**T.C.**

**TRAKYA ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# BİRBİRİNE YAKIN EŞ MERKEZLİ İKİ KÜRESEL YÜZEY ARASINDAKİ SKALAR ALANIN CASİMİR ENERJİSİ

**ONUR KUCUR**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**FİZİK ANABİLİM DALI**

**Tez Danışmanı: PROF.DR. MUSTAFA ÖZCAN**

**EDİRNE-2018**

ONUR KUCUR'un hazırladığı " BİRBİRİNE YAKIN EŞ MERKEZLİ İKİ KÜRESEL YÜZEY ARASINDAKİ SKALAR ALANIN CASİMİR ENERJİSİ " başlıklı bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından FİZİK Anabilim Dalında bir Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri: İMZA

Prof.Dr. Metin Özdemir

Prof.Dr. Mustafa Özcan

Doç.Dr. Mehmet Akif Sabaner

Tez Savunma Tarihi: 07/ 12/ 2018

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylıyorum.

İmza

Prof. Dr. Mustafa Özcan
Tez Danışmanı

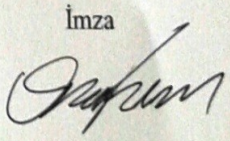
Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof.Dr.Murat Yurtcan
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

**T.Ü FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**
**FİZİK ANABİLİM DALI YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**
**DOĞRULUK BEYANI**

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında, tüm verilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini, kullanılan verilerde tahrifat yapılmadığını, tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını, kullanılan tüm literatür bilgilerinin bilimsel normlara uygun şekilde kaynak gösterilerek ilgili tezde yer aldığını ve bu tezin tamamı yada herhangi bir bölümünün daha önceden Trakya Üniversitesi ya da farklı bir üniversitede tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

07/12/2018
ONUR KUCUR
İmza





iii

Yüksek Lisans Tezi

Birbirine Yakın Eş Merkezli İki Küresel Yüzey Arasındaki Skalar Alanın Casimir Enerjisi

T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü

FİZİK ANABİLİM DALI

# ÖZET

Bu çalışmada yarıçapları $a$ ve $b$ olan ($b>a$) eş merkezli iki küre yüzeyi arasına yerleştirilen kuantize edilmiş skaler alanın kuantum boşluk enerjisi gözönüne alınmıştır. Kütlesiz skaler alanın Casimir enerjisi için özfrekansların kompleks düzlemdeki kontur integrali ile modların doğrudan toplanması yöntemi kullanılmıştır. Modların toplanması yönteminde kesilim fonksiyonu gözönüne alınmıştır. Birim yüzey alanı başına, eş merkezli iki küre yüzeyi arasındaki yeniden normalize edilmiş kuantum boşluk enerjisi $\frac{E_c}{A} = -\frac{1}{16\pi^2}(\frac{\sqrt{ab}}{a})^2 \frac{\zeta(4)}{d^3}[1 + \frac{1}{12}\eta^2 \frac{\zeta(2)}{\zeta(4)}]$ olarak yeniden elde edilmiştir. Geometrik olarak $a \to \infty$, $b \to \infty$ ve $b - a \to 0$ alındığında bulunan sonuç çarpıcı bir şekilde paralel plakalar sonucu ile örtüşmektedir.

Yıl : 2018

Sayfa Sayısı : 49

Anahtar Kelimeler : Casimir Enerji, Mod Toplama Yöntemi, Kesilim Fonksiyonu, Abel- Plana Toplam Düzenlemesi, Lommel Açılımı

MSc.Thesis

The Casimir Energy of The Scalar Field Between Closely Spaced Two Concentric Spherical Surfaces

Trakya University Institute of Natural Sciences

Department of Physics

## ABSTRACT

In this study, the quantum vacuum energy of the quantized scalar field which is placed between two concentric spheres of radius $a$ and $b$ $(b > a)$ is considered. Casimir energy calculation of the massless scalar field between two concentric spheres is calculated by using the contour integral of eigenfrequencies in the complex plane and direct mode summation. The renormalized quantum vacuum energy of the massless scalar field between two spheres per unit surface area is $\frac{E_c}{A} = -\frac{1}{16\pi^2}\left(\frac{\sqrt{ab}}{a}\right)^2 \frac{\zeta(4)}{d^3}\left[\ 1 + \frac{1}{12}\eta^2 \frac{\zeta(2)}{\zeta(4)}\right]$ have been reobtained. Geometrically, taking $a \to \infty,\ b \to \infty$ and $b - a \to 0$ the result striking overlaps with paralel plates result.

Year : 2018

Number of pages : 49

Keywords : Casimir Energy,Mod Collection Method, Cut-off function, Abel-Plana Sum Formula, Lommel expansion

# TEŞEKKÜR

Bu çalışma boyunca bilgisini ve deneyimlerini paylaşan değerli danışman hocam Prof. Dr. Mustafa ÖZCAN'a teşekkürlerimi sunarım.

# İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... iv

ABSTRACT ..... v

TEŞEKKÜR ..... vi

İÇİNDEKİLER ..... vii

SİMGELER DİZİNİ ..... ix

BÖLÜM 1 ..... 1

GİRİŞ ..... 1

BÖLÜM 2 ..... 8

GENEL BİLGİLER ..... 8

2.1 EŞ MERKEZLİ İKİ KÜRE ARASINDAKİ SKALER ALANIN ÖZFONKSİYONU ..... 8

BÖLÜM 3 ..... 15

3. HESAPLAMALAR ..... 15

3.1. EŞ MERKEZLİ İKİ KÜRE ARASINDAKİ SKALER ALANIN CASİMİR ENERJİSİ ..... 15

BÖLÜM 4 ..... 40

4. SONUÇLAR ..... 40

KAYNAKLAR ..... 42

EK A ..... 44

ÖZGEÇMİŞ ..... 49

# SİMGELER DİZİNİ

| | |
|---|---|
| $\square$ | D'Alambert İşlemcisi |
| $\Delta$ | Laplasyan İşlemcisi |
| $ds^2$ | Uzay zamanda iki nokta arasındaki uzaklığın karesi |
| $g_{\mu v}$ | Metrik Tensör |
| $T_{\mu v}$ | Enerji momentum tensörü |
| $\delta$ | Varyasyon |
| $\mathcal{L}$ | Lagrange yoğunluğu |
| $n$ | Baş kuantum sayısı |
| $l$ | Yörüngesel açısal momentum kuantum sayısı |
| $\emptyset(x)$ | Kuantize edilmiş skaler Alan |
| $J_v(x)$ | Birinci tür Bessel fonksiyonu |
| $N_v(x)$ | İkinci tür Bessel fonksiyonu |
| $H_v^{(1)}(x)$ | Hankel fonksiyonu(3.tür Bessel fonksiyonu) |
| $I_v(x)$ | Birinci tür Modifiye Bessel fonksiyonu |
| $K_v(x)$ | İkinci tür Modifiye Bessel fonksiyonu |
| $Y_{lm}\ (\theta, \emptyset)$ | Küresel Harmonik fonksiyonlar |

| | |
|---|---|
| $\zeta(s,q)$ | Hurwitz Zeta fonksiyonu |
| $\zeta$ (s) | Riemann Zeta fonksiyonu |

# BÖLÜM 1

# GİRİŞ

1948 yılında ilk defa Hollandalı fizikçi H.G.B Casimir; yüksüz ideal iletken iki paralel levhanın, hiçbir şeyin olmadığı, uzay-zamanda ve mutlak sıfırda birbirini çekeceğini ve bu çekici kuvvetin geri zeminde var olan elektromanyetik alanın kuantum boşluk enerjisinin değişiminden kaynaklanan bir olay olduğunu söylemiştir (Casimir, 1948). Casimir'in bulduğu sonuç: evrenin madde yada parçacığın veya hiçbir şeyin bulunmadığı bir yerde, boş uzayın her hacminde sonsuz miktarda enerji içerdiğinin kuantum mekaniksel sonucuydu. Casimir'in boşluğu deforme ederek ürettiği kuantum boşluk enerjisi 1958 yılında, ilk defa laboratuarda (Sparnaay, 1958; Tabor ve Winterton, 1969) birim alan başına, plakalar arasındaki uzaklık $a$ = 0,5 $\mu$m için 0,2 dyn kuvvet olarak gözlemlenmiştir. Bu sonuç Casimir'in bulduğu teorik sonuç ile örtüşmektedir. Bu deneyde; içi boşaltılmış kapalı cam kaba iki paralel levha konulurak sistem soğutululur, mutlak sıfırda levhaların birbirine yaklaştığı gözlemlenmiştir. Sonraki yıllarda teknolojinin gelişimine göre deney tekrarlanarak teorik sonuçlar doğrulanmıştır (Lamoreaux, 1997). Casimir etki: geri zeminde var olan elektromanyetik alanın kuantum sıfır noktası enerjisinin ürettiği kuvvet bize, boşluğun boş olmadığını gösterir.

Paralel iki levha için Casimir enerjisinin ürettiği kuvvet:

$F=-\frac{\pi^2\hbar c}{240a^4}$'dır (Casimir, 1948).

Burada $c$ ışık hızı, $a$ levhalar arasındaki uzaklık ve $\hbar(=\frac{h}{2\pi})$ Planck sabitidir. Bu etki tamamıyla kuantum mekaniksel bir etkidir. Casimir etki temelde kuantize edilmiş alanların boşluk enerjisinin polarizasyonu olarak da ifade edilir. Casimir'in paralel

plakalarda elde ettiği sonuçlardan sonra küresel kabuk için kuantize edilmiş elektromanyetik alanın sıfır nokta enerjisi T.H.Boyer (Boyer, 1968) tarafından pozitif değerli ve küresel kabuğun yarıçapına bağlı olarak elde edilmiştir. Pozitif enerji küresel kabuk üzerinde itici kuvvet oluşturur. Boyer'in çalışması eksponansiyel kesici fonksiyonları içermesi ve matematiksel olarak oldukça karmaşık yol izlediğinden; daha sonra K.A.Milton ve arkadaşları (Milton, 1978) Boyer'in çalışmalarından bağımsız olarak, farklı bir matematiksel yöntem kullanarak, Green fonksiyonu yöntemiyle, küresel kabuğun Casimir enerjisinin pozitif olduğunu yeniden göstermişlerdir. Daha sonraki yıllarda küresel kabuk için Casimir enerjisi (Nesterenko ve Pirozhenko, 1998; Bowers ve Hagen,1999) tarafından yeniden gözönüne alınmıştır. Kuantize edilmiş elektromanyetik alanın küresel kabuktaki boşluk enerjisi modların toplama yöntemi ve kontur integrasyonu ile tekrar hesaplanılmıştır. Bulunan sonuç Boyer ve K.A.Milton'un sonuçları ile örtüşmektedir.

Casimir enerjisi paralel düzlemlerde çekici ve küresel kabukta itici kuvvet üretir. Bu işaret farkının nedeni henüz bilinmemektedir. Casimir enerjisi değeri geometriden geometriye, topolojiden topolojiye ve boyuttan boyuta değişmektedir (Özcan, 2006).

Casimir enerjisi hesaplarında elde edilen sonlu ifadeleri matematiksel olarak sonsuz ifadelerin içinden elde ederiz. Sonsuzlukları belirlemeye regülarizasyon, sonsuzlukları dışarı çıkarmaya da renormalizasyon denir (Bayin, 2004). Casimir enerji hesaplamalarında elimizde tek bir regülarizasyon yöntemi olmadığından, aynı problemi farklı regülarizasyon yöntemleri ile yeniden çözülmeli, bu bize hem sonuçlarının doğruluğunu hem de geliştirilen tekniğin güçlü ve zayıf taraflarını gösterecektir.

Fizikte ve mühendislikte son zamanlarda nano büyüklüklerde ölçüm teknikleri oldukça yeni adımlar kazanmıştır. Bu gelişmeler beraberinde nano ölçeklerde alet yapılmasını gündeme taşımıştır. Nano ölçeklerde etkileşimlerin anlaşılması gerekmektedir. Kuantum alan teorisi bu etkileşimlerin cevabının olduğu yerdir. Kuantum alan teorisinin ölçülebilir bir sonucu olarak güncelliğini koruyan Casimir etki geometriye ve boyuta bağlı sonuçlar üretmektedir. Bu çalışmada birbirine çok yakın eş merkezli iki küresel yüzey arasına yerleştirilmiş skaler alanın Casimir enerjisi yeniden hesaplanacaktır.

İkinci bölümde eş merkezli iki küre yüzeyi arasına yerleştirilmiş olan skaler alanın modlarını tanımlayan dalga denklemi çözülerek modların davranış biçimi elde edilmiştir. Modlar $l$ ve $\omega$ 'ya bağlı olarak bulunmuştur. Modların dağılımını veren dağılım bağıntısı $a$ ve $b$ içteki ve dıştaki kürenin yarıçapları olmak üzere,

$f_v(\omega, a, b)= J_v(\omega b)N_v(\omega a) - J_v(\omega a)N_v(\omega b)$ olarak elde edilmiştir.

Burada

$m = -l, -l+1, \ldots . l-1$

$l = 0,1,2,3 \ldots\ldots$

Dağılım bağıntısı $l, m$ ve $\omega$'ya bağlı olarak transandantal fonksiyonlardan oluşmuştur. Bu transandantal fonksiyonlardan oluşan modların dağılım bağıntısını sıfır yapan $\omega$ 'ların toplamının hesaplanması gerekir. Casimir enerjisi hesaplamalarının temel zorluğu: bu sonsuz toplamların yazılıp ve sonsuzluklarının belirlenmesidir. $\omega$ 'ların belirlenebilmesi için; üçüncü bölümde $l \to \infty$ 'a giderken modların toplamının nasıl davranış göstereceğini uniform asimptotik açılımı ile ve Casimir enerji için Cauchy integral teoremi ile hesaplanmıştır. Daha sonra $l$ sabit tutulup yeterince büyük değerlerde, $\omega \to \infty$ alınarak, modların dağılımı toplamı bulunur ve Abel-Plana toplam formülü ile sonsuz toplamlar hesaplanır.

Şimdi; Birbirine yakın eş merkezli iki küre arasındaki skaler alanın Casimir enerjisini elde edebilmek için kuantize edilmiş skaler alanın kuantum alan teorisince kuantum boşluk enerjisini belirleyelim.

$(\square + m^2)\emptyset(\vec{x}) = 0$ (1.1)

(Milton, 2001; Mostepanenko ve Trunov, 1997; Itzykson ve Zuber, 1980; Plunien, Muller ve Greiner, 1986).

(1.1) kuantize edilmiş skaler alanın sağladığı denklemdir. Aynı zamanda alanın ne tür modlar üreteceğini de bu denklem belirler.

Buradaki, $\square$ D'Alambert operatörüdür ve $\eta^{\mu v}$ Minkowski metrik tensörüdür.

$\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$

(Bayin, 2004).

Enerji-momentum tensörü $T_{\mu\nu}$ 'yi elde edebilmek için skaler alanın Lagrange yoğunluğu:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \emptyset \partial_\nu \emptyset - m^2 \emptyset^2) = 0 \quad (1.2)$$

şeklinde yazılır (Milton, 2001; Mostepanenko ve Trunov, 1997; Itzykson ve Zuber, 1980; Plunien vd. , 1986).

Lagrange yoğunluğundan hareketle hareketin fonksiyonelini yazalım

$$S = \int \mathcal{L}\, d^n x \quad (1.3)$$

(Milton, 2001).

S'nin $\emptyset$'ye göre varyasyonu

$$\frac{\delta S}{\delta \emptyset} = 0 \quad (1.4)$$

bize kuantize edilmiş alanın denklemini (1.1) verir ve enerji- momentum tensörü $T_{\mu\nu}$ ise,

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (1.5)$$

ile elde edilir. Burada $\delta$ varyasyonu, $S$ hareket fonksiyonelini, $g^{\mu\nu}$ ise kontravaryant metrik tensörünü tanımlar. $g$ ise $g^{\mu\nu}$ metriğinin determinantıdır.

(1.2) denkleminden gelen $\emptyset$ ortonormal (dik ve normalize) fonksiyonlardır.

$$(\emptyset_1 , \emptyset_2) = -i \int [\, \emptyset_1 (x) \partial_t \emptyset_2^*(x) - [\partial_t \emptyset_1(x)] \emptyset_2^*(x)] d^3 x \quad (1.6)$$

(Milton, 2001; Mostepanenko ve Trunov, 1997; Itzykson ve Zuber, 1980).

Pozitif işaretli frekansın mod fonksiyonu Minkowski uzay- zamanında,

$U_{\vec{k}} = A_0 e^{i\vec{k}\vec{x}} e^{-i\omega t}$

yazarız. Burada,

$(U_{\overrightarrow{k^1}}, U_{\vec{k}}) = \delta(\vec{k} - \overrightarrow{k^1})$ (1.7)

Kanonik eşlenik momentumunu Lagrange yoğunluğu ve skaler alan cinsinden yazarsak,

Kanonik momentum:

$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \emptyset)} = \partial_t \emptyset$'dır. (1.8)

Kanonik momentum ile mod fonksiyonlarının sıra değiştirme bağıntıları,

$[\emptyset(t, \vec{x}), \emptyset(t, \overrightarrow{x'})] = 0$ (1.9)

$[\prod(t, \vec{x}), \prod(t, \overrightarrow{x'})] = 0$ (1.10)

$[\emptyset(t, \vec{x}), \prod(t, \overrightarrow{x'})] = i\delta(\vec{x} - \overrightarrow{x'})$ (1.11)

(Milton, 2001; Mostepanenko, Trunov, 1997; Itzykson, Zuber, 1980).

(1.6) denklemindeki skaler alanın ortanormal özelliği ve sıra değiştirme bağıntılarını sağlayan $\emptyset$ alan fonksiyonu yaratıcı ve yok edici işlemciler cinsinden,

$\emptyset(t, \vec{x}) = \sum_k [a_{\vec{k}} U_{\vec{k}} + a^{\dagger}_{\vec{k}} U^*_{\vec{k}}]$ (1.12)

yazılır. Burada, $\dagger$ Hermitsel eşleniği , $*$ Karmaşık eşleniği temsil eder.

$a_{\vec{k}}$ yok etme, $a^{\dagger}_k$ yaratıcı işlemcilerin aralarındaki sıra değiştirme bağıntıları:

$[a_{\vec{k}}, a_{\overrightarrow{k^1}}] = 0$ (1.13)

$[a^{\dagger}_{\vec{k}}, a^{\dagger}_{\overrightarrow{k^1}}] = 0$ (1.14)

$[a_{\vec{k}}, a^{\dagger}_{\overrightarrow{k^1}}] = \delta_{\vec{k}\overrightarrow{k^1}}$ (1.15)

dır.

Hamiltonyeni bulabilmek için enerji momentum tensörü olan Hamiltonyenin $T_{\mu v}$'ye bağlı ifadesini kullanırız. (1.3) denkleminde tanımlanan hareket fonksiyonunu (1.5) denkleminde yerine yazarsak,

$$T_{\mu v} = \partial_\mu \emptyset \partial_v \emptyset - \frac{1}{2} g_{\mu v} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \emptyset \partial_\beta \emptyset + \frac{1}{2} m^2 \emptyset^2 g_{\mu v} \quad (1.16)$$

elde ederiz. $\mu, v = 0,1,2,3$ ....

$\mu, v = 0$ alınarak enerji tensörü elde edilir.

$$T_{00} = \frac{1}{2}[(\partial_t \emptyset)^2 + \sum_{i=1}^{3} (\partial_i \emptyset)^2 + m^2 \emptyset^2] \quad (1.17)$$

Burada Minkowski uzay koordinatları $i$ = 1,2,3'dür. (1.12)'yi (1.17)' de yerine yazarsak Hamilton işlemcisi,

$$H = \int T_{tt}\, d^3x = \frac{1}{2} \sum_k (a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger) \omega_{\vec{k}} \quad (1.18)$$

elde edilir. Yaratıcı ve yok edici işlemcilerin özellikleri kullanılarak $a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger$ hesaplanabilir.

Hamilton işlemcisi:

$$H = \sum_k (a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + \frac{1}{2}) \omega_{\vec{k}} \quad (1.19)$$

bulunur.

Burada $n_{\vec{k}} = a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}$ sayı işlemcisidir. $n$ = 0,1,2,3……. değerlerini alan özdeğerlere sahiptir. $\vec{k}$ ise mod sayısıdır. Hamilton işlemcisinin taban durumunda beklenen değerini aldığımızda

$$< 0|\, H\, |0 > = \sum_k < 0\, |n_k + \frac{1}{2}|\, 0 > \omega_k \quad (1.20)$$

| 0 > vakum(boşluk) veya parçacığın olmadığını niteler. | 0 > , $a_{\vec{k}}$ operatörleri tarafından yok edilebilmektedir. Bu yok etme işlemi

$a_{\vec{k}}| 0 > = 0$

olarak yazılır (Plunien, Muller ve Greiner, 1986).

Vakum(boşluk) değeri $< 0|n_k|0 >= 0$ dır. (1.20) denklemindeki Hamiltonyeni yeniden yazarsak

$$< 0 |H|0 >= < 0| 0 > \sum_k \frac{1}{2}\omega_{\vec{k}} \qquad (1.21)$$

elde edilir (Mostepanenko ve Trunov, 1997).

Burada < 0 | 0 > =1'dir.

Böylece skaler alanın kuantum vakum enerjisi:

$$E_0 = \sum_k \frac{1}{2}\omega_{\vec{k}} \qquad (1.22)$$

(Mostepanenko ve Trunov, 1997; Casimir, 1948).

(Bu tezde $\hbar = c = a = 1$ olarak alınır.)

# BÖLÜM 2

# GENEL BİLGİLER

## 2.1. Eş Merkezli İki Küre Arasındaki Skaler Alanın Özfonksiyonu

Bu bölümde; eş merkezli iki küresel yüzey ile sınırlandırılmış skaler alanın Casimir enerjisini elde edebilmek için öncelikle problemin, geometrik yapılanmasını inceleyeceğiz. Daha sonra D'Alambert operatörünü kullanarak skaler alanın özdeğer denklemini yazacağız, özfonksiyonu ve özdeğerlerini bulacağız. Bulunan çözümlere geometrimizden gelen sınır değer koşullarını uygulayarak mod frekanslarının dağılım bağıntısını ve modların çözümünü elde edeceğiz.

Küresel koordinatlarda iki nokta arasındaki uzaklığının karesi:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\emptyset^2 \tag{2.1}$$

Burada $0 \leq r < \infty$ , $\theta \in [0, \pi]$ ve $\emptyset \in [0, 2\pi]$

Birbirine yakın iki nokta arasındaki uzay- zaman aralığının karesi:

$$ds^2 = dt^2 - dl^2$$

olduğundan

$$ds^2 = dt^2 - (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\emptyset^2) \tag{2.2}$$

İki nokta arasındaki uzaklığın karesinin metrik tensör ile yeniden ifade etmek istersek:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \tag{2.3}$$

şeklinde yazılır (Bayin, 2004).

Buradaki $g_{\mu v}$ kovaryant tensör:

$$g_{\mu v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$g^{\mu v}$ kontravaryant tensör:

$$g^{\mu v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

Eş merkezli iki küre arasına yerleştirilen skaler alanın mod denklemi

$$\square\Psi(t, r, \theta, \emptyset) = 0 \qquad (2.4)$$

(Özcan, 2012).

Burada,

$$\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} [\sqrt{-g} g^{\mu v} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}] \quad (2.5)$$

(Bayin, 2004).

$\mu, v = t, r, \theta, \emptyset$ şeklinde değerler alır.

$\square\Psi = 0$ ifadesinde $g^{\mu v}$ yerine yazılırsa,

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \frac{\partial}{\partial r}) - \frac{1}{r^2}\{\frac{1}{sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{1}{sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \emptyset^2}\} \quad (2.6)$$

elde edilir.

Böylece (2.4) denklemi

$$[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \emptyset^2}\right]\Psi = 0 \quad (2.7)$$

olur (Bayin, 2008).

Bu denklemin değişkenlerine ayırma yöntemiyle çözümü:

$\Psi$=T(t)R(r)Y(θ,Ø)' dır. (2.8)

$t$ zaman değişkeni olmak üzere

Üç boyutlu uzayda küresel simetrik bir problemi, küresel koordinatlarda yazdığımızda $t$'ye bağlı olanı

$$\frac{1}{T} \frac{d^2T}{dt^2} = -\omega^2 \quad (2.9)$$

ve çözümdeki $T$, $R$, $Y$ fonksiyonlarını sağlayan denklemlerin biri $r$ koordinatlarına bağlı diğeri de (θ, Ø) açısal koordinatlara bağlı iki kısmi diferansiyel denkleme ayrılır.

$\theta$ ve $\emptyset$ değişkenlerinden gelen denklem,

$$\frac{1}{Y}[\frac{1}{sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial \theta}) + \frac{1}{sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \emptyset^2}] = -l(l+1) \quad (2.10)$$

(Bayin, 2004).

ve radyal değişkene bağlı denklem

$$-\omega^2 - \frac{1}{R}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr}) + \frac{1}{r^2}l(l+1) = 0 \qquad (2.11)$$

elde edilir (Bayin, 2004).

(2.7) denkleminde, fonksiyonlar birbirinden bağımsız değişkenlere bağlıdır. $T(t)$ için değişkenlere ayrışma şeklinde $-\omega^2$ sabiti yerine yazılması durumunda $t$ 'ye bağlı denklem

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \qquad (2.12)$$

diferansiyel denklemi bulunur. Bu denklemin çözümü

$T(t) = e^{\pm i\omega t}$ dır.

$t \rightarrow \infty$ çözümün sonlu olmasından

$T(t) = e^{-i\omega t}$ alınmalıdır. (2.13)

Açısal değişkenlerin sağladığı denkleme dönecek olursak, (2.10) denklemi küresel harmonik fonksiyonları sağlayan denklemdir.

$Y(\theta, \emptyset) = Y_{lm}(\theta, \emptyset)$ dir. (2.14)

$l$ ve $m$ kuantum sayıları

$m = -l, -l+1, \ldots\ldots, l-1$

$l = 0,1,2, \ldots\ldots$

değerlerini alır.

(2.11) denklemine geri dönecek olursak

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} + \{\omega^2 r^2 - l(l+1)\}R(r) = 0 \qquad (2.15)$$

olur.

(2.15) denkleminde $R(r) = r^{-\frac{1}{2}} y(r)$ değişken dönüşümü yaparsak

$\frac{dR}{dr} = -\frac{1}{2} r^{-\frac{3}{2}} y + r^{-\frac{1}{2}} y'$

$\frac{d^2R}{dr^2} = \frac{3}{4} r^{-\frac{5}{2}} y - r^{-\frac{3}{2}} y' + r^{-\frac{1}{2}} y''$

olmak üzere, (2.15) denkleminde yerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$r^2 \frac{d^2y}{dr^2} + r \frac{dy}{dr} + [\omega^2 r^2 - (l + \frac{1}{2})^2] y = 0 \qquad (2.16)$$

elde ederiz.

Elde edilen denklem küresel Bessel diferansiyel denklemidir ve genel çözümü :

$$R(r) = A_l r^{-\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(\omega r) + B_l r^{-\frac{1}{2}} N_{l+\frac{1}{2}}(\omega r) \qquad (2.17)$$

dir.

Burada $J_v(\omega r)$ ve $N_v(\omega r)$ birinci ve ikinci tür Bessel fonksiyonlarıdır.

(2.13) , (2.14) ve (2.17)'de bulduğumuz sonuçları (2.8) denkleminde yerine yazarsak

$\Psi_{\omega lm}(t, r, \theta, \emptyset) = T(t) R(r) Y(\theta, \emptyset)$

$$\Psi_{\omega lm}(t, r, \theta, \emptyset) = \sum_{l,m} e^{-i\omega t} r^{-\frac{1}{2}} \left[ A_l J_{l+\frac{1}{2}}(\omega r) + B_l N_{l+\frac{1}{2}}(\omega r) \right] Y_{lm}(\theta, \emptyset) \qquad (2.18)$$

sonucunu elde ederiz.

Burada (2.18) denklemindeki

$l = 0 , 1 , 2 , \ldots ....$

m $= -l, \ -l + 1, \ldots . 0, 1, 2 \ldots ., \ l - 1, \ l$ olarak sıralanır.

Kuantize edilmiş skaler alanımız eş merkezli iki küre yüzeyi arasına yerleştirildiğinden bulduğumuz çözümler

$\Psi_{\omega lm}(t, r= a,\theta, \emptyset) = 0$ ve $\Psi_{\omega lm}(t,r=b,\theta, \emptyset) = 0$ sınır- değer koşullarını sağlamalıdır.

$\psi(t,r= a,\theta,\emptyset) = 0$ için

$$A_l J_{l+\frac{1}{2}}(\omega a) + B_l N_{l+\frac{1}{2}}(\omega a) = 0 \tag{2.19}$$

$\Psi(t,r= b,\theta,\emptyset) = 0$ için

$$A_l J_{l+\frac{1}{2}}(\omega b) + B_l N_{l+\frac{1}{2}}(\omega b) = 0$$

elde ederiz. Böylece,

$$\frac{B_l}{A_l} = -\frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\omega b)}{N_{l+\frac{1}{2}}(\omega b)} \tag{2.20}$$

olarak ifade edip (2.20)'i (2.19) denkleminde yerine yazılırsa

$$J_{l+\frac{1}{2}}(\omega a) + \frac{B_l}{A_l} N_{l+\frac{1}{2}}(\omega a) = 0$$

$$J_{l+\frac{1}{2}}(\omega b) N_{l+\frac{1}{2}}(\omega a) - J_{l+\frac{1}{2}}(\omega a) N_{l+\frac{1}{2}}(\omega b) = 0 \tag{2.21}$$

Modların dağılım bağıntısı elde edilir.

Böylece özfonksiyon,

$$\Psi_{\omega lm}(t, r, \theta, \emptyset) = c_0 \sum_{\omega, l, m} e^{-i\omega t} [J_v(\omega b) N_v(\omega a) - J_v(\omega a) N_v(\omega b)] Y_{lm}(\theta, \emptyset)$$

(2.22)

olarak elde edilir. Burada $c_0$ boylandırma sabitidir ve $v = l + \frac{1}{2}$ dir.

$$J_v(\omega b)N_v(\omega a) - J_v(\omega a)N_v(\omega b) = 0 \tag{2.23}$$

(Özcan, 2012).

transandantal denklemini elde ederiz.

$$f_v(\omega, a, b) = J_v(\omega b)N_v(\omega a) - J_v(\omega a)N_v(\omega b) \tag{2.24}$$

$$f_v(\omega, a, b) = 0$$

dır. Casimir enerji hesaplamalarındaki $\omega$ 'lar bu denklemi sıfır yapan $\omega$ 'lardan oluşmaktadır. Ana problem $\omega$'ları hesaplayabilmektir.

# BÖLÜM 3

# HESAPLAMALAR

Bu bölümde: eş merkezli iki küresel kabuk arasına yerleştirilen skaler alanın kuantum boşluk enerjisi ya da Casimir enerjisi hesaplanacaktır. Temel problem $\omega$'ların açık bir şekilde hesaplanamamasıdır. Çünkü transandantal fonksiyonların kökleri bulunamaz. Bu bölümde $\omega$'ların toplamları detaylı bir şekilde analiz edilecektir.

## 3.1. Eş Merkezli İki Küre Arasındaki Skalar Alanın Casimir Enerjisi

Birbirine yakın eş merkezli iki küresel kabuk arasındaki skaler alanın Casimir Enerjisi:

$$E_c = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{nl}$$

$$E_c = \sum_{l=0}^{\infty} v \sum_{n=1}^{\infty}\omega_{nl} \tag{3.1}$$

Burada $v = l + \frac{1}{2}$ olmak üzere,

$l$=0,1,2……, m=$-l, -l+1, \ldots\ldots l-1$ değerleri ile verilir.

Temel problem (3.1)'deki $\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{nl}$ toplamının hesaplanmasıdır. $\omega_{nl}$ , (2.24) denklemindeki $f_v\,(\,\omega, a, b) = 0$ yapan $\omega$ 'lardır. Modların dağılımını veren (2.24) denklemi Bessel fonksiyonlarından oluşmaktadır. Cauchy integral teoremi gereğince,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C dz\phi(z)\frac{d}{dz}\ln f_l(z)=\sum_j \phi(x_j) \tag{3.2}$$

(Bowers ve Hagen, 1999).

olduğundan (3.1) denklemindeki $\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{nl}$ toplamını hesaplayabiliriz. Cauchy integral teoremi ile hesaplanacak toplamlar yeteri kadar büyük $l$'leri içermektedir. Fakat yeteri kadar büyük $\omega$'lar için modların toplamının nasıl olduğunu da belirlememiz gerekir. Bunun için Bessel fonksiyonlarının asimptotik açılımını kullanarak , $l$ sabit iken $\omega \to \infty$ daki modlarının nasıl davrandığını inceleriz. Böylece, (3.1) denklemindeki toplam

$$\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{nl} \to \sum_{n=1}^{\infty}\bar{\omega}_{nl}+\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{\omega_{nl}}$$

şeklinde ifade edilir. İlk toplamı $l \to \infty$ 'da iken modların toplamını verecek olan Cauchy integral teoremini kullanarak hesaplarız, ikinci toplamı ise $l$ sabit iken $\omega \to \infty$ modlarının toplamını verecektir.

Böylece Casimir enerjisi:

$$E_c = \sum_{l=0}^{\infty} v \sum_{n=1}^{\infty}\bar{\omega}_{nl}+\sum_{l=0}^{\infty}\tilde{v}\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{\omega_{nl}} \tag{3.3}$$

olur (Özcan, 2012).

(3.3) denklemine göre ilk toplamın yeteri kadar büyük $l$ değerleri için $\omega$'ların toplamı

$$\overline{E_c} = \sum_{l=0}^{\infty} v \sum_{n=1}^{\infty}\bar{\omega}_{nl} \tag{3.4}$$

olarak tanımlanır.

(3.3) denklemine göre ikinci toplamın $l$ sabit ve $\omega \to \infty$ olması durumunda,

$$\widetilde{E_c} = \sum_{l=0}^{\infty} v \sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{\omega_{nl}} \tag{3.5}$$

olarak tanımlanır. Böylece (3.3) denklemini

$$E_c = \overline{E_c} + \widetilde{E_c} \tag{3.6}$$

olarak yazarız.

Şimdi Cauchy integral teoremiyle $\overline{E_c}$'yi hesaplayalım.

Burada ,

$$S_l = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\omega}_{nl} \tag{3.7}$$

(Özcan, 2012).

olarak alınır. Bu ıraksak bir ifadedir.

(3.7) denklemindeki ıraksak ifadelerin üstesinden gelinebilmesi için kesilim faktöründen yararlanılır. Iraksamaya sebep olan özfrekansları düzenlemek için kesilim faktörü kullanılır. $e^{-\alpha\omega_{nl}}$ ifadesi sonsuzlukların ayıklanması için kullanılan üstel kesici fonksiyonudur ve (3.7)'e uygulanırsa,

$$S_l = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{nl} e^{-\alpha\omega_{nl}} \tag{3.8}$$

olur.

(3.8) değeri (2.24)'deki frekans denkleminden üretilmiştir. Bu durumda yeteri kadar büyük $l$ değerleri için Casimir enerji:

$$\overline{E_c} = \sum_{l=0}^{\infty} (l + \frac{1}{2}) S_l \tag{3.9}$$

olarak yazılır (Özcan, 2012).

(3.8) denklemini (3.9) denkleminde yerine yazarsak

$$\overline{E_c} = \sum_{l=0}^{\infty}(l+\frac{1}{2})\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{nl}\,e^{-\alpha\omega_{nl}} \tag{3.10}$$

elde ederiz. Tekrar $S_l^{\alpha}$ toplamına dönelim ve Cauchy integral teoremi gereğince

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C dz\,e^{-\alpha z}\,z\frac{d}{dz}lnf_v(z) = \sum_j z_j\,e^{-\alpha z_j} \tag{3.11}$$

(Dennery ve Kryzywicki, 1995).

(3.11) denklemine göre $S_l^{\alpha}$ değeri,

$$S_l^{\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C z\,\frac{d}{dz}lnf^{\alpha}(z,a,b) \tag{3.12}$$

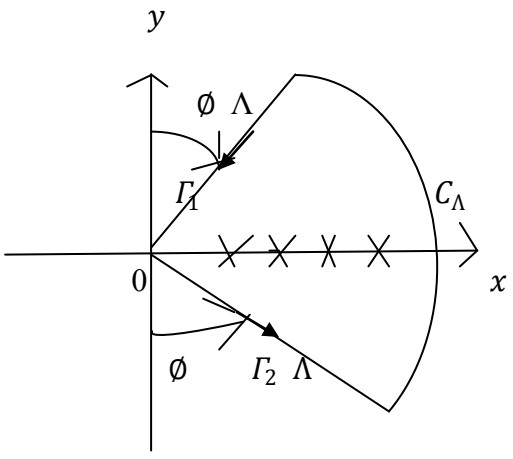
olarak yazarız.

Buradan (3.11) denklemi ile (3.4) denklemini bir araya getirdiğimizde,

$$\overline{E_c} = \sum_{l=0}^{\infty} v\frac{1}{2\pi i}\oint_C dz\,e^{-\alpha z}\,z\frac{d}{dz}lnf_v(z) \tag{3.13}$$

olarak elde ederiz (Bowers ve Hagen, 1999).

Şimdi kontur integralini inceleyelim. Bu kontur integralini kompleks düzlemde;




(kompleks düzlemdeki kontur integrali)

şeklinde gösteririz. Bu kontur integralini ;

$$\oint_C = \int_{\Gamma_1} + \int_{C_\Gamma} + \int_{\Gamma_2}$$

olarak üç farklı integralden oluşur.

$f_v\ (\omega, a, b) = 0$ değeri denklemin tüm pozitif köklerini C konturunda $\Gamma \rightarrow \infty$ limitinde kapsar. İntegralin içindeki $e^{-\alpha z}$: yüksek frekanslardan gelen katkıyı önemli bir şekilde bastırma görevi gören bir kesilim faktörüdür. Buradaki $f_v$ frekansı, $J_v(\omega \mathrm{b})$ ve $N_v(\omega \mathrm{b})$ birinci ve ikinci tür Bessel fonksiyonlarından oluşur. (3.13) denklemini hesaplayabilmek için özel bir integral konturu oluşturmamız gereklidir. Bu C konturu çembersel yörüngede $C_\Gamma$ segmenti ile $\Gamma_1$ ve $\Gamma_2$ düz çizgi segmentlerinden oluşur. $\Gamma_1$ ve $\Gamma_2$ segmentleri imajiner eksenle $\emptyset \neq 0$ olmak üzere bir $\emptyset$ açısı yaptığında bunların $C_\Gamma$'ya katkıları kesilim faktörü nedeniyle kısıtlıdır. Diğer yandan enerji denklemindeki logaritmik ifadeden dolayıda sonuç cebirsel olarak büyür. Dolayısıyla $C_\Gamma$'ya katkı $\Gamma \rightarrow \infty$ limitinde $\emptyset \neq 0$ şartıyla eksponansiyel olarak yok olur.

Burada,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C dz\, e^{-\alpha z} z \frac{d}{dz} ln f_v(z) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\Gamma_1} + \int_{C_\Lambda} + \int_{\Gamma_2} \right\} \tag{3.14}$$

(3.14) denklemine göre,

$$\int_{C_\Lambda} dz\, e^{-\alpha z} z \frac{d}{dz} ln f_v(z) = \int_{-\frac{\pi}{2}-\emptyset}^{\frac{\pi}{2}-\emptyset} d\emptyset\, \Lambda\, e^{i\emptyset}\, e^{-\alpha \Lambda e^{i\emptyset}} \frac{d}{d\emptyset} ln f_v\left(\Lambda e^{i\emptyset}\right) \tag{3.15}$$

(3.15) denkleminde $z = \Lambda e^{-i\emptyset}$ ve

$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} e^{-\alpha \Lambda sin\emptyset} \rightarrow 0$ $olduğundan$ $\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_{C_\Lambda} \rightarrow 0$

(3.14)'deki integralimize katkı $\int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2}$ ifadelerinden gelir.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C dze^{-\alpha z} z\frac{d}{dz} lnf_v(z) = -\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^\infty dye^{-i\emptyset} y\, e^{-i\alpha y\, e^{-i\emptyset}} \frac{d}{dy} lnf_v\left(iye^{-i\emptyset}\right)\right.$$

$$\left. + \int_0^\infty dye^{i\emptyset} y\, e^{i\alpha y\, e^{i\emptyset}} \frac{d}{dy} lnf_v\left(-iye^{i\emptyset}\right)\right] \qquad (3.16)$$

(3.16) denklemindeki bu iki integral birbirlerinin karmaşık eşleniği olduğundan bu sonuca göre

$z = x + iy$

$z^* = x - iy$

olur(Abromowitz ve Stegun, 1964).

Bu durumda kompleks düzlemde;

$z + z^* = x + iy + x - iy$

$z + z^* = 2x$

$z + z^* = 2\mathbf{Re}z$

Böylece (3.16)'da elde edilen sonuçlara göre (3.13)'deki yeniden normalleştirilmiş Casimir enerjiyi;

$$\overline{E_c} = -\frac{1}{\pi}\lim_{\alpha\to 0}\sum_{l=0}^{\infty} v\, \boldsymbol{Re}\, e^{-i\emptyset}\int_0^\infty dye^{-i\alpha y\, e^{-i\emptyset}}\, y\frac{d}{dy} lnf_v(iye^{-i\emptyset}; a, b)$$

olarak elde ederiz. (3.17)

Böylece (3.17) denklemindeki integralin sonucunun reel kısımı alınacaktır. $f_v(z)$ 'deki modların dağılım ifadesinde $z \to iye^{-i\emptyset}$ dönüşümü yapıldığında, $\lambda = \frac{b}{a}$ $(b > a)$ olmak üzere

$$f_v\left(iye^{-i\emptyset},\lambda\right) = -\frac{2}{\pi}\left[I_v\left(ye^{-i\emptyset}\right)K_v\left(ye^{-i\emptyset}\lambda\right) - I_v(ye^{-i\emptyset}\lambda)K_v(ye^{-i\emptyset})\right] \quad (3.18)$$

elde edilir (Özcan, 2012).

Bu durumda (3.17) denklemindeki $f_v(iye^{-i\emptyset}) \rightarrow f_v(ye^{-i\emptyset},\ \lambda)$ olarak alındığında,

$$\bar{E}_c = -\ \frac{1}{\pi b}\lim_{\alpha\to 0}\sum_{l=0}^{\infty} v\ \boldsymbol{Re}\ e^{-i\emptyset}\int_0^{\infty} dye^{-i\alpha y\, e^{-\frac{i\emptyset}{b}}}\ y\frac{d}{dy}\ln f_v\left(ye^{-i\emptyset},\lambda\right) \quad (3.19)$$

ifadesi elde edilir (Özcan, 2012).

Şimdi $f_v(ye^{-i\emptyset},\lambda)$'yı hesaplamak için Lommel açılımını kullanacağız. Burada 1.tür ve 2. tür birbirinden lineer bağımsız $I_v(z)$ ve $K_v(z)$ modifiye Bessel fonksiyonları için Lommel açılımını veya çarpım teoremi için $f_v(ye^{-i\emptyset},\ \lambda) \rightarrow f_v(z)$ gibi düşünerek genelleştirelim.

$f_v(z,\lambda) = I_v(z)K_v(z\lambda) - I_v(z\lambda)K_v(z)$

Burada $I_v(z\lambda)$ ve $K_v(z\lambda)$ ifadeleri,

$I_v(z\lambda) = (\frac{d}{zdz})^k\{z^{-v}I_v\ (z)\}$

$K_v(z\lambda) = (\frac{d}{zdz})^k\{z^{-v}K_v(z)\}$

olur. Lommel açılımının formulünde yerine yazarsak,

$$f_v(z,\lambda) = \lambda^v\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda^2-1)^k}{k!\,2^k}z^{2k+v}\{I_v(z)(\frac{d}{zdz})^k\{z^{-v}K_v(z)\} - K_v(z)(\frac{d}{zdz})^k\{z^{-v}I_v(vz)\}\} \quad (3.20)$$

(Watson, 1966).

$|\lambda^2 - 1| < 1$ dir. (3.20) denklemini k = 1,2,3,4,5…… olarak genişleterek yazarsak

$$f_v(z,\lambda)= \lambda^v \frac{(\lambda^2-1)^1}{2} z^{2+v}[\{I_v(z)(\frac{d}{zdz})^1\{z^{-v}K_v(z)\} - K_v(z)(\frac{d}{zdz})^1\{z^{-v}I_v(z)]$$

$$+\lambda^v \frac{(\lambda^2-1)^2}{8} z^{4+v}[\{I_v(z)(\frac{d}{zdz})^2\{z^{-v}K_v(z)\} - K_v(z)(\frac{d}{zdz})^2\{z^{-v}I_v(z)]$$

$$+\lambda^v \frac{(\lambda^2-1)^3}{48} z^{6+v}[\{I_v(z)(\frac{d}{zdz})^3\{z^{-v}K_v(z)\} - K_v(z)(\frac{d}{zdz})^3\{z^{-v}I_v(z)]$$

$$+\lambda^v \frac{(\lambda^2-1)^4}{384} z^{8+v}[\{I_v(z)(\frac{d}{zdz})^4\{z^{-v}K_v(z)\} - K_v(z)(\frac{d}{zdz})^4\{z^{-v}I_v(z)]$$

$$+\lambda^v \frac{(\lambda^2-1)^5}{3840} z^{10+v}[\{I_v(z)(\frac{d}{zdz})^5\{z^{-v}K_v(z)\} - K_v(z)(\frac{d}{zdz})^5\{z^{-v}I_v(z)]$$

$$+\lambda^v \frac{(\lambda^2-1)^6}{46080} z^{12+v}[\{I_v(z)(\frac{d}{zdz})^6\{z^{-v}K_v(z)\} - K_v(z)(\frac{d}{zdz})^6\{z^{-v}I_v(z)]$$

$$+ Q( (\lambda^2-1)^k k\geq 7 )$$

(3.21)

(3.21) denklemindeki birinci ve ikinci tür modifiye Bessel fonksiyonlarının açılımlarını yapalım

k=1 için açılım yapılırsa :

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}[z^{-v}K_v(z)] = -vz^{-v-2}K_v(z) + z^{-v-1}K_v'(z)$$

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}[z^{-v}I_v(z)] = -vz^{-v-2}I_v(z) + z^{-v-1}I_v'(z)$$

Bu değerleri yerine yazdığımızda (3.21) denkleminden çıkacak sonucu,

$$=\frac{v}{z^{2+v}}[I_v(z)K_v(z) - K_v(z)I_v(z)] + \frac{1}{z^{1+v}}[I_v(z)K_v'(z) - K_v(z)I_v'(z)]$$

$$=\frac{v}{z^{2+v}} .(0) + \frac{1}{z^{1+v}}(-\frac{1}{z}) = -\frac{1}{z^{2+v}}$$

(3.21) denkleminin parantez içindeki 1.mertebeden değeri,

$$I_v(z)(\frac{d}{zdz})^1[z^{-v}K_v(z)] - K_v(z)(\frac{d}{zdz})^1[z^{-v}I_v(z)] = -\lambda^v \frac{(\lambda^2-1)}{2}(z) \qquad \text{(1.mertebe)}$$

k=2 için :

$\frac{1}{z^2}\frac{d^2}{dz^2}[z^{-v}K_v(z)]=\frac{1}{z}\frac{d}{dz}(\frac{1}{z}\frac{d}{dz})[z^{-v}K_v(z)]$

$=\frac{1}{z}[-v(-v-2)z^{-v-3}K_v(z) - vz^{-v-2}K_v'(z) + (-v-1)z^{-v-2}K_v'(z) + z^{-v-1}K_v''(z)]$

$=\frac{1}{z^2}\frac{d^2}{dz^2}[z^{-v}I_v(z)]=\frac{1}{z}\frac{d}{dz}(\frac{1}{z}\frac{d}{dz})[z^{-v}I_v(z)]$

$=\frac{1}{z}[-v(-v-2)z^{-v-3}I_v(z) - vz^{-v-2}I_v'(z)+ (-v-1)z^{-v-2}I_v'(z)+z^{-v-1}I_v''(z)\ ]$

(3.21) denklemine göre yerine yazıp düzenlediğimizde,

$=-\ \frac{2v+1}{z^{v+3}}(I_v(z)K_v'(z) - K_v(z)I_v'(z))+\frac{1}{z^{v+2}}(I_v(z)K_v''(z) - K_v(z)I_v''(z))$

$=-\ \frac{2v+1}{z^{v+3}}(-\frac{1}{z})+\frac{1}{z^{v+2}}(\frac{1}{z^2})=\frac{1}{z^{v+4}}(2\vartheta+2)$

(3.21) denkleminin parantez içindeki 2.mertebeden değeri

$I_v(z)(\frac{d}{zdz})^2[z^{-v}K_v(z)] - K_v(z)(\frac{d}{zdz})^2[z^{-v}I_v(z)]=\lambda^v\frac{(\lambda^2-1)^2}{8}z^{v+4}\ [\frac{1}{z^{v+4}}(2v+2)]$

(2.mertebe)

k=3 için:

$=\frac{1}{z^3}\frac{d^3}{dz^3}[\ z^{-v}K_v(z)] = \frac{1}{z}\frac{d}{dz}\ (\frac{1}{z}\frac{d}{dz}(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\ [z^{-v}K_v(z)]\ ))$

$= [-v(v+2)(v+4)z^{-v-6}K_v(z) + v(v+2)z^{-v-5}K_v'(z)+ v(v+3)z^{-v-5}K_v'(z)$

$- vz^{-v-4}K_v''(z) + (v+1)(v+3)z^{-v-5}K_v'(z) + (\ -v-1)z^{-v-4}K_v''(z)$

$+ (\ -v-2)z^{-v-4}K_v''(z) + z^{-v-3}K_v'''(z)\ ]$

Aynı işlemleri $I_v(z)$ içinde yaparsak,

$=\frac{1}{z^3}\frac{d^3}{dz^3}[\ z^{-v}I_v(z)] = \frac{1}{z}\frac{d}{dz}(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}[\ z^{-v}I_v(z)]\ ))$

$=[-v(v+2)(v+4)z^{-v-6}I_v(z) + v(v+2)z^{-v-5}I_v'(z) + v(v+3)z^{-v-5}I_v'(z)- vz^{-v-4}I_v''(z)$
$+(v+1)(v+3)z^{-v-5}I_v'(z) + (-v-1)z^{-v-4}I_v''(z) + (-v-2)z^{-v-4}I_v''(z) + z^{-v-3}I_v'''(z)]$

(3.21) denklemine göre düzenlenerek yazılmış hali,

$$= [\, v(v+2)z^{-v-5}\left(K_v'(z)I_v(z) - I_v'(z)K_v(z)\right) + v(v+3)z^{-v-5}(K_v'(z)I_v(z) - I_v'(z)K_v(z))$$

$$+ (v+1)(v+3)z^{-v-5}(K_v'(z)I_v(z) - I_v'(z)K_v(z)) - vz^{-v-4}(K_v''(z)I_v(z) - K_v(z)I_v''(z))$$

$$- (v-1)z^{-v-4}(K_v''(z)I_v(z) - I_v''(z)K_v(z)) + (-v-2)z^{-v-4}(K_v''(z)I_v(z) - K_v(z)I_v''(z))$$

$$+ z^{-v-3}\left(K_v'''(z)I_v(z) - I_v'''(z)K_v(z)\right)]$$

(3.21) denkleminin parantez içindeki 3.mertebeden değeri

$$I_v(z)\left(\frac{d}{zdz}\right)^3[z^{-v}K_v(z)] - K_v(z)\left(\frac{d}{zdz}\right)^3[z^{-v}I_v(z)] = -\lambda^v \frac{(\lambda^2-1)^3}{48}(4v^2+12v+2+z^2)$$

(3.mertebe)

k=4 için:

$$= \frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{z^3}\frac{d^3}{dz^3}[z^{-v}K_v(z)]\right.$$

$$= \frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{z^3}\frac{d^3}{dz^3}[z^{-v}I_v(z)]\right.$$

(3.21) denkleminin parantez içindeki 4.mertebeden değeri

$$I_v(z)\left(\frac{d}{zdz}\right)^4[z^{-v}K_v\ (\ z)] - K_v(z)\left(\frac{d}{zdz}\right)^4[z^{-v}I_v(z)] = \lambda^v \frac{(\lambda^2-1)^4}{16.24}[8v^3 + 4\ 1v^2 + 88v + 48 + z^2(5+4z)]$$

(4.mertebe)

Aynı şekilde k=5,6,7,8,9,10 için (3.20) denklemine göre açarız ve bulunan ifadeyi Modifiye Bessel denklemlerinin $I_v(z)$ ve $K_v(z)$'ye bağlı olarak (3.21)'de verilen frekans denklemine göre genişleterek yazarsak:

$$f_v(z,\lambda) = \lambda^v \frac{(\lambda^2-1)^2}{2} z^{2+v} \frac{1}{z}\frac{d}{dz}[\{z^{-v}I_v(z)K_v^{'}(z) - z^{-v}K_v(z)I_v^{'}(z)\}]$$

$$+\lambda^v \frac{(\lambda^2-1)^2}{8} z^{4+v} \frac{1}{z^2}\frac{d^2}{dz^2}[\{z^{-v}I_v(z)K_v^{''}(z) - z^{-v}K_v(z)I_v^{''}(z)\}]$$

$$+\lambda^v \frac{(\lambda^2-1)^3}{48} z^{6+v} \frac{1}{z^3}\frac{d^3}{dz^3}[\{z^{-v}I_v(z)K_v^{'''}(z) - z^{-v}K_v(z)I_v^{'''}(z)\}]$$

$$+\lambda^v \frac{(\lambda^2-1)^4}{384} z^{8+v} \frac{1}{z^4}\frac{d^4}{dz^4}[\{z^{-v}I_v(z)K_v^{(IV)}(z) - z^{-v}K_v(z)I_v^{(IV)}(z)\}$$

$$+\lambda^v \frac{(\lambda^2-1)^5}{3840} z^{10+v} \frac{1}{z^5}\frac{d^5}{dz^5}[\{z^{-v}I_v(z)K_v^{(V)}(z) - z^{-v}K_v(z)I_v^{(V)}(z)\}]$$

$$+\lambda^v \frac{(\lambda^2-1)^6}{46080} z^{12+v} \frac{1}{z^6}\frac{d^6}{dz^6}[\{z^{-v}I_v(z)K_v^{(VI)}(z) - z^{-v}K_v(z)I_v^{(VI)}(z)\}]+\ldots$$

$$Q(\lambda^2-1)^7 \; k \geq 7]$$

(3.22)

Böylece (3.19) denkleminin içindeki $f_v(ye^{-i\emptyset}$ , λ)'yı hesaplamış oluruz. Buradan sonrada (3.22) denkleminin parantez içindeki birinci ve ikinci tür Modifiye Bessel fonksiyonları için *EK A*'da bulunan sonuçları yerine yazarsak

$$f_v(z,\lambda) = \lambda^v \frac{(\lambda^2-1)}{2} z^{2+v}\{-z^{-v-1}\} + \lambda^v \frac{(\lambda^2-1)^2}{8} z^{4+v}\{\frac{1}{z^{v+4}}(2v+2)\}$$

$$-\lambda^v \frac{(\lambda^2-1)^3}{48} z^{v+6}\{\frac{1}{z^{v+6}}(4v^2 + 12v + 2 + z^2\}$$

$$+\lambda^v \frac{(\lambda^2-1)^4}{384} z^{v+8}\{\frac{1}{z^{v+8}}(8v^3 + 41v^2 + 88v + 48 + z^2(5+4v)\} + Q(\lambda^2-1)^k$$

$$k \geq 4\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$$

( 3.23)

k=5,6,…….. içinde bulunan değerleri yerine yazdıktan sonra,

$$\frac{\partial}{\partial y} lnf = \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial y} \qquad (3.24)$$

(3.24) denklemini kullanarak ve $z = ye^{-i\emptyset}$ alarak

$$y\frac{d}{dy}lnf_v(ye^{-i\emptyset},\lambda) = \frac{(1-\lambda^2)^2}{12}(ye^{-i\emptyset})^2 + \frac{(1-\lambda^2)^3}{24}(ye^{-i\emptyset})^2$$

$$+ \frac{(1-\lambda^2)^4}{720}[(ye^{-i\emptyset})(-v^2+19) - (ye^{-i\emptyset})^4]$$

$$- \frac{(1-\lambda^2)^5}{1440}[3(ye^{-i\emptyset})^2(v^2-9) + 2(ye^{-i\emptyset})^4\ ]$$

$$+\frac{(1-\lambda^2)^6}{120960}[(ye^{-i\emptyset})^2(4v^4 - 290v^2 + 1726) + (ye^{-i\emptyset})^4(8v^2-149)$$

$$+4(ye^{-i\emptyset})^6] \ + [(ye^{-i\emptyset}) + v^{2n}] \qquad n = 1,2,3\ldots.$$

(3.25)

elde edilir. Böylece,

$$\bar{E}_c = -\frac{1}{\pi b}lim_{\alpha\to 0}\sum_{l=0}^{\infty} v\boldsymbol{Re}e^{-i\emptyset}\int_0^{\infty} dye^{-i\alpha y\, e^{-\frac{i\emptyset}{b}}}\, y\frac{d}{dy}\ln f_v\left(ye^{-i\emptyset}\,,\lambda\right)$$

(Özcan, 2012).

denklemine göre yerine yazılırsa ve terimlerin integral altındaki sıralaması yapılırsa,

$$\overline{E_c} = -\frac{1}{\pi b}lim_{\alpha\to 0}\sum_{l=0}^{\infty} v\boldsymbol{Re}e^{-i\emptyset}\{[\int_0^{\infty} dye^{-i\alpha y\, e^{-\frac{i\emptyset}{b}}}\frac{(1-\lambda^2)^2}{12}(ye^{-i\emptyset})^2]$$

$$+\int_0^{\infty} dye^{-i\alpha y\, e^{-\frac{i\emptyset}{b}}}\frac{(1-\lambda^2)^3}{24}(ye^{-i\emptyset})^3]$$

$$+\int_0^{\infty} dye^{-i\alpha y\, e^{-\frac{i\emptyset}{b}}}\frac{(1-\lambda^2)^4}{720}\{(ye^{-i\emptyset})(-v^2+19) - (ye^{-i\emptyset})^4\}]$$

$$+\ [\int_0^{\infty} dye^{-i\alpha y\, e^{-\frac{i\emptyset}{b}}}\frac{(1-\lambda^2)^5}{1440}\{3(ye^{-i\emptyset})^2(v^2-9) + 2(ye^{-i\emptyset})^4\}]\}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3.26)$$

elde edilir. (3.26) denklemindeki integralleri genelleştirecek olursak

$$I(2n) = e^{-i\emptyset}\int_0^{\infty} dy\, e^{-i\alpha y\, e^{\frac{-i\emptyset}{b}}} (ye^{-i\emptyset})^{2n}$$

(Özcan, 2012).

Bu formülüde,

$$I(2n)= i(-1)^{n+1}(2n)!\,(\frac{b}{\alpha})^{2n+1}$$

formülüyle genelleştirebiliriz (Abromowitz ve Stegun, 1964).

Böylece $n = 0,1,2,3, \ldots..$ genişletirsek ve bu sonuçları alıp (3.25)'in içine yazarsak (3.19)'un sonucunu aşağıdaki gibi elde ederiz

$$\overline{E_c} = -\frac{1}{\pi b}\, lim_{\alpha\to 0} \sum_{l=0}^{\infty} \boldsymbol{Re}\{i\frac{(1-\lambda^2)^2}{6}(\frac{b}{\alpha})^3 + i\frac{(1-\lambda^2)^3}{12}(\frac{b}{\alpha})^3$$

$$+ i\frac{(1-\lambda^2)^4}{720}\,[2(-v^2+19)(\frac{b}{\alpha})^3 + 24(\frac{b}{\alpha})^5]$$

$$+ i\frac{(1-\lambda^2)^5}{720}[-6(v^2-9)(\frac{b}{\alpha})^3 + 48(\frac{b}{\alpha})^5]$$

$$+ i\frac{(1-\lambda^2)^6}{120960}\,[(8v^4 - 580v^2 + 3452)(\frac{b}{\alpha})^3 - 24(8v^2-149)(\frac{b}{\alpha})^5 + 2880(\frac{b}{\alpha})^7]$$

$$+[\ \mathrm{Q}(iv^{2k}) \quad k = 1,2 \ldots\ldots\ldots\ ]\ \}$$

(3.27)

elde ederiz.

Bu durumda (3.27) denkleminin önündeki $i$ sanal ifadesinden dolayı $\overline{E_c}$ enerjisi sanaldır.

Böylece,

$\overline{E_c} = 0$

Böylece: eş merkezli iki küresel kabuk arasındaki yeniden normalleştirilmiş Casimir enerjisi için yeteri kadar büyük $l$ değerlerinde modların toplamı kullanılarak Cauchy integral teoremi gereğince bu modların toplamından gelen katkının sıfır olduğu görülmüştür.

Tekrar (3.5) denklemindeki $\widetilde{\omega}$ 'yı elde edebilmek için yüksek özfrekanstaki modlarının $\omega \rightarrow \infty$ ve $l$ sabit iken ki modlarının toplamının nasıl ifade edileceğini elde edelim. Hankel asimptotik açılımını $\omega a >> 1$ ve $\omega b >> 1$ için,

$$J_v(v\sec\beta)=\sqrt{\frac{2}{\pi v tan\beta}}\cos[v\tan\beta - v\beta - \frac{\pi}{4}] \tag{3.28}$$

$$N_v(v\sec\beta)=\sqrt{\frac{2}{\pi v tan\beta}}\sin[v\tan\beta - v\beta - \frac{\pi}{4}] \tag{3.29}$$

olarak yazarız (Watson, 1966; Abromowitz ve Stegun, 1964).

Buradan,

$0 < \cos\beta < 1$,

$0 < \frac{v}{x} < 1$,

$0 < v < x$,

$x > 0$, $v > 0$ şeklindedir.

$$\sec\beta = \frac{1}{cos\beta} = \frac{x}{v} \tag{3.30}$$

$$\tan\beta = \frac{sin\beta}{cos\beta} = \frac{\sqrt{x^2-v^2}}{v} \qquad \text{olduğuna göre} \tag{3.31}$$

Buradan (3.28) ve (3.29) denklemlerini (3.30) ve (3.31) sonuçlarına göre yerine yeniden yazarsak,

$$J_v(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt[4]{x^2-v^2}}\cos(\sqrt[2]{x^2-v^2} - v\cos^{-1}\frac{v}{x} - \frac{\pi}{4}) \tag{3.32}$$

elde edilir.

Buradan da,

$$J_v(x_i) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt[4]{x^2 - v^2}} \cos(\alpha_i) \tag{3.33}$$

Benzer şekilde,

$$N_v(x_i) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt[4]{x^2 - v^2}} \sin(\alpha_i) \tag{3.34}$$

bulunur. Burada $\alpha_i$'yi

$$\alpha_i = (x_i^2 - v^2)^{\frac{1}{2}} - v\cos^{-1}\left(\frac{v}{x_i}\right) - \frac{\pi}{4} \qquad i = 1,2$$

olarak yazarız. Buradan $i = 1, 2$ değerlerini aldığında,

$x_1 = \omega a$

$x_2 = \omega b$

dır. $f_v(\omega, a, b)$ denkleminde yerine yazarsak,

$$J_v(x_2)N_v(x_1) - J_v(x_1)N_v(x_2) = 0 \tag{3.35}$$

olur. Bu durumda (3.35),

$\cos\alpha_2 \sin\alpha_1 - \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 = 0$

olur. Bu da trigonometrik özdeşlik formülüne göre

$\sin(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$ dır.

$\alpha_1$ ve $\alpha_2$ açıkça yazılırsa,

$$\sin[\ (x_1^2 - v^2)^{\frac{1}{2}} - (x_2^2 - v^2)^{\frac{1}{2}} - v[\cos^{-1}(\tfrac{v}{x_1}) - \cos^{-1}(\tfrac{v}{x_2})] = 0 \tag{3.36}$$

elde edilir. Biliyoruz ki $\sin m\pi = 0$, m = 0,1,2,3…….

Böylece,

$$(x_1^2 - v^2)^{\frac{1}{2}} - (x_2^2 - v^2)^{\frac{1}{2}} - v[cos^{-1}(\frac{v}{x_1}) - cos^{-1}(\frac{v}{x_2})] = m\pi \qquad (3.37)$$

(3.37) denklemindeki $x_1$ ve $x_2$ için (2.24)'de tanımlanmış olan

$x_1 = \omega a$ ve $x_2 = \omega b$ değerleri ile

$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} \ldots\ldots\ldots \qquad -1 < x < 1$

$\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \left[x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} \ldots\ldots\ldots\right] \qquad |x| < 1$

(Abromowitz ve Stegun, 1964).

ifadeleri kullanılarak (3.37)'de yerine yazılırsa,

$$\widetilde{\omega_{nl}^2} \cong (\frac{n\pi}{b-a})^2 + \frac{v^2}{ab} \qquad n=1,2,3,4,5,\ldots\ldots\ldots \qquad (3.38)$$

elde edilir.

$\widetilde{E_c}$ ifadesindeki $l$ sabit iken yeteri kadar büyük $\omega$'lar için modlar toplamından gelen Casimir enerjisi (3.5) denklemine göre,

$$\widetilde{E_c} = \sum_{l=0}^{\infty} v \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{(\frac{n\pi}{b-a})^2 + \frac{v^2}{ab}} \qquad v = l + \frac{1}{2} \qquad (3.39)$$

olur.

Bu ıraksak toplamı Abel – Plana toplam formülünü kullanarak hesaplayabiliriz

$\boldsymbol{Reg}[\sum_{n=1}^{\infty} f(n)]$ için:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) - \int_0^{\infty} f(x)dx = \frac{f(0)}{2} + i\int_0^{\infty} \frac{f(it) - f(-it)}{e^{2\pi t} - 1} \qquad (3.40)$$

(Mostepanenko, Trunov, 1997).

Yarım tamsayılar için Abel –Plana toplam formülüyse ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n+\frac{1}{2}) = \int_0^{\infty} f(x)dx - i\int_0^{\infty} \frac{f(it)-f(-it)}{e^{2\pi t}+1}\,dt \qquad (3.41)$$

(Mostepanenko, Trunov, 1997).

(3.39) denklemi Abel-Plana toplam formülüne göre yeniden yazılırsa,

$$\widetilde{E_c} = \sum_{l=0}^{\infty} v\boldsymbol{Reg}[\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{(\frac{n\pi}{b-a})^2+\frac{v^2}{ab}}\ ] \qquad (3.42)$$

elde edilir.

Öncelikle (3.42) denklemini regülarize ederiz. (3.42) denklemini Abel-Plana toplam formülüyle

$$\widetilde{E_c} = -\frac{1}{2\sqrt{ab}}\sum_{l=0}^{\infty} v^2 - 2\sum_{l=0}^{\infty} v\int_{\frac{v\xi}{2\pi}}^{\infty}[(\frac{t\pi}{b-a})^2-\frac{v^2}{ab}]^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{e^{2\pi t}+1} \qquad (3.43)$$

olarak elde ederiz.

(3.43) denklemindeki integralin sınırlarını integralin içindeki fonksiyonların dallanma noktaları gözönüne alındığında $\infty$ ile $\frac{v\xi}{2\pi}$ olarak alırız. (3.43) denkleminde $v = l+\frac{1}{2}$ olarak alınır.

$\xi = \frac{2d}{\sqrt{ab}}$ ve dış yarıçapı $b$, iç yarıçapı $a$ olan eş merkezli iki küre arasındaki uzaklığı $d = b - a$ olarak yazabiliriz. (3.43) denklemindeki birinci toplamını gözönüne aldığımızda,

$$-\frac{1}{2\sqrt{ab}}\sum_{l=0}^{\infty} v^2 = -\frac{1}{2\sqrt{ab}}\sum_{l=0}^{\infty}(l+\frac{1}{2})^2$$

olarak yazılır.

Bu toplam Hurwitz-Zeta fonksiyonunu kullanarak hesaplayabiliriz. Hurwitz-Zeta fonksiyonu:

$$\zeta(z,q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+q)^z} \qquad Rez > 1$$

olarak tanımlanır (Elizalde, Odintsov, Bytsenko, Zerbini, 1994).

q = $\frac{1}{2}$ için Riemann-Zeta fonksiyonuna indirgenir. Bu fonksiyonu da

$\zeta(z, \frac{1}{2}) = (2^z - 1)\zeta(z)$

olarak yazarız (Elizalde vd. , 1994).

Bunu ıraksak ifadelerimize uyguladığımızda,

$z = 0$ için

$$\sum_{l=0}^{\infty}(l+\frac{1}{2})^0 = \zeta\left(0,\frac{1}{2}\right) = (2^0 - 1)\zeta(0) = 0$$

$z = -2$ için

$$\sum_{l=0}^{\infty}(l+\frac{1}{2})^2 = \zeta\left(-2,\frac{1}{2}\right) = (2^{-2} - 1)\zeta(-2)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}(l+\frac{1}{2})^2 = -\frac{3}{4}\zeta(-2)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}(l+\frac{1}{2})^2 = 0$$

elde ederiz.

Böylece (3.43) denklemindeki ilk terim sıfırdır. (3.43) denklemini tekrar yazdığımızda,

$$\widetilde{E_c} = -2\sum_{l=0}^{\infty} v \int_{\frac{v\xi}{2\pi}}^{\infty} [(\frac{t\pi}{b-a})^2 - \frac{v^2}{ab}]^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{e^{2\pi t}+1} \tag{3.44}$$

$$\widetilde{E_c} = -2\sum_{l=0}^{\infty} F(v) \tag{3.45}$$

şeklinde tanımlarız.

(3.45) denklemindeki $F(v)$ ise,

$$F(v) = v\int_{\frac{v\xi}{2\pi}}^{\infty} [\,(\frac{t\pi}{b-a})^2 - \frac{v^2}{ab}]^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} \tag{3.46}$$

Yarım tamsayı değerlerindeki analitik fonksiyon için Abel- Plana toplam formülü,

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n+\frac{1}{2}) - \int_0^{\infty} F(t)dt = -i\int_0^{\infty} \frac{F(it)-F(-it)}{e^{2\pi t}+1}\,dt \tag{3.47}$$

kullanırsak (Mostapanenko, Trunov, 1997).

Bu durumda $\widetilde{E_c}$ :

$$\widetilde{E_c} = -\,2\,[\int_0^{\infty} dv.\, v \int_{\frac{v\xi}{2\pi}}^{\infty} [\,(\frac{\pi t}{b-a})^2 - \frac{v^2}{ab}]^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} - i\int_0^{\infty} \frac{F(iv)-F(-iv)}{e^{2\pi v}+1}\,dv] \tag{3.48}$$

olur.

Bu durumda $\widetilde{E_c}$ 'nin ilk terimini $\widetilde{E_{c_1}}$ ve ikinci teriminide $\widetilde{E_{c_2}}$ olarak iki kısıma ayırabiliriz. Bu iki kısımın toplamı bize $\widetilde{E_c}$'yi verecektir.

$$\widetilde{E_c} = \widetilde{E_{c_1}} + \widetilde{E_{c_2}}$$

$$\widetilde{E_{c_1}} = -2\int_0^{\infty} dv.\, v \int_{\frac{v\xi}{2\pi}}^{\infty} [\,(\frac{\pi t}{b-a})^2 - \frac{v^2}{ab}]^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} \tag{3.49}$$

$$\widetilde{E_{c_2}} = 2i\int_0^{\infty} \frac{F(iv)-F(-iv)}{e^{2\pi v}+1}\,dv \quad \text{olur.} \tag{3.50}$$

Bu iki kısımdan önce (3.49) için,

$d = b - a$ olarak alınır ve $y$ için yeni bir değişken tanımlarsak $y = \frac{\pi t\sqrt{ab}}{dv}$ olur. Burada $t \to \infty$ iken $y \to \infty$ ve $t = \frac{(b-a)v}{\pi\sqrt{ab}}$ iken $y \to 1$ şartları (3.49)'e uygulandığında ;

$$\widetilde{E_{c_1}} = -\frac{2(b-a)}{\pi ab}\int_0^\infty dv.v^3 \int_1^\infty dy \frac{\sqrt{y^2-1}}{e^{2(b-a)\frac{vy}{\sqrt{ab}}}-1} \tag{3.51}$$

olur.

(3.51) denklemi $p = \frac{2(b-a)}{\sqrt{ab}}y$ olarak kısaltılarak yazılırsa

$$\widetilde{E_{c_1}} = -\frac{2(b-a)}{\pi ab}\int_0^\infty dv.v^3 \int_1^\infty dy\sqrt{y^2-1}\frac{1}{e^{pv}-1} \tag{3.52}$$

haline gelir. Düzenlersek,

$$\widetilde{E_{c_1}} = -\frac{2(b-a)}{\pi ab}\int_1^\infty dy\sqrt{y^2-1}\int_0^\infty dv\frac{v^3}{e^{pv}-1} \tag{3.53}$$

(3.53) denklemindeki integralin değeri

$$\int_0^\infty dv\frac{v^3}{e^{pv}-1} = \frac{1}{p^4}\Gamma(4)\zeta(4)$$

olarak yazılır (Abromowitz ve Stegun, 1964).

Burada yukarıda tanımladığımız $p$ ile $\Gamma(4) = 3!$ ve $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ yerine yazılırsa eğer,

$$\int_0^\infty dv\frac{v^3}{e^{pv}-1} = \frac{\pi^4(ab)^2}{240(b-a)^4}\frac{1}{y^4}$$

sonucu elde edilir. Bu sonucu (3.53) denkleminde yerine yazdığımızda,

$$\widetilde{E_{c_1}} = -\frac{\pi^3 ab}{120(b-a)^3}\int_1^\infty dy\sqrt{y^2-1}\,y^{-4} \tag{3.54}$$

elde ederiz.

Beta fonksiyonunu kullanarak (3.54) denklemindeki integrali

$$\int_0^1 dx(1-x)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{B}(1, \frac{3}{2})$$

olarak yazarız (Abromowitz ve Stegun, 1964).

Burada $x = \frac{1}{y^2}$ ' dir. Buradan da,

$B(1, \frac{3}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{2}{3}$

olur (Abromowitz ve Stegun, 1964).

Bu sonucu (3.54) denkleminde yerine yazarsak,

$\widetilde{E_{c_1}} = -\frac{\pi^3 ab}{180(b-a)^3} = -\frac{\pi^3 (ab)}{180 d^3}$

olarak buluruz. Böylece birinci kısımdan gelen katkı bulunmuştur.

Denklemin ikinci kısımını hesaplayalım:

$\widetilde{E_{c_2}} = 2i \int_0^\infty \frac{F(iv)-F(-iv)}{e^{2\pi v}+1} dv$

Burada,

$$F(v) = v \int_{\frac{v\xi}{2\pi}}^{\infty} [(\frac{\pi t}{b-a})^2 - \frac{v^2}{ab}]^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1}$$

olarak yazılır.

$t = \frac{v}{2\pi} x$ , $dt = \frac{v}{2\pi} dx$ değişken dönüşümü yaparak bu eşitliği yazarız ve burada,

$\mu = \frac{2(b-a)}{\sqrt{ab}}$ olarak alınır. Bu durumda ,

$$F(v) = \frac{v^3}{4\pi(b-a)} \int_\mu^\infty [\, x^2 - \mu^2]^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{e^{xv}-1} \qquad (3.55)$$

olur. Bu sonucu pozitif ve negatif $iv$ değerleri için yazarsak,

$$F(iv) - F(-iv) = \frac{1}{4\pi(b-a)} [(iv)^3 \int_\mu^\infty \frac{[x^2-\mu^2]^{\frac{1}{2}} dx}{e^{x(iv)}-1} - (-iv)^3 \int_\mu^\infty \frac{[x^2-\mu^2]^{\frac{1}{2}} dx}{e^{x(-iv)}-1} ] \qquad (3.56)$$

(3.56) denklemin ikinci kısımı olan (3.50)'de yerine yazarsak eğer,

$$\widetilde{E_{c_2}} = 2i \int_0^\infty \frac{dv}{e^{2\pi v}+1} \cdot \frac{(-iv^3)}{4\pi(b-a)} \int_\mu^\infty dx[x^2-\mu^2]^{\frac{1}{2}} [\frac{1}{e^{ixv}-1} + \frac{1}{e^{-ixv}-1}] \text{ olur.} \quad (3.57)$$

(3.57) denklemine gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra,

$$\widetilde{E_{c_2}} = -\frac{1}{2\pi(b-a)} \int_0^\infty \frac{v^3 dv}{e^{2\pi v}+1} \int_\mu^\infty dx[x^2-\mu^2]^{\frac{1}{2}} \quad (3.58)$$

elde edilir.

(3.56) denkleminin içindeki integrale dönersek,

$$I = \int_\mu^\infty dx[x^2-\mu^2]^{\frac{1}{2}} [\frac{1}{e^{ixv}-1} + \frac{1}{e^{-ixv}-1}] \quad (3.59)$$

olur.

Bu integralin hesaplanabilmesi için $\epsilon \to 0$'da $v$ için $v \to v - i\epsilon$ dönüşümü yazarsak

$$I = \int_\mu^\infty dx[x^2-\mu^2]^{\frac{1}{2}} [\frac{1}{e^{ix(v-i\epsilon)}-1} + \frac{1}{e^{-ix(v-i\epsilon)}-1}] \quad (3.60)$$

elde edilir.

(3.60) denkleminde $p$ ve $q$ sabitleri için,

$$p = \epsilon + iv$$

$$q = \epsilon - iv$$

dönüşümleri yapılarak kısaltılarak yazılırsa,

$$I \cong \int_0^\infty dx \frac{x}{e^{px}-1} + \int_0^\infty dx \frac{x}{e^{qx}-1} \quad (3.61)$$

Bu durumda (3.61) denklemindeki iki kısıma ayırdığımız integrali

$$\int_0^\infty dx \frac{x}{e^{px}-1} = \frac{1}{p^2} \Gamma(2)\zeta(2) ; \quad \int_0^\infty dx \frac{x}{e^{qx}-1} = \frac{1}{q^2} \Gamma(2)\zeta(2)$$

(Abromowitz ve Stegun, 1964).

olarak elde edilir. Çıkan sonuçlara göre limit değeri $\in \to 0$'a giderken

$$\lim_{\in\to 0} I \cong \frac{\pi^2}{6}\left[\frac{1}{(iv)^2} + \frac{1}{(-iv)^2}\right] \cong -\frac{\pi^2}{3v^2} \tag{3.62}$$

(3.62)' de bulduğumuz bu sonucu (3.58) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\widetilde{E_{c_2}} = -\frac{\pi}{6(b-a)}\int_0^\infty \frac{vdv}{e^{2\pi v}+1} \quad \text{olarak buluruz.} \tag{3.63}$$

(3.63) denklemindeki integrali

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{e^{\mu x}+1}dx = \frac{1}{\mu^v}(1-2^{1-v})\Gamma(v)\zeta(v)$$

formülünü kullanarak denklemde yerine yazarsak,

$v = 2$ için,

$$\widetilde{E_{c_2}} = -\frac{\pi}{6(b-a)}\frac{1}{48} \tag{3.64}$$

olarak elde ederiz.

Böylece $\widetilde{E_{c_1}}$ ve $\widetilde{E_{c_2}}$ değerleri,

$$\widetilde{E_c} = \widetilde{E_{c_1}} + \widetilde{E_{c_2}}$$

$$\widetilde{E_c} = -\frac{1}{4\pi}\frac{(\sqrt{ab})^2}{d^3}\zeta(4) \tag{3.65}$$

olur. Buradan elde edilen sonuç (3.6)'da yerine yazılırsa,

$$E_c = \overline{E_c} + \widetilde{E_c}$$

$$E_c = -\frac{1}{4\pi}\frac{(\sqrt{ab})^2}{d^3}\zeta(4)\left[1 + \frac{1}{12}\eta^2\frac{\zeta(2)}{\zeta(4)}\right] \tag{3.66}$$

elde edilir.

Bu toplamdaki $\overline{E_c}$ ifadesini (3.27) denklemine bağlı olarak sıfır bulmuştuk. Bu durumda sadece $\widetilde{E_c}$'den gelen katkı bize Casimir enerjisini verir.

(3.66) denklemindeki Riemann Zeta fonksiyonunu $z$ = 2, 4, 6 ,…….. şeklinde genişleterek yazarsak eğer:

$$\zeta\,(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

(Elizalde vd. , 1994).

Bu değerleri (3.66)'da yerine yazarsak, kütlesiz skaler alanda birbirine yakın eş merkezli iki küresel kabuk arasındaki yeniden normalleştirilmiş Casimir enerjisinin birim yüzey alanı başına değeri

$$E_c = -\frac{1}{4\pi}\frac{ab}{d^3}\zeta(4)[\,1+\frac{5}{4\pi^2}\eta^2]$$

Boyutsuz değişken olan $\eta = \frac{d}{\sqrt{ab}}$ olarak alınırsa ve yerine yazılırsa,

$$\frac{E_c}{A} = -\frac{1}{16\pi^2}(\frac{\sqrt{ab}}{a})^2\frac{\zeta(4)}{d^3}[\,1+\frac{1}{12}\eta^2\frac{\zeta(2)}{\zeta(4)}\,] \qquad (3.67)$$

Bu sonuç (3.67) denklemine göre $\eta = \frac{d}{\sqrt{ab}} << 1$ olur. Limit değerlerini $a \to \infty$ ve $b \to \infty$ yani yeteri kadar büyük yarıçaplarda ve $b - a \to 0$ iken geometrik olarak eş merkezli iki küresel kabuk paralel plakalara dönüşür. Burada $\frac{\sqrt{ab}}{a} \to 1$ alınması ve bulduğumuz sonuca bu limitleri uyguladığımızda,

$$\frac{E_c}{A} = -\frac{1}{16\pi^2}1\frac{\zeta(4)}{d^3}[\,1+\frac{1}{12}\frac{d^2}{ab}\frac{\frac{\pi^2}{6}}{\frac{\pi^4}{90}}\,]$$

$$\frac{E_c}{A} = -\frac{1}{16\pi^2}\frac{\zeta(4)}{d^3}[1+\frac{5}{4}\frac{d^2}{ab}\frac{1}{\pi^2}\,]$$

olarak elde edilir.

Bu durumda, parantez içindeki ikinci terim 1'den çok küçüktür. Bu nedenle de parantezin içindeki ikinci terim sıfır olur. Gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra birbirine yakın iki küre arasındaki birim yüzey alanın Casimir enerjisi;

$$\frac{E_C}{A} = -\frac{1}{16\pi^2}\frac{\zeta(4)}{d^3} \tag{3.68}$$

elde edilir.

Bulunan bu sonuç kütlesiz skaler alandaki paralel plakaların Casimir Enerjisiyle tam olarak aynı sonuçtur. Böylece geliştirilen (Özcan, 2012) hesap tekniği deney sonucuyla çarpıcı bir şekilde uyum sağlamıştır. Diğer önemli sonuç sadece tek bir küresel kabuğun skaler alanının yeniden normalleştirilmiş Casimir enerjisi pozitif işaretli iken yani itici kuvvet üretirken eş merkezli iki küresel kabuk arasındaki skaler alanın yeniden normalleştirilmiş Casimir enerjisi çekici kuvvet üretmektedir. Bu sonuç paralel plakalarla aynı olduğunu gösterir.

# BÖLÜM 4

# SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu tezde birbirine yakın eş merkezli iki küresel kabuk arasına yerleştirilen skaler alanın kuantum boşluk enerjisi yeniden elde edilmiştir. Bunun için önce küresel geometrimizden gelen sınır-değer şartları uygulanarak modların dağılım bağıntısı $f_v(\omega, a, b) = J_v(\omega b)N_v(\omega a) - J_v(\omega a)N_v(\omega b)$ elde edilmiştir. Yeniden normalleştirilmiş Casimir enerji hesaplamalarında bu frekans denklemini sıfır yapan $\omega$'lar hesaplanmalıdır. İlk olarak yeteri kadar büyük $l$'ler için Casimir enerjisi sonsuz toplamı Cauchy integral teoremi ve Lommel seri açılımı kullanılarak, enerjiye gelen katkının sıfır olduğu gözlemlenmiştir. $l$ sabit iken $\omega \to \infty$'daki modların davranışını belirleyen toplamın Casimir enerjiye katkısı Abel-Plana toplam formulü kullanılarak elde edilmiştir. Abel –Plana formülünün uygulanmasında ortaya çıkan bazı sonsuz toplamlar analitik sürekliliğe göre formülüze edilen Riemann-Zeta ve Hurwitz-Zeta fonksiyonlarının sonlu ifadelerine dönüştürülmüşlerdir (Özcan, 2012). Sonuçta, birim küre yüzeyi başına yeniden normalize edilmiş Casimir enerji $\frac{E_c}{A} = -\frac{1}{16\pi^2}(\frac{\sqrt{ab}}{a})^2 \frac{\zeta(4)}{d^3}[1 + \frac{1}{12}\eta^2 \frac{\zeta(2)}{\zeta(4)}]$ yeniden elde edilmiştir (Özcan, 2012). Eş merkezli kürenin dışındaki ve içindeki yarıçapları $a \to \infty$ ve $b \to \infty$ limitleri altında $b - a \to 0$ alındığında geometrik yapı paralel plakalara dönüşür. Bulduğumuz sonuçlara bu geometrik limitleri uyguladığımızda, kuantize edilmiş skaler alanın paralel plakalar için elde edilmiş sonucu bulunur. Buradan da görüldüğü gibi geliştirilen regülarizasyon ve renormalizasyon yöntemi deneysel sonuçla büyük bir uyum içindedir. Böylece kuantize edilmiş skaler alan küresel kabukta itici kuvvet üretirken, paralel levhalarda olduğu gibi

birbirine yakın eş merkezli iki küre kabuğu arasına yerleştirilen kuantize edilmiş skaler alanın çekici kuvvet ürettiği gösterilmiştir.

Bu çalışmadan elde ettiğimiz sonuçlar eş merkezli iki küresel kabuk arasına yerleştirilen kuantize edilmiş elektromanyetik alanın yeniden normalize edilmiş Casimir enerjinin hesaplanmasında yol gösterici olacaktır. Ayrıca birbirine yakın eş merkezli iki küresel kabuğu boşluğun içine bandırıldığında küresel kabuklar üzerindeki kuvvetlerin işaretinin nasıl olacağına da olanak verecektir.

# KAYNAKLAR


Abromowitz, M., Stegun, I. A. (1964). *Handbook of Mathematical Function.* New York, NY: Dover.

Arfken, G. B. , Weber, H. J. (2003). *Essential Mathematical Methods for Physicists*. United States of America, USA: Academic Press.

Bayin, S. (2004). *Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler.* İstanbul: Ders Kitapları.

Bayin, S. (2008). *Essentials of Mathematical Methods in Science and Engineering*. New Jersey, NJ: Wiley.

Bell, W. W. (2004). *Special Functions for Scientists and Engineers*. United States of America, USA: Dover.

Bordag, M. , Mohideen, U. , Mostepanenko, V. M. (2001). New Developments in the Casimir Effect. *Physics Reports, 353*(1), 7-22.

Bordag, M. (2006). The Casimir effect for a sphere and a cylinder in front of plane and corrections to the proximity force theorem. *Physics Review, 73*(12), 2-4.

Bordag, M. , Klımchıtskaya, G.L. , Mohıdeen, U. , Mostepanenko, V. M. (2009). *Advances in the Casimir Effect.* New York, NY: Oxford.

Bowers, M. E. , Hagen, C. H. (1999). Casimir Energy of a Spherical Shell. *Physics Review, 59*(2), 2-7.

Casimir, H. B. G. (1948). On The Attraction Between Two Perfectly Conducting Plates. *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie Van Wetenschappen, 51,* 793-795.

Dennery, P. , Krzywicki, A. (1995). *Mathematics for Physics*. New York, NY: Dover.

Elizalde, E., Odintsov, S. D., Bytsenko, A. A., Zerbini, S. (1994). *Zeta Regularization Techniques with Apllications.* Spain, ESP: Springer.

Emig, T., Graham, N., Jaffe, R. L., Kardar, K . (2007*).* Casimir Forces Between Arbitrary Compact Objects. *Physics Review, 99*(17), 2-3.

Gradshteyn, I. S. , Ryzhık, I. M. (1965). *Table of Integrals, Series and Products*. New York, NY: Academic Press.

Itzykson, C. , Zuber, J. B. (1980). *Quantum Field Theory*. New York, NY: McGraw-Hill.

Klimchitskaya, G. L. , Mostepanenko, V. M. (2009). The Casimir Force between Real Metarials; Experiment and Theory. *Review of Modern Physics, 81*(4), 44-46.

Lamoreaux, S. K. (1996). Demonstration of the Casimir Force in the 0,6 to 6 $\mu m$ Range. *Phyics Review, 78*(1), 5-7.

Milton, K. A. (2001). *Physical Manifestations of Zero Point Energy The Casimir Effect.* Singapore, SGP: World Scientific.

Mostepanenko, V. M. , Trunov, N. N. (1997). *The Casimir Effect and Applications*. New York, NY: Oxford.

Nesterenko, V. V. , Pirozhenko, I. G. (1997). Justification of the Zeta function renormalization in rigid string model. *Journal of Mathematical Physics, 38*(12), 2-4.

Özcan, M. (2006). Casimir Energy density for spherical universes in n- dimensional spacetime. *Classical and Quantum Gravity , 23(*18), 5-14.

Özcan, M. (2012). Scalar Casimir Effect Between Two Concentric Spheres. *International Journal of Modern Physics, 27*, 3-10.

Özcan, M. (2012). Scalar Casimir Effect between two concentric D-dimensioanalspheres. *International Journal of Modern Physics, 27*(18), 5-9.

Plunien, G. , Muller, B. , Greiner, W. (1986). The Casimir Effect. *Physics Report, 134*(2), 94-95.

Sparnaay, M. J. (1958). Measurements of Attractive Forces Between Flat Plates. *Physica*, *24*(6), 751-764.

Tabor, D. , Winterton, R. H. S. (1969). The direct measurement of normal and retarded Van Der Waals forces. *Proceedings of the Royal Society of London, 312*(1511), 435-436.

Watson, G. N. (1966). *A Treatise On The Theory Of Bessel Functions*. London, UK: Cambrige.

# *EK A*

## KÜRESEL MODİFİYE BESSEL FONKSİYONLARI VE LOMMEL AÇILIMI

Küresel Modifiye Bessel fonksiyonlarının sağladığı diferansiyel denklem

$$z^2y^{''} + zy^{'} - (z^2 + v^2)y = 0 \tag{5}$$

olarak verilir (Watson, 1966; Bell, 2004).

(5) denkleminde $y^{''}(z) = \frac{d^2y}{dz^2}$ ve $y^{'}(z) = \frac{dy}{dz}$ olarak ifade edilir.

Bu ifadede y yerine sırasıyla birinci tür Modifiye Bessel fonksiyonu olan $I_v$ ve ikinci tür Modifiye Bessel fonksiyonu olan $K_v$ değerleri yerine yazılırsa,

$$z^2I_v^{''} + zI_v^{'} - (z^2 + v^2)I_v = 0 \tag{5.1}$$

$$z^2K_v^{''} + zK_v^{'} - (z^2 + v^2)K_v = 0 \tag{5.2}$$

Burada (5.1) denklemini $K_v$ ile (5.2) denkleminde $I_v$ ile çarparak yazarsak

$$z^2I_v^{''}K_v + zI_v^{'}K_v - (z^2 + v^2)I_vK_v = 0 \tag{5.3}$$

$$z^2K_v^{''}I_v + zK_v^{'}I_v - (z^2 + v^2)K_vI_v = 0 \tag{5.4}$$

(5.4) denkleminden (5.3) denklemini çıkartırsak

$$z^2(I_vK_v^{''} - K_vI_v^{''}) + z(I_vK_v^{'} - K_vI_v^{'}) = 0$$

$$z^2\left(I_vK_v^{''} - K_vI_v^{''}\right) = -z(I_vK_v^{'} - K_vI_v^{'}) \tag{5.5}$$

Modifiye Bessel fonksiyonlarının Wronskian bağıntısına göre,

$$I_v K_v^{'}(z) - I_v^{'}(z) K_v = -\frac{1}{z}$$

olarak buluruz.

Burada $K_v^{'}(z) = \frac{dK_v(z)}{dz}$ ve $I_v^{'}(z) = \frac{dI_v(z)}{dz}$ şeklinde gösterilir.

Daha sonra bu değeri (5.5) denkleminde yerine yazarsak,

$$z^2(I_v K_v^{''}(z) - K_v I_v^{''}(z)) = -z(-\frac{1}{z})$$

$$z^2\left(I_v K_v^{''}(z) - K_v I_v^{''}(z)\right) = 1$$

olarak bulunur. Buradan çıkacak olan sonuçta,

$$I_v K_v^{''}(z) - I_v^{''}(z) K_v = \frac{1}{z^2} \tag{5.6}$$

Burada $K_v^{''}(z) = \frac{d^2K_v(z)}{dz^2}$ ve $I_v^{''}(z) = \frac{d^2I_v(z)}{dz^2}$ şeklinde gösterilir.

(5.6)'nın tekrar $z$'ye göre türevini alırsak

$$I_v K_v^{'''}(z) - I_v^{'''}(z) K_v = -\frac{2}{z^3} \tag{5.7}$$

Burada $K_v^{'''}(z) = \frac{d^3K_v(z)}{dz^3}$ ve $I_v^{'''}(z) = \frac{d^3I_v(z)}{dz^3}$ şeklinde gösterilir.

(5.1) ve (5.2) denklemlerini $I_v^{'}$ ve $K_v^{'}$ ile çarparak yazarsak eğer,

$$z^2 I_v^{'} K_v^{''} + z I_v^{'} K_v^{'} - (z^2 + v^2) I_v^{'} K_v = 0 \tag{5.8}$$

$$z^2 K_v^{'} I_v^{''} + z K_v^{'} I_v^{'} - (z^2 + v^2) K_v^{'} I_v = 0 \tag{5.9}$$

Burada (5.8) denklemini (5.9) denkleminden çıkararak yazarsak

$$z^2\left(I_v^{'} K_v^{''} - K_v^{'} I_v^{''}\right) - (z^2 + v^2)(I_v^{'} K_v - K_v^{'} I_v) = 0$$

Burada $I_v^{'}(z)K_v - K_v^{'}(z)I_v = \frac{1}{z}$ olarak yerine yazılırsa

$z^2(I_v^{'}K_v^{''} - K_v^{'}I_v^{''}) = \frac{z^2+v^2}{z}$

$$I_v^{'}K_v^{''} - K_v^{'}I_v^{''} = \frac{z^2 + v^2}{z^3} \tag{5.10}$$

olarak bulunur.

(5.6)'yı tekrar $z$'ye göre türevlendirirsek

$$\frac{d}{dz}\left[I_vK_v^{''} - I_v^{''}K_v\right] = I_vK_v^{'''} - I_v^{'''}K_v + I_v^{'}K_v^{''} - I_v^{''}K_v^{'}$$

$$\frac{d}{dz}\left[I_vK_v^{''} - I_v^{''}K_v\right] = -\frac{2}{z^3} + \frac{z^2 + v^2}{z^3}$$

$$\frac{d}{dz}\left[I_vK_v^{''} - I_v^{''}K_v\right] = \frac{z^2 + v^2 - 2}{z^3}$$

olarak elde edilir.

Daha sonra 4.mertebeden türevi için

$$I_vK_v^{(IV)}(z) - I_v^{(IV)}(z)K_v = \frac{6}{z^4}$$

$K_v^{(IV)}(z) = \frac{d^4K_v(z)}{dz^4}$ ve $I_v^{(IV)}(z) = \frac{d^4I_v(z)}{dz^4}$ şeklinde gösterilir.

Diğer taraftan,

$$I_v^{'}K_v^{'''} - K_v^{'}I_v^{'''} = -\frac{z^2 + v^2}{z^4}$$

olarak bulunur. Lommel açılımıyla formüle göre yeniden yazarsak

$$\frac{d}{dz}\left[I_vK_v^{'''} - I_v^{'''}K_v\right] = I_v^{'}K_v^{'''} + I_vK_v^{(IV)} - I_v^{(IV)}K_v - I_v^{'''}K_v^{'}$$

$$\frac{d}{dz}\left[I_vK_v^{'''} - I_v^{'''}K_v\right] = \frac{6}{z^4} - \frac{z^2+v^2}{z^4}$$

$\frac{d}{dz}\left[I_v K_v^{'''} - I_v^{'''} K_v\right] = \frac{6-z^2-v^2}{z^4}$

elde edilmiştir.

5.mertebe türevi için,

$$I_v K_v^{(V)}(z) - I_v^{(V)}(z) K_v = -\frac{24}{z^5}$$

olur.

Burada $K_v^{(V)}(z) = \frac{d^5 K_v(z)}{dz^5}$ ve $I_v^{(V)}(z) = \frac{d^5 I_v(z)}{dz^5}$ şeklinde gösterilir.

Diğer taraftan,

$$I_v' K_v^{(IV)}(z) - K_v' I_v^{(IV)}(z) = \frac{z^2 + v^2}{z^5}$$

olarak bulunur. Lommel açılımına göre yazarsak,

$$\frac{d}{dz}\left[I_v K_v^{(IV)} - K_v I_v^{(IV)}\right] = I_v' K_v^{(IV)} + I_v K_v^{(V)} - I_v^{(V)} K_v - K_v' I_v^{(IV)}$$

$$\frac{d}{dz}\left[I_v K_v^{(IV)} - K_v I_v^{(IV)}\right] = -\frac{24}{z^5} + \frac{z^2+v^2}{z^5}$$

$$\frac{d}{dz}\left[I_v K_v^{(IV)} - K_v I_v^{(IV)}\right] = \frac{z^2 + v^2 - 24}{z^5}$$

6.mertebe türevi için

$$I_v K_v^{(VI)}(z) - K_v I_v^{(VI)}(z) = \frac{120}{z^6}$$

olur. Burada

$K_v^{(VI)}(z) = \frac{d^6 K_v(z)}{dz^6}$ ve $I_v^{(VI)}(z) = \frac{d^6 I_v(z)}{dz^6}$ şeklinde gösterilir.

Diğer taraftan;

$$I_v' K_v^{(V)}(z) - K_v' I_v^{(V)}(z) = -\frac{z^2 + v^2}{z^6}$$

olarak bulunur. Lommel açılımındaki formüle göre yeniden yazarsak

$$\frac{d}{dz}\left[I_v K_v^{(V)} - K_v I_v^{(V)}\right] = I_v' K_v^{(V)} + I_v K_v^{(VI)} - I_v^{(VI)} K_v - K_v' I_v^{(V)}$$

$$\frac{d}{dz}\left[I_v K_v^{(V)} - K_v I_v^{(V)}\right] = \frac{120}{z^6} - \frac{z^2+v^2}{z^6}$$

$$\frac{d}{dz}\left[I_v K_v^{(V)} - K_v I_v^{(V)}\right] = \frac{120-z^2-v^2}{z^6}$$

7.mertebe türevi için

$$I_v K_v^{(VII)}(z) - K_v I_v^{(VII)}(z) = -\frac{720}{z^7}$$

olur.

Burada $K_v^{(VII)}(z) = \frac{d^7 K_v(z)}{dz^7}$ ve $I_v^{(VII)}(z) = \frac{d^7 I_v(z)}{dz^7}$ şeklinde gösterilir.

Diğer taraftan;

$$I_v' K_v^{(VI)}(z) - K_v' I_v^{(VI)}(z) = \frac{z^2+v^2}{z^7}$$

olarak bulunur. Bu denklemi bir daha türevlendirirsek

$$\frac{d}{dz}\left[I_v K_v^{(VI)} - K_v I_v^{(VI)}\right] = I_v' K_v^{(VI)} + I_v K_v^{(VII)} - I_v^{(VII)} K_v - I_v^{(VI)} K_v'$$

$$\frac{d}{dz}\left[I_v K_v^{(VI)} - K_v I_v^{(VI)}\right] = -\frac{720}{z^7} + \frac{z^2+v^2}{z^7}$$

$$\frac{d}{dz}\left[I_v K_v^{(VI)} - K_v I_v^{(VI)}\right] = \frac{z^2+v^2-720}{z^7}$$

biçiminde k=7,8,9…… için genişletilerek yazılabilir.

# ÖZGEÇMİŞ

2 Mayıs 1990 tarihinde İstanbul'un Bakırköy ilçesinde doğdum. 2004 yılında başladığım Bakırköy Lisesi'nden 2007 yılında mezun oldum. 2009 yılında Trakya Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik bölümünü kazandım. 2013 yılında lisans derecesinden mezun olduktan sonra aynı yıl tezli yüksek lisansa başladım. Hedefim Kuantum ve Plazma fiziği anabilim dalında ilerlemek ve katkıda bulunmaktır.