumda $Q=\frac{z(1-z)^2\ m}{\dot{z}^2}$, $R(z)=az^2+(c_1-c_0-a)z+c_0$ olur. Yukarıdaki (2.16) ifadesi bu yeni duruma göre tekrar düzenlenirse, Hamiltonyen

$$H=-\frac{1}{m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\dot{m}}{m^2}\frac{d}{dx}+V(x)=-\frac{1}{m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\dot{m}}{m^2}\frac{d}{dx}+\frac{fz(z-1)+h_0(1-z)+h_1z+1}{R}$$
$$+\frac{z^2(1-z)^2}{R^2}\left\{-\frac{5\left[(a-c_1-c_0)^2-4c_1c_0\right]}{4R}+a+\frac{a+(c_1-c_0)(2z-1)}{z(1-z)}\right\}+\frac{\ddot{m}}{4m^2}-\frac{7}{16}\frac{\dot{m}^2}{m^3} \tag{2.17}$$

olarak bulunur. Hamiltonyendeki potansiyel terimi Natanzon potansiyeli tipindedir. Natanzon potansiyelleri altı parametreye (f,h_o,h_1,a,c_o,c_1) ve *z(x)* bağlı olarak en genel halde ifadesi aşağıdaki gibi verilir (Natanzon, 1971; Cordero, Salamo, 1994; Cooper, Ginocchio, 1987).

$$V(x)=\frac{fz(z-1)+h_0(1-z)+h_1z+1}{R}+\frac{z^2(1-z)^2}{R^2}\left\{-\frac{5\left[(a-c_1-c_o)^2-4c_1c_o\right]}{4R}+a+\frac{a+(c_1-c_0)(2z-1)}{z(1-z)}\right\}$$

Bu durumda (2.17) de verilen Hamiltonyen içindeki potansiyelin ifadesi

$$V(x)=\frac{fz(z-1)+h_0(1-z)+h_1z+1}{R}+\frac{z^2(1-z)^2}{R^2}\left\{-\frac{5\left[(a-c_1-c_0)^2-4c_1c_0\right]}{4R}+a+\frac{a+(c_1-c_0)(2z-1)}{z(1-z)}\right\}+\frac{\ddot{m}}{4m^2}-\frac{7}{16}\frac{\dot{m}^2}{m^3}$$

şeklinde olur.

Sürekli halde, temsilin matris elemanı

$$t^j_{nk}(g)=e^{-in\varphi-ik\theta}\ \beta^j_{nk}(\cosh t)\ ,\qquad n\geq k$$

$$t^j_{nk}(g)=e^{-in\varphi-ik\theta}\frac{\Gamma(j-k+1)}{(n-k)!\Gamma(j-n+1)}\left(\cosh(t/2)\right)^{2j}\left(\tanh(t/2)\right)^{n-k}F\left(-j-k,-j+n;n-k+1;\tanh^2(t/2)\right)$$

(2.18)

şeklinde verilir (Vilenkin, Klimyk, 1993). Buradan (2.13) ifadesinden dalga fonksiyonu da

$$\psi(x)=\psi(t(x))=\frac{\Gamma(j-k+1)}{(n-k)!\Gamma(j-n+1)}\sqrt{m}\left(\cosh t/2\right)^{2j+k-n+1/2}\left(\sinh t/2\right)^{n-k+1/2}\times F\left(-j-k,-j+n;n-k+1;\tanh^2 t/2\right)\qquad(2.19)$$

veya z cinsinden

$$\psi(z(x))=\frac{\Gamma(j-k+1)}{(n-k)!\Gamma(j-n+1)}\sqrt{m}\ (1-z)^{-j-1/4}(z)^{(n-k)}F\left(-j-k,-j+n;n-k+1;z\right)$$

olarak yazılır.

Hipergeometrik fonksiyonun analitik devam bağıntısı aşağıdaki gibi verilir (Bateman, 1953).

$$F(a,b;c;z)=A_1F(a,b;a+b-c+1;1-z)+A_2(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b;c-a-b+1;1-z)$$

$$A_1=\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}\ ,\quad A_2=\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}\ ,\quad \left(|\arg(1-z)|<\pi\right)$$

(2.19) çözümündeki Hipergeometrik fonksiyonu analitik devam bağıntısı ile ifade edersek

$$a=-j-\frac{1}{2}(\eta-\upsilon),\ \ b=-j-\frac{1}{2}(\eta+\upsilon-1),\ \ c=-\upsilon-\eta+\frac{3}{2}$$

$$F\left(-j-\frac{1}{2}(\eta-\upsilon),-j-\frac{1}{2}(\eta+\upsilon-1);-\upsilon-\eta+\frac{3}{2};\tanh^2 t/2\right)$$
$$= A_1\ F\left(-j-\frac{1}{2}(\eta-\upsilon),-j-\frac{1}{2}(\eta+\upsilon-1);-2j+\nu;\frac{1}{\cosh t/2}\right)$$
$$+ A_2\left(\frac{1}{\cosh^2 t/2}\right)^{2j-\nu+1} F\left(j-\frac{1}{2}(\eta+3\upsilon),j-\frac{1}{2}(\eta+\upsilon-2);2j-\nu+2;\frac{1}{\cosh t/2}\right)$$

çözüm,

$$\psi(x)=\frac{\Gamma(j-\frac{\eta-\nu}{2}+1)}{(\eta-\frac{1}{2})!\Gamma(j+\frac{\eta-\nu-1}{2}+1)}\sqrt{m}\,(\cosh t/2)^{2j-\eta+1}(\sinh t/2)^{\eta}$$
$$\times\left\{\begin{array}{l} A_1\ F\left(-j-\frac{1}{2}(\eta-\upsilon),-j-\frac{1}{2}(\eta+\upsilon-1);-2j+\nu;\frac{1}{\cosh t/2}\right)+ \\ \quad + A_2\left(\frac{1}{\cosh^2 t/2}\right)^{2j+1} F\left(j-\frac{1}{2}(\eta+3\upsilon),j-\frac{1}{2}(\eta+\upsilon-2);2j-\nu+2;\frac{1}{\cosh t/2}\right) \end{array}\right\} \tag{2.20}$$

şeklinde elde edilmiş olur. Burada

$$A_1=\frac{\Gamma(-\upsilon-\eta+\frac{3}{2})\,\Gamma(2j-\nu+1)}{\Gamma(j-\frac{\eta+3\nu}{2})\,\Gamma(j-\frac{\eta+\nu-2}{2})},\quad A_2=\frac{\Gamma(-\upsilon-\eta+\frac{3}{2})\,\Gamma(-2j+\nu-1)}{\Gamma(-j-\frac{\eta-\nu}{2})\,\Gamma(-j-\frac{\eta+\nu-1}{2})}\quad \text{dir.}$$

Elde edilen bu çözümün $x\to\infty$ gitmesi durumunda limiti

$$\underset{t(x)\to\infty}{\psi(x)} = N\left\{A_1\ e^{i\rho t/2} + A_2\, e^{-i\rho t/2}\right\}$$

$$N=\frac{\Gamma(j-\frac{\eta-\nu}{2}+1)}{(\eta-\frac{1}{2})!\Gamma(j+\frac{\eta-\nu-1}{2}+1)}$$

ve yansıma katsayısı

$$R=\frac{\Gamma(-2j+\nu-1)\Gamma(-j-\frac{\eta+3\nu}{2})\,\Gamma(j-\frac{\eta+\nu-2}{2})}{\Gamma(-j-\frac{\eta-\nu}{2})\,\Gamma(-j-\frac{\eta+\nu-1}{2})\Gamma(2j-\nu+1)}$$

şeklinde bulunur.

2.3 Gauss Açılımı :

$SL(2,\mathbb{R})$ grubunun bir g elemanının bir parametreli alt gruplara göre Gauss açılımı

$$g(v,t,u)=n(v)a(t)n^{t}(u)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ v & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{\frac{t}{2}} & 0\\ 0 & e^{-\frac{t}{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$-\infty<u<\infty\ ,\ -\infty<v<\infty\ ,\ 0<t<\infty$$

formunda verilir. Bu açılıma göre sonsuz küçük operatörler J_1,J_2,J_3

$$\begin{aligned} iJ_1&=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}-u\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\dot{h}}{2hi},\\ iJ_2&=\frac{2u}{i}\frac{\partial}{\partial x}+e^{-t}\frac{\partial}{\partial v}-u^2\frac{\partial}{\partial u}+\frac{u\dot{h}}{hi},\\ iJ_3&=\frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

olarak bulunur. Bu operatörler yardımıyla grubun Casimir operatörü de

$$C=J_1^2+J_2^2-J_3^2=J_1{}^2+(J_2-J_3)(J_2+J_3)$$

$$=J_1{}^2+\frac{1}{2}\{(J_2-J_3)(J_2+J_3)+(J_2+J_3)(J_2-J_3)\}$$

$e_+=(J_2-J_3)$, $e_-=(J_2+J_3)$ dersek

$$C=J_1{}^2+\frac{1}{2}\{e_+e_-+e_-e_+\}$$

$$=-\frac{1}{i^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{i^2}\left(\frac{\dot{h}}{h}-\frac{\ddot{t}}{\dot{t}}+\dot{t}\right)\frac{\partial}{\partial x}-e^{-t}\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}+\frac{\dot{h}}{2hi^2}\left(\frac{\dot{h}}{2h}-\frac{\ddot{h}}{\dot{h}}+\frac{\ddot{t}}{\dot{t}}-\dot{t}\right) \tag{2.22}$$

şeklinde elde edilir.

(2.22) Casimir operatörünü; $t^{j}_{\mu\lambda}(g)$ temsilin matris elemanı olmak üzere,

$$f(g)=h^{-1/2}t^{j}_{\mu\lambda}(g)=e^{-i\mu v-i\lambda u}\psi(x) \tag{2.23}$$

fonksiyonların içeren $L^2(SL(2,R))$ uzayının bir alt uzayına $\Im_{\mu\lambda}$ kısıtlar ve düzenlersek

$$\left[C+j(j+1)\right]_{\Im_{\mu\lambda}}=\frac{m}{\dot{t}^2}\left\{-\frac{1}{m}\frac{d^2}{dx^2}-\frac{1}{m}\left(\frac{\dot{h}}{h}-\frac{\ddot{t}}{\dot{t}}+\dot{t}\right)\frac{d}{dx}+\frac{\dot{t}^2}{m}\mu\lambda e^{-t}\right.$$
$$\left.+\frac{\dot{h}}{2mh}\left(\frac{\dot{h}}{2h}-\frac{\ddot{h}}{\dot{h}}+\frac{\ddot{t}}{\dot{t}}-\dot{t}\right)+\frac{\dot{t}^2}{m}j(j+1)\right\} \quad (2.24)$$

şeklinde sadece *x*'e bağlı olan eşitliği elde ederiz , burada μ ve λ tam ve yarı tam sayı değerler alır.

$$\left[C+j(j+1)\right]_{\Im_{\mu\lambda}}=Q\left[H-E\right],\quad j=-\frac{1}{2}+i\rho,\quad 0\le\rho<\infty$$

eşitliğini karşılaştırırsak, h' ın sağlaması gereken denklem

$$\frac{\dot{m}}{m}=-\frac{\dot{h}}{h}+\frac{\ddot{t}}{\dot{t}}-\dot{t}$$

olur. Bu denklemi çözersek, *h*'ın ifadesi $h=\frac{\dot{t}e^{-t}}{m}$ olarak bulunur.

(2.24) ifadesi, h ve $z=e^{-t}$ değişken dönüşümüne göre tekrar yazılır ve düzenlenirse

$$\left[C+j(j+1)\right]_{\Im_{\mu\lambda}}=\frac{mz^2}{\dot{z}^2}\left\{-\frac{1}{m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\dot{m}}{m^2}\frac{d}{dx}+\frac{\dot{z}^2}{mz^2}\left[\mu\lambda z+j(j+1)\right]-\frac{\dddot{z}}{2m\dot{z}}+\frac{3}{4m}\frac{\ddot{z}^2}{\dot{z}^2}+\frac{\ddot{m}}{2m^2}-\frac{3}{4}\frac{\dot{m}^2}{m^3}\right\} \quad (2.25)$$

şeklinde bulunur.

λ,μ,j parametreleri E enerjinin bir lineer fonksiyonu olarak

$$\lambda\mu=-aE+b\ ,\quad j(j+1)=cE+d$$

şeklinde ifade edilebilir(*a,b,c,d* parametreler). Buna göre (2.25) eşitliği tekrar düzenlenirse

$$\left[C+j(j+1)\right]_{\mu\lambda}=\frac{mz^2}{\dot{z}^2}\left\{-\frac{1}{m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\dot{m}}{m^2}\frac{d}{dx}+\frac{\dot{z}^2(bz+d)}{mz^2}\right.$$
$$\left.-\frac{\dddot{z}}{2m\dot{z}}+\frac{3}{4m}\frac{\ddot{z}^2}{\dot{z}^2}+\frac{\ddot{m}}{2m^2}-\frac{3}{4}\frac{\dot{m}^2}{m^3}-\frac{\dot{z}^2(az-c)}{mz^2}E\right\} \quad (2.26)$$

elde edilir. $\left[C+j(j+1)\right]_{\Im_{\mu\lambda}}=Q\left[H-E\right]$ eşitliğinden E 'nin katsayısının bir olması gerektiğinden

$$\frac{\dot{z}^2R(z)}{mz^2}=1$$

denklemini sağlamalıdır, burada $Q = \frac{mz^2}{\dot{z}^2}$, $R(z) = az - c$ dir. Böylece (2.26) ifadesi tekrar düzenlenirse, Hamiltonyen

$$H = -\frac{1}{m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\dot{m}}{m^2}\frac{d}{dx} + V(x)$$

$$= -\frac{1}{m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\dot{m}}{m^2}\frac{d}{dx} + \frac{bz + d - 3/4}{R} - \frac{3a^2}{16mR^2} + \frac{3\dot{m}a^2}{16m^2R} + \frac{\ddot{m}}{4m^2} - \frac{15}{16}\frac{\dot{m}^2}{m^3} \quad (2.27)$$

olarak bulunur . Hamiltonyendeki potansiyel terimi de

$$V(x) = \frac{bz + d - 3/4}{R} - \frac{3a^2}{16mR^2} + \frac{3\dot{m}a^2}{16m^2R} + \frac{\ddot{m}}{4m^2} - \frac{15}{16}\frac{\dot{m}^2}{m^3}$$

şeklinde olur.

Sürekli halde temsilin matris elemanı $t^j_{\mu\lambda}(g)$ olmak üzere

$$f(g) = h^{-1/2} t^j_{\lambda\mu}(g) = e^{-i\lambda u}\, e^{-i\mu v}\psi(x) \quad (2.28)$$

ifadesinden dalga fonksiyonunu belirleyelim. Bunun için

$$C\, f(t,u,v) = -j(j+1) f(t,u,v)$$

özdeğer denkleminin sağlayan $f(t,u,v) = A(t)e^{i\lambda u}e^{i\mu v}$ biçimindeki çözümü arayalım.

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} - e^{-t}\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\right] A e^{i\lambda u} e^{i\mu v} = -j(j+1) A e^{i\lambda u} e^{i\mu v} \quad (2.29)$$

Bu denklem düzenlenirse

$$\frac{d^2A}{dt^2} + \frac{dA}{dt} - (\mu\lambda e^{-t} + j(j+1))\, A = 0 \quad (2.30)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemde $A(t) = e^{-t/2} W(t)$ dönüşümü yapılırsa

$$\frac{d^2W}{dt^2} - \left[\mu\lambda e^{-t} + j(j+1) + \frac{1}{4}\right] W = 0$$

denklemi elde edilir. Denklemde $z = e^{-t/2}$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$z^2\,\frac{d^2W}{dz^2} + z\,\frac{dW}{dz} - \left[4\mu\lambda z^2 + 4j(j+1) + 1\right] W = 0 \quad (2.31)$$

$$z^2\,\frac{d^2W}{dz^2} + z\,\frac{dW}{dz} - \left[(2\sqrt{\mu\lambda})^2 z^2 + 4\left(j + 1/2\right)^2\right] W = 0$$

denklemi bulunur. $\beta^2 = 4\lambda\mu$, $n^2 = 4(j+1/2)^2$ olmak üzere yukarıda elde ettiğimiz (2.31) denklemi aslında

$$z^2 \frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} - \left[\beta^2 z^2 + n^2\right] y = 0 \ , \ \beta = 2\sqrt{\lambda\mu} \ \ , \ n = 2j+1 \qquad (2.32)$$

şeklindeki Modifiye Bessel denkleminin aynısıdır [27]. Denklemin genel çözümü

$$W(z) = c_1 J_n(i\beta z) + c_2 Y_n(i\beta z)$$
$$W(z) = c_1 J_{(2j+1)}(i2\sqrt{\lambda\mu}\, z) + c_2 Y_{(2j+1)}(i2\sqrt{\lambda\mu}\, z) \ , \quad \lambda\mu > 0$$

şeklinde verilir. Uygulamalarda çoğu zaman çözümler *I(z)* ve $K_n(z)$ türünden ifade edilir. *I(z)* fonksiyonu cinsinden çözümler

$$I_n(z) = i^{-n} J_n(iz)$$
$$I_{2j+1}(z) = i^{-(2j+1)} J_{2j+1}(i2\sqrt{\lambda\mu}\, z)$$
$$I_{-(2j+1)}(z) = i^{(2j+1)} J_{-(2j+1)}(i2\sqrt{\lambda\mu}\, z)$$

olarak verilir. Genelde $I_{2j+1}(\beta z)$, $I_{-(2j+1)}(\beta z)$ çözümleri fiziksel koşullara uygun çözümler değildir. Bu çözümlerin yerine bu fonksiyonların bir lineer birleşimi olan

$$K_n(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-n}(\beta z) - I_n(\beta z)}{\sin(n\pi)}$$

biçimindeki çözümler alınır. Bu durumda (2.30) denkleminin çözümü

$$A(t) = c_1 e^{-t/2} K_{(2\ell+1)}(2\sqrt{\lambda\mu}\, e^{-t/2})$$

şeklinde bulunur.

(2.30) denkleminde $A(t) = e^{-t/2}\psi(t)$ dönüşümü yapılırsa

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \left[-\mu\lambda e^{-t} - \left(j+\frac{1}{2}\right)^2\right]\psi(t) = 0 \qquad (2.33)$$

Schrödinger denklemi elde edilir. Burada potansiyel ve enerji, sırasıyla

$$V(t) = -\mu\lambda e^{-t} \ , \quad E = -(j+1/2)^2$$

olur. Böylece Dalga fonksiyonu

$$\psi(x) = c_1 e^{-t/2} K_{(2j+1)}(2\sqrt{\lambda\mu}\, e^{-t/2})$$

şeklinde bulunur. Bu çözüm $j = -1/2 + i\rho$, $0 \le \rho < \infty$ sürekli değerlerine uygun gelen çözümdür. Bu çözümü $m(x)$ kütlesi ile verelim.

$$\widetilde{f} = h^{1/2} f, \qquad \widetilde{f}(t,u,v) = \widetilde{f}(t(x),u,v) = h^{1/2} f(t,u,v)$$

$$\widetilde{f}(t,u,v) = h^{1/2} A(t) e^{i\lambda u} e^{i\mu v}\ , \quad f(t,u,v) = h^{-1/2}\, \widetilde{f}(t,u,v)$$

olup dalga fonksiyonu

$$\psi(x) = \psi(t(x)) = c_1 (m)^{1/4}\, e^{t/2}\ K_{(2j+1)}\left(2\sqrt{\lambda\mu}\ e^{-t/2}\right) \tag{2.34}$$

veya z cinsinden

$$\psi(z(x)) = c_1 (m)^{1/4}\, (1/z)\ K_{(2j+1)}\left(2\sqrt{\lambda\mu}\ z\right)$$

olarak bulunur. Çözümdeki c_1 normalize olma sabiti Bessel fonksiyonları için ortagonallik koşulundan bulunabilir.

Yansıma ve geçme katsayıları fiziksel sistemin dalga fonksiyonun asimptotik davranışları incelenerek bulunabilir. (2.34) çözümünün asimptotik durumu için aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz.

$$\lim_{x\to\infty} \psi(x) = \lim_{x\to\infty} \left[c_1 (m)^{1/4}\, e^{t/2} K_{(2j+1)}(2\sqrt{\lambda\mu}\, e^{-t/2}) \right]$$

$$\lim_{x\to\infty} \psi(x) = \lim_{x\to\infty} \left[c_1 (m)^{1/4}\, e^{t/2}\, \frac{\pi}{2}\, \frac{I_{-(2j+1)}(2\sqrt{\lambda\mu}\, z) - I_{(2j+1)}(2\sqrt{\lambda\mu}\, z)}{\sin(2j+1)\pi} \right]$$

$$j = -\frac{1}{2} + i\rho \ \Rightarrow 2j+1 = 2i\rho\ , \quad z = e^{-t(x)/2}\ , 0 \le x < \infty$$

Açıktır ki $x \to \infty$ için $z \to 0$ olur. Yani *t*'nin büyük değerleri *z*'nin küçük değerlerine karşı gelir. $z \to 0$ için

$$\lim_{z\to 0} \psi(z) = \lim_{z\to 0} \left[c_1 (m)^{1/4}\, \frac{1}{z}\, \frac{\pi}{2}\, \frac{I_{-(2j+1)}(2\sqrt{\lambda\mu}\, z) - I_{(2j+1)}(2\sqrt{\lambda\mu}\, z)}{\sin(2i\rho)\pi} \right]$$

olup, $\lim_{z\to 0} I_\upsilon(x) = \dfrac{x^\upsilon}{2^\upsilon \Gamma(1+\upsilon)}$ bağıntısı kullanılırsa

$$\lim_{z\to 0} \psi(z) = \frac{\pi}{2i \sinh(\rho\pi)} \left[c_1 (m)^{1/4}\, \frac{1}{z}\, \frac{(2\sqrt{\lambda\mu})^{-2i\rho}}{2^{-2i\rho}\Gamma(1-i\rho)} z^{-2i\rho} - c_1 (m)^{1/4}\, \frac{1}{z}\, \frac{(2\sqrt{\lambda\mu})^{2i\rho}}{2^{2i\rho}\Gamma(1+i\rho)} z^{2i\rho} \right]$$

$$= \frac{\pi}{2i \sinh(\rho\pi)} \left[D z^{-2i\rho} - \widetilde{D} z^{2i\rho} \right]$$

yansıma katsayısı $R = \dfrac{\Gamma(1+i\rho)}{(\lambda\mu)^{2i\rho}\Gamma(1-i\rho)}$ olarak elde edilir.

BÖLÜM 3

SONUÇLAR

Bu çalışmada konuma bağlı kütleli Schrödinger denkleminin sürekli hal çözümleri araştırılmıştır. Bunun için Lie grup teorisi tekniği kullanılmıştır. Lie grubu olarak $G = SL(2,\mathbb{R})$grubunun bir $g \in G$ elemanının bir parametreli alt gruplara göre Iwasawa, Cartan ve Gauss açılımları ele alınmıştır. Bu açılımlara göre grubun sonsuz küçük operatörleri ve Casimir operatörü ifade edilmiştir. Daha sonra [C + j(j+1)] = Q[H - E] eşitliğinden konuma bağlı kütleli Hamiltonyenler ifade edilmiştir. Buradan Schrödinger denkleminin sürekli haldeki çözümü olan dalga fonksiyonu ve yansıma katsayıları elde edildi.

Iwasawa Açılımı :

$SL(2,\mathbb{R})$ grubunun bir g elemanının bir parametreli alt gruplarına göre *Iwasawa* açılımı

$$g(\varphi,t,u) = k(\varphi)a(t)n(u) = \begin{pmatrix} \cos\varphi/2 & \sin\varphi/2 \\ -\sin\varphi/2 & \cos\varphi/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$0 \le \varphi < 2\pi \ , \ -\infty < t < \infty \ , \ -\infty < u < \infty$$

formunda verilir. Bu açılıma göre sonsuz küçük operatörler J_1, J_2, J_3

$$iJ_1 = -\frac{1}{\dot{t}}\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\dot{h}}{2h\dot{t}}$$

$$iJ_2 = \frac{u}{\dot{t}}\frac{\partial}{\partial x} - z\frac{\partial}{\partial \varphi} + (1 - u^2 + e^{-2t})\frac{\dot{h}}{2h\dot{t}}u$$

$$iJ_3 = -\frac{uz}{\dot{z}}\frac{\partial}{\partial x} - z\frac{\partial}{\partial \varphi} - (1 + u^2 - e^{-2t})\frac{\dot{h}}{2h\dot{t}}u$$

şeklinde bulunur. Bu operatörlerden Casimir operatörü

$$C=-\frac{1}{\dot{t}^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{\dot{t}^2}\left(\frac{\dot{h}}{h}-\frac{\ddot{t}}{\dot{t}}+\dot{t}\right)\frac{\partial}{\partial x}+2e^{-t}\frac{\partial^2}{\partial u\partial\varphi}-e^{-2t}\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\dot{h}}{2h\dot{t}^2}\left(\frac{\dot{h}}{2h}-\frac{\ddot{h}}{\dot{h}}+\frac{\ddot{t}}{\dot{t}}-\dot{t}\right)$$

olarak elde edilir. Buradan Hamiltonyen

$$H=-\frac{1}{m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\dot{m}}{m^2}\frac{d}{dx}+\frac{g_2z^2+g_1z+h_0+1}{R}+$$
$$+\frac{z^2}{R^2}\left[-\frac{5(\sigma_1^2-4\sigma_2c_0)}{4R}-\sigma_2+\frac{\sigma_1}{z}\right]+\frac{\ddot{m}}{4m^2}-\frac{7}{16}\frac{\dot{m}^2}{m^3}$$

şeklinde yazılır. Buna göre $H\psi(x)=E\psi(x)$ Schrödinger denkleminin sürekli hal çözümü ve yansıma katsayısı

$$\psi(x)=m^{1/4}e^{t/2}\frac{2^{j+1}e^{-n\pi i}}{\pi\Gamma(-j+n)}|\lambda|^{-j-1}W_{-n,j+1/2}\left(2|\lambda|e^{-t}\right)$$

$$R=\frac{\Gamma(2j+1)\Gamma(-j+n)\left(2|\lambda|\right)^{-2i\rho}}{\Gamma(j+n+1)\Gamma(-2j-1)}$$

olarak elde edildi.

Cartan Açılımı :

$SL(2,\mathbb{R})$ grubunun bir g elemanının bir parametreli alt gruplarına göre Cartan açılımı

$$g(\varphi,t,\theta)=\begin{pmatrix}\cos\varphi/2 & \sin\varphi/2\\ -\sin\varphi/2 & \cos\varphi/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{t/2} & 0\\ 0 & e^{-t/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta/2 & \sin\theta/2\\ -\sin\theta/2 & \cos\theta/2\end{pmatrix}$$

$$0\le\varphi<2\pi,\ \ 0\le\theta<2\pi,\ t=t(x),\ 0\le t<\infty$$

formunda verilir. Bu açılıma göre grubun sonsuz küçük operatörleri J_1,J_2,J_3

$$iJ_1=-\frac{\cos\theta}{\dot{t}}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\sin\theta}{\sinh t}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{\sin\theta\coth t}{\dot{t}}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\dot{h}}{2h\dot{t}}\cos\theta$$

$$iJ_2=\frac{\sin\theta}{\dot{t}}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\cos\theta}{\sinh t}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\cos\theta\coth t\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\dot{h}}{2h\dot{t}}\sin\theta$$

$$iJ_3=-\frac{\partial}{\partial\theta}$$

olarak bulunur. Casimir operatörü de

$$C=-\frac{1}{\dot{t}^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{\dot{t}^2}\left(\frac{\dot{h}}{h}-\frac{\ddot{t}}{\dot{t}}+\dot{t}\coth t\right)\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{\sinh^2 t}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-2\cosh t\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\theta}+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)+$$
$$+\frac{\dot{h}}{2h}\left(\frac{\dot{h}}{2h}-\frac{\ddot{h}}{\dot{h}}+\frac{\ddot{t}}{\dot{t}}-\dot{t}\coth t\right)$$

şeklinde elde edilir. Buradan Hamiltonyen

$$H=-\frac{1}{m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\dot{m}}{m^2}\frac{d}{dx}+\frac{fz(z-1)+h_0(1-z)+h_1z+1}{R}+$$

$$+\frac{z^2(1-z)^2}{R^2}\left\{-\frac{5\left[(a-c_1-c_0)^2-4c_1c_0\right]}{4R}+a+\frac{a+(c_1-c_0)(2z-1)}{z(1-z)}\right\}+\frac{\ddot{m}}{4m^2}-\frac{7}{16}\frac{\dot{m}^2}{m^3}$$

şeklinde yazılır. Buna göre Schrödinger denkleminin sürekli hal çözümü ve yansıma katsayısı

$$\psi(x)=\frac{\Gamma(j-k+1)}{(n-k)!\Gamma(j-n+1)}\sqrt{m}\left(\cosh t/2\right)^{2j+k-n+1/2}\left(\sinh t/2\right)^{n-k+1/2}$$
$$\times F\left(-j-k,-j+n;n-k+1;\tanh^2 t/2\right)$$

$$R=\frac{\Gamma(-2j+\nu-1)\Gamma(-j-\frac{\eta+3\nu}{2})\,\Gamma(j-\frac{\eta+\nu-2}{2})}{\Gamma(-j-\frac{\eta-\nu}{2})\,\Gamma(-j-\frac{\eta+\nu-1}{2})\Gamma(2j-\nu+1)}$$

olarak elde edildi.

Gauss Açılımı :

$SL(2,\mathbb{R})$ grubunun bir g elemanının bir parametreli alt gruplarına göre Gauss açılımı

$$g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ v & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{\frac{t}{2}} & 0\\ 0 & e^{-\frac{t}{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$-\infty<v<\infty\ ,0<t<\infty\ ,\ -\infty<u<\infty$$

şeklinde verilir. Bu açılıma göre grubun sonsuz küçük operatörler J_1,J_2,J_3

$$iJ_1 = \frac{1}{\dot{t}}\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\dot{h}}{2h\dot{t}},$$
$$iJ_2 = \frac{2u}{\dot{t}}\frac{\partial}{\partial x} + e^{-t}\frac{\partial}{\partial v} - u^2\frac{\partial}{\partial u} + \frac{u\dot{h}}{h\dot{t}},$$
$$iJ_3 = \frac{\partial}{\partial u}.$$

olarak bulunur. Bu operatörler yardımıyla Casimir operatörü de

$$C = -\frac{1}{\dot{t}^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{\dot{t}^2}\left(\frac{\dot{h}}{h} - \frac{\ddot{t}}{\dot{t}} + \dot{t}\right)\frac{\partial}{\partial x} - e^{-t}\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + \frac{\dot{h}}{2h\dot{t}^2}\left(\frac{\dot{h}}{2h} - \frac{\ddot{h}}{\dot{h}} + \frac{\ddot{t}}{\dot{t}} - \dot{t}\right)$$

şeklinde elde edilir. Buradan Hamiltonyen

$$H = -\frac{1}{m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\dot{m}}{m^2}\frac{d}{dx} + \frac{bz + d - 3/4}{R} - \frac{3a^2}{16mR^2} + \frac{3\dot{m}a^2}{16m^2R} + \frac{\ddot{m}}{4m^2} - \frac{15}{16}\frac{\dot{m}^2}{m^3}$$

olarak yazılır. Schrödinger denkleminin sürekli çözümü ve yansıma katsayısı

$$\psi(x) = c_1 (m)^{1/4} e^{t/2} K_{(2j+1)}\left(2\sqrt{\lambda\mu}\, e^{-t/2}\right)$$

$$R = \frac{\Gamma(1 + i\rho)}{(\lambda\mu)^{2i\rho}\Gamma(1 - i\rho)}$$

olarak elde edildi.

KAYNAKLAR

Aktaş M., Sever R., (2008) Effective Mass Schrödinger Equation for Exactly Solvable Class of One-Dimensional Potentials, *Journal of Mathematical Chemistry, 43*, 92-100

Aktosun T., (1992) A Factorization of The Scattering Matrix for The Schrödinger Equation and for The Wave Equation in One Dimension, *Journal of Mathematical Physics*. *33* (11), 3865-3869

Aktosun T., Busse T., Demontis F., van der Mee C., (2009) Exact Solutions to the Nonlinear Schrödinger Equation, *Operator Theory: Advances and Applications*, *203*, 1-12

Arıcak F., (2011) Konuma Bağlı Efektif Kütleli Schrödinger Denklemine Cebirsel Yaklaşım (Doktora Tezi), Trakya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Edirne

Barut A. O., Raczka R., (1986) *Theory of Group Representations and Applications,* Colorado: World Scientific Publishing Co Pte Ltd.,

Bateman H., (1953) *Higher Transcendental Functions* (Cilt I.II.), New York: McGraw Hill,

Belinfante J. G., B. Kolman B., Smith H. A., (1966) An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras, with Applications, *SIAM Review*, *8*(1), 11-46

Belinfante J. G. F., Kolman B., (1972) *A Survey of Lie Groups and Lie Algebras with Applications and Computational Methods*, Philadeliphia:SIAM Review,

BenDaniel D. J., Duke C. B., (1966) Space-Charge Effects on Electron Tunneling, *Physical Review.*, *152*(2), 683-692

Cooper F., Ginocchio J. N., (1987) Relationship Between Supersymmetry and Solvable Potentials, *Physical. Review. D*, *36*(8), 2458-2473

Cordero P., Ghirardi G. C., (1972) Realizations of Lie algebras and the Algebraic Treatment of Quantum Problems, *Fortschritte der Physik*, *20*, 105-133

Cordero P., Salamo S., (1994) Algebraic Solution for the Natanzon Hypergeometric Potentials, *Journal of Mathematical Physics.*, *35* (7), 3301-3307

Ghirardi G. C., (1972) On the Algebraic Structure of a Class of Solvable Quantum Problems, *Il Nuovo Cimento*, *10A*(1), 97-120

Gora T., Williams F., (1968) Theory of Electronic States and Transport in Graded Mixed Semiconductors, *Physical Review., 177*(3), 1179-1182

Griffiths D. J., (1995) *Introduction to Quantum Mechanics*, New Jersey:Prentice Hall Inc.,

Helgason S., (1984) *Groups and Geometric Analysis*, Orlando: AcademicPress, Inc.

Iachello F., (2006) *Lie Algebras and Applications*, Berlin: Springer

Kerimov G. A., (2000) On Integrable Systems Related to Semisimple Lie groups, *Turkish Journal of Physics*, *24*, 385-396

Kerimov G. A., (2009) Exactly Solvable Position-Dependent Mass Hamiltonians Related to Non-Compact Semisimple Lie groups, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, *42*, 445210(1-12)

Killinbeck J. P., (2011) The Schrödinger Equation with Position Dependent Mass, *Journal of Physics A: Mathematical Theoretical*, *44*, 285208(1-6)

Koç R.,Koca M., (2003) A Systematic Study on the Exact Solution of the Position Dependent Mass Schrödinger Equation, *Journal Physics A:Mathematical General*, *36*, 8105-8112

Lévy-Leblond J. M., (1995) Position Dependent Effective Mass and Galilean Invariance, *Physical Review A, 52*(3), 1845-1849

Natanzon G. A., (1971) Study of the One Dimensional Schrödinger Equation Generated from the Hypergeometric Equation*, Vestnik Leningradskogo Universiteta*, *10*, 22-28

Newton R. G., (1984) Remarks on Inverse Scattering in One Dimension, *Journal of Mathematical Physics, 25* (10), 2991-2994

Nikitin A. G., Zasadko T. M., (2016) Group Classification of Schrödinger Equations with position Dependent Mass, *Journal of Physics A: Mathematical Theoretical*, *49*, 365204(1-17)

Plastino A. R., Rigo A., Casas M., Garcias F., Plastino A., (1999) Supersymmetric Approach to Quantum Systems with Position Dependent Effective Mass, *Physical Review A, 60*(6), 4318-4325

Quesne C., Tkachuk V. M., (2004) Deformed Algebras, Position Dependent Effective Masses and Curved Spaces: An Exactly Solvable Coulomb Problem, *Journal of Physics A: Mathematical. General, 37*, 4267-4281

Roy B., Roy P., (2002) A Lie Algebraic Approach to Effective Mass Schrödinger Equations, *Journal of Physics. A:Mathematical General*, *35*, 3961-3969

Schrödinger E., (1926) An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules, *The Physical Review, 28*(6), 1049-1070

Vilenkin N. Ja., Klimyk A. U., (1993) *Representation of Lie Groups and Special Functions* (Cilt I, II), Dortdrecht: Kluwer Academic Publishers,

von Roos. O., (1983) Position Dependent Effective Masses in Semiconductor Theory, *Physical Review*, *27*(12), 7542-7552

Zelobenko D. P., (1973) *Compact Lie Groups and their Representations*, American Mathematical Society,

Zhu Q. G., Kroemer H., (1983) Interface Connection Rules for Effective Mass Wave Functions at an Abrupt Heterojunction Between Two Different Semiconductors, *Physical Review B*, *27*(6), 3519-3527

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Rıdvan AYAZ
Doğum Yeri	: EDİRNE- İPSALA- Yeni Karpuzlu Köyü
Doğum Tarihi	: 03.09.1972
Medeni Durumu	: Bekar

Eğitim ve Akademik Durumu :

İlköğretim	: Yeni Karpuzlu Gazi İlkokulu ve Ortaokulu
Lise	: İpsala Lisesi
Lisans	: Trakya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	: Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı
Yabancı Dil	: İngilizce

İş Tecrübesi :

1993-2000	Trakya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi
2000- devam	Trakya Üniversitesi Teknik Bilimler Meslek Yüksekokulu Öğretim Görevlisi

TEZ İLE İLGİLİ BİLİMSEL FAALİYETLER

Katıldığı Kongre : 29. Ulusal Matematik Sempozyumu
28-31 Ağustos 2016, Mersin, Türkiye
Bildiri Adı : Konuma Bağlı Kütleli Schrödinger Denkleminin Çözümü
Düzenleyen Kuruluş : Mersin Üniversitesi