T.C.

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$d(d \geq 2)$ BOYUTLU HİDROJEN ATOM; ULTRA KÜRESEL HARMONİKLER

BUĞRA SEVİM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FİZİK ANABİLİM DALI

Tez Danışmanı: PROF. DR. MUSTAFA ÖZCAN

EDİRNE-2018

Buğra SEVİM'in hazırladığı "$d(d \geq 2)$ **BOYUTLU HİDROJEN ATOM; ULTRA KÜRESEL HARMONİKLER**" başlıklı bu tez, tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından FİZİK Anabilim Dalında bir Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri: İmza

Prof. Dr. Metin ÖZDEMİR .....

Prof. Dr. Mustafa ÖZCAN .....

Doç. Dr. Mehmet Akif SABANER .....

Tez Savunma Tarihi: 07/12/2018

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylıyorum.

İmza

Prof. Dr. Mustafa Özcan .....

Tez Danışmanı

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Murat YURTCAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

T.Ü. FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİZİK ANABİLİM DALI YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

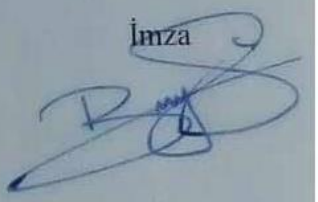
DOĞRULUK BEYANI

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında, tüm verilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini, kullanılan verilerde tahrifat yapılmadığını, tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını, kullanılan tüm literatür bilgilerinin bilimsel normlara uygun bir şekilde kaynak gösterilerek ilgili tezde yer aldığını ve bu tezin tamamı ya da herhangi bir bölümünün daha önceden Trakya Üniversitesi ya da farklı bir üniversitede tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

07/12/2018

BuğraSEVİM

İmza



Yüksek Lisan Tezi

$d(d \geq 2)$ Boyutlu Hidrojen Atom; Ultraküresel Harmonikler

T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü

FİZİK ANABİLİM DALI

ÖZET

Bu çalışmada; $d(d \geq 2)$ boyutlu Hidrojen benzeri atomun Hamiltonyeni yeniden inşa edilmiştir. d boyutlu Hidrojen benzeri atomun özdeğer ve özfonksiyonları küresel ve parabolik koordinat sistemlerinde hesaplanmıştır. d boyutlu Hidrojen benzeri atomun Schrödinger denkleminin çözümünün açısal değişkenlerinden gelen denklemlerinin yüksek boyutlu yörüngesel açısal momentum işlemcilerinin karesinin eşit olduğu gözlemlenmiştir.

Yıl : 2018

Sayfa sayısı : 103

Anahtar kelimeler : Hidrojen Atom, Ultra Küresel Harmonikler, Küresel Koordinatlar,, Parabolik Koordinatlar, d-boyutlu yörüngesel açısal momentum.

MSc Thesis

$d(d \geq 2)$ Dimensional Hydrogen Atom; Hyperspherical Harmonics

Trakya University Instütute of Natural Sciences

Department of Physics

ABSTRACT

In this work; we have reconstructed the Hamiltonian for the $d(d \geq 2)$ dimensional Hydrogen like atoms. We have calculated the energy eigenvalues and eigenfunction for the $d(d \geq 2)$ dimensional Hydrogen like atoms by using the different coordinates systems which are defined by the spherical and parabolic coordinates. When solving the Schrödinger equation for the d dimensional Hydrogen like atoms on the angular variables equations are equivalent the high dimensional the space of the angular momentum operators is shown.

Year : 2018

Number of Page : 103

Keywords : Hydrogen Atom, Hyperspherical Harmonics, Spherical Coordinates, Parabolic Coordinates, d-dimensional orbital angular momentum.

TEŞEKKÜR

Hesaplamaların yapıldığı dönemde ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren sayın hocam Prof. Dr. Mustafa ÖZCAN'a ayrıca desteklerini esirgemeyen arkadaşlarım Cemil UYANIK, Emre MAMATİ ve her zaman yanımda olan Aileme çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

SİMGE DİZİNİ viii

ÇİZELGE DİZİNİ ix

BÖLÜM 1 1

1. GİRİŞ 1

BÖLÜM 2 4

2. KÜRESEL KOORDİNATLARDA $d(d \geq 2)$ BOYUTLU HİDROJEN BENZERİ ATOM MODELİNİN ÖZDEĞER VE ÖZFONKSİYONLARI 4

BÖLÜM 3 35

3. PARABOLİK KOORDİNATLARDA $d(d \geq 2)$ BOYUTLU HİDROJEN BENZERİ ATOM MODELİNİN ÖZDEĞER VE ÖZFONKSİYONLARI 35

BÖLÜM 4 46

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA 46

KAYNAKLAR 49

EK 51

EK.1. YÖRÜNGESEL AÇISAL MOMENTUM 51

EK. 2. KÜRESEL VE PARABOLİK KOORDİNATLARDA LAPLASYEN HESABI 73

EK.3. GEGENBAUER POLİNOMLARI 86
EK.4. RADYAL OLASILIK DAĞILIMI 93
ÖZGEÇMİŞ 103

SİMGELER DİZİNİ

$\widehat{H}$: Hamilton Operatörü

Ψ: Dalga Fonksiyonu

$\vec{\nabla}^2$: Laplasyen

ħ: Planck Sabiti

H_R: Kütle Merkezi Hamiltonyeni

H_r: Bağıl Hamiltonyen

μ: İndirgenmiş Kütle

$\vec{L}^2$: Yörüngesel Açısal Momentum işlemcisinin karesi

θ_j: kutupsal Açılar

ϕ: Azimutal Açı

$C_n^{\lambda}(x)$: Gegenbauer Polinomları

a_0: Bohr Yarıçapı

$\propto$: İnce Yapı sabiti

$P(r)$: Radyal Olasılık Yoğunluğu

$L_n^k(x)$: Asosye Laguerre Polinomları

$\Gamma(x)$: Gamma Fonksiyonu

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge2-1, 3 boyutta hidrojen benzeri atom modelinin beklenen değerleri 30

Çizelge2-2, 4 boyutta hidrojen benzeri atom modelinin beklenen değerleri 31

Çizelge2-3, 5 boyutta hidrojen benzeri atom modelinin beklenen değerleri 32

Çizelge2-4, 6 boyutta hidrojen benzeri atom modelinin beklenen değerleri 33

Çizelge2-5, 7 boyutta hidrojen benzeri atom modelinin beklenen değerleri 34

BÖLÜM 1

1.GİRİŞ

Kuantum mekaniğinin analitik olarak çözülebilir problemlerinden biri: Hidrojen benzeri atom modelidir. Hidrojen benzeri atom modeli merkezde birden fazla parçacıktan oluşan bir çekirdek ve Coulomb çekim kuvvetiyle çekirdeğe bağlı bir elektrondan oluşur. İlk olarak Hidrojen benzeri atomun yapısı; 1913 yılında Bohr, atomların ışıma spektrumlarının kesikliliği ve kararlılığını açıklayan Bohr varsayımları olarak bilinen varsayımlar ile açıkladı. Bohr'un Hidrojen benzeri atom modeli için öne sürdüğü varsayımlar; elektron, çekirdeğin etrafında Coulomb çekim kuvveti etkisi ile çembersel yörüngede hareket eder. Bu hareket klasik mekanik yasalarının izniyle gerçekleşir. Klasik mekanikteki her türlü yörünge yerine bir atomdaki elektronun açısal momentumu $L = n\hbar\,(n = 1,2,3,\dots)$ gibi kesikli değerler alabilecek şekilde belirli yörüngelerde ışıma yapmadan dolanır. Böylece yörüngesel açısal momentum kuantumludur ve enerjisi sabit kalır. (İki ve üçüncü maddeler Bohr'un kuantumlanma koşuludur.) Bir elektron izinli yörüngeler arasında ani geçişler yapabilir. Bu yörüngelerin ΔE enerji farkı $\upsilon = {}^{\Delta E}/_{h}$ frekanslı bir ışıma olarak ortaya çıkar. Bohr varsayımlarının sonuçlarında;

$r_n = \frac{n^2}{z} a_0$, $(n = 1,2,3,\dots)$, Elektronun yarıçapı

$\upsilon = \frac{z \propto c}{n}$, $(n = 1,2,3,\dots)$, Yörüngedeki hızı

$E_n = -\left(\frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{m}{2n^2\hbar^2}$, $(n = 1,2,3,\dots)$

(Eisberg R., Resnick R., 1985) değerleri elde edilir.

Yörüngesel açısal momentumun kuantize edilmesi, yarıçapını, hızını ve enerjisinin kuantumlu olmasının gerektiğini söylemiştir. Kuantum mekaniğine göre Bohr atom modeli eksiklikler içermektedir.. Fakat kuantum mekaniksel incelemeye birçok önemli katkısı vardır. Bohr atom modeline göre elektronun taban durum enerjisi $E_1 = -13{,}6$ ev dır. Taban durumu atomun en kararlı halidir dış etkilerden yalıtılmış atom sonunda bu duruma gelir. Bohr atom modelinde; elektronlar klasik noktasal paracık olarak ele alınır. 1924'te de Broglie dalga boyunun tam sayı katına eşit olma koşulunun Bohr kuantumlanma koşuluna eşit olduğunu gösterdi. (Bohr kuantumlanma koşulu ; $L = n\hbar$). Böylece elektronun çekirdeğin etrafındaki hareketinin salt klasik noktasal parçacık hareketi olmadığı ve dalga karakterinde olduğu anlaşıldı.

Kuantum mekaniksel olarak bir paracığın dinamiği ile ilgili bilgileri özdeğer denklemi verir. Ölçülebilir ya da gözlemlenebilir fiziksel nicelikler kuantum mekaniğinde çizgisel Hermitsel işlemci ile temsil edilirler ve parçacık ile ilgili bilgiyi karmaşık değerlerde alabilen dalga fonksiyonu taşır. Bu varsayımlar altında Hidrojen benzeri atom modelini incelediğimizde; Schrödinger denklemi diye tanımlanan, özdeğer denklemi göz önüne alınır. Schrödinger denklemi diye tanımlanan özdeğer denklemi göz önüne alındığında üç boyutlu sistemler için enerji özdeğer ve öz fonksiyon hesaplanır, çözümler bize elektronla ilgili bilgiler verir. Schrödinger denklemi elektronun belirli bir anda nerede olacağını değil, nerede olabileceğinin olasılığını verir. Atom içinde hareket eden elektronun herhangi bir yerde olduğundan söz etmek mümkün değildir, ancak herhangi bir yerde bulunma ihtimalinin yüksek olduğu tespit edilebilir.

Hidrojen atomu için yazılan Hamilton işlemcisi özdeğer denkleminin koordinatları olan r, θ, ϕ ifadeleri ile sıra değiştirmez. Bu durum bize; elektron belli bir enerji değerinde iken konum ve momentumunu belirsiz kılar. Buda; elektron belli bir enerji değerinde iken r yarıçaplı bir küresel kabuğun üzerinde olduğunu söyler fakat nerede olduğunu söylemez. Bu sonuç; Bohr'un elektron, çekirdeğin etrafında Coulomb çekim kuvveti etkisi ile belirli çembersel yörüngelerde hareket eder varsayımından tamamen farklıdır. Schrödinger denkleminin çözümlerini ararken Hamiltonyen ve Yörüngesel açısal momentum işlemcisi; $\left[\vec{H}, \vec{L}^2\right] = 0$, $\left[\vec{L}^2, L_z\right] = 0$ (Merzbacher, 1970) sıra değiştirme bağıntılarını sağladıkları için ortak öz fonksiyonlarla ifade edilirler. Bu sayede çözümler elde edilir.

Bu tezde analitik olarak iki ve üç boyutta küresel ve parabolik koordinatlarda çözülmüş olan Hidrojen benzeri atomun özdeğer denklemi yüksek boyutlarda farklı koordinat sistemlerinde $(d > 3)$ çözümü göz önüne alınarak enerji özdeğer ve Özfonksiyonları belirlenecek. Yüksek boyutlarda yazılmış iki cisim probleminin kuantize edilmiş Hamiltonyenini yazarak özdeğer denkleminin bulunması ve bu özdeğer denkleminin farklı koordinat sistemlerinde yeniden elde edilecektir. $d > 3$ yüksek boyutlardaki Hidrojen benzeri atomdaki elektronun enerji değerinin geometrik boyut ile ilişkisi analiz edilecektir.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde; $d(d \geq 2)$ boyutlu sistemler için genelleştirilmiş küresel koordinatlar kullanılarak yazılan özdeğer denkleminin açısal kısımlarından gelen denklemlerinin yörüngesel açısal momentum işlemcisin karesi ile ilişkisi gösterilecek ve yüksek boyutlu yörüngesel açısal momemntum işlemcisinin özdeğerleri elde edilerek, Hidrojen benzeri atomun enerji özfonksiyonu ve enerji özdeğeri elde edilecektir. Ayrıca dejenere durumlar ve beklenen değer hesapları analiz edilecektir.

Üçüncü bölümde; Hidrojen benzeri atom modeli için parabolik koordinat sistemini küresel koordinatlarda olduğu gibi, $d(d \geq 2)$ yüksek boyutlarda yazarak yörüngesel açısal momentum işlemcisinin karesi ile ilişkileri tanımlanarak enerji özdeğer ve özfonksiyonları bulunacaktır.

Hidrojen benzeri atom modelinin özdeğer denkleminin çözümlerinde elde edilen Yörüngesel açısal momentum işlemcisinin karesinin Hamilton işlemcisinden bağımsız olarak yüksek boyutlarda çıkartılışı hesaplanacak ve bulunan ifadeler Ek.1 de genelleştirilmiştir.

EK.2 de ise Küresel koordinatlar ve Parabolik koordinatlardaki Laplasyen işlemcisinin elde edilişi gösterilecektir.

Ek.3 de özdeğer denkleminin açısal bileşenlerinden gelen ultra küresel harmonik olarak adlandırılan Gegenbauer polinomlarının özellikleri incelenecektir.

Ek.4 de Radyal olasılık dağılımı hesaplanmasında karşımıza çıkan integraller hesaplanacaktır.

BÖLÜM 2

2. KÜRESEL KOORDİNATLARDA $d(d \geq 2)$ BOYUTLU HİDROJEN BENZERİ ATOM MODELİNİN ÖZDEĞER VE ÖZFONKSİYONLARI

Bu bölümde kütlelerinin merkezlerini birleştiren doğru boyunca etkin olan Coulomb etkileşimindeki iki cisim probleminin $d(d \geq 2)$ boyutlarda özdeğer denklemi yazılarak çözümleri incelenecektir. Burada iki cismin biri birden fazla parçacığı içeren çekirdeği ve diğeri ise bir elektronu tanımlamaktadır. Bu sistem hidrojen benzeri atom modelidir. Coulomb etkileşimindeki iki cismin kuantum mekaniksel olarak $d(d \geq 2)$ boyuttaki özdeğer denklemi;

$$\hat{H}\Psi = E\Psi \tag{2.1}$$

(Liboff , 1997; Gottfried ve Thug-Mow , 2003) dır.

Burada $\hat{H}$ Hamilton işlemcisi

$$\hat{H} = \frac{\vec{P}_1^{\,2}}{2m_1} + \frac{\vec{P}_2^{\,2}}{2m_2} + V(|\vec{r}|) \tag{2.2}$$

(Liboff , 1997; Sakurai,1994; Merzbacher, 1970) dır.

Ve $\vec{P}_1 = -i\hbar\vec{\nabla}_1$ ve $\vec{P}_2 = -i\hbar\vec{\nabla}_2$ birinci ve ikinci parçacıkların konumlarına ait momentum işlemcileridir. Ve $\vec{\nabla}_1$ ve $\vec{\nabla}_2$ birinci ve ikinci parçacıkların koordinatlarına ait gradyanlardır. (Liboff , 1997)

Hamilton işlemcisi çizgisel ve Hermitsel işlemciler olan $\vec{P}_1$ ve $\vec{P}_2$ cinsinden tekrar yazılırsa;

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_1}\vec{\nabla}_1^{\,2} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\vec{\nabla}_2^{\,2} + \mathrm{V}(|\vec{r}|) \tag{2.3}$$

Buradaki ; $\vec{\nabla}_1{}^2 = \vec{\nabla}_1 \,.\, \vec{\nabla}_1$ ve $\vec{\nabla}_2{}^2 = \vec{\nabla}_2 \,.\, \vec{\nabla}_2$ birinci ve ikinci parçacığın koordinatları cinsinden d boyutta yazılmış Laplasyen;

$$\vec{\nabla}_1{}^2 = \sum_{j=0}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j^{(1)^2}} \tag{2.4}$$

$$\vec{\nabla}_2{}^2 = \sum_{j=0}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j^{(2)^2}} \tag{2.5}$$

(Arfken, 1996; Byron ve Fuller, 1970). Burada (1) ve (2) indisleri birinci ve ikinci paracığın koordinatlarını temsil eder. ($j = 1,2,3, \dots\dots\dots, d$)

Ayrıca;

Dalga fonksiyonu;

$$\Psi = \Psi\left(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}\right) \tag{2.6}$$

Coulomb Potansiyeli;

$$V(|\vec{r}|) = -\frac{ze^2}{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)} \tag{2.7}$$

ve

$$r_1 = r_1\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, x_4^{(1)} \dots\dots\dots\dots, x_d^{(1)}\right)$$

$$r_2 = r_2\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, x_4^{(2)} \dots\dots\dots\dots, x_d^{(2)}\right)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

olarak tanımlanır.

Merkezleri birleştiren doğru boyunca Coulomb çekim kuvveti altında olan m_1 ve m_2 parçacıklı bağlı sistemin özdeğer denklemi tekrar yazılırsa;

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_1}\sum_{j=0}^{d}\frac{\partial^2}{\partial x_j{}^{(1)^2}} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\sum_{j=0}^{d}\frac{\partial^2}{\partial x_j{}^{(2)^2}} - \frac{ze^2}{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}\right)\Psi\left(x_j{}^{(1)}, x_j{}^{(2)}\right)$$

$$= E\Psi\left(x_j{}^{(1)}, x_j{}^{(2)}\right) \tag{2.8}$$

elde edilir.

İki cismi tanımlayan özdeğer denklemindeki etkileşim terimi her iki cismin koordinatları cinsinden yazıldığından, (2.8) denklemi değişken ayırma yöntemine göre çözülemez. Böylece klasik mekanikte iki cisim probleminde olduğu gibi kütle merkezi koordinat dönüşümü kullanılarak Hamiltonyen yeniden yazılmalıdır.

Kütle merkezi koordinat dönüşümü için kütle merkezi ve bağıl koordinatları dönüşümleri;

$$R_1 = \frac{m_1 x_1^{(1)} + m_2 x_1^{(2)}}{m_1 + m_2} \quad , \quad x_1 = x_1^{(2)} - x_1^{(1)} \quad , \quad M = m_1 + m_2$$

$$R_2 = \frac{m_1 x_2^{(1)} + m_2 x_2^{(2)}}{M} \quad , \quad x_2 = x_2^{(2)} - x_2^{(1)}$$

$$R_3 = \frac{m_1 x_3^{(1)} + m_2 x_3^{(2)}}{M} \quad , \quad x_3 = x_3^{(2)} - x_3^{(1)}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$R_d = \frac{m_1 x_d^{(1)} + m_2 x_d^{(2)}}{M} \quad , \quad x_d = x_d^{(2)} - x_d^{(1)} \tag{2.9}$$

(Bradbury, 1968; Dittrich ve Reuter , 2001; Goldstein, 2002) Burada;

$$\vec{\nabla}_R = \left(\frac{\partial}{\partial R_1}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial R_2}\hat{\jmath} + \cdots + \frac{\partial}{\partial R_d}\hat{z}\right) \text{ ve } \vec{\nabla}_r = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial x_2}\hat{\jmath} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_d}\hat{z}\right) \tag{2.10}$$

Birinci ve ikinci parçacığın gradyan ifadeleri kütle merkezi koordinatı ve bağıl koordinatların cinsinden yeniden yazılırsa;

$$\vec{\nabla}_1 = \frac{m_1}{M}\vec{\nabla}_R - \vec{\nabla}_r \tag{2.11}$$

$$\vec{\nabla}_2 = \frac{m_2}{M}\vec{\nabla}_R + \vec{\nabla}_r \tag{2.12}$$

elde edilir. (Eisberg ve Resnick, 1985; Liboff, 1997).

Bulunan (2.11) ve (2.12) ifadeleri (2.3) denkleminde yerine yazılır;

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_1}\left\{\left(\frac{m_1}{M}\vec{\nabla}_R - \vec{\nabla}_r\right)\left(\frac{m_1}{M}\vec{\nabla}_R - \vec{\nabla}_r\right)\right\} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\left\{\left(\frac{m_2}{M}\vec{\nabla}_R + \vec{\nabla}_r\right)\left(\frac{m_2}{M}\vec{\nabla}_R + \vec{\nabla}_r\right)\right\} + V(|\vec{r}|)$$

ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2M}\vec{\nabla}_R{}^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu}\vec{\nabla}_r{}^2 - \frac{ze^2}{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)} \quad (2.13)$$

$\widehat{H} = H_R + H_r$ Şeklinde yazılır.

(Cohen-Tannoudji, 1997).Burada;

$$H_R = -\frac{\hbar^2}{2M}\vec{\nabla}_R{}^2 \quad (2.14)$$

$M = m_1 + m_2$ Kütleli serbest parçacığın Hamiltonyenidir, ve

$$H_r = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\vec{\nabla}_r{}^2 - \frac{ze^2}{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)} \quad (2.15)$$

Burada; $\mu = \frac{m_1.m_2}{m_1 + m_2}$ indirgenmiş kütle böylece

H_r μ kütleli cismin etkileşimdeki Hamilton işlemcisini temsil eder.

$$(H_R + H_r)\Psi(\vec{r}, \vec{R}) = E_T\Psi(\vec{r}, \vec{R}) \quad (2.16)$$

(Liboff, 1997; Arfken, 1996)

Denklemini değişken ayırma yöntemi gereğince çözümü;

$\Psi(\vec{r}, \vec{R}) = U(\vec{R})u(\vec{r})$ dir.

(2.16) denkleminde yerine konulduğunda;

$$H_R U(\vec{R}) = E_R U(\vec{R}), \quad (2.17)$$

Kütle merkezinden gelen Hamilton denklemini ve

$$H_r u(\vec{r}) = E_r u(\vec{r}), \quad (2.18)$$

Bağıl Hamilton denklemini elde ederiz.

Burada $E_{T=}E_R + E_r$ dir.

İlk olarak Kütle merkezinden gelen özdeğer denklemini göz önüne alalım;

$H_R U(\vec{R}) = E_R U(\vec{R})$

$k^2 = \frac{2M}{\hbar^2}E_R$ olmak üzere çözüm;

$U(\vec{R}) \sim e^{i\vec{k}.\vec{R}}$ Özdeğer denkleminin durum fonksiyonu olarak bulunur.

(2.14) denklemi kütlesi M olan serbest parçacığı temsil eden Hamilton özdeğer denklemini ifade eder. $\vec{k}$ dalga sayısı vektörüdür. Özdeğer denkleminin çözümü düzlem dalga çözümleridir. Çözümlerden gelecek olan asıl bilgi bağıl koordinatlar için yazılmış özdeğer denklemindedir. Bu durumda Bağıl Hamilton denklemi incelenmelidir. Sistemin asıl davranışları, çözümü zor olan, bağıl Hamiltonyen tarafından belirlenir. Bağıl Hamiltonyenden gelen özdeğer denklemi;

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\vec{\nabla}_r{}^2 - \frac{ze^2}{r}\right]u(\vec{r}) = E_r u(\vec{r}) \tag{2.19}$$

Bağıl özdeğer denklemi; kütlesi μ olan cismin etkileşim altındaki bir parçacığın özdeğer denklemini temsil eder. Şimdi (2.19) denkleminin çözümünü küresel koordinatlarda araştıracağız. Öncelikle d boyutlu küresel koordinatları tanımlayarak başlayalım.

$x_1 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\sin\theta_{d-2}\cos\phi$

$x_2 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\sin\theta_{d-2}\sin\phi$

$x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cos\theta_{d-3}$

$x_4 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cdots\cdots\cdots\cdots\cos\theta_{d-4}$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$x_{d-2} = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3$

$x_{d-1} = r\sin\theta_1\cos\theta_2$

$x_d = r\cos\theta_1$

d boyutta Kartezyen koordinatların d boyutta küresel koordinatlar cinsinden ifadeleri. (Özcan, 2001; Özcan, 2012)

Burada;

$\theta_j \in [0,\pi] \quad j = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots d-2\,, \quad \phi \in [0,2\pi]$

$0 < r < \infty \quad , -\infty < x_j < \infty$

$x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots \ldots\ldots\ldots + x_{d-2}{}^2 = r^2$ d boyutlu kürenin denklemidir.

d boyut için yazılmış olan Bağıl Hamiltonyendeki Laplasyen (Ek.2);

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r^{d-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{d-1}\frac{\partial}{\partial r}\right)$$
$$+\frac{1}{r^2}\left\{\frac{1}{\sin^{d-2}\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^{d-2}\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta_1\sin^{d-3}\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin^{d-3}\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right)\right.$$
$$+\frac{1}{\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\sin^{d-4}\theta_3}\frac{\partial}{\partial\theta_3}\left(\sin^{d-4}\theta_3\frac{\partial}{\partial\theta_3}\right)$$
$$+\frac{1}{\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3\sin^{d-5}\theta_4}\frac{\partial}{\partial\theta_4}\left(\sin^{d-5}\theta_4\frac{\partial}{\partial\theta_4}\right)+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{1}{\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\cdots\cdots\cdots\sin^2\theta_{d-3}\sin\theta_{d-2}}\frac{\partial}{\partial\theta_{d-2}}\left(\sin^2\theta_{d-2}\frac{\partial}{\partial\theta_{d-2}}\right)$$
$$\left.+\frac{1}{\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\cdots\cdots\cdots\sin^2\theta_{d-3}\sin^2\theta_{d-2}}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right\} \qquad (2.20)$$

şeklinde elde edilir. Şimdi Laplasyenin açısal değişkenlerden gelen kısmı, $d>3$ boyutlarda yörüngesel açısal momentum işlemcisinin karesi ile olan ilişkisini belirleyeceğiz. $d>3$ yörüngesel açısal momentum işlemcisinin karesi;

$$L_k{}^2 = \frac{1}{2}\sum_{i_1,i_2}^{k} L_{i_1,i_2}{}^2$$

(Louck, 1960) dir.

Burada;

$L_{ii} = L_{jj} = 0$ ve $L_{ij} = -L_{ji}$ dir.

($i, j = 1,2,3,\ldots,k$)

$$L_{ij} = i\hbar\left(q_i\frac{\partial}{\partial q_j} - q_j\frac{\partial}{\partial q_i}\right)$$

burada q_i ve $q_j = x, y, z, \ldots$ dir.

Bu tanımlamadan hareketle (Ek.1) de yörüngesel açısal momentum işlemcisinin karesi boyutlara bağlı olarak detaylandırılmıştır. Yapılan hesaplamalarda bulunan sonuçlar yazılırsa;

$$L_d{}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin^{d-2}\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^{d-2}\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right)\right] - \frac{L_{d-1}{}^2}{\sin^2\theta_1}$$

$$L_{d-1}{}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin^{d-3}\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin^{d-3}\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right)\right] - \frac{L_{d-2}{}^2}{\sin^2\theta_2}$$

$$L_{d-2}{}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin^{d-4}\theta_4}\frac{\partial}{\partial\theta_4}\left(\sin^{d-4}\theta_3\frac{\partial}{\partial\theta_3}\right)\right] - \frac{L_{d-3}{}^2}{\sin^2\theta_3}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$L_4{}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin^2\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^2\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right)\right] - \frac{L_3{}^2}{\sin^2\theta_1}$$

$$L_3{}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right)\right] + \frac{1}{\sin\theta_1}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

$$L_2{}^2 = -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{2.21}$$

elde edilir. (Wei-Qin, 2006)

Yazmış olduğumuz yörüngesel açısal momentum ifadelerinin kareleri genelleştirilirse;

$$\begin{aligned} L_d{}^2 = -\hbar^2\Bigg\{&\frac{1}{\sin^{d-2}\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^{d-2}\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta_1\sin^{d-3}\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin^{d-3}\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right) \\ &+ \frac{1}{\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\sin^{d-4}\theta_3}\frac{\partial}{\partial\theta_3}\left(\sin^{d-4}\theta_3\frac{\partial}{\partial\theta_3}\right) \\ &+ \frac{1}{\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3\sin^{d-5}\theta_4}\frac{\partial}{\partial\theta_4}\left(\sin^{d-5}\theta_4\frac{\partial}{\partial\theta_4}\right) + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \frac{1}{\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\cdots\cdots\cdots\sin^2\theta_{d-3}\sin\theta_{d-2}}\frac{\partial}{\partial\theta_{d-2}}\left(\sin^2\theta_{d-2}\frac{\partial}{\partial\theta_{d-2}}\right) \\ &+ \frac{1}{\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\cdots\cdots\cdots\sin^2\theta_{d-3}\sin^2\theta_{d-2}}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Bigg\} \end{aligned} \tag{2.22}$$

şeklinde elde edilir. (Ek.1)

$d \geq 3$ Boyutlu küresel koordinatlarda yazılmış olan Laplasyen; $d \geq 3$ boyutlu yörüngesel açısal momentum işlemcisinin karesi ile ilişkilidir.

(2.22) denkleminin bilgilerini kullanarak Laplasyen ifadesi yeniden yazılırsa;

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r^{d-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{d-1}\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{{L_d}^2}{\hbar^2 r^2} \tag{2.23}$$

olur. $\left[\widehat{H}, {\vec{L}_d}^2\right] = 0$ ve $\left[{\vec{L}_d}^2, L_j\right] = 0$ olduğundan ortak öz fonksiyonlara sahiptir.

Yazılan Laplasyen ifadesinin özdeğer denkleminde yeniden ifade edersek;

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{1}{r^{d-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{d-1}\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{{L_d}^2}{\hbar^2 r^2}\right) - \frac{ze^2}{r}\right] u(\vec{r}) = E_r u(\vec{r}) \tag{2.24}$$

Değişken ayırma yöntemi gereğince (2.24) dekleminin çözümü;

$u(\vec{r}) = R(\vec{r})\mathcal{Y}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \cdots\cdots\cdots\cdots, \theta_{d-2}, \phi)$ dir. (2.25)

Çözümler Bağıl Hamiltonyen denkleminde yerine yazılır ve denklem düzenlenirse;

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{1}{r^{d-1}}\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{d-1}\frac{\partial R}{\partial r}\right) - \frac{1}{\mathcal{Y}}\frac{{L_d}^2\mathcal{Y}}{\hbar^2 r^2}\right) - \frac{ze^2}{r} - E_r = 0 \tag{2.26}$$

elde edilir.

Böylece öncelikle ${\vec{L}_d}^2$ ‘nin Özdeğerlerini bulalım;

$${L_d}^2\mathcal{Y} = \hbar^2\kappa^2\mathcal{Y} \tag{2.27}$$

$$\mathcal{Y}(\theta_j, \phi) = X_1(\theta_1)X_2(\theta_2)\cdots\cdots\cdots X_{d-2}(\theta_{d-2}), \Phi(\phi)$$

Amacımız $\mathcal{Y}(\theta_j, \phi)$ özfonksiyonlarını bulmak. İlk olarak iki boyutta;

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} = -m^2 \tag{2.28}$$

$$\Phi(\phi) = e^{im\phi}$$

olarak bulunur. Çözümün tek değerli olması için;

$\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$ Şartını sağlamalıdır.

bu da

$m = 0, \pm1, \pm2, \pm3 \ldots$ olmasını sağlar.

Şimdi üç boyutta yörüngesel açısal momentum işlemcisinin karesinin özdeğerleri aranacak;

$$\vec{L_3}^2 Y_{lm}(\theta_1, \phi) = \hbar^2 \kappa^2 Y_{lm}(\theta_1, \phi) \tag{2.29}$$

$Y_{lm}(\theta_1, \phi) = X_1(\theta_1)\Phi(\phi)$ çözüm değişkenlerine ayırma yöntemi gereğince tanımlanır ve denklem düzenlenirse;

$$\frac{1}{sin\theta_1}\frac{1}{X_1(\theta_1)}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(sin\theta_1\frac{\partial X_1(\theta_1)}{\partial\theta_1}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta_1}\frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{\partial^2\Phi(\phi)}{\partial\phi^2} = -\kappa^2$$

$\frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{\partial^2\Phi(\phi)}{\partial\phi^2} = -m^2$ olarak alınır

$$\frac{1}{sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(sin\theta_1\frac{\partial X_1(\theta_1)}{\partial\theta_1}\right) + \left[\kappa^2 - \frac{m^2}{\sin^2\theta_1}\right]X_1(\theta_1) = 0 \tag{2.30}$$

(2.30) denklemi düzenlenirse;

$$\frac{\partial^2 X_1(\theta_1)}{\partial {\theta_1}^2} + \frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1}\frac{\partial X_1(\theta_1)}{\partial\theta_1} + \left[\kappa^2 - \frac{m^2}{\sin^2\theta_1}\right]X_1(\theta_1) = 0 \tag{2.31}$$

$x = \cos\theta_1$ dönüşümü yapılırsa;

Yeni ifade cinsinden (2.31) denklemi tekrar yazılırsa;

$$(1-x^2)\frac{d^2X_1}{dx^2} - 2x\frac{dX_1}{dx} + \left[\kappa^2 - \frac{m^2}{(1-x^2)}\right]X_1 = 0 \tag{2.32}$$

(2.32) denklemini Frobenius seri yöntemi kullanırsak çözüm

$$X_1(x) = \sum_{n=0}^{0} a_n x^{n+s} \quad , a_n \neq 0$$

Şeklinde $x = 0$ düzgün tekil nokta etrafında bir çözüm ararsak, katsayılar arasındaki bağıntıyı veren tekrarlama bağıntısı;

$$(n+4)(n+3)a_{n+4} + [(\kappa^2 - m)^2 - 2(n+2)^2]a_{n+2} + (n(n+1) - \kappa^2)a_n = 0$$

elde edilir. Bu tekrarlama bağıntısı farklı üç terimden oluşmaktadır. İki terimli tekrarlama bağıntısı elde edilmelidir. Buda tanım aralığının uç noktalarındaki davranışı ile belirleriz. (Bayın, 2004)

$m \neq 0$ için $x = 1$ noktasının yakınlarında $y = (1 - x)$ şeklinde değişken tanımlandığında $y \to 0$ iken çözümler $y^{m/2}$ olarak bulunur. $x = -1$ noktası yakınlarında $y = (1 + x)$ şeklinde değişken tanımlarsak $x \to -1$ iken sonuç $y^{m/2}$ olarak bulunur. Bu çözümlerden kullanılarak uç noktalardaki davranışı $(1 - x^2)^{m/2}$ gibi bir ifade elde etmiş oluruz. (Bayın, 2004).

Böylece tanım aralığının uç noktalarındaki davranışa göre çözüm

$$\mathrm{X_1} \sim (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} C \tag{2.33}$$

olarak yazılır ve (2.32) denkleminde yerine yazılacak olursa;

$$(1 - x^2)C'' - C'x(2m + 2) + \{\kappa^2 - m^2 - m\}C = 0 \quad \text{olur.} \tag{2.34}$$

Şimdi (2.34) denklemi çözmek için Frobenius seri yöntemini kullanacağız; $x = 0$ düzgün tekil nokta civarında çözümler arayacağız.

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \qquad , a_n \neq 0$$

(Bell, 1967; Arfken, 1996; Byron ve Fuller, 1970)

(2.34) denklemi yazılan seri ifadeleri cinsinden tekrar yazılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n + r)(n + r - 1)x^{n+r-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n + r)(n + r - 1)x^{n+r}$$
$$- (2m + 2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n + r)x^{n+r} + [\kappa^2 - m^2 - m] \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

toplamalar düzenlenirse;

$$a_0 r(r - 1)x^{r-2} + a_1 (r + 1)rx^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n + r + 2)(n + r + 1)x^{n+r}$$
$$- \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[(n + r)^2 + (2m + 1)(n + r) - [\kappa^2 - m(m + 1)]\right] x^{n+r} = 0 \tag{2.35}$$

Elde edilir. Burada $a_n \neq 0$ dır.

$a_1 r(r + 1) = 0$ ve $a_0 r(r - 1) = 0$ için

İndis köklerini $r = 0$ alalım.($a_0 \neq 0$ dır.) Böylece katsayılar arasındaki ilişki;

$$a_{n+2} = \frac{a_n(m+n)(m+n+1) - \kappa^2}{(n+1)(n+2)} \quad , n \geq 0 \tag{2.36}$$

olur. Katsayılar arasındaki ilişkiyi veren bu tekrarlama bağıntısı; Legendre diferansiyel denkleminden elde edilen katsayılar arasındaki ilişkide de olduğu gibi uç noktalarda seri ıraksak davranır $(x = \pm 1)$.

(Bayın, 2004; Bell, 1967; Arfken, 1996)

Bu durumda düzenli çözüm elde etmek için seri bir yerde kesilmelidir. Seçimi $a_{n+1} = 0$ ve $a_n \neq 0$ olacak şekilde bir kesme işlemi yapılmalıdır.

Bu da;

$(n+m)^2 + (m+n) - \kappa^2 = 0$ ile sağlanır.

$n \geq 0, \qquad m = 0,1,2,3, \ldots \ldots \ldots$

$\kappa^2 = (n+m)^2 + (n+m), \quad (n+m) = N_1 = l$ yazılırsa

$\kappa^2 = l\,(l+1)$olarak bulunur. (2.37)

$N_1 = l = 0,1,2,3, \cdots \cdots$

$m = -l, -l+1, \cdots, 0,1, \cdots, l-1, l$ değerlerini alır.

Ayrıca;

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) \quad \text{olduğundan} \tag{2.38}$$

$Y_{l,m}^*(\theta,\phi) = (-1)^m Y_{l,-m}(\theta,\phi)$ dir.

(Abramowitz, 1964) Böylece;

$$Y_{lm}(\theta_1,\phi) = \left[\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{1/2} P_l^m(cos\theta_1)e^{im\phi} \tag{2.39}$$

(Bell, 1965) dir.

Asosye Legendre polinomları küresel harmoniklerle ilişkili olduğundan 3 boyutlu yörüngesel açısal momentum işlemcisinin karesinin özdeğer ve özfonksiyonları;

$\vec{L}_3^{\,2} Y_{lm}(\theta_1,\phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}(\theta_1,\phi)$ dir. (2.40)

Küresel Harmonikler ile Gegenbauer polinomları arasında doğrudan bir ilişki vardır.

$$Y_{lm}(\theta_1,\phi) = (1-\cos\theta_1{}^2)^{\frac{m}{2}} C_n^{m+\frac{1}{2}}(\cos\theta_1) e^{im\phi} \tag{2.41}$$

şeklinde yazılır. (Bell, 1965)

Tekrar $\vec{L}_4{}^2$ işlemcisine dönelim, dört boyutlu yörüngesel açısal momentum işlemcisinin karesinin özdeğer ve özfonksiyonlarını elde edelim

$$\vec{L}_4{}^2 \mathcal{Y}(\theta_1,\theta_2,\phi) = \hbar^2\kappa^2 \mathcal{Y}(\theta_1,\theta_2,\phi) \tag{2.42}$$

$$\vec{L}_4{}^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin^2\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^2\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right) - \frac{\vec{L}_3{}^2}{\sin^2\theta_1}\right) \tag{2.43}$$

ve

$\mathcal{Y}(\theta_1,\theta_2,\phi)$ yörüngesel açısal momentum işlemcisinin özfonksiyonları

Burada κ^2 özdeğerlerini bulalım;

(2.42) denklemini değişken ayırma yöntemi gereğince çözüm;

$$\mathcal{Y}(\theta_1,\theta_2,\phi) = X_1(\theta_1)Y_{lm}(\theta_2,\phi)$$

$$\frac{1}{\sin^2\theta_1}\frac{1}{X_1(\theta_1)}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^2\theta_1\frac{\partial X_1(\theta_1)}{\partial\theta_1}\right) + \kappa^2 - \frac{1}{Y_{lm}(\theta_2,\phi)}\frac{\vec{L}_3{}^2 Y_{lm}(\theta_2,\phi)}{\sin^2\theta_1} = 0 \tag{2.44}$$

Burada;

$\vec{L}_3{}^2 Y(\theta_2,\phi) = \hbar^2 N_1(N_1+1)Y_{lm}(\theta_2,\phi)$ olarak hesalanmıştı.

Buna göre;

$$\frac{1}{\sin^2\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin\theta_2\frac{\partial X_1(\theta_1)}{\partial\theta_1}\right) + \left[\kappa^2 - \frac{N_1(N_1+1)}{\sin^2\theta_1}\right]X_1(\theta_1) = 0 \tag{2.45}$$

olur.

(2.45) denklemi düzenlenirse;

$$\frac{d^2X_1}{d\theta_1{}^2} + \frac{2\cos\theta_1}{\sin\theta_1}\frac{dX_1}{d\theta_1} + \left[\kappa^2 - \frac{N_1(N_1+1)}{\sin^2\theta_1}\right]X_1 = 0 \tag{2.46}$$

(2.46) denklemi için $x = \cos\theta_1$ dönüşümü yapılırsa;

$$(1-x^2)\frac{d^2X_1}{dx^2} - 3x\frac{dX_1}{dx} + \left[\kappa^2 - \frac{N_1(N_1+1)}{(1-x^2)}\right]X_1 = 0 \qquad (2.47)$$

Uç noktalardaki davranışı göz önüne alınmalı, denklem (2.33) gibi

$\mathrm{X_1} \sim (1-x^2)^{\frac{N_1}{2}} C$ olarak tanımlanır.

(2.47) denklemde düzenlemeler yapılırsa;

$$(1-x^2)C'' - C'x(2N_1+3) + C\{-N_1(N_1+1) - N_1 + \kappa^2\} = 0 \qquad (2.48)$$

(2.48) denklemini çözmek için Frobenius seri yöntemini kullanacağız;

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \quad , \quad a_n \neq 0$$

Bu ifadenin birinci ve ikinci türevleri alınıp (2.48) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r}$$
$$- (2l+3)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r} + [\kappa^2 - l(l+2)]\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

toplamlar düzenlenirse;

$$a_0 r(r-1)x^{r-2} + a_1(r+1)rx^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r+2)(n+r+1)x^{n+r}$$
$$- \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left[(n+r)^2 + (2N_1+2)(n+r) - [\kappa^2 - N_1(N_1+2)]\right]x^{n+r}$$
$$= 0 \qquad (2.49)$$

$$a_0 r(r-1) = 0$$

(2.49) denkleminde $r = 0$, $r = 1$, değerlerini alır ve (2.49) denklemi $r = 0$ için tekrar yazılırsa;

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{(n+N_1)^2 + 2(N_1+n) - \kappa^2}{(n+1)(n+2)} \quad , \quad n \geq 0 \qquad (2.50)$$

(2.50) denkleminin düzenli çözümleri için elde edilen serinin katsayıların davranışı x ne olursa olsun yakınsak davranmalıdır. Bu nedenle (2.50) denklemine yakınsaklık testi uygulanmalıdır. Bunun için Raabe testini göz önüne alalım.

Raabe testi;

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{2n}}{a_{2n+2}}-1\right)=P \tag{2.51}$$

$$P=\begin{cases}P>1\ Yakınsak\\ P<1\ Iraksak\\ P=0\ Bilgi\ yok\end{cases}$$

(Arfken, 1996)

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n+1)(2n+2)}{(2n+N_1)^2+2(2n+N_1)-\kappa^2}-1\right)=\frac{1}{2}-N_1$$

$N_1=0,1,2,3,\dots$

Yeteri kadar büyük n' lerde serinin katsayıları ıraksak davranışgösterir. Bu durumda düzenli çözüm elde edilmesi için seri bir yerde kesilmelidir. Yani $a_0\neq 0$ ve $a_{n+1}=0$

$\kappa^2=N_2\ (N_2+2)$ seçimi kesme işlemini gerçekleştirir.

Burada;

$(n+N_1)=N_2$ dir.

$n=0,1,2,3,\dots$

$N_2=0,1,2,3\cdots\cdots,n\ \ ,\ \ N_1=0,1,2,3,\dots,N_2\quad$ ve $\ m=-N_1,\dots,0,\dots,N_1$

Böylece 4 boyutlu yörüngesel açısal momentum işlemcisinin karesinin özdeğer ve özfonksiyonları;

$$\vec{L_4}^2\mathcal{Y}(\theta_1,\theta_2,\phi)=\hbar^2N_2\ (N_2+2)\mathcal{Y}(\theta_1,\theta_2,\phi)\ \text{dir.} \tag{2.52}$$

$\kappa^2=N_2\ \ (N_2+2)$ seçimi (2.48) denkleminin çözümleri Gegenbauer polinomları yapar.

$$X_1=(1-x^2)^{\frac{N_1}{2}}C_n^{N_1+1}(\cos\theta_1) \tag{2.53}$$

olarak bulunur.

$$\mathcal{Y}(\theta_1,\theta_2,\phi)=X_1(\theta_1)Y(\theta_2,\phi)$$

$$\mathcal{Y}(\theta_1,\theta_2,\phi) = (1-\cos\theta_1{}^2)^{\frac{N_1}{2}} C_n^{N_1+1}(\cos\theta_1) Y_{lm}(\theta_2,\phi) \tag{2.54}$$

dir. (Bell, 1967)

Tekrar $\vec{L}_5{}^2$ beş boyutlu yörüngesel açısal momentum işlemcisinin karesinin özdeğer ve özfonksiyonlarını elde edelim.

$$\vec{L}_5{}^2 \mathcal{Y}(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\phi) = \hbar^2\kappa^2 \mathcal{Y}(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\phi) \tag{2.55}$$

$$\vec{L}_5{}^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin^3\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^3\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right) - \frac{\vec{L}_4{}^2}{\sin^2\theta_1}\right) \tag{2.56}$$

$\mathcal{Y}(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\phi)$ yörüngesel açısal momentumun özfonksiyonları. Burada

$\mathcal{Y}(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\phi) = X_1(\theta_1)X_2(\theta_2)Y_{lm}(\theta_3,\phi)$ değişken ayırma yöntemi gereğince bu şekilde yazılır.

Burada κ^2 özdeğerlerini bulalım;

$$\frac{1}{\sin^3\theta_1}\frac{1}{X_1(\theta_1)}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^3\theta_1\frac{\partial X_1(\theta_1)}{\partial\theta_1}\right) + \kappa^2 - \frac{1}{X_2(\theta_2)Y_{lm}(\theta_3,\phi)}\frac{\vec{L}_4{}^2 X_2(\theta_2)Y_{lm}(\theta_3,\phi)}{\sin^2\theta_1} = 0 \tag{2.57}$$

$\vec{L}_4{}^2 X_2(\theta_2)Y_{lm}(\theta_3,\phi) = \hbar^2 N_2\,(N_2+2)X_2(\theta_2)Y_{lm}(\theta_3,\phi)$ dir.

(2.57) denklemi düzenlenirse;

$$\frac{d^2X_1}{dx^2} + \frac{3\cos\theta_1}{\sin\theta_1}\frac{dX_1}{dx} + \left[\kappa^2 - \frac{N_2(N_2+2)}{\sin^2\theta_1}\right]X_1 = 0 \tag{2.58}$$

$x = \cos\theta_1$ dönüşümü yapılır ve (2.58) denklemi düzenlenirse;

$$(1-x^2)\frac{d^2X_1}{dx^2} - 4x\frac{dX_1}{dx} + \left[\kappa^2 - \frac{N_2(N_2+2)}{(1-x^2)}\right]X_1 = 0 \tag{2.59}$$

Uç noktalardaki davranışı göz önüne alınmalı denklem (2.33) gibi;

$\mathrm{X}_{\mathbf{1}} \sim (1-x^2)^{\frac{N_2}{2}} C$ olarak tanımlanır. (2.59) denkleminde düzenlemeler yapılırsa;

$$(1-x^2)C'' - C'x(2N_2+4) + C\{\kappa^2 - N_2(N_2+3)\} = 0 \tag{2.60}$$

elde edilir.

(2.60) denklemini çözüm yapmak için Frobenius seri yöntemini kullanacağız;

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \quad , \quad a_n \neq 0$$

ifadesinin birinci ve ikinci türevleri alınıp (2.60) denkleminde yerlerine yazılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1)x^{n+r-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1)x^{n+r}$$

$$- (2N_2+4)\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)x^{n+r} + [\kappa^2 - N_2(N_2+3)]\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

toplamlar düzenlenirse;

$$a_0 r(r-1)x^{r-2} + a_1(r+1)rx^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+r+2)(n+r+1)x^{n+r}$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left[(n+r)^2 + (2N_2+2)(n+r) - [\kappa^2 - N_2(N_2+3)]\right]x^{n+r}$$

$$= 0 \qquad (2.61)$$

$a_0 r(r-1) = 0$, burada $a_0 \neq 0$ dır.

(2.61) denkleminde $r = 0$, $r = 1$ değerlerini alır ve indis kökleri $r = 0$ alınır;

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{(n+N_2)^2 + n(3N_2+3) - \kappa^2}{(n+1)(n+2)} \quad , \qquad n \geq 0 \qquad (2.62)$$

(2.62) ifade için Raabe's test uygulanırsa ıraksak sonuç verir ve düzenli sonlu çözüm elde edilmesi için seri bir yerde kesilmelidir. Yani $a_n \neq 0$ ve $a_{n+1} = 0$ şeklinde;

$\kappa^2 = N_3\,(N_3+3)$ seçimi kesme işlemini gerçekleştirir.

Burada;

$(n+N_2) = N_3$ yazılırsa

$n = 0,1,2,3,\ldots$

$N_3 = 0,1,2,3 \cdots \cdots, n$

$N_2 = 0,1,2,3,\ldots,N_3 \quad , \quad N_1 = 0,1,2,3,\ldots,N_2$ ve $m = -N_1,\ldots,0,\ldots N_1$

Böylece 5 boyutlu yörüngesel açısal momentum işlemcisinin karesinin özdeğer ve özfonksiyonları;

$$\vec{L}_5{}^2 \mathcal{Y}(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\phi) = \hbar^2 N_3\,(N_3+3)\mathcal{Y}(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\phi)$$

$\kappa^2 = N_2\ (N_2+2)$ seçimi (2.60) denkleminin çözümleri Gegenbauer polinomları yapar.

$$X_1 = (1-\cos\theta_1{}^2)^{\frac{N_2}{2}} C_n^{N_2+\frac{3}{2}}(\cos\theta_1) \tag{2.63}$$

olarak bulunur.

$$\mathcal{Y}(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\phi) = (1-\cos\theta_1{}^2)^{\frac{N_2}{2}} C_n^{N_2+\frac{3}{2}} (1-\cos\theta_2{}^2)^{\frac{N_1}{2}} C_n^{N_2+1}(\cos\theta_2) Y_{lm}(\theta_3,\phi)$$

dir. (Bell, 1967)

Böylece d boyutta tanımlayacak olursak benzer şekilde analiz edildiğinde sağ taraftaki özdeğerleri verir.

$$\frac{1}{X_{d-2}}\frac{1}{\sin\theta_{d-2}}\frac{\partial}{\partial\theta_{d-2}}\left(\sin\theta_{d-2}\frac{\partial X_{d-2}}{\partial\theta_{d-2}}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta_{d-2}} = -N_1(N_1+1)$$

$$\frac{1}{X_{d-3}}\frac{1}{\sin^2\theta_{d-3}}\frac{\partial}{\partial\theta_{d-3}}\left(\sin^2\theta_{d-3}\frac{\partial X_{d-3}}{\partial\theta_{d-3}}\right) - \frac{N_1(N_1+1)}{\sin^2\theta_{d-3}} = -N_2(N_2+2)$$

$$\frac{1}{X_{d-4}}\frac{1}{\sin^3\theta_{d-4}}\frac{\partial}{\partial\theta_{d-4}}\left(\sin^3\theta_{d-4}\frac{\partial X_{d-4}}{\partial\theta_{d-4}}\right) - \frac{N_2(N_2+2)}{\sin^2\theta_{d-4}} = -N_3(N_3+3)$$

$$\frac{1}{X_{d-5}}\frac{1}{\sin^4\theta_{d-5}}\frac{\partial}{\partial\theta_{d-5}}\left(\sin^4\theta_{d-5}\frac{\partial X_{d-5}}{\partial\theta_{d-5}}\right) - \frac{N_3(N_3+2)}{\sin^2\theta_{d-5}} = -N_4(N_4+4)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{1}{X_2}\frac{1}{\sin^{d-3}\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin^{d-3}\theta_2\frac{\partial X_2}{\partial\theta_2}\right) - \frac{N_{d-4}(N_{d-4}+d-4)}{\sin^2\theta_2} = -N_{d-3}(N_{d-3}+d-3)$$

$$\frac{1}{X_1}\frac{1}{\sin^{d-2}\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^{d-2}\theta_1\frac{\partial X_1}{\partial\theta_2}\right) - \frac{N_{d-3}(N_{d-3}+d-3)}{\sin^2\theta_2} = -N_{d-2}(N_{d-2}+d-2) \tag{2.64}$$

Bulunan sonuçlara göre bir genelleştirme yapılırsa; d boyutlu yörüngesel açısal momentum işlemcisinin karesinin özdeğer denklemi

$$\vec{L}_d{}^2 \mathcal{Y}(\theta_j,\phi) = \hbar^2 N_{d-2}\big(N_{d-2}+(d-2)\big)\mathcal{Y}(\theta_j,\phi) \quad \text{dir.} \tag{2.65}$$

Çözümler sonucu (2.65) şekilde bir genelleştirme yapılır. Ayrıca;

$$\mathcal{Y}(\theta_j,\phi) = X_1(\theta_1)X_2(\theta_2)\cdots\cdots\cdots X_{d-2}(\theta_{d-2}),\Phi(\phi) \tag{2.66}$$

olarak tanımlanan. (2.66) denkleminin çözümü;

$$\mathcal{Y}(\theta_j,\phi) = \bar{\bar{N}}\prod_{k=1}^{d-2}\left(1-\cos\theta_j{}^2\right)^{\frac{N_k}{2}} C_n^{N_{d-2}+\frac{d-2}{2}}(\cos\theta_j)\, e^{im\phi} \tag{2.67}$$

Burada;

$m = -N_1,\cdots\cdots\cdots,N_1$

$N_1 = 0,1,2,3,\cdots\cdots,N_2$

$N_2 = 0,1,2,3,\cdots\cdots,N_3$

$N_{d-2} = 0,1,2,3,\ldots\ldots,N_{d-1}$ dir.

$\mathcal{Y}(\theta_j,\phi)$ ortanormal fonksiyonlar için $(\bar{\bar{N}})$ hesaplayalım;

$$\mathcal{Y}(\theta_j,\phi) = X_1(\theta_1)X_2(\theta_2)\cdots\cdots\cdots X_{d-3}(\theta_{d-3}),Y\left(\theta_{d-2,}\phi\right)$$

$$\bar{\bar{N}}^2\int_0^\pi\int_0^\pi\ldots\int_0^\pi \mathcal{Y}(\theta_j,\phi)^*\mathcal{Y}(\theta_j,\phi)\sin^{d-2}\theta_1\sin^{d-3}\theta_2\ldots d\theta_j d\phi = 1$$

Yukarıda yazılan denklem

$x = cos\theta_j$ Dönüşümü yapılırsa İntegral Gegenbauer integraline benzer

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}C_n^\lambda(x)C_m^\lambda(x)dx = 2^{1-2\lambda}\pi\frac{\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(n+1)\{\Gamma(\lambda)\}^2(n+\lambda)} \tag{ek. 3.33}$$

Buna göre;

$$\bar{\bar{N}} = \sqrt{\frac{2^{2N_{d-3}+(d-3)}}{\pi}\frac{n!\left\{\left(N_{d-3}+\frac{(d-4)}{2}\right)!\right\}^2(n+N_{d-3}+\frac{(d-2)}{2})}{(n+2N_{d-3}+(d-3))!}} \text{ dir.} \tag{2.68}$$

Bulunan sonuçlar (2.26) denkleminde istenilen boyutlar için çözüm yaparken ${L_d}^2\mathcal{Y}$ yerine bilinen değeri konularak özdeğer ve özfonksiyonları bulmamıza yardımcı olur. Çünkü $\left[\hat{H},\vec{L_d}^2\right] = 0$ (Merzbacher, 1970) sıra değiştirme bağıntısını sağlarlar.

$L_d{}^2\mathcal{Y} = \kappa^2\hbar^2\mathcal{Y}$, $\kappa^2 = N_{d-2}(N_{d-2}+d-2)$ (2.65) denklemi

Açısal değişkenlerden gelen sonuçları göz önüne alarak radyal denklemi düzenleyelim;

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{(d-1)}{r}\frac{dR}{dr}+\left[\frac{2\mu ze^2}{\hbar^2 r}-\frac{2\mu|E|}{\hbar^2}-\frac{N_{d-2}(N_{d-2}+d-2)}{r^2}\right]R(r)=0 \qquad (2.69)$$

Bağıl Hamiltondan gelen Radyal denklem

Denklemin çözümlerini tartışalım. $\rho = \beta r$ boyutsuz değişken tanımlayalım. Burada boyutsuz değişken $(0<\rho<\infty)$dir. (2.68) denklemi yeni boyutsuz değişkene göre yeniden yazılırsa;

$$\frac{d^2R(\rho)}{d\rho^2}+\frac{(d-1)}{\rho}\frac{dR(\rho)}{d\rho}+\left[\frac{\lambda}{\rho}-\frac{N_{d-2}(N_{d-2}+d-2)}{\rho^2}-\frac{1}{4}\right]R(\rho)=0 \qquad (2.70)$$

Burada;

$$\frac{2\mu|E|}{\hbar^2\beta^2}=\frac{1}{4} \qquad (2.71)$$

$$\lambda=\frac{2ze^2\mu}{\hbar^2\beta}\ ,\qquad \lambda = z\propto\sqrt{\frac{\mu c^2}{2|E|}} \qquad (2.72)$$

($\propto$: İnce yapı sabiti)

Bağıl Hamiltonyenin ürettiği radyal denkleminin iki asimptotik çözümü vardır. Sırası ile biz $\rho\to\infty$ ve $\rho\to 0$ için olan çözümleri inceleyeceğiz;

1) $\rho\to\infty$ olan asimptotik çözümü veren denklem;

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2}-\frac{1}{4}\right)R_\infty(\rho)=0 \text{ dir.} \qquad (2.73)$$

$R_\infty(\rho)=Ae^{-\frac{\rho}{2}}+Be^{\frac{\rho}{2}}$ dir.

$B=0$ olmalıdır. Çünkü $\rho\to\infty$ iken çözüm sonlu olmalıdır.

$R_\infty(\rho)\sim e^{-\frac{\rho}{2}}$

Burada $R_\infty(\rho)=R(\rho\to\infty)$ dir.

2) $\rho \to 0$ olan asimptotik çözümü veren denklem;

$$\left(\frac{d^2R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{(d-1)}{\rho}\frac{dR(\rho)}{d\rho} - \frac{N_{d-2}(N_{d-2}+d-2)}{\rho^2}\right)R(\rho) = 0 \qquad (2.74)$$

(2.74) denklemi eşit boyutlu diferansiyel denklem olduğundan;

$$R_0(\rho) = A\rho^{N_{d-2}} + B\frac{1}{\rho^{(N_{d-2}+(d-2))}}$$

elde edilir. $B = 0$ olarak alınır. Çünkü çözüm $\rho \to 0$ da sonlu kalmalıdır

$$R_0(\rho) \sim \rho^{N_{d-2}}$$

Burada $R_0(\rho) = R(\rho \to 0)$ dir.

Böylece asimptotik çözümler ile bulunan radyal kısımdan gelen çözümler

$$R(\rho) = e^{-\rho/2}\rho^{N_{d-2}}L(\rho) \qquad (2.75)$$

Burada $L(\rho)$ nun sağladığı diferansiyel denklem;

$$e^{-\rho/2}\rho^{N_{d-2}}\left\{\frac{d^2L(\rho)}{d\rho^2} + \frac{dL(\rho)}{d\rho}\left(\frac{(d-1)+2N_{d-2}-\rho}{\rho}\right) + L(\rho)\left(\frac{\lambda}{\rho} - \frac{N_{d-2}}{\rho} - \frac{(d-1)}{2\rho}\right)\right\} = 0$$

Denklem ρ ile çarpılırsa;

$$\rho\frac{d^2L(\rho)}{d\rho^2} + ((d-1)+2N_{d-2}-\rho)\frac{dL(\rho)}{d\rho} + L(\rho)\left(\lambda - N_{d-2} - \frac{(d-1)}{2}\right) = 0 \qquad (2.76)$$

(2.76) bağıl Hamiltonyenden gelen radyal denklemin düzenlenmiş hali. Bu denklem Frobenius seri yöntemi ile çözülür.

$$L(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^{n+s}, \quad a_n \neq 0$$

Birinci ve ikinci türevleri alınıp (2.76) denkleminde yerine yazılırsa;

$$a_0 s(s+2N_{d-2}+(d-2))\rho^{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1}(n+1+s)(n+s+(d-1)+2N_{d-2}) + a_n\left(\lambda - N_{d-2} - \frac{(d-1)}{2} - n - s\right))\rho^{n+s} = 0 \qquad (2.77)$$

(2.77) denkleminde indis kökleri $s = 0$, $s = -2N_{d-2} - (d-2)$ değerlerini alır. (2.77) denklemi sonlu çözüm bulmak için $s = 0$ alınır.

$$a_{n+2} = \frac{-\left(\lambda - N_{d-2} - \frac{(d-1)}{2} - n\right)}{(n+1)(n+2N_{d-2}+(d-1))} a_n \ , n \geq 0 \qquad (2.78)$$

Yeteri kadar büyük n′lerde katsayıların davranışı $\frac{a_{n+2}}{a_n} \rightarrow \frac{1}{n+1}$ şeklindedir.

Hangi fonksiyon $\frac{1}{n+1}$ gibi davranır?

$$e^{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} \quad , b_n = \frac{1}{n!}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{n+1}$$

Çok büyük n′lerde (2.78) denkleminin çözümü e^{ρ} gibidir. Buna göre;

$$R(\rho) = e^{-\rho/2} \rho^{N_{d-2}} e^{\rho} \qquad (2.79)$$

Böylece (2.79) denkleminde $R(\rho)$ çözümü $\rho \rightarrow \infty$ da ıraksaktır. Yeteri kadar büyük n'lerde çözüm olabilmesi için seri bir yerde kesilir. Yani $a_n \neq 0$ ve $a_{n+1} = 0$

$$\lambda - N_{d-2} - \frac{(d-1)}{2} - n = 0$$

Seçimi yapılırsa kesme işlemi gerçekleşir. (2.72) denkleminde λ ifadesi kullanılarak.

$$E_r = -\frac{z^2 \propto^2 \mu c^2}{2\left(n + \frac{(d-1)}{2}\right)^2} \qquad (2.80)$$

$d \geq 3$ için, (2.80) ifadesi yüksek boyutlarda Enerji özdeğeri elde edilir. Burada;

$$k = \lambda - \frac{(d-1)}{2} = N_{d-2} + n$$

$$\lambda = k + \frac{(d-1)}{2}$$

(sonunda $k = n = 0,1,2,3, \cdots\cdots\cdots$ olarak alınırsa)

$N_{d-2} = 0,1,2,3, \cdots\cdots, k$ dir.

Ayrıca; $d = 2$ için

İki boyutlu sistemde Hidrojen benzeri atomun enerji özdeğeri;

$$E_r = -\frac{z^2 \propto^2 \mu c^2}{2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \tag{2.81}$$

$n = 0,1,2,3, \ldots$ dir.

$$k = \lambda - \frac{(d-1)}{2} = N_{d-2} + n$$

Seçimi bize çözümleri polinom yapar. Bu durumda (2.76) denkleminin çözümü;

$$L_m^p(x) \rightarrow L_{n-N_{d-2}}^{(d-2)+2N_{d-2}}$$

olarak yazılır. Burada $L_m^p(x)$ Asosye Laguerre polinomlarıdır.

Böylece;

$$u_{\bar{\lambda}}(\rho, \theta_j, \phi) = N_{n,N_{d-2}} e^{-\rho/2} \rho^{N_{d-2}} L_{n-N_{d-2}}^{2N_{d-2}+(d-2)}(\rho)$$

$$\prod_{k=1}^{d-2}\left(1-\cos\theta_j{}^2\right)^{N_k/2} C_n^{N_k+\frac{(k+1)}{2}}(\cos\theta_j)\, e^{im\phi} \tag{2.82}$$

Burada;

$\bar{\lambda} = n, N_1, N_2, N_3, \ldots, N_{d-2}, m$ dir.

Şimdi boylandırma sabiti hesaplayalım;

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\cdots\cdots\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} u_{\bar{\lambda}}{}^*(\rho, \theta_j, \phi) u_{\bar{\lambda}}(\rho, \theta_j, \phi) d^d r = 1 \quad \text{olmalı} \tag{2.83}$$

Burada;

$d^d r = r^{d-1} \sin^{d-2}\theta_1 \sin^{d-3}\theta_2 \ldots\ldots dr d\theta_j d\phi$ dir.

(2.82) denklemini (2.83) de yerleştirilirse;

$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\dots\int_0^{\pi} \mathcal{Y}(\theta_j,\phi)^{*}\mathcal{Y}(\theta_j,\phi)\sin^{d-2}\theta_1\sin^{d-3}\theta_2\dots d\theta_j d\phi = 1$ olduğundan

$\left|N_{n,N_{d-2}}\right|^2\int_0^{\infty} e^{-2\rho}\rho^{2N_{d-2}}\left\{L_{n-N_{d-2}}^{2N_{d-2}+(d-2)}\right\}^2 r^{d-1}dr = 1$ olur.

$\rho = \beta r,\ \ dr = \frac{1}{\beta}d\rho$, boyutsuz değişkenlere göre denklem tekrar yazılırsa;

$$\frac{\left|N_{nN_{d-2}}\right|^2}{\beta^d}\int_0^{\infty} e^{-2\rho}\rho^{2N_{d-2}+(d-1)}\left\{L_{n-N_{d-2}}^{(d-2)+2N_{d-2}}\right\}^2 d\rho = 1 \qquad (2.84)$$

(2.84) Radyal değişkenlerden gelen çözümün boylandırma sabiti;

$$N_{nN_{d-2}} = \sqrt{\frac{\beta^d(n-N_{d-2})!}{(n+N_{d-2}+(d-2))!\left(2n+(d-1)\right)}} \qquad (2.85)$$

elde edilir. burada;

$$\int_0^{\infty} e^{-x}x^{k+1}L_m^k(x)L_m^k(x)dx = \frac{(m+k)!}{m!}(2m+k+1) \qquad (\text{ek. } 3.40)$$

(Bell, 1967). İntegrali kullanılmıştır.

Özfonksiyon bu şekilde yazılır.

Bulunan boylandırma ifadeleri (2.82) denklemde yerine yazılırsa;

$$u_{\bar{\lambda}}(\rho,\theta_j,\phi) = \sqrt{\frac{\beta^d(n-N_{d-2})!}{\left(n+N_{d-2}+(d-2)\right)!\left(2n+(d-1)\right)}}\,e^{-\rho/2}\rho^{N_{d-2}}L_{n-N_{d-2}}^{2N_{d-2}+(d-2)}(\rho)$$

$$\sqrt{\frac{2^{2N_{d-3}+(d-3)}}{\pi}\frac{n!\left\{\left(N_{d-3}+\frac{(d-4)}{2}\right)!\right\}^2\left(n+N_{d-3}+\frac{(d-2)}{2}\right)}{(n+2N_{d-3}+(d-3))!}}$$

$$\prod_{k=1}^{d-2}\left(1-\cos\theta_j{}^2\right)^{N_k/2}C_n^{N_k+\frac{(k+1)}{2}}(\cos\theta_j)\,e^{im\phi} \qquad (2.86)$$

$d \geq 3$ için özfonksiyonlar (2.86) olarak bulunur.

$d = 2$ için özfonksiyon;

$$u_{n,m} = \sqrt{\frac{\beta(n-|m|!)}{(n+|m|!)}} e^{-\rho/2} \rho^m L_{n-|m|}^{2m}(\rho) e^{im\phi} \tag{2.87}$$

Ayrıca enerji özdeğeri; $d \geq 3$ için

$$E_r = -\frac{z^2 \propto^2 \mu c^2}{2\left(n + \frac{(d-1)}{2}\right)^2}$$

$n = 0,1,2,3, \ldots$

$N_{d-2} = 0,1,2,3, \ldots \ldots, N_{d-1}$

$N_{d-3} = 0,1,2,3, \ldots \ldots, N_{d-2}$

$\vdots$

$N_2 = 0,1,2,3, \cdots\cdots, N_3$

$N_1 = 0,1,2,3, \cdots\cdots, N_2$

$m = -N_1, \cdots\cdots\cdots, N_1$ dir.

Şimdi hidrojen benzeri atom için dejenere durumlar inceleyelim $d = 3,4$ boyutlar için incelenir ve genelleştirilirse;

İlk olarak üç boyut için dejenere durumlar;

$n = 0,1,2,3, \ldots.\ , l = 0,1,2, \ldots, n$ ve $m = -l, \ldots, 0, \ldots, l$

$$g_n(3) = \sum_{l=0}^{n} \sum_{m=-l}^{l} 1 \tag{2.88}$$

$g_n(3)$ dejenere durum sayısı

Burada;

$$g_n(3) = \sum_{l=0}^{n} (2l+1) \tag{2.89}$$

Sonuç olarak; $(n+1)^2$ tane dejenere durum vardır. ($n = 0,1,2,3, \ldots$)

Dört boyut için dejenere durum sayısı hesaplanırsa;

$n = 0,1,2,3, \ldots.$

$N_2 = 0,1,2, \ldots, n$

$N_1 = l = 0,1,2, \ldots, N_2$

$m = -l, \ldots, 0, \ldots, l$

$$g_n(4) = \sum_{N_2}^{n} \sum_{l=0}^{N_2} \sum_{m=-l}^{l} 1 \tag{2.90}$$

İşlemler yapıldığı zaman dejenere durum sayısını veren ifade;

$$g_n(4) = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \tag{2.91}$$

Tane dejenere durum vardır.

Şimdi d boyutlu sistem için dejenere durum sayısını veren ifade hesaplanırsa;

$n = 0,1,2,3, \ldots$

$N_{d-2} = 0,1,2,3, \ldots \ldots, N_{d-1}$

$N_{d-3} = 0,1,2,3, \ldots \ldots, N_{d-2}$

$\vdots$

$N_2 = 0,1,2,3, \cdots \cdots, N_3$

$N_1 = 0,1,2,3, \cdots \cdots, N_2$

$m = -N_1, \cdots \cdots \cdots, N_1$ dir.

Burada;

$$g_n(d) = \sum_{N_1=0}^{n} \sum_{N_2}^{N_1} \ldots \sum_{l=0}^{N_{d-3}} \sum_{m=-l}^{l} 1 \tag{2.92}$$

İşlemler yapıldığında dejenere durumların ifadesi baş kuantum sayısı n'e bağlı olarak ifade edilir.

$$g_n(d) = 2\left[n + \frac{(d-1)}{2}\right]\left[\frac{(n+d-2)!}{(d-1)!\,n!}\right] \tag{2.93}$$

olarak bulunur. ($n = 0,1,2,3, \dots$)

(Özcan, 2006)

Enerji özdeğerlerinden hareketle elektronun beklenen yarıçapını $d \geq 3$ boyutlar için göz önüne aldığımızda

Üç boyutta;

$$\langle r \rangle = \int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} U^* r U\, r^2 dr d\theta d\phi \tag{2.94}$$

$$\langle r \rangle = \frac{1}{\beta}\frac{(n-l-1)!}{(2n)(n+l)!}\int_0^{\infty} e^{-\rho}\rho^{2l+1+2}\left\{L_{n-l}^{2l+1}(\rho)\right\}^2 d\rho \tag{2.95}$$

(2.95) denklemindeki integral çözümünü (ek.3.44) kısmında gösterdiğimiz Asossiye Laguerre polinomunun diklik bağıntısına benzemektedir.

$$\int_0^{\infty} e^{-x}x^k[xL_m^k(x)][xL_m^k(x)]dx$$

$$= [6(n^2 + nk + n] + (k+1)(k+2)]\frac{(n+k)!}{n!} \tag{ek. 3.44}$$

$(\beta = 2\kappa)$ ve $(2\kappa = 2z/a_0(n+1))$ olarak alınırsa;

$$\langle r \rangle = \frac{3(n+1)}{2\kappa}\left[1 - \frac{l(l+1)}{3(n+1)^2}\right] \tag{2.96}$$

Olarak bulunur.

Burada;

$n = 0,1,2,3, \dots$.

$l = 0,1,2, \dots, n$

$m = -l, -l+1, \dots, -1,0,1, \dots, l-1, l$

n	**l**	$\langle r \rangle_{nl}$
0	0	$3a_0/2$
1	0	$3a_0$
1	1	$5a_0/2$
2	0	$9a_0/2$
2	1	$25a_0/6$
2	2	$7a_0/2$
3	0	$6a_0$
3	1	$23a_0/4$
3	2	$21a_0/4$
3	3	$9a_0/2$

(Çizelge 2 -1, 3 boyutta hidrojen benzeri atom modelinin beklenen değerleri)

Dört boyut için beklenen değer hesabı (ek.4) de yapıldığında;

$$\langle r \rangle_{nN_1N_2m} = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u^* r u r^3 \sin^2\theta_1 \sin\theta_2 \, dr d\theta_1 d\theta_2 d\Phi \tag{2.97}$$

$$u = \sqrt{\frac{\beta^4 (n-N_2)!}{(2n+3)(n+N_2+2)!}}\; e^{-\rho/2} \rho^{N_2} L_{n-N_2}^{2N_2+2} Y(\theta_1, \theta_2, \Phi)$$

(2.98) denkleminde u yerine yazılıp denklem düzenlenirse;

$$\langle r \rangle_{nN_1N_2m} = \frac{1}{\beta} \frac{(n-N_2)!}{(2n+3)(n+N_2+2)!} \int_0^{\infty} e^{-\rho} \rho^{2N_2+4} \left\{ L_{n-N_2}^{2N_2+2} \right\}^2 d\rho \tag{2.98}$$

(2.98) denklemi çözümü bilinen (ek.3.44) denklemi ile aynı formdadır buna göre;

$n = n - N_2, \quad k = 2N_3 + 2$ ve $\beta = 2\kappa$ olarak alınırsa;

$$\langle r \rangle_{nN_1N_2m} = \frac{3(n+1)^2}{2\kappa} \frac{1}{(2n+5)} \left[1 - \frac{N_2(N_2+2)}{3(n+1)^2} + \frac{(3n+5)}{(n+1)^2} \right] \tag{2.99}$$

Burada;

$n = 0,1,2,3, \ldots.$

$N_2 = 0,1,2,\dots,n$

$N_1 = 0,1,2,\dots,N_2$

$m = -N_1,\dots,0,\dots,N_1$

değerlerini alır.

n	N_2	$\langle r\rangle_{nN_1N_2m}$
0	0	$9a_0/5$
1	0	$18a_0/7$
1	1	$39a_0/14$
2	0	$10a_0/3$
2	1	$19a_0/6$
2	2	$3a_0$
3	0	$45a_0/11$
3	1	$87a_0/22$
3	2	$41a_0/11$
3	3	$75a_0/22$

Çizelge 2-2. 4 boyutta hidrojen benzeri atom modelinin beklenen değerleri)

Beş boyut için beklenen değer hesabı;

$$\langle r\rangle_{nN_1N_2N_3m} = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u^* r u\, r^4 \sin^3\theta_1 \sin^2\theta_2 \sin\theta_3\, dr d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\Phi \quad (2.100)$$

(2.100) denkleminde u yerine yazılıp denklem düzenlenirse;

$$\langle r\rangle_{nN_1N_2N_3m} = \frac{1}{\beta}\frac{(n-N_3)!}{(2n+4)(n+N_3+3)!}\int_0^{\infty} e^{-\rho}\rho^{2N_3+5}\left\{L_{n-N_3}^{2N_3+3}\right\}^2 d\rho \quad (2.101)$$

(2.101) denklemi çözümü bilinen (ek.3.44) denklemi ile aynı formdadır buna göre;

$n = n - N_3$, $k = 2N_3 + 3$ ve $\beta = 2\kappa$ olarak alınırsa;

$$\langle r\rangle_{nN_1N_2N_3m} = \frac{3(n+1)^2}{2\kappa}\frac{1}{(n+3)}\left[1 - \frac{N_3(N_3+3)}{3(n+1)^2} + \frac{(12n+20)}{3(n+1)^2}\right] \quad (2.102)$$

$n = 0,1,2,3, \ldots.$

$N_3 = ,1,2, \ldots, n$

$N_2 = 0,1,2, \ldots, N_3$

$N_1 = 0,1,2, \ldots, N_2$

$m = -N_1, \ldots, 0, \ldots, N_1$

n	N_3	$\langle r \rangle_{nN_1N_2N_3m}$
0	0	$25a_0/6$
1	0	$23a_0/4$
1	1	$21a_0/4$
2	0	$73a_0/10$
2	1	$69a_0/10$
2	2	$63a_0/10$
3	0	$53a_0/6$
3	1	$51a_0/6$
3	2	$8a_0$
3	3	$22a_0/3$

(çizelge 2-3, 5 Boyutta hidrojen benzeri atom modelinin beklenen değerleri.)

Altı boyut için beklenen değer hesabı;

$$\langle r \rangle_{nN_1N_2N_3N_4m}$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} u^* r u \, r^5 \sin^4\theta_1 \sin^3\theta_2 \sin^2\theta_3 \sin\theta_4 \, dr d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4 d\phi$$

$$\langle r \rangle_{nN_1N_2N_3N_4m} = \frac{1}{(2n+5)\beta} \frac{(n-N_4)!}{(n+N_4+4)!} \int_0^{\infty} e^{-\rho} \rho^{2N_3+6} \left\{ L_{n-N_4}^{2N_4+4} \right\}^2 d\rho \qquad (2.103)$$

$$\langle r \rangle_{nN_1N_2N_3N_4m} = \frac{3(n+1)^2}{\kappa} \frac{1}{(2n+7)} \left[1 - \frac{N_4(N_4+4)}{3(n+1)^2} + \frac{5(n+6)}{(n+1)^2} \right] \qquad (2.104)$$

olarak bulunur. Burada;

$n = 0,1,2,3, \ldots.$

$N_4 = 0,1,2,\dots,n$

$N_3 = 0,1,2,\dots,N_4$

$N_2 = 0,1,2,\dots,N_3$

$N_1 = 0,1,2,\dots,N_2$

$m = -N_1,\dots,0,\dots,N_1$

n	N_4	$\langle r\rangle_{nN_1N_2N_3N_4m}$
0	0	$33a_0/7$
1	0	$19a_0/3$
1	1	$52a_0/9$
2	0	$87a_0/11$
2	1	$82a_0/11$
2	2	$75a_0/11$
3	0	$123a_0/13$
3	1	$118a_0/13$
3	2	$111a_0/13$
3	3	$102a_0/13$

(Çizelge 2-4, 6 Boyutta hidrojen benzeri atom modelinin beklenen değerleri.)

Yedi boyut için beklenen değer hesabı (ek.4) de yapıldığında;

$$\langle r\rangle_{nN_1N_2N_3N_4N_5m} = \int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} u^* r\, u\, r^6 \sin^5\theta_1 \sin^4\theta_2 \sin^3\theta_3 \sin^2\theta_4 \sin\theta_5\, dr\, d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4 d\theta_5 d\phi$$

Yukarıdaki denklem düzenlenirse;

$$\langle r\rangle_{nN_1N_2N_3N_4N_5m} = \frac{1}{(n+3)\beta}\frac{(n-N_5)!}{(n+N_5+5)!}\int_0^{\infty} e^{-\rho}\rho^{2N_3+7}\left\{L_{n-N_5}^{2N_5+5}\right\}^2 d\rho \qquad (2.105)$$

$$\langle r\rangle_{nN_1N_2N_3N_4N_5m} = \frac{3(n+1)^2}{2\kappa}\frac{1}{(n+4)}\left[1-\frac{N_5(N_5+5)}{3(n+1)^2}+\frac{(6n+13)}{(n+1)^2}\right] \quad (2.106)$$

olarak bulunur. Burada;

$n = 0,1,2,3, \ldots$.

$N_5 = 0,1,2,\ldots,n$, $N_4 = 0,1,2,\ldots,N_5$, $N_3 = 0,1,2,\ldots,N_4$, $N_2 = 0,1,2,\ldots,N_3$

$N_1 = 0,1,2,\ldots,N_2$, $m = -N_1,\ldots,0,\ldots,N_1$ dır.

n	N_5	$\langle r\rangle_{nN_1N_2N_3N_4N_5m}$
0	0	$21a_0/4$
1	0	$69a_0/10$
1	1	$63a_0/10$
2	0	$17a_0/2$
2	1	$8a_0$
2	2	$35a_0/2$
3	0	$141a_0/14$
3	1	$135a_0/14$
3	2	$127a_0/14$
3	3	$29a_0/7$

(Çizelge 2-5, 7 Boyutta hidrojen benzeri atom modelinin beklenen değerleri.)

BÖLÜM 3

3. PARABOLİK KOORDİNATLARDA $d(d \geq 2)$ BOYUTLU HİDROJEN BENZERİ ATOM MODELİNİN ÖZDEĞER VE ÖZFONKSİYONLARI

Bu kısımda parabolik koordinatlarda $d(d \geq 2)$ boyutlu Hidrojen benzeri atomun enerji özdeğer ve özfonksiyonlarını yeniden elde edeceğiz.

Kütle merkezinden gelen Hamiltonyen denkleminin çözümü aynı olduğundan. Elektronun Coulomb çekim kuvvetine göre dinamiğini tanımlayan bağıl Hamiltonyen denklemini göz önüne alacağız.

$$H_r u(\vec{r}) = E_r u(\vec{r}) \tag{3.1}$$

(3.1) denkleminin açık şekilde yazılmış hali;

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\vec{\nabla}_r{}^2 - \frac{ze^2}{r}\right] u(\vec{r}) = E_r u(\vec{r}) \tag{3.2}$$

Burada $\vec{\nabla}_r{}^2$ Laplasyen ifadesini Parabolik koordinatlarda $d(d \geq 2)$ boyutlarda yazılmalı. Bunun için öncelikle $d(d \geq 2)$boyutlarda parabolik koordinatları tanımlamalıyız.

$$\tau^2 = r(1 - \cos\theta_1)$$

$$\sigma^2 = r(1 + \cos\theta_1)$$

$$r\cos\theta_1 = \frac{1}{2}(\sigma^2 - \tau^2)$$

$$\sigma\tau = r\sin\theta_1$$

d boyutlu parabolik koordinatlar Kartezyen koordinatlar cinsinden genelleştirilirse;

$x_1 = \sigma\tau \sin\theta_2 \sin\theta_3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \sin\theta_{d-3} \cos\phi$

$x_2 = \sigma\tau \sin\theta_2 \sin\theta_3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \sin\theta_{d-3} \cos\phi$

$x_3 = \sigma\tau \sin\theta_2 \sin\theta_3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \cos\theta_{d-3}$

$x_4 = \sigma\tau \sin\theta_2 \sin\theta_3 \cdots\cdots\cdots\cdots \cos\theta_{d-4}$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$x_{d-2} = \sigma\tau \sin\theta_2 \cos\theta_3$

$x_{d-1} = \sigma\tau \cos\theta_2$

$x_d = \frac{1}{2}(\sigma^2 - \tau^2)$

(Arfken, 1996)

$\theta_j \in [0, \pi]$

$\phi \in [0, 2\pi]$

$0 < \sigma < \infty$

$0 < \tau < \infty$

Ayrıca;

$u(\vec{r}) = u(x_j)$

$u(x_j) = u(\sigma, \tau, \theta_j, \phi)$

$j = 1,2,3, \ldots \ldots \ldots$ d-3 olarak yazılır.

Bu ifadelere göre (3.2) denklemi tekrar yazılırsa;

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\vec{\nabla}_r^{\,2} - \frac{2ze^2}{(\sigma^2+\tau^2)}\right] u(\vec{r}) = E_r u(\vec{r}) \qquad (3.3)$$

şeklinde yazılır.

(Ek.2) de parabolik koordinatlarda hesaplanan d boyutlu Laplasyen ifadesi;

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{\sigma^2+\tau^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}+\frac{d-2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}+\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+\frac{d-2}{\tau}\frac{\partial}{\partial\tau}\right)$$
$$+\frac{1}{\sigma^2\tau^2}\left\{\frac{1}{\sin^{d-3}\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^{d-3}\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta_1\sin^{d-4}\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin^{d-4}\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right)\right.$$
$$+\frac{1}{\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\sin^{d-5}\theta_3}\frac{\partial}{\partial\theta_3}\left(\sin^{d-5}\theta_3\frac{\partial}{\partial\theta_3}\right)$$
$$+\frac{1}{\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3\sin^{d-}\theta_4}\frac{\partial}{\partial\theta_4}\left(\sin^{d-6}\theta_4\frac{\partial}{\partial\theta_4}\right)+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{1}{\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\cdots\cdots\cdots\sin^2\theta_{d-4}\sin\theta_{d-3}}\frac{\partial}{\partial\theta_{d-3}}\left(\sin^2\theta_{d-3}\frac{\partial}{\partial\theta_{d-2}}\right)$$
$$\left.+\frac{1}{\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\cdots\cdots\cdots\sin^2\theta_{d-4}\sin^2\theta_{d-3}}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right\} \qquad (3.4)$$

dir.

$d(d\geq 2)$ Boyutlu Parabolik koordinatlardaki Laplasyenin içinde açısal kısımlardan gelen terimler yörüngesel açısal momentum işlemcisinin karesi ile bağlantılıdır. Buna göre parabolik koordinatlarda Laplasyen ifadesi tekrar yazılacak olunursa;

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{\sigma^2+\tau^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}+\frac{d-2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}+\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+\frac{d-2}{\tau}\frac{\partial}{\partial\tau}\right)-\frac{{L_{d-1}}^2}{\hbar^2\sigma^2\tau^2} \qquad (3.5)$$

elde edilir. $\left[\widehat{H},{\vec{L}_d}^2\right]=0$ ve $\left[{\vec{L}_d}^2,L_j\right]=0$ olduğundan ortak öz fonksiyonlara sahiptir.

Parabolik koordinatlarda Laplasyen (3.3) özdeğer denkleminde yerine yazılırsa;

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{1}{(\tau^2+\sigma^2)}\left\{\frac{d-2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}+\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}+\frac{d-2}{\tau}\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right\}-\frac{{\vec{L}_{d-1}}^2}{\hbar^2\sigma^2\tau^2}\right)-\frac{2ze^2}{(\sigma^2+\tau^2)}\right]u(r)$$
$$= E_r u(r) \qquad (3.6)$$

d boyutlu parabolik koordinatlarda özdeğer denklemi.

$u(\vec{r}) = f(\sigma)g(\tau)\mathcal{Y}(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\theta_{d-3},\phi)$

değişken ayırma yöntemi gereğince bu şekilde yazılır.

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{1}{(\tau^2+\sigma^2)}\left\{\frac{\mathrm{d}-2}{\sigma}\frac{1}{f(\sigma)}\frac{\partial f(\sigma)}{\partial\sigma}+\frac{1}{f(\sigma)}\frac{\partial^2 f(\sigma)}{\partial\sigma^2}+\frac{\mathrm{d}-2}{\tau}\frac{1}{g(\tau)}\frac{\partial g(\tau)}{\partial\tau}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{g(\tau)}\frac{\partial^2 g(\tau)}{\partial\tau^2}\right\}-\frac{1}{\mathcal{Y}}\frac{\vec{\mathrm{L}}_{\mathrm{d}-1}{}^2\mathcal{Y}}{\hbar^2\sigma^2\tau^2}\right)-\frac{2\mathrm{ze}^2}{(\sigma^2+\tau^2)}-E_r=0 \qquad (3.7)$$

Burada $\mathcal{Y}(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\cdots\cdots\cdots\cdots,\theta_{d-3},\phi)$ bir önceki bölümde elde edilen sonuçlarla aynıdır. Böylece σ ve τ değişkenlerinden gelen durumların özfonksiyonları aranacaktır;

$L_{d-1}{}^2\mathcal{Y}=\kappa^2\hbar^2\mathcal{Y}$, $\kappa^2=N_{d-3}\left(N_{d-3}+(d-3)\right)$

dir. (2.65) denkleminde gösterildiği gibi.

Yazılan (3.7) özdeğer denklemi düzenlenirse;

$$\frac{1}{g(\tau)}\left[\frac{\partial^2 g(\tau)}{\partial\tau^2}+\frac{\mathrm{d}-2}{\tau}\frac{\partial g(\tau)}{\partial\tau}\right]+\frac{\kappa^2}{\tau^2}-\frac{2\mu|E|\tau^2}{\hbar^2}=-\upsilon \qquad (3.8)$$

ve

$$\frac{1}{f(\sigma)}\left[\frac{\partial^2 f(\sigma)}{\partial\sigma^2}+\frac{\mathrm{d}-2}{\sigma}\frac{\partial f(\sigma)}{\partial\sigma}\right]+\frac{\kappa^2}{\sigma^2}-\frac{2\mu|E|\tau^2}{\hbar^2}+\frac{4\mu z e^2}{\hbar^2}-\upsilon=0 \qquad (3.9)$$

(Burada υ ayrıştırma katsayısıdır.)

İlk olarak (3.9) denkleminin çözümleri aranırsa;

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}+\frac{\mathrm{d}-2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}+\frac{\kappa^2}{\sigma^2}-\frac{2\mu|E|\tau^2}{\hbar^2}+\frac{4\mu z e^2}{\hbar^2}-\upsilon\right)f(\sigma)=0$$

$\rho_1=\beta\sigma$ boyutsuz değişken tanımlayalım ve denklemi yeni boyutsuz değişkene göre tekrar yazarsak (Burada boyutsuz değişken $0<\rho_1<\infty$);

$$\left(\beta^2\frac{d^2}{d{\rho_1}^2}+\frac{(d-2)\beta^2}{\rho_1}\frac{d}{d\rho_1}+\frac{4\mu z e^2}{\hbar^2}-\frac{2\mu|E|}{\hbar^2}\frac{{\rho_1}^2}{\beta^2}+\frac{\kappa^2\beta^2}{{\rho_1}^2}-\upsilon\right)f(\rho_1)=0 \qquad (3.10)$$

Yazmış olduğumuz (3.10) denklemi β^2' ye bölünür ve ;

$$\frac{4\mu z e^2-\upsilon\hbar^2}{\beta^2\hbar^2}=\lambda_1 \qquad (3.11)$$

$$\frac{2\mu|E|}{\hbar^2}=\beta^4 \qquad (3.12)$$

(3.10) denklemi tanımlanan (3.11) ve (3.12) değişkenleri cinsinden yazılırsa;

$$\left(\frac{d^2}{d{\rho_1}^2}+\frac{(d-2)}{\rho_1}\frac{d}{d\rho_1}+\lambda_1-{\rho_1}^2+\frac{\kappa^2}{{\rho_1}^2}\right)f(\rho_1)=0 \tag{3.13}$$

Yazmış olduğumuz (3.13) denkleminin $|\rho_1|\to\infty$ için çözümü veren denklem;

$$\left(\frac{d^2}{d{\rho_1}^2}-{\rho_1}^2\right)\check{f}(\rho_1)=0 \text{ dir.} \tag{3.14}$$

Burada $\check{f}(\rho_1)=f(|\rho_1|\to\infty)$ dir.

(3.14)denkleminin her iki tarafı $2\frac{d\check{f}}{d\rho_1}$ ile çarpılırsa ve $2\rho_1\check{f}^2$ ifadesi eklenip çıkartılırsa ve denklem düzenlenirse;

$$\frac{d}{d\rho_1}\left[\left(\frac{d\check{f}}{d\rho_1}\right)^2-{\rho_1}^2\check{f}^2\right]=-{\rho_1}^2\check{f}^2 \tag{3.15}$$

elde edilir.

$\check{f}$ kendisi ve türevi $|\rho_1|\to\infty$ da sonlu olması gerektiğinden;

$$\frac{d\check{f}}{d\rho_1}=\sqrt{c+{\rho_1}^2\check{f}^2} \tag{3.16}$$

elde edilir. Sonsuzda sonlu kalması şartından dolayı $c=0$ alınır.

$$\check{f}(\rho_1)\sim e^{-{\rho_1}^2/2}$$

olur. Böylece;

$$f(\rho_1)=e^{-{\rho_1}^2/2}\,H_{n_1}(\rho_1) \tag{3.17}$$

Burada H_{n_1} ara bölge çözümlerini verir. $f(\rho_1)$ ifadesi (3.13) denkleminde yerine yazılır ve denklem düzenlenirse;

$$\frac{d^2H_{n_1}(\rho_1)}{d{\rho_1}^2}+\left(\frac{(d-2)-2{\rho_1}^2}{\rho_1}\right)\frac{dH_{n_1}(\rho_1)}{d\rho_1}-\left(\lambda_1-(d-1)+\frac{\kappa^2}{{\rho_1}^2}\right)H_{n_1}(\rho_1)=0 \tag{3.18}$$

H_{n_1}'in sağladığı denklem elde edilir. Bu denklemi Frobenius seri yöntemi ile çözelim

$$H_{n_1}(\rho_1) = \sum_{n_1=0}^{\infty} a_{n_1}\, {\rho_1}^{n_1+s} \qquad a_{n_1} \neq 0 \tag{3.19}$$

Yazılan ifadenin birinci ve ikinci türevleri alınıp (3.18) özdeğer denkleminde yerine yazılır ve düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned} & a_0(s(s+(d-3))+\kappa^2){\rho_1}^{s-2} + a_1\big((s+1)(s+(d-2))+\kappa^2\big){\rho_1}^{s-1} \\ & \quad + \sum_{n_1=0}^{\infty} (a_{n_1+2}\big((n_1+s+2)[n_1+s+(d-1)]+\kappa^2\big) \\ & \quad + a_{n_1}(\lambda_1-(d-1)-2n_1-2s){\rho_1}^{n_1+s} = 0 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Burada;

$a_0(s.(s+(d-3))+\kappa^2)) = 0$

$s = 0,\ s = -\kappa^2-(d-3)$ değerlerini alır.

(3.20) denkleminde indis köklerini $s = 0$ alınır;

$$\frac{a_{n_1+2}}{a_{n_1}} = \frac{-(\lambda_1-(d-1)-2n_1)}{(n_1+2)[n_1+(d-1)]+\kappa^2} \tag{3.21}$$

$n_1 \to \infty$ limitinde $\frac{a_{n_1+2}}{a_{n_1}} \to \frac{2}{n_1+2}$ gibi davranır

Bu ifadeyi veren değer; ${e^{\rho_1}}^2$ dir. $f(\rho_1) = e^{-{\rho_1}^2/2}e^{{\rho_1}^2} = e^{{\rho_1}^2/2}$. Sonuç ıraksaktır ve seri bir yerde kesilmelidir. Yani $a_{n_1} \neq 0$ ve $a_{n_1+1} = 0$

$\lambda_1 - 2n_1 - (d-1) = 0$

$$n_1 = \frac{\lambda_1-(d-1)}{2} \tag{3.22}$$

Şimdi (3.8) denkleminin çözümünü incelenecektir;

$$\frac{1}{g(\tau)}\left[\frac{\partial^2 g(\tau)}{\partial\tau^2} + \frac{\mathrm{d}-2}{\tau}\frac{\partial g(\tau)}{\partial\tau}\right] + \frac{\kappa^2}{\tau^2} - \frac{2\mu|E|\tau^2}{\hbar^2} = -\upsilon$$

$\rho_2 = \beta\tau$ boyutsuz değişken tanımlayalım. Burada boyutsuz değişken $0 < \rho_2 < \infty$ dir. (3.8) denklemi yeni boyutsuz değişkene göre yeniden yazılırsa;

$$\left(\beta^2\frac{d^2}{d{\rho_2}^2}+\frac{(d-2)\beta^2}{\rho_2}\frac{d}{d\rho_2}-\frac{2\mu|E|}{\hbar^2}\frac{{\rho_2}^2}{\beta^2}-\frac{\kappa^2\beta^2}{{\rho_2}^2}+\upsilon\right)g(\rho_2)=0 \tag{3.23}$$

(3.23) denklemi β^2'ye bölünürse;

$$\left(\frac{d^2}{d{\rho_2}^2}+\frac{(d-2)}{\rho_2}\frac{d}{d\rho_2}-\frac{2\mu|E|}{\hbar^2}\frac{{\rho_2}^2}{\beta^4}-\frac{\kappa^2}{{\rho_2}^2}+\frac{\upsilon}{\beta^2}\right)g(\rho_2)=0 \tag{3.24}$$

$$\lambda_2=\frac{\upsilon}{\beta^2} \tag{3.25}$$

$$\frac{2\mu|E|}{\hbar^2}=\beta^4 \tag{3.26}$$

(3.24) denklemi tanımlanan (3.25) ve (3.26) değişkenleri cinsinden tekrar yazılırsa;

$$\left(\frac{d^2}{d{\rho_2}^2}+\frac{(d-2)}{\rho_2}\frac{d}{d\rho_2}+\lambda_2-{\rho_2}^2+\frac{\kappa^2}{{\rho_2}^2}\right)g(\rho_2)=0 \tag{3.27}$$

Yazmış olduğumuz (3.27) denkleminin $|\rho_2|\to\infty$ için çözümü veren denklem;

$$\left(\frac{d^2}{d{\rho_2}^2}-{\rho_2}^2\right)\breve{g}(\rho_2)=0 \tag{3.28}$$

$$\breve{g}(\rho_2)=g(|\rho_2|\to\infty)$$

Bu denklemin (3.14) denklemiyle aynı yapıdadır. Bu yüzden de çözüm aynı şekilde hesaplanacağından;

$$\breve{g}(\rho_2)\sim e^{-{\rho_2}^2/2}$$

olur.

$$g(\rho_2)=e^{-{\rho_2}^2/2}\,H_{n_2}(\rho_2) \tag{3.29}$$

Burada H_{n_2} ara bölge çözümlerini verir. $g(\rho_2)$ ifadesi (3.27) denkleminde yerine yazılır ve denklem düzenlenirse;

$$\frac{d^2H_{n_2}(\rho_2)}{d{\rho_2}^2}+\left(\frac{(d-2)-2{\rho_2}^2}{\rho_1}\right)\frac{dH_{n_2}(\rho_2)}{d\rho_2}-\left(\lambda_2-(d-1)+\frac{\kappa^2}{{\rho_2}^2}\right)H_{n_2}(\rho_2)=0 \tag{3.30}$$

H_{n_2}'in sağladığı denklem elde edilir. Bu denklemi Frobenius seri yöntemi ile çözelim

$$H_{n_2}(\rho_2) = \sum_{n_2=0}^{\infty} a_{n_2}\, {\rho_1}^{n_2+s} \qquad a_{n_2} \neq 0 \tag{3.31}$$

(3.31) de yazılan ifadenin birinci ve ikinci türevleri alınıp (3.30) özdeğer denkleminde yerine yazılır ve düzenlemeler yapılırsa;

$$a_0(s(s+(d-3))+\kappa^2){\rho_1}^{s-2} + a_1\left((s+1)\big(s+(d-2)\big)+\kappa^2\right){\rho_2}^{s-1} + \sum_{n_2=0}^{\infty}(a_{n_2+2}\left((n_2+s+2)[n_2+s+(d-1)]\right. + \kappa^2\big)+a_{n_2}(\lambda_1-(d-1)-2n_2-2s)){\rho_2}^{n_2+s} = 0 \tag{3.32}$$

Burada;

$$a_0(s.(s+(d-3))+\kappa^2)) = 0$$

İndis kökler $s = 0,\ s = -\kappa^2-(d-3)$ değerlerini alır.

(3.32) denkleminde çözüm bulmak için $s = 0$ alınır;

$$\frac{a_{n_2+2}}{a_{n_2}} = \frac{-(\lambda_1-(d-1)-2n_2)}{(n_2+2)[n_2+(d-1)]+\kappa^2} \tag{3.33}$$

$n_2 \to \infty$limitinde $\dfrac{a_{n_2+2}}{a_{n_2}} \to \dfrac{2}{n_2+2}$ gibi davranır.

Bu ifadeyi veren değer; ${e^{\rho_2}}^2$ dir. $g(\rho_2) = e^{-{\rho_2}^2/2}e^{{\rho_2}^2} = e^{{\rho_2}^2/2}$. Sonuç ıraksaktır ve seri bir yerde kesilmelidir. (kesme işleminde $a_{n_2} \neq 0$ ve $a_{n_2+1} = 0$ olacak şekilde)

$$\lambda_2 - 2n_2 - (d-1) = 0$$

$$n_2 = \frac{\lambda_2-(d-1)}{2} \tag{3.34}$$

olur.

$$2n = n_1 + n_2 = \frac{\lambda_1+\lambda_2-2(d-1)}{2} \tag{3.35}$$

$$E_r = -\frac{\mu z^2 \propto c^2}{2}\frac{1}{\left(n+\dfrac{(d-1)}{2}\right)^2} \tag{3.36}$$

olarak bulunur.

Ayrıca

$$\mathcal{Y}(\theta_j,\phi)=\prod_{k=1}^{d-3}\left(1-\cos\theta_j{}^2\right)^{\frac{N_k}{2}}C_n^{N_k+\frac{(k+1)}{2}}(\cos\theta_j)\,e^{im\phi} \tag{3.37}$$

şeklinde bulunur.

Burada;

$m=-N_1,\cdots\cdots\cdots,N_1$

$N_1=0,1,2,3,\cdots\cdots,N_2$

$N_2=0,1,2,3,\cdots\cdots,N_3$

$\vdots \qquad \vdots$

$N_{d-3}=0,1,2,3,\ldots\ldots,N_{d-2}$

Son olarak;

$u(\sigma,\tau,\theta_1,\phi)=f(\sigma)g(\tau)\mathcal{Y}(\theta_j,\phi)$

$f(\rho)=\ e^{-{\rho_1}^2/2}H_{n_1}(\rho_1) \quad ,\ \rho_1=\beta\sigma$

$g(\rho)=\ e^{-{\rho_2}^2/2}H_{2n-n_1}(\rho_2),\ \ \rho_2=\ \beta\tau$

$u(\sigma,\tau,\theta_1,\phi)=e^{-{\rho_1}^2/2}H_{n_1}(\rho_1)e^{-{\rho_2}^2/2}H_{2n-n_1}(\rho_2)\mathcal{Y}(\theta_j,\phi)$

$$u(\sigma,\tau)=\ e^{-({\rho_1}^2+{\rho_2}^2)}H_{n_1}(\rho_1)H_{2n-n_1}(\rho_2) \tag{3.38}$$

Yukarıdaki öz fonksiyonu (r,ϕ)'ler cinsinden yazarsak;

$x=rsin\phi=\ \sigma\tau$

$y=rcos\phi=\frac{1}{2}\ (\tau^2-\sigma^2)$

$2rcos\phi=\ \tau^2-\sigma^2$

$\cos^2 A-\sin^2 B=\cos(A+B)\,.\cos(A-B)$

$2rcos^2\frac{\phi}{2}-2rsin^2\frac{\phi}{2}$

$2r\left\{\cos\left(\frac{\phi}{2}+\frac{\phi}{2}\right).\cos(\frac{\phi}{2}-\frac{\phi}{2})\right\}=2rcos\phi$ sağlandı.

$$\tau^2 = 2rcos^2\frac{\phi}{2}\,, \quad \tau = \sqrt{2r}cos\frac{\phi}{2} \tag{3.39}$$

$$\sigma^2 = 2rsin^2\frac{\phi}{2}\,, \quad \sigma = \sqrt{2r}sin\frac{\phi}{2} \tag{3.40}$$

(2.39) ve (2.40) ifadelere göre $U(\sigma,\tau)$ öz fonksiyonu tekrar yazılırsa;

$$u(\sigma,\tau) = e^{-(\beta^2\sigma^2+\beta^2\tau^2)/2}H_{n_1}(\beta\sigma)H_{2n-n_1}(\beta\tau)\,Y(\theta_j,\phi)$$

$$e^{-\beta^2(2rcos^2\frac{\phi}{2}+2rsin^2\frac{\phi}{2})}H_{n_1}(\beta\sqrt{2r}cos\frac{\phi}{2})H_{2n-n_1}(\beta\sqrt{2r}sin\frac{\phi}{2})Y(\theta_j,\phi)$$

$$2r\left(cos^2\frac{\phi}{2}+sin^2\frac{\phi}{2}\right) = 2r$$

$2r\beta^2 = \eta$ dersek;

$$u(\sigma,\tau,\theta_j,\phi) = e^{-\eta/2}H_{n_1}\left(\sqrt{\eta}cos\tfrac{\phi}{2}\right)H_{2n-n_1}\left(\sqrt{\eta}sin\tfrac{\phi}{2}\right)$$

$d \geq 3$ için özfonksiyon;

$$\sqrt{\frac{2^{2N_{d-4}+(d-4)}}{\pi}\frac{n!\left\{\left(N_{d-4}+\frac{(d-5)}{2}\right)!\right\}^2(n+N_{d-4}+\frac{(d-3)}{2})}{(n+2N_{d-4}+(d-4))!}}$$

$$\prod_{k=1}^{d-3}\left(1-\cos\theta_j{}^2\right)^{\frac{N_k}{2}}C_n^{N_k+\frac{(k+1)}{2}}(\cos\theta_j)\,e^{im\phi} \tag{3.41}$$

Olarak elde edilir.

Ayrıca $d = 2$ için;

$$u_{n,m}(\sigma,\tau) = \sqrt{\frac{\beta(n-|m|!)}{(n+|m|!)}}e^{-\rho/2}\rho^m L_{n-|m|}^{2m}(\rho)e^{im\phi} \tag{3.42}$$

dir.

Ayrıca enerji özdeğer;

$$E_r = -\frac{\mu z^2 \propto c^2}{2} \frac{1}{\left(n + \frac{(d-1)}{2}\right)^2}$$

Burada;

$n = 0,1,2,3, \ldots$

$N_{d-2} = 0,1,2,3, \ldots \ldots, N_{d-1}$

$N_{d-3} = 0,1,2,3, \ldots \ldots, N_{d-2}$

$\vdots$

$N_2 = 0,1,2,3, \cdots \cdots, N_3$

$N_1 = 0,1,2,3, \cdots \cdots, N_2$

$m = -N_1, \cdots \cdots \cdots, N_1$ dir.

BÖLÜM 4

4.SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada; kuantum mekaniğinin analitik olarak çözülebilen temel problemlerinden biri olan Hidrojen benzeri atom modeli $d(d \geq 2)$ boyutta hem küresel hem de parabolik koordinatlarda göz önüne alındı. Kuantum mekaniği için iki cisim problemi inşa edilerek, d boyutlu bağıl Hamiltonyen ifadesi elde edildi. Küresel koordinatlarda bağıl Hamiltonyen ile tanımlanan özdeğer denklemi yazıldı. Özdeğer denkleminin açısal değişkenlerinden gelen ifadelerin yörüngesel açısal momentum işlemcisinin karesi ile özdeş olduğu gösterildi. Yörüngesel açısal momentum işlemcilerinin kareleri Hamilton işlemcisi ile sıra değiştirme bağıntısı gereğince $\left(\left[\widehat{H}, \vec{L}_d{}^2\right] = 0\right)$ ortak özfonksiyonlara sahip olduğundan yörüngesel açısal momentum işlemcilerinin karelerinin özfonksiyonları ve özdeğerleri elde edildi. Hidrojen benzeri atomun

$(d \geq 2)$boyutlu enerji özdeğeri boyuta bağlı olarak;

$$E_r = -\frac{z^2 \propto^2 \mu c^2}{2\left(n + \frac{(d-1)}{2}\right)^2} \quad , n = 0,1,2,3, \ldots \tag{2.80}$$

bulundu.

Boyut arttıkça baş kuantum sayısı $1/2$ artarak değerler aldığı gösterilmiştir. Örneğin $d = 2$ için $E_n \sim -\frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}$, $d = 3$ için $E_n \sim -\frac{1}{(n+1)^2}$

ve $d = 4$ için $E_n \sim -\frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}$, Burada $n = 0,1,2,3, \ldots$

$d(d \geq 2)$ boyutlu hidrojen benzeri atomun küresel koordinatlardan elde edilen özfonksiyonu;

$d \geq 3$ için yazılan öz fonksiyon;

$$u(\rho, \theta_j, \phi) = \sqrt{\frac{\beta^d (n - N_{d-2})!}{(n + N_{d-2} + (d-2))!\,(2n + (d-1))}}\, e^{-\rho/2} \rho^{N_{d-2}} L_{n-N_{d-2}}^{2N_{d-2}+(d-2)}(\rho)$$

$$\sqrt{\frac{2^{2N_{d-3}+(d-3)}}{\pi} \frac{n! \left\{\left(N_{d-3} + \frac{(d-4)}{2}\right)!\right\}^2 (n + N_{d-3} + \frac{(d-2)}{2})}{(n + 2N_{d-3} + (d-3))!}}$$

$$\prod_{k=1}^{d-2} \left(-\cos\theta_j{}^2\right)^{N_k/2} C_n^{N_k + \frac{(k+1)}{2}} (\cos\theta_j)\, e^{im\phi} \qquad (2.86)$$

$n = 0,1,2,3, \ldots$

$N_{d-2} = 0,1,2,3, \ldots \ldots, N_{d-1}$

$N_{d-3} = 0,1,2,3, \ldots \ldots, N_{d-2}$

$\vdots$

$N_2 = 0,1,2,3, \cdots\cdots, N_3$, $N_1 = 0,1,2,3, \cdots\cdots, N_2$ ve $m = -N_1, \cdots\cdots\cdots, N_1$ dir.

Ayrıca $d = 2$ için ;

$$u_{n,m} = \sqrt{\frac{\beta(n - |m|!)}{(n + |m|!)}}\, e^{-\rho/2} \rho^m L_{n-|m|}^{2m}(\rho) e^{im\phi} \qquad (2.87)$$

Ayrıca boyutlara göre dejenere durumlar hesaplandı ve dejenere durum sayısını veren genelleştirilmiş bir ifade elde edildi;

$$g_n(d) = 2\left[n + \frac{(d-1)}{2}\right]\left[\frac{(n+d-2)!}{(d-1)!\,n!}\right] \qquad (2.93)$$

olarak bulunur. ($n = 0,1,2,3, \ldots$)

Daha sonra hidrojen benzeri atomun üç, dört, beş, altı ve yedi boyutlar için $\langle r \rangle$'nin beklenen değerleri hesaplanarak değerleri tablo halinde gösterildi. Bulunan sonuçlarda baş kuantum sayısı arttığında beklenen değerlerin artması gerekirken bazı değerlerde sapmalar olduğu görüldü.

Bölüm3'de Hidrojen benzeri atom modelini parabolik koordinatlar kullanılarak tekrar göz önüne alındı. İlk olarak parabolik koordinatları $d(d \geq 2)$ için genelleştirmesi yapıldı. Genelleştirilmiş parabolik koordinatları kullanarak bağıl Hamilton İşlemcisinin özdeğer denklemi parabolik koordinatlarda çözüldü. Yapılan genelleştirme sonucu özdeğer dekleminin açısal kısımdan gelen ifadelerin yörüngesel açısal momentum işlemcilerinin karelerini içerdiği gösterildi. Hem küresel koordinatlarda olsun hem de parabolik koordinatlarda elde edilen özdeğer her iki koordinat sistemi için aynı enerji değeri elde edilmiştir.

$d(d \geq 2)$ boyutlu parabolik koordinatları kullanarak genelleştirilmiş bir özfonksiyon ifadesi (3.41) de elde edildi.

Özfonksiyon; $d \geq 3$ için

$$u(\sigma,\tau,\theta_j,\phi) = e^{-\eta/2} H_{n_1}\left(\sqrt{\eta}cos\frac{\phi}{2}\right) H_{2n-n_1}\left(\sqrt{\eta}sin\frac{\phi}{2}\right)$$

$$\sqrt{\frac{2^{2N_{d-4}+(d-4)}}{\pi}\frac{n!\left\{\left(N_{d-4}+\frac{(d-5)}{2}\right)!\right\}^2 (n+N_{d-4}+\frac{(d-3)}{2})}{(n+2N_{d-4}+(d-4))!}}$$

$$\prod_{k=1}^{d-3}\left(1-\cos\theta_j{}^2\right)^{\frac{N_k}{2}} C_n^{N_k+\frac{(k+1)}{2}}(\cos\theta_j)\, e^{im\phi} \qquad (3.41)$$

ve $d = 2$ için;

$$u(\sigma,\tau) = e^{-\eta/2} H_{n_1}\left(\sqrt{\eta}cos\frac{\phi}{2}\right) H_{2n-n_1}\left(\sqrt{\eta}sin\frac{\phi}{2}\right) \qquad (3.42)$$

olarak bulundu.

Farklı koordinat sistemleri kullanılarak aynı enerji özdeğerler elde edilmiştir. $d(d \geq 2)$ boyutlu Hidrojen benzeri atom modeli için elektronun boyuta bağlı enerji özdeğer ilişkisi belirlenmiştir.

KAYNAKLAR

Abramowitz M., Stegun I. A.,(1964). *Hanbook of Mathematical Functions National Bureau of Standarts,* Washington DC: Dover

Arfken G. B., Weber H. J., (1966). *Mathematical Methods for Physicst.*USA: Academic Press

Bayın S., (2004). *Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler.* İstanbul: Ders Kitaları

Bell W. W., (1968). *Special Functions for Scientists and Engineers.* USA: D. Van Nostrand Company

Bradbury T. C., (1981). *Theoretical Mechanics.* New York: John Wiley & Sons Inc.

Byron F. W., Fuller R. W., (1970). *Mathematics of Classical and Quantum Physics*. New York: Addison- Wesley

Cohen- Tannoudji C., Diu B. and Laloe F., (1997). *Quantum Mechanics* Paris: Willey-Vch

Dereli T., Verçin A., (2014). *Kuantum Mekaniği Temel Kavramlar ve Uygulamaları* Türkiye: TÜBA

Dittrich, W., Reuter M., (2001). *Classical and Quantum Dynamics: From Classical Path to Path Integrals,* Germany: Spinger

Eisberg R., Resnick R., (1985). *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei and Particles.* New York: John Wiley & Sons Inc

Goldstein H., Poole C. and Safko J., (2002). *Classical Mechanics.* New York: Addison-Wesley 3.rd ed.

Gottfried K., Thug-Mow Y., (2003). *Quantum Mechanics; Fundamental.*New York: Spring

Landau L. D., Lifshitz E. M., (1959). *Quantum Mechanics; Non-Relativistic Theory.* New York: Pergamon Press Ltd.

Liboff L. R., (1997). *Introductory Quantum Mechanic.*USA: Addison Wesley Longman Inc.

Louck J. D., (1960). *Theory of Angular Momentum in N-Dimensional Space.* Universty of Cafornia/ Los Alomos Scientific Laboratory, New Mexico: AEC research resport

Merzbacher E., (1970). *Quantum Mechanics.* USA: John Wiley & Sons

Özcan M., (2001). Green's Function for a n-Dimensional Closed, Static Universe And With a Spherical Boundary. *Classical and Quantum Gravity, 18,* 8-6

Özcan M., (2006). Casimir Energy Density for Spherical Universe in N-Dimensional Space time. *Classical and Quantum Gravity, 27*(18), 5-6.

Özcan M., (2012). Scalar Casimir Effect Between Two Concentric D-Dimensional Sphers. *International Journal of Modern Physics, 27*, 3-10

Redheffer R. M., Sokolnikoff I. S., (1984). *Mathematics of Physic and Modern Engineering.* USA: McGraw Hill İnternational Book Company

Sakurai J. J., (1994). *Modern Quantum Mechanics*. USA: Addison Wesley

Wei-Qin Z., (2006). Relation Dimension and Angular Momentum for Radially Symmetric Potantial in n-dimensional space. *Communications in Theoretical Pphysics,46*-429

EK

EK.1. YÖRÜNGESEL AÇISAL MOMENTUM

Bu kısımda yörüngesel açısal momentum işlemcilerinin karesini istenilen boyutlar için hesaplayacağız.

$$L_k{}^2 = \frac{1}{2}\sum_{i_1,i_2}^{k} L_{i_1,i_2}{}^2 \qquad \text{(ek. 1.1)}$$

(Louck,1960)

(ek.1.1) ifadesi kullanılarak istenilen boyutlarda yörüngesel açısal momentumun karesini hesaplayacağız.

İlk olarak üç boyut için yörüngesel açısal momentum karesi hesaplanırsa;

$x = r\sin\theta_1\cos\phi \qquad , 0 < r < \infty$

$y = r\sin\theta_1\sin\phi \qquad , \theta \in [0,\infty]$

$z = r\cos\theta_1 \qquad , \phi \in [0,2\pi]$

(ek.1.1) denklemi kullanılarak 3 boyutlu sistem için Yörüngesel Açısal momentum değeri;

$$\vec{L}_3{}^2 = \vec{L}_{12}{}^2 + \vec{L}_{13}{}^2 + \vec{L}_{23}{}^2 \qquad \text{(ek. 1.2)}$$

Olarak yazılır.

Burada;

$$L_{12} = i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$L_{13} = i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$L_{23} = i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) \text{ dir} \qquad \text{(ek. 1.3)}$$

O halde küresel koordinatları kullanarak $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ ve x, y, z'yi belirmemiz gerekiyor.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta_1}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \phi} \qquad \text{(ek. 1.4)}$$

(Redheffet, 1984). Yazılan (ek.1.4) ifadeleri matris biçiminde yazarsak;

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial \theta_1}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial \theta_1}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial z} & \frac{\partial \theta_1}{\partial z} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

$X = A.R$ şeklinde yazılır. Bu ifadenin tersi alınırsa;

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \theta_1}d\theta_1 + \frac{\partial x}{\partial \phi}d\phi$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial \theta_1}d\theta_1 + \frac{\partial y}{\partial \phi}d\phi$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial r}dr + \frac{\partial z}{\partial \theta_1}d\theta_1 + \frac{\partial z}{\partial \phi}d\phi \qquad \text{(ek. 1.5)}$$

(ek.1.5) ifadeleri matris biçiminde yazarsak;

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta_1 \\ d\phi \end{pmatrix}$$

$dX = B.dR$

$$B^{-1}dX = B^{-1}BdR$$

$$dR = B^{-1}dX \qquad \text{(ek. 1.6)}$$

(ek.1.6) ifadesi sonucunda;

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x}dx + \frac{\partial r}{\partial y}dy + \frac{\partial r}{\partial z}dz$$

$$d\theta_1 = \frac{\partial \theta_1}{\partial x}dx + \frac{\partial \theta_1}{\partial y}dy + \frac{\partial \theta_1}{\partial z}dz$$

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}dz \qquad \text{(ek. 1.7)}$$

(ek.1.7) İfadeleri tekrar matris biçiminde yazılırsa;

$$\begin{pmatrix} dr \\ d\theta_1 \\ d\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial x} & \frac{\partial \theta_1}{\partial y} & \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$dr = C.dx\,, \qquad dR = B^{-1}dX$$

$$C = B^{-1} \;\; C = \check{A}$$

$$A = (\widetilde{B^{-1}}),\; B = \begin{bmatrix} sin\theta_1 cos\phi & rcos\theta_1 cos\phi & -rsin\theta_1 sin\phi \\ sin\theta_1 sin\phi & rcos\theta_1 sin\phi & rsin\theta_1 sin\phi \\ cos\theta_1 & -rsin\theta_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$detB = r^2 sin\theta_1$ olarak hesaplanır. (ek.1.8)

$B_{11} = r^2 \sin^2\theta_1\, cos\phi$

$B_{12} = -rsin\theta_1 cos\theta_1 cos\phi$

$B_{13} = -r^2 sin\phi$

$B_{21} = -r^2 \sin^2\theta_1\, sin\phi$

$B_{22} = rsin\theta_1 cos\theta_1 sin\phi$

$B_{23} = -rcos\phi$

$B_{31} = r^2 cos\theta_1 sin\theta$

$$B_{32} = rsin^2\theta_1$$

$$B_{33} = 0$$

$$B^{-1} = \frac{1}{r^2 sin\theta}\begin{bmatrix} r^2\sin^2\theta\, cos\phi & r^2\sin^2\theta\, sin\phi & r^2 cos\theta sin\theta \\ rsin\theta cos\theta cos\phi & rsin\theta cos\theta sin\phi & -rsin^2\theta \\ -r^2 sin\phi & rcos\phi & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \tilde{C}$$

$$A = \begin{bmatrix} sin\theta_1 cos\phi & \frac{cos\theta_1 cos\phi}{r} & \frac{-sin\phi}{sin\theta} \\ sin\theta_1 sin\phi & \frac{cos\theta_1 sin\phi}{r} & \frac{cos\phi}{rsin\theta} \\ cos\theta_1 & \frac{-sin\theta_1}{r} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = sin\theta_1 cos\phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} cos\theta_1 cos\phi \frac{\partial}{\partial \theta_1} - \frac{sin\phi}{sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = sin\theta_1 sin\phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} sin\theta_1 sin\phi \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \frac{1}{r}\frac{cos\phi}{sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = cos\theta_1 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} sin\theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} \qquad (1.9)$$

(1.9) deki sonuçları kullanarak;

$$L_{12} = i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \qquad (ek.\,1.10)$$

$$L_{13} = i\hbar \left(-cos\phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos\theta_1 \sin\phi}{\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial \phi} \right) \qquad (ek.\,1.11)$$

$$L_{23} = i\hbar \left\{ -sin\phi \frac{\partial}{\partial \theta_1} - \frac{cos\theta_1 \cos\phi}{sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial \phi} \right\} \qquad (ek.\,1.12)$$

Olarak hesaplanır.

$$\vec{L_3}^{\,2} = \vec{L_{12}}^{\,2} + \vec{L_{13}}^{\,2} + \vec{L_{23}}^{\,2} \qquad (ek.\,1.2)$$

Hesaplana ifadeler (ek.1.2) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\vec{L_3}^{\,2} = -\hbar^2 \left[\frac{1}{sin\theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(sin\theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta_1} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \qquad \text{(ek. 1.13)}$$

(Landau, Lifshitz, 1959) Şeklinde bulunur.

Şimdi (ek.1.1) ifadesini kullanarak dört boyutta yörüngesel açısal momentum ifadesinin karesini hesaplayacağız.

$x = r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\phi \quad ; \quad \theta_1, \theta_2 \in [0, \pi]$

$y = r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\phi \quad ; \quad \phi \in [0, 2\pi]$

$z = r \sin\theta_1 \cos\theta_2 \quad ; \quad 0 < r < \infty$

$w = r \cos\theta_1$

Ayrıca;

$k = 2,3,4, \ldots . N$

$L_{ij} = -L_{ji}$

$L_{ij} = i\hbar \left(q_i \frac{\partial}{\partial P_j} - q_j \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$

$L_{ii} = L_{jj} = 0$

$$L_4^{\,2} = L_{12}^{\,2} + L_{13}^{\,2} + L_{14}^{\,2} + L_{23}^{\,2} + L_{24}^{\,2} + L_{34}^{\,2} \qquad \text{(ek. 1.14)}$$

$L_{12} = i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$

$L_{13} = i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x} \right)$

$L_{14} = i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial w} - w \frac{\partial}{\partial x} \right)$

$L_{23} = i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$

$L_{24} = i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial w} - w \frac{\partial}{\partial y} \right)$

$L_{34} = i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial w} - w \frac{\partial}{\partial z} \right)$ olarak ifade edilir. (ek. 1.15)

Kartezyen koordinatlarda verilen işlemcilerin küresel koordinatlarda tanımlanması gerekiyor. Bunun için dört boyutta küresel koordinatlar kullanılır;

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial \theta_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta_1}+\frac{\partial \theta_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta_2}+\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial \theta_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta_1}+\frac{\partial \theta_2}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta_2}+\frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial \theta_1}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \theta_1}+\frac{\partial \theta_2}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \theta_2}+\frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial w}=\frac{\partial r}{\partial w}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial \theta_1}{\partial w}\frac{\partial}{\partial \theta_1}+\frac{\partial \theta_2}{\partial w}\frac{\partial}{\partial \theta_2}+\frac{\partial \phi}{\partial w}\frac{\partial}{\partial \phi} \qquad \text{(ek. 1.16)}$$

(ek.1.16) ifadeleri matris biçiminde yazılırsa;

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial}{\partial w}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial \theta_1}{\partial x} & \frac{\partial \theta_2}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial x}\\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial \theta_1}{\partial y} & \frac{\partial \theta_2}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial y}\\ \frac{\partial r}{\partial z} & \frac{\partial \theta_1}{\partial z} & \frac{\partial \theta_2}{\partial z} & \frac{\partial \phi}{\partial z}\\ \frac{\partial r}{\partial w} & \frac{\partial \theta_1}{\partial w} & \frac{\partial \theta_2}{\partial w} & \frac{\partial \phi}{\partial w}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}\\ \frac{\partial}{\partial \theta_1}\\ \frac{\partial}{\partial \theta_2}\\ \frac{\partial}{\partial \phi}\end{pmatrix}$$

$X = A.R$ olarak yazılır. Bu iadelerin tersi yazılırsa;

$$dX=\frac{\partial x}{\partial r}dr+\frac{\partial x}{\partial \theta_1}d\theta_1+\frac{\partial x}{\partial \theta_2}d\theta_2+\frac{\partial x}{\partial \phi}d\phi$$

$$dY=\frac{\partial y}{\partial r}dr+\frac{\partial y}{\partial \theta_1}d\theta_1+\frac{\partial y}{\partial \theta_2}d\theta_2+\frac{\partial y}{\partial \phi}d\phi$$

$$dZ=\frac{\partial z}{\partial r}dr+\frac{\partial z}{\partial \theta_1}d\theta_1+\frac{\partial z}{\partial \theta_2}d\theta_2+\frac{\partial z}{\partial \phi}d\phi$$

$$dW=\frac{\partial w}{\partial r}dr+\frac{\partial w}{\partial \theta_1}d\theta_1+\frac{\partial w}{\partial \theta_2}d\theta_2+\frac{\partial w}{\partial \phi}d\phi \qquad \text{(ek. 1.17)}$$

(ek.1.17) denklemleri matris biçiminde yazılırsa;

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \\ dW \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \\ \frac{\partial w}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial \theta_1} & \frac{\partial w}{\partial \theta_2} & \frac{\partial w}{\partial \phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d\phi \end{pmatrix}$$

$dx = Bdr$

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x}dx + \frac{\partial r}{\partial y}dr + \frac{\partial r}{\partial z}dz + \frac{\partial r}{\partial w}dw$$

$$d\theta_1 = \frac{\partial \theta_1}{\partial x}dx + \frac{\partial \theta_1}{\partial y}dr + \frac{\partial \theta_1}{\partial z}dz + \frac{\partial \theta_1}{\partial w}dw$$

$$d\theta_2 = \frac{\partial \theta_2}{\partial x}dx + \frac{\partial \theta_2}{\partial y}dr + \frac{\partial \theta_2}{\partial z}dz + \frac{\partial \theta_2}{\partial w}dw$$

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dr + \frac{\partial \phi}{\partial z}dz + \frac{\partial \phi}{\partial w}dw \qquad \text{(ek. 1.18)}$$

(ek.1.18) denklemleri martis biçiminde yazılırsa;

$$\begin{pmatrix} dr \\ d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} & \frac{\partial r}{\partial w} \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial x} & \frac{\partial \theta_1}{\partial y} & \frac{\partial \theta_1}{\partial z} & \frac{\partial \theta_1}{\partial w} \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial x} & \frac{\partial \theta_2}{\partial y} & \frac{\partial \theta_2}{\partial z} & \frac{\partial \theta_2}{\partial w} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} & \frac{\partial \phi}{\partial w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dr \\ dz \\ dw \end{pmatrix}$$

dr = Cdx olarak yazılır.

dr = $B^{-1}dx$

$C = \check{B}$

$A = \widetilde{(B^{-1})}$ olarak bulunur.

$$B = \begin{bmatrix} sin\theta_1 sin\theta_2 cos\phi & rcos\theta_1 sin\theta_2 cos\phi & rsin\theta_1 cos\theta_2 cos\phi & -rsin\theta_1 sin\theta_2 sin\phi \\ sin\theta_1 sin\theta_2 sin\phi & rcos\theta_1 sin\theta_2 sin\phi & rsin\theta_1 cos\theta_2 sin\phi & rsin\theta_1 sin\theta_2 cos\phi \\ sin\theta_1 cos\theta_2 & rcos\theta_1 cos\theta_2 & -rsin\theta_1 sin\theta_2 & 0 \\ cos\theta_1 & -rsin\theta_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Yukarıda verilen B matrisinin determinantı alınırsa;

$$detB = r^3 sin\theta_1 sin\theta_2 \qquad \text{(ek. 1.19)}$$

B matrisinin tersinin transpozesi alınırsa A matrisi elde edilir.

$$A = \begin{bmatrix} -sin\theta_1 sin\theta_2 cos\phi & -\frac{cos\theta_1 sin\theta_2 cos\phi}{r} & \frac{-cos\theta_2 cos\phi}{rsin\theta_1} & \frac{sin\phi}{rsin\theta_1 sin\theta_2} \\ -sin\theta_1 sin\theta_2 sin\phi & -\frac{cos\theta_1 sin\theta_2 sin\phi}{r} & \frac{-cos\theta_2 sin\phi}{rsin\theta_1} & \frac{-cos\phi}{rsin\theta_1 sin\theta_2} \\ -sin\theta_1 cos\theta_2 & -\frac{cos\theta_1 cos\theta_2}{r} & \frac{sin\theta_2}{rsin\theta_1} & 0 \\ -cos\theta_1 & \frac{sin\theta_1}{r} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bulmuş olduğumuz A matrisini kullanarak $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t}$ sonuçlarını bulabiliriz.

$$\frac{\partial}{\partial x} = -sin\theta_1 sin\theta_2 cos\phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{cos\theta_1 sin\theta_2 cos\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta_1} - \frac{cos\theta_2 cos\phi}{rsin\theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \frac{sin\phi}{rsin\theta_1 sin\theta_2} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = -sin\theta_1 sin\theta_2 sin\phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{cos\theta_1 sin\theta_2 sin\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta_1} - \frac{cos\theta_2 sin\phi}{rsin\theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_2} - \frac{cos\phi}{rsin\theta_1 sin\theta_2} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = -sin\theta_1 cos\theta_2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{cos\theta_1 cos\theta_2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \frac{sin\theta_2}{rsin\theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = cos\theta_1 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{sin\theta_1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \qquad \text{(ek. 1.20)}$$

(ek.1.20) deki bulunan sonuçlar kullanılarak;

$$L_{12} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$L_{13} = i\hbar\left(cos\phi\,\frac{\partial}{\partial\theta_2} - \frac{cos\theta_2 sin\phi}{sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$L_{14} = i\hbar\left(sin\theta_2 cos\phi\,\frac{\partial}{\partial\theta_1} + \frac{cos\theta_1 cos\theta_2 cos\phi}{sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_2} - \frac{cos\theta_1 sin\phi}{sin\theta_1 sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$L_{23} = i\hbar\left(sin\phi\,\frac{\partial}{\partial\theta_2} + \frac{cos\theta_2 cos\phi}{sin\theta_1 sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$L_{24} = i\hbar\left(sin\theta_2 sin\phi\,\frac{\partial}{\partial\theta_1} + \frac{cos\theta_1 cos\theta_2 sin\phi}{sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_2} + \frac{cos\theta_1 cos\phi}{sin\theta_1 sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$L_{34} = i\hbar\left(+cos\theta_2\,\frac{\partial}{\partial\theta_1} - \frac{cos\theta_1 sin\theta_2}{sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right) \qquad \text{(ek. 1.21)}$$

olarak yazılır.

(ek.1.21) ifadeleri dört boyut için tanımlanan yörüngesel açısal momentum ifadesinin karesinde yerine yazarsak;

$$L_4{}^2 = L_{12}{}^2 + L_{13}{}^2 + L_{14}{}^2 + L_{23}{}^2 + L_{24}{}^2 + L_{34}{}^2$$

$$L_4{}^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin^2\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^2\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta_1\sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) \qquad \text{(ek. 1.22)}$$

olur.

Şimdi (ek.1.1) ifadesini kullanarak beş boyutta yörüngesel açısal momentum ifadesinin karesini hesaplayacağız.

$x = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cos\phi \quad ; \quad \theta_1, \theta_2 \in [0,\pi]$

$y = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\phi \quad ; \quad \phi \in [0,2\pi]$

$z = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \quad ; \quad 0 < r < \infty$

$w = r\sin\theta_1\cos\theta_2$

$w_1 = r\cos\theta_1$

$$L_5{}^2 = L_{12}{}^2 + L_{13}{}^2 + L_{14}{}^2 + L_{15}{}^2 + L_{23}{}^2 + L_{24}{}^2 + L_{25}{}^2 + L_{34}{}^2 + L_{35}{}^2 + L_{45}{}^2$$

(ek.1.23)

Şeklinde yazılır. Burada;

$$L_{12} = i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \qquad L_{24} = i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial w} - w\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$L_{13} = i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\right) \qquad L_{25} = i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial p} - p\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$L_{14} = i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial w} - w\frac{\partial}{\partial x}\right) \qquad L_{34} = i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial w} - w\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$L_{15} = i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial p} - p\frac{\partial}{\partial x}\right) \qquad L_{35} = i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial p} - p\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$L_{23} = i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad L_{45} = i\hbar\left(w\frac{\partial}{\partial p} - p\frac{\partial}{\partial w}\right) \text{(ek. 1.24)}$$

Kartezyen koordinatlarda verilen işlemcilerin küresel koordinatlarda tanımlanması gerekiyor. Bunun için beş boyutta küresel koordinatlar kullanılır;

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta_2} + \frac{\partial \theta_3}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta_3} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \theta_2}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta_2} + \frac{\partial \theta_3}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta_3} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta_1}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \theta_2}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \theta_2} + \frac{\partial \theta_3}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \theta_3} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial w} = \frac{\partial r}{\partial w}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta_1}{\partial w}\frac{\partial}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \theta_2}{\partial w}\frac{\partial}{\partial \theta_2} + \frac{\partial \theta_3}{\partial w}\frac{\partial}{\partial \theta_3} + \frac{\partial \phi}{\partial w}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial w_1} = \frac{\partial r}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta_1}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \theta_2}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial \theta_2} + \frac{\partial \theta_3}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial \theta_3} + \frac{\partial \phi}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial \phi} \qquad \text{(ek. 1.25)}$$

(ek.1.25) deki ifadeler matris biçiminde yazılırsa;

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial w} \\ \frac{\partial}{\partial w_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial \theta_1}{\partial x} & \frac{\partial \theta_2}{\partial x} & \frac{\partial \theta_3}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial \theta_1}{\partial y} & \frac{\partial \theta_2}{\partial y} & \frac{\partial \theta_3}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial z} & \frac{\partial \theta_1}{\partial z} & \frac{\partial \theta_2}{\partial z} & \frac{\partial \theta_3}{\partial z} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ \frac{\partial r}{\partial w} & \frac{\partial \theta_1}{\partial w} & \frac{\partial \theta_2}{\partial w} & \frac{\partial \theta_3}{\partial w} & \frac{\partial \phi}{\partial w} \\ \frac{\partial r}{\partial w_1} & \frac{\partial \theta_1}{\partial w_1} & \frac{\partial \theta_2}{\partial w_1} & \frac{\partial \theta_3}{\partial w_1} & \frac{\partial \phi}{\partial w_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

$X = A.R$ olarak yazılır.

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial x}{\partial \theta_2} d\theta_2 + \frac{\partial x}{\partial \theta_3} d\theta_3 + \frac{\partial x}{\partial \phi} d\phi$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial y}{\partial \theta_2} d\theta_2 + \frac{\partial y}{\partial \theta_3} d\theta_3 + \frac{\partial y}{\partial \phi} d\phi$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial r} dr + \frac{\partial z}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial z}{\partial \theta_2} d\theta_2 + \frac{\partial z}{\partial \theta_3} d\theta_3 + \frac{\partial z}{\partial \phi} d\phi$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial r} dr + \frac{\partial w}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial w}{\partial \theta_2} d\theta_2 + \frac{\partial w}{\partial \theta_3} d\theta_3 + \frac{\partial w}{\partial \phi} d\phi$$

$$dw_1 = \frac{\partial w_1}{\partial r} dr + \frac{\partial w_1}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial w_1}{\partial \theta_2} d\theta_2 + \frac{\partial w_1}{\partial \theta_3} d\theta_3 + \frac{\partial w_1}{\partial \phi} d\phi \qquad \text{(ek. 1.26)}$$

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ dw \\ dw_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x}{\partial \theta_3} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial y}{\partial \theta_3} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial z}{\partial \theta_3} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \\ \frac{\partial w}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial \theta_1} & \frac{\partial w}{\partial \theta_2} & \frac{\partial w}{\partial \theta_3} & \frac{\partial w}{\partial \phi} \\ \frac{\partial w_1}{\partial r} & \frac{\partial w_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial w_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial w_1}{\partial \theta_3} & \frac{\partial w_1}{\partial \phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d\theta_3 \\ d\phi \end{pmatrix}$$

$dx = Bdr$ olarak yazılır.

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x}dx + \frac{\partial r}{\partial y}dy + \frac{\partial r}{\partial z}dz + \frac{\partial r}{\partial w}dw + \frac{\partial r}{\partial w_1}dw_1$$

$$d\theta_1 = \frac{\partial \theta_1}{\partial x}dx + \frac{\partial \theta_1}{\partial y}dy + \frac{\partial \theta_1}{\partial z}dz + \frac{\partial \theta_1}{\partial w}dw + \frac{\partial \theta_1}{\partial w_1}dw_1$$

$$d\theta_2 = \frac{\partial \theta_2}{\partial x}dx + \frac{\partial \theta_2}{\partial y}dy + \frac{\partial \theta_2}{\partial z}dz + \frac{\partial \theta_2}{\partial w}dw + \frac{\partial \theta_2}{\partial w_1}dw_1$$

$$d\theta_3 = \frac{\partial \theta_3}{\partial x}dx + \frac{\partial \theta_3}{\partial y}dy + \frac{\partial \theta_3}{\partial z}dz + \frac{\partial \theta_3}{\partial w}dw + \frac{\partial \theta_3}{\partial w_1}dw_1$$

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}dz + \frac{\partial \phi}{\partial w}dw + \frac{\partial \phi}{\partial w_1}dw_1 \qquad \text{(ek. 1.27)}$$

(ek.1.27) deki denklemler matris biçiminde yazılırsa;

$$\begin{pmatrix} dr \\ d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d\theta_3 \\ d\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} & \frac{\partial r}{\partial w} & \frac{\partial r}{\partial w_1} \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial x} & \frac{\partial \theta_1}{\partial y} & \frac{\partial \theta_1}{\partial z} & \frac{\partial \theta_1}{\partial w} & \frac{\partial \theta_1}{\partial w_1} \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial x} & \frac{\partial \theta_2}{\partial x} & \frac{\partial \theta_2}{\partial z} & \frac{\partial \theta_2}{\partial w} & \frac{\partial \theta_2}{\partial w_1} \\ \frac{\partial \theta_3}{\partial x} & \frac{\partial \theta_3}{\partial y} & \frac{\partial \theta_3}{\partial z} & \frac{\partial \theta_3}{\partial w} & \frac{\partial \theta_3}{\partial w_1} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} & \frac{\partial \phi}{\partial w} & \frac{\partial \phi}{\partial w_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ dw \\ dw_1 \end{pmatrix}$$

dr = C dx

dr = $B^{-1}dx$

$C = \check{B}$

$A = (\widetilde{B^{-1}})$ olarak bulunur

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{bmatrix}$$

$a_1 = sin\theta_1 sin\theta_2 sin\theta_3 cos\phi$

$a_2 = \frac{1}{r} cos\theta_1 sin\theta_2 sin\theta_3 cos\phi,$

$$a_3 = \frac{1}{r}\frac{cos\theta_2 sin\theta_3 cos\phi}{sin\theta_1},$$

$$a_4 = \frac{1}{r}\frac{cos\theta_3 cos\phi}{sin\theta_1 sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_3}$$

$$a_5 = -\frac{1}{r}\frac{sin\phi}{sin\theta_1 sin\theta_2 sin\theta_3}$$

$$b_1 = sin\theta_1 sin\theta_2 sin\theta_3 sin\phi$$

$$b_2 = \frac{1}{r}cos\theta_1 sin\theta_2 sin\theta_3 sin\phi$$

$$b_3 = \frac{1}{r}\frac{cos\theta_2 sin\theta_3 sin\phi}{sin\theta_1}$$

$$b_4 = \frac{1}{r}\frac{cos\theta_3 sin\phi}{sin\theta_1 sin\theta_2}$$

$$b_5 = \frac{1}{r}\frac{cos\phi}{sin\theta_1 sin\theta_2 sin\theta_3}$$

$$c_1 = sin\theta_1 sin\theta_2 cos\theta_3$$

$$c_2 = \frac{1}{r}cos\theta_1 sin\theta_2 cos\theta_3\frac{\partial}{\partial\theta_1}$$

$$c_3 = \frac{1}{r}\frac{cos\theta_2 cos\theta_3}{sin\theta_1}$$

$$c_4 = -\frac{1}{r}\frac{sin\theta_3}{\sin\theta_1 \sin\theta_2}$$

$$c_5 = 0$$

$$d_1 = sin\theta_1 sin\theta_2 cos\theta_3$$

$$d_2 = \frac{1}{r}\cos\theta_1 \cos\theta_2$$

$$d_3 = -\frac{1}{r}\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}$$

$$d_4, d_5 = 0$$

$$e_1 = \cos\theta_1\frac{\partial}{\partial r}$$

$$e_2 = -\frac{1}{r}\sin\theta_1$$

$$e_3, e_4, e_5 = 0$$

Bu ifadeleri kullanarak ; $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial w}, \frac{\partial}{\partial w_1}$ ifadelerinin küresel koordinatlardaki değerleri bulunur.

$$\frac{\partial}{\partial x} = sin\theta_1 sin\theta_2 sin\theta_3 cos\phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} cos\theta_1 sin\theta_2 sin\theta_3 cos\phi \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \frac{1}{r}\frac{cos\theta_2 sin\theta_3 cos\phi}{sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial \theta_2} + \frac{1}{r}\frac{cos\theta_3 cos\phi}{sin\theta_1 sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial \theta_3} - \frac{1}{r}\frac{sin\phi}{sin\theta_1 sin\theta_2 sin\theta_3}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = sin\theta_1 sin\theta_2 sin\theta_3 sin\phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} cos\theta_1 sin\theta_2 sin\theta_3 sin\phi \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \frac{1}{r}\frac{cos\theta_2 sin\theta_3 sin\phi}{sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial \theta_2} + \frac{1}{r}\frac{cos\theta_3 sin\phi}{sin\theta_1 sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial \theta_3} + \frac{1}{r}\frac{cos\phi}{sin\theta_1 sin\theta_2 sin\theta_3}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = sin\theta_1 sin\theta_2 cos\theta_3 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} cos\theta_1 sin\theta_2 cos\theta_3 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \frac{1}{r}\frac{cos\theta_2 cos\theta_3}{sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial \theta_2} - \frac{1}{r}\frac{sin\theta_3}{\sin\theta_1 \sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial \theta_3}$$

$$\frac{\partial}{\partial w} = \sin\theta_1 \cos\theta_2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta_1 \cos\theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_1} - \frac{1}{r}\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial \theta_2}$$

$$\frac{\partial}{\partial w_1} = \cos\theta_1 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} \qquad \text{(ek. 1.28)}$$

Bulunan (ek.1.28) ifadeleri kullanarak istenilen (ek. 1.23)değerleri yazılabilir;

$$L_{12} = i\hbar\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$L_{13} = i\hbar(-\cos\phi \frac{\partial}{\partial \theta_3} + \frac{\cos\theta_3 sin\phi}{\sin\theta_3}\frac{\partial}{\partial \phi})$$

$$L_{14} = i\hbar\left(\sin\theta_3 \cos\phi \frac{\partial}{\partial \theta_3} - \frac{\cos\theta_2 \cos\theta_3 \cos\phi}{\sin\theta_1 \sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial \theta_3} + \frac{\cos\theta_2 \sin\phi}{sin\theta_2 \sin\theta_3}\frac{\partial}{\partial \phi}\right)$$

$$L_{15} = i\hbar\left(-\sin\theta_2 \sin\theta_3 \cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta_1} - \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3 \cos\phi}{\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_2} - \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\phi}{\sin\theta_1 \sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_3} + \frac{\cos\theta_1 \sin\phi}{\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$L_{23} = i\hbar\left(-\sin\phi \frac{\partial}{\partial\theta_3} - \frac{\cos\theta_3 \cos\phi}{\sin\theta_3}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$L_{24} = i\hbar\left(-\sin\theta_3 \sin\phi \frac{\partial}{\partial\theta_2} - \frac{\cos\theta_2 \cos\theta_3 \sin\phi}{\sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_3} - \frac{\cos\theta_2 \cos\phi}{\sin\theta_2 \sin\theta_3}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$L_{25} = i\hbar\left(-\sin\theta_2 \sin\theta_3 \sin\phi \frac{\partial}{\partial\theta_1} - \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3 \sin\phi}{\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_2} - \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2 \sin\phi}{\sin\theta_1 \sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_3} - \frac{\cos\theta_1 \cos\phi}{\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$L_{34} = i\hbar\left(-\cos\theta_3 \frac{\partial}{\partial\theta_2} + \frac{\cos\theta_2 \sin\theta_3}{\sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_3}\right)$$

$$L_{35} = i\hbar\left(-\sin\theta_2 \cos\theta_3 \frac{\partial}{\partial\theta_1} - \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3}{\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_2} + \frac{\cos\theta_1 \sin\theta_3}{\sin\theta_1 \sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_3}\right)$$

$$L_{45} = i\hbar\left(-\cos\theta_2 \frac{\partial}{\partial\theta_1} + \frac{\cos\theta_1 \sin\theta_2}{\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right)$$

Bulunan ifadeler kullanarak beşinci boyut için yörüngesel açısal momentum hesaplanır;

$$\vec{L_5}^{\,2} = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin^3\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^3\theta_1 \frac{\partial}{\partial\theta_1}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin^2\theta_2 \frac{\partial}{\partial\theta_2}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2 \sin\theta_3}\frac{\partial}{\partial\theta_3}\left(\sin\theta_3 \frac{\partial}{\partial\theta_3}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2 \sin^2\theta_3}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) \quad \text{(ek. 1.29)}$$

$$\vec{L_5}^{\,2} = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin^3\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^3\theta_1 \frac{\partial}{\partial\theta_1}\right)\right) - \frac{\vec{L_4}^{\,2}}{\sin^2\theta_1} \quad \text{(ek. 1.30)}$$

Olarak da yazılabilir.

Şimdi (ek.1.1) ifadesini kullanarak altı boyutta yörüngesel açısal momentum ifadesinin karesini hesaplayacağız.

$x = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4\cos\phi$, $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 \in [0, \pi]$

$y = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4\sin\phi$, $\phi \in [0, 2\pi]$

$z = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_4$, $0 < r < \infty$

$w = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3$

$w_1 = r\sin\theta_1\cos\theta_2$

$w_2 = r\cos\theta_1$

$$L_6{}^2 = L_{12}{}^2 + L_{13}{}^2 + L_{14}{}^2 + L_{15}{}^2 + L_{16}{}^2 + L_{23}{}^2 + L_{24}{}^2 + L_{25}{}^2 + L_{26}{}^2 + L_{34}{}^2 + L_{35}{}^2 + L_{36}{}^2 + L_{45}{}^2 + L_{46}{}^2 + L_{56}{}^2 \quad \text{(ek. 1.31)}$$

$$L_{12} = i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right), \quad L_{24} = i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial w} - w\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad L_{13} = i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$L_{25} = i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial w_1} - w_1\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad L_{14} = i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial w} - w\frac{\partial}{\partial x}\right), \quad L_{34} = i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial w} - w\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$L_{15} = i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial w_1} - w_1\frac{\partial}{\partial x}\right), \quad L_{35} = i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial w_1} - w_1\frac{\partial}{\partial z}\right), \quad L_{16} = i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial w_2} - w_2\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$L_{26} = i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial w_2} - w_2\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad L_{23} = i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad L_{45} = i\hbar\left(w\frac{\partial}{\partial p} - p\frac{\partial}{\partial w}\right)$$

$$L_{36} = i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial w_2} - w_2\frac{\partial}{\partial z}\right), L_{46} = i\hbar\left(w\frac{\partial}{\partial w_2} - w_2\frac{\partial}{\partial w}\right), L_{56} = i\hbar\left(w_1\frac{\partial}{\partial w_2} - w_2\frac{\partial}{\partial w_1}\right) \quad \text{(ek.1.32)}$$

olarak tanımlanırlar.

Kartezyen koordinatlarda verilen işlemcilerin küresel koordinatlarda tanımlanması gerekiyor. Bunun için altı boyutta küresel koordinatlar kullanılır;

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial \theta_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta_1}+\frac{\partial \theta_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta_2}+\frac{\partial \theta_3}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta_3}+\frac{\partial \theta_4}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta_4}+\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial \theta_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta_1}+\frac{\partial \theta_2}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta_2}+\frac{\partial \theta_3}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta_3}+\frac{\partial \theta_4}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta_4}+\frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial \theta_1}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \theta_1}+\frac{\partial \theta_2}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \theta_2}+\frac{\partial \theta_3}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \theta_3}+\frac{\partial \theta_4}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \theta_4}+\frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial w}=\frac{\partial r}{\partial w}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial \theta_1}{\partial w}\frac{\partial}{\partial \theta_1}+\frac{\partial \theta_2}{\partial w}\frac{\partial}{\partial \theta_2}+\frac{\partial \theta_3}{\partial w}\frac{\partial}{\partial \theta_3}+\frac{\partial \theta_4}{\partial w}\frac{\partial}{\partial \theta_4}+\frac{\partial \phi}{\partial w}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial w_1}=\frac{\partial r}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial \theta_1}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial \theta_1}+\frac{\partial \theta_2}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial \theta_2}+\frac{\partial \theta_3}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial \theta_3}+\frac{\partial \theta_4}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial \theta_4}+\frac{\partial \phi}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial w_2}=\frac{\partial r}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial \theta_1}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial \theta_1}+\frac{\partial \theta_2}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial \theta_2}+\frac{\partial \theta_3}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial \theta_3}+\frac{\partial \theta_4}{\partial w_2}\frac{\partial}{\partial \theta_4}+\frac{\partial \phi}{\partial w_1}\frac{\partial}{\partial \phi} \qquad \text{(ek. 1.33)}$$

Yukarıdaki (ek.1.33) ifadeler matris biçiminde yazılırsa;

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial w} \\ \frac{\partial}{\partial w_1} \\ \frac{\partial}{\partial w_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial \theta_1}{\partial x} & \frac{\partial \theta_2}{\partial x} & \frac{\partial \theta_3}{\partial x} & \frac{\partial \theta_4}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial \theta_1}{\partial y} & \frac{\partial \theta_2}{\partial y} & \frac{\partial \theta_3}{\partial y} & \frac{\partial \theta_4}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial z} & \frac{\partial \theta_1}{\partial z} & \frac{\partial \theta_2}{\partial z} & \frac{\partial \theta_3}{\partial z} & \frac{\partial \theta_4}{\partial z} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ \frac{\partial r}{\partial w} & \frac{\partial \theta_1}{\partial w} & \frac{\partial \theta_2}{\partial w} & \frac{\partial \theta_3}{\partial w} & \frac{\partial \theta_4}{\partial w} & \frac{\partial \phi}{\partial w} \\ \frac{\partial r}{\partial w_1} & \frac{\partial \theta_1}{\partial w_1} & \frac{\partial \theta_2}{\partial w_1} & \frac{\partial \theta_3}{\partial w_1} & \frac{\partial \theta_4}{\partial w_1} & \frac{\partial \phi}{\partial w_1} \\ \frac{\partial r}{\partial w_2} & \frac{\partial \theta_1}{\partial w_2} & \frac{\partial \theta_2}{\partial w_2} & \frac{\partial \theta_3}{\partial w_2} & \frac{\partial \theta_4}{\partial w_2} & \frac{\partial \phi}{\partial w_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial}{\partial \theta_4} \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

$$X = A.R$$

$$dx=\frac{\partial x}{\partial r}dr+\frac{\partial x}{\partial \theta_1}d\theta_1+\frac{\partial x}{\partial \theta_2}d\theta_2+\frac{\partial x}{\partial \theta_3}d\theta_3+\frac{\partial x}{\partial \theta_4}d\theta_4+\frac{\partial x}{\partial \phi}d\phi$$

$$dy=\frac{\partial y}{\partial r}dr+\frac{\partial y}{\partial \theta_1}d\theta_1+\frac{\partial y}{\partial \theta_2}d\theta_2+\frac{\partial y}{\partial \theta_3}d\theta_3+\frac{\partial y}{\partial \theta_4}d\theta_4+\frac{\partial y}{\partial \phi}d\phi$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial r}dr + \frac{\partial z}{\partial \theta_1}d\theta_1 + \frac{\partial z}{\partial \theta_2}d\theta_2 + \frac{\partial z}{\partial \theta_3}d\theta_3 + \frac{\partial z}{\partial \theta_4}d\theta_4 + \frac{\partial z}{\partial \phi}d\phi$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial r}dr + \frac{\partial w}{\partial \theta_1}d\theta_1 + \frac{\partial w}{\partial \theta_2}d\theta_2 + \frac{\partial w}{\partial \theta_3}d\theta_3 + \frac{\partial w}{\partial \theta_4}d\theta_4 + \frac{\partial w}{\partial \phi}d\phi$$

$$dw_1 = \frac{\partial w_1}{\partial r}dr + \frac{\partial w_1}{\partial \theta_1}d\theta_1 + \frac{\partial w_1}{\partial \theta_2}d\theta_2 + \frac{\partial w_1}{\partial \theta_3}d\theta_3 + \frac{\partial w_1}{\partial \theta_4}d\theta_4 + \frac{\partial w_1}{\partial \phi}d\phi$$

$$dw_2 = \frac{\partial w_2}{\partial r}dr + \frac{\partial w_2}{\partial \theta_1}d\theta_1 + \frac{\partial w_2}{\partial \theta_2}d\theta_2 + \frac{\partial w_2}{\partial \theta_3}d\theta_3 + \frac{\partial w_2}{\partial \theta_4}d\theta_4 + \frac{\partial w_2}{\partial \phi}d\phi \qquad \text{(ek. 1.34)}$$

(ek.1.34) de yazılan ifadeler matris biçiminde yazılırsa;

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ dw \\ dw_1 \\ dw_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x}{\partial \theta_3} & \frac{\partial x}{\partial \theta_4} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial y}{\partial \theta_3} & \frac{\partial y}{\partial \theta_4} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial z}{\partial \theta_3} & \frac{\partial z}{\partial \theta_4} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \\ \frac{\partial w}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial \theta_1} & \frac{\partial w}{\partial \theta_2} & \frac{\partial w}{\partial \theta_3} & \frac{\partial w}{\partial \theta_4} & \frac{\partial w}{\partial \phi} \\ \frac{\partial w_1}{\partial r} & \frac{\partial w_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial w_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial w_1}{\partial \theta_3} & \frac{\partial w_1}{\partial \theta_4} & \frac{\partial w_1}{\partial \phi} \\ \frac{\partial w_2}{\partial r} & \frac{\partial w_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial w_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial w_2}{\partial \theta_3} & \frac{\partial w_2}{\partial \theta_4} & \frac{\partial w_2}{\partial \phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d\theta_3 \\ d\theta_4 \\ d\phi \end{pmatrix}$$

$$dx = B.dr$$

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x}dx + \frac{\partial r}{\partial y}dy + \frac{\partial r}{\partial z}dz + \frac{\partial r}{\partial w}dw + \frac{\partial r}{\partial w_1}dw_1 + \frac{\partial r}{\partial w_2}dw_2$$

$$d\theta_1 = \frac{\partial \theta_1}{\partial x}dx + \frac{\partial \theta_1}{\partial y}dy + \frac{\partial \theta_1}{\partial z}dz + \frac{\partial \theta_1}{\partial w}dw + \frac{\partial \theta_1}{\partial w_1}dw_1 + \frac{\partial \theta_1}{\partial w_2}dw_2$$

$$d\theta_2 = \frac{\partial \theta_2}{\partial x}dx + \frac{\partial \theta_2}{\partial y}dy + \frac{\partial \theta_2}{\partial z}dz + \frac{\partial \theta_2}{\partial w}dw + \frac{\partial \theta_2}{\partial w_1}dw_1 + \frac{\partial \theta_2}{\partial w_2}dw_2$$

$$d\theta_3 = \frac{\partial \theta_3}{\partial x}dx + \frac{\partial \theta_3}{\partial y}dy + \frac{\partial \theta_3}{\partial z}dz + \frac{\partial \theta_3}{\partial w}dw + \frac{\partial \theta_3}{\partial w_1}dw_1 + \frac{\partial \theta_3}{\partial w_2}dw_2$$

$$d\theta_4 = \frac{\partial \theta_4}{\partial x}dx + \frac{\partial \theta_4}{\partial y}dy + \frac{\partial \theta_4}{\partial z}dz + \frac{\partial \theta_4}{\partial w}dw + \frac{\partial \theta_4}{\partial w_1}dw_1 + \frac{\partial \theta_4}{\partial w_2}dw_2$$

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}dz + \frac{\partial \phi}{\partial w}dw + \frac{\partial \phi}{\partial w_1}dw_1 + \frac{\partial \phi}{\partial w_2}dw_2 \qquad \text{(ek. 1.35)}$$

(ek.1.35) ifadeleri matris biçiminde yazılırsa;

$$\begin{pmatrix} dr \\ d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d\theta_3 \\ d\theta_4 \\ d\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} & \frac{\partial r}{\partial w} & \frac{\partial r}{\partial w_1} & \frac{\partial r}{\partial w_2} \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial x} & \frac{\partial \theta_1}{\partial y} & \frac{\partial \theta_1}{\partial z} & \frac{\partial \theta_1}{\partial w} & \frac{\partial \theta_1}{\partial w_1} & \frac{\partial \theta_1}{\partial w_2} \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial x} & \frac{\partial \theta_2}{\partial y} & \frac{\partial \theta_2}{\partial z} & \frac{\partial \theta_2}{\partial w} & \frac{\partial \theta_2}{\partial w_1} & \frac{\partial \theta_2}{\partial w_2} \\ \frac{\partial \theta_3}{\partial x} & \frac{\partial \theta_3}{\partial y} & \frac{\partial \theta_3}{\partial z} & \frac{\partial \theta_3}{\partial w} & \frac{\partial \theta_3}{\partial w_1} & \frac{\partial \theta_3}{\partial w_2} \\ \frac{\partial \theta_4}{\partial x} & \frac{\partial \theta_4}{\partial y} & \frac{\partial \theta_4}{\partial z} & \frac{\partial \theta_4}{\partial w} & \frac{\partial \theta_4}{\partial w_1} & \frac{\partial \theta_4}{\partial w_2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} & \frac{\partial \phi}{\partial w} & \frac{\partial \phi}{\partial w_1} & \frac{\partial \phi}{\partial w_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ dw \\ dw_1 \\ dw_2 \end{pmatrix}$$

$dr = C\ dx$

dr = C dx

dr = $B^{-1}dx$

$C = \check{B}$,

$A = (\widetilde{B^{-1}})$ olarak bulunur.

$$\frac{\partial}{\partial x} = -\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4 \cos\phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4 \cos\phi \frac{\partial}{\partial \theta_1} - \frac{1}{r}\frac{\cos\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4 \cos\phi}{\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial \theta_2} - \frac{1}{r}\frac{\cos\theta_3 \sin\theta_4 \cos\phi}{\sin\theta_1 \sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial \theta_3} - \frac{1}{r}\frac{\cos\theta_4 \cos\phi}{\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3}\frac{\partial}{\partial \theta_4} + \frac{1}{r}\frac{\sin\phi}{\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = -\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4 \sin\phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4 \sin\phi \frac{\partial}{\partial \theta_1} - \frac{1}{r}\frac{\cos\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4 \sin\phi}{\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial \theta_2} - \frac{1}{r}\frac{\cos\theta_3 \sin\theta_4 \sin\phi}{\sin\theta_1 \sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial \theta_3} - \frac{1}{r}\frac{\cos\theta_4 \sin\phi}{\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3}\frac{\partial}{\partial \theta_4} - \frac{1}{r}\frac{\cos\phi}{\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = -\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \cos\theta_4 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \cos\theta_4 \frac{\partial}{\partial \theta_1}$$
$$-\frac{1}{r}\frac{\cos\theta_2 \sin\theta_3 \cos\theta_4}{\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial \theta_2} - \frac{1}{r}\frac{\cos\theta_3 \cos\theta_4}{\sin\theta_1 \sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial \theta_3}$$
$$+\frac{1}{r}\frac{\sin\theta_4}{\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3}\frac{\partial}{\partial \theta_4}$$

$$\frac{\partial}{\partial w} = -\sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\cos\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 \frac{\partial}{\partial \theta_1} - \frac{1}{r}\frac{\cos\theta_2 \cos\theta_3}{\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial \theta_2}$$
$$+\frac{1}{r}\frac{\sin\theta_3}{\sin\theta_1 \sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial \theta_3}$$

$$\frac{\partial}{\partial w_1} = -\sin\theta_1 \cos\theta_2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\cos\theta_1 \cos\theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_1}$$
$$+\frac{1}{r}\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial \theta_2}$$

$$\frac{\partial}{\partial w_2} = -\cos\theta_1 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\sin\theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} \qquad \text{(ek. 1.36)}$$

Olarak bulunur. (ek.1.36) ifadeleri kullanılarak işlemciler hesaplanır. Bu ifadeler (ek.1.31) da yerlerine konularak istenilen değerleri yazılabilir;

$$L_{12} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$L_{13} = i\hbar(\cos\phi \frac{\partial}{\partial \theta_4} - \frac{\cos\theta_4 \, sin\phi}{\sin\theta_4}\frac{\partial}{\partial \phi})$$

$$L_{14} = i\hbar\left(\sin\theta_4 \cos\phi \frac{\partial}{\partial \theta_3} + \frac{\cos\theta_3 \cos\theta_4 \cos\phi}{\sin\theta_3}\frac{\partial}{\partial \theta_4} - \frac{\cos\theta_3 \sin\phi}{sin\theta_2 \sin\theta_4}\frac{\partial}{\partial \phi}\right)$$

$$L_{15} = i\hbar\left(\sin\theta_3 \sin\theta_4 \cos\phi \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \frac{\cos\theta_2 \cos\theta_3 \sin\theta_4 \cos\phi}{\sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial \theta_3}\right.$$
$$\left.+\frac{\cos\theta_2 \cos\theta_4 \cos\phi}{\sin\theta_2 \sin\theta_3}\frac{\partial}{\partial \theta_4} - \frac{\cos\theta_2 \sin\phi}{\sin\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4}\frac{\partial}{\partial \phi}\right)$$

$$L_{16} = i\hbar\left(\sin\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4 \cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta_1} + \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4 \cos\phi}{\sin\theta_1} \frac{\partial}{\partial\theta_2} + \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_3 \sin\theta_4 \cos\phi}{\sin\theta_1 \sin\theta_2} \frac{\partial}{\partial\theta_3} + \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_4 \cos\phi}{\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3} \frac{\partial}{\partial\theta_4} - \frac{\cos\theta_1 \sin\phi}{\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4} \frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$L_{23} = i\hbar\left(\sin\phi \frac{\partial}{\partial\theta_4} + \frac{\cos\theta_4 \cos\phi}{\sin\theta_4} \frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$L_{24} = i\hbar\left(\sin\theta_4 \sin\phi \frac{\partial}{\partial\theta_3} + \frac{\cos\theta_3 \cos\theta_4 \sin\phi}{\sin\theta_3} \frac{\partial}{\partial\theta_4} + \frac{\cos\theta_3 \cos\phi}{\sin\theta_3 \sin\theta_4} \frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$L_{25} = i\hbar\left(\sin\theta_3 \sin\theta_4 \sin\phi \frac{\partial}{\partial\theta_2} + \frac{\cos\theta_2 \cos\theta_3 \sin\theta_4 \sin\phi}{\sin\theta_2} \frac{\partial}{\partial\theta_3} + \frac{\cos\theta_2 \cos\theta_4 \sin\phi}{\sin\theta_2 \sin\theta_3} \frac{\partial}{\partial\theta_4} + \frac{\cos\theta_2 \cos\phi}{\sin\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4} \frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$L_{26} = i\hbar\left(\sin\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4 \sin\phi \frac{\partial}{\partial\theta_1} + \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4 \sin\phi}{\sin\theta_1} \frac{\partial}{\partial\theta_2} + \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_3 \sin\theta_4 \sin\phi}{\sin\theta_1 \sin\theta_2} \frac{\partial}{\partial\theta_3} + \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_4 \sin\phi}{\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3} \frac{\partial}{\partial\theta_4} + \frac{\cos\theta_1 \cos\phi}{\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4} \frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$L_{34} = i\hbar\left(-\cos\theta_4 \frac{\partial}{\partial\theta_3} + \frac{\cos\theta_3 \sin\theta_4}{\sin\theta_3} \frac{\partial}{\partial\theta_4}\right)$$

$$L_{35} = i\hbar\left(-\sin\theta_3 \cos\theta_4 \frac{\partial}{\partial\theta_2} - \frac{\cos\theta_2 \cos\theta_3 \cos\theta_4}{\sin\theta_2} \frac{\partial}{\partial\theta_3} + \frac{\cos\theta_2 \sin\theta_4}{\sin\theta_2 \sin\theta_3} \frac{\partial}{\partial\theta_4}\right)$$

$$L_{36} = i\hbar\left(\sin\theta_2 \sin\theta_3 \cos\theta_4 \frac{\partial}{\partial\theta_1} + \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3 \cos\theta_4}{\sin\theta_1} \frac{\partial}{\partial\theta_2} + \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_3 \cos\theta_4}{\sin\theta_1 \sin\theta_2} \frac{\partial}{\partial\theta_3} - \frac{\cos\theta_1 \sin\theta_4}{\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3} \frac{\partial}{\partial\theta_3}\right)$$

$$L_{45} = i\hbar\left(\cos\theta_3 \frac{\partial}{\partial\theta_2} - \frac{\cos\theta_2 \sin\theta_3}{\sin\theta_2} \frac{\partial}{\partial\theta_3}\right)$$

$$L_{46} = i\hbar\left(\sin\theta_2 \cos\theta_3 \frac{\partial}{\partial\theta_1} \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3}{\sin\theta_1} \frac{\partial}{\partial\theta_2} - \frac{\cos\theta_1 \sin\theta_3}{\sin\theta_1 \sin\theta_2} \frac{\partial}{\partial\theta_3}\right)$$

$$L_{56} = i\hbar\left(\cos\theta_2 \frac{\partial}{\partial\theta_1} - \frac{\cos\theta_1 \sin\theta_2}{\sin\theta_1} \frac{\partial}{\partial\theta_2}\right) \qquad \text{(ek. 1.37)}$$

Bulunan ifadeleri kullanarak altı boyutlu sistem için yörüngesel açısal momentum ifadesi aşağıdaki gibi bulunur;

$$\vec{L}_6{}^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin^4\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^4\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta_1\sin^3\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin^3\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right)\right.$$
$$+\frac{1}{\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3}\frac{\partial}{\partial\theta_3}\left(\sin^2\theta_3\frac{\partial}{\partial\theta_3}\right)$$
$$+\frac{1}{\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3\sin\theta_4}\frac{\partial}{\partial\theta_4}\left(\sin\theta_4\frac{\partial}{\partial\theta_4}\right)$$
$$\left.+\frac{1}{\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3\sin^2\theta_4}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) \qquad (\text{ek. } 1.38)$$

olarak bulunur. Bu ifade düzenlenirse;

$$\vec{L}_6{}^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin^4\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^4\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right)\right)-\frac{\vec{L}_5{}^2}{\sin^2\theta_1} \qquad (\text{ek. } 1.39)$$

Bu şekilde de yazılabilir.

Son olarak yaptığımız hesaplamalarda görüldüğü üzere yörüngesel açısal momentum ifadesinin karesinin bir genelleştirilmesi yapılabilir. Bu genelleştirmede;

$$\vec{L}_d{}^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin^{d-2}\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^{d-2}\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right)\right)-\frac{\vec{L}_{d-1}{}^2}{\sin^2\theta_1} \qquad (\text{ek. } 1.40)$$

gibidir.

EK.2. KÜRESEL VE PARABOLİK KOORDİNATLARDA LAPLASYEN HESABI

Bu bölümde küresel koordinatlarda $d(d \geq 2)$ boyutlarda Laplasyen değerleri hesaplanacaktır. Hesaplamalar yapılırken;

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\sqrt{g} g^{\mu\gamma} \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \right) \quad \text{(ek. 2.1)}$$

(Bradbury, 1961) denklemi kullanılacaktır.

İlk olarak iki boyutlu Laplasyen değerini hesaplayalım.

$x = \mathrm{r}\cos\theta \quad , 0 < \mathrm{r} < \infty$

$y = r\sin\theta \quad , \ \theta \in [0, \pi]$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad \text{(ek. 2.2)}$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

$$g_{\mu\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix} \quad \text{(ek. 2.3)}$$

Yazılan $g_{\mu\gamma}$ ifadesini kullanarak $g^{\mu\gamma}$ ifadesinin yazılması gerekiyor.

$$g^{\mu\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{bmatrix} \quad \text{(ek. 2.4)}$$

$$det g_{\mu\gamma} = g = r^2 \quad \text{(ek. 2.5)}$$

$$\sqrt{g} = r \quad \text{(ek. 2.6)}$$

Bulduğumuz sonuçları Laplasyan denkleminde yerine yazarsak;

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad \text{(ek. 2.7)}$$

olarak bulunur.

(ek.2.1) denklemini kullanarak üç boyut için Laplasyen değeri hesaplanırsa;

$x = r\ \sin\theta\cos\phi \quad , \quad \theta \in [0,\pi]$

$y = r\sin\theta\sin\phi \quad , \quad \phi \in [0,2\pi]$

$z = r\ \cos\theta \quad , \quad 0 < r < \infty$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad \text{(ek. 2.8)}$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2$$

$$g_{\mu\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix} \qquad \text{(ek.2.9)}$$

Yazmış olduğumuz $g_{\mu\gamma}$ ifadesini kullanarak $g^{\mu\gamma}$ ifadesinin yazılması gerekiyor.

$$g^{\mu\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2\sin^2\theta \end{bmatrix} \qquad \text{(ek. 2.10)}$$

$detg_{\mu\gamma} = g$

(Denkleminde verilen ifade üç boyut için hesaplandığında)

$$detg_{\mu\gamma} = g = 1.\begin{vmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2\theta \end{vmatrix}$$

$$detg_{\mu\gamma} = g = r^4\sin^2\theta \qquad \text{(ek. 2.11)}$$

$$\sqrt{g} = r^2\sin\theta \qquad \text{(ek. 2.12)}$$

Bulunan ifadeler Laplasyan denkleminde eyerine konulursa;

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \qquad \text{(ek. 2.13)}$$

Bulunan Laplasyan ifadesi daha önce hesapladığımız. Yörüngesel açısal momentum ifadesini içermektedir. Laplasyan bu ifadeye göre düzenlenirse;

$$\vec{\nabla}_r^{\,2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\overrightarrow{L_3}^2}{\hbar^2 r^2} \qquad \text{(ek. 2.14)}$$

Olarak bulunur.

(ek.2.1) denklemi kullanılarak dört boyut için Laplasyen hesaplanırsa;

$x = r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\phi \qquad \theta_1, \theta_2 \in [0, \pi]$

$y = r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\phi \qquad \phi \in [0, 2\pi]$

$z = r \sin\theta_1 \cos\theta_2 \qquad 0 < r < \infty$

$w = r \cos\theta_1$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 \qquad \text{(ek. 2.15)}$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d{\theta_1}^2 + r^2 \sin^2\theta_1 d{\theta_2}^2 + r^2 \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2 \, d\phi^2$$

$$g_{\mu\gamma} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$$

$a_1 = 1$, $b_2 = r^2$, $c_3 = r^2 \sin^2\theta_1$, $d_4 = r^2 \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2$. Diğer terimler sıfırdır.

Yazmış olduğumuz $g_{\mu\gamma}$ ifadesini kullanarak $g^{\mu\gamma}$ ifadesinin yazılması gerekiyor.

$$g^{\mu\gamma} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$$

$a_1 = 1$, $b_2 = 1/r^2$, $c_3 = 1/r^2 \sin^2\theta_1$, $d_4 = 1/r^2 \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2$. Olarak yazılır ve diğer terimler sıfırdır.

$detg_{\mu\gamma} = g$ (Denkleminde verilen ifade dört boyut için hesaplandığında)

$detg_{\mu\gamma} = r^6 \sin^4\theta_1 \sin^2\theta_2$

$$\sqrt{g} = r^3 \sin^2\theta_1 \sin\theta_2 \qquad \text{(ek. 2.16)}$$

Bulunan bu ifadeler Laplasyan denkleminde yerine yazılırsa;

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left\{\frac{1}{\sin^2\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^2\theta_1 \frac{\partial}{\partial\theta_1}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta_1 \sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin\theta_2 \frac{\partial}{\partial\theta_2}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right\} \qquad \text{(ek. 1.17)}$$

Bulunan Laplasyan ifadesi daha önce hesapladığımız. Yörüngesel açısal momentum ifadesini içermektedir. Laplasyan bu ifadeye göre düzenlenirse;

$$\vec{\nabla}_4{}^2 = \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\vec{L}_4{}^2}{r^2\hbar^2} \qquad \text{(ek. 2.18)}$$

Olarak yazılır.

(ek.2.1) denklemini kullanarak beş boyut için Laplasyen ifadesi hesaplanırsa;

$x = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cos\phi \qquad \theta_1,\theta_2,\theta_3 \in [0,\pi]$

$y = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\phi \qquad \phi \in [0,2\pi]$

$z = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \qquad 0 < r < \infty$

$w = r\sin\theta_1\cos\theta_2$

$w_1 = r\cos\theta_1$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 + dw_1{}^2 \qquad \text{(ek. 2.19)}$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta_1{}^2 + r^2\sin^2\theta_1\, d\theta_2{}^2 + r^2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\, d\theta_3{}^2 + r^2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3 d\phi^2$$

$$g_{\mu\gamma} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{bmatrix}$$

$a_1 = 1\,,\ b_2 = r^2\,,\ c_3 = r^2\sin^2\theta_1,\ d_4 = r^2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2$

$e_5 = r^2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3$ ve diğer terimler sıfırdır.

Yazmış olduğumuz $g_{\mu\gamma}$ ifadesini kullanarak $g^{\mu\gamma}$ ifadesinin yazılması gerekiyor.

$$g^{\mu\gamma} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{bmatrix}$$

$a_1 = 1\,,\ b_2 = 1/r^2\,,\ c_3 = 1/r^2\sin^2\theta_1,\ d_4 = 1/r^2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\ \ e_5 = 1/r^2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3$ olarak yazılır ve diğer terimler sıfırdır.

$detg_{\mu\gamma} = g$ (Denkleminde verilen ifade beş boyut için hesaplandığında)

$detg_{\mu\gamma} = r^8 \sin^6\theta_1 \sin^4\theta_2 \sin^2\theta_3$

$$\sqrt{g} = r^4 \sin^3\theta_1 \sin^2\theta_2 \sin\theta_3 \qquad \text{(ek. 2.20)}$$

Bulunan bu ifadeler Laplasyan denkleminde yerine yazılırsa;

$$\vec{\nabla}^2 = = \frac{1}{r^4}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^4\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left\{\frac{1}{\sin^3\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^3\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin^2\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\sin\theta_3}\frac{\partial}{\partial\theta_3}\left(\sin\theta_3\frac{\partial}{\partial\theta_3}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right\}$$

Bulunan Laplasyan ifadesi daha önce hesapladığımız. Yörüngesel açısal momentum ifadesini içermektedir. Laplasyan bu ifadeye göre düzenlenirse;

$$\vec{\nabla}_5{}^2 = \frac{1}{r^4}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^4\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\vec{L}_5{}^2}{r^2\hbar^2} \qquad \text{(ek. 2.21)}$$

olarak yazılır.

(ek.2.1) denklemi kullanılarak altı boyut için Laplasyen ifadesi hesaplanırsa;

$x = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4\cos\phi$, $\quad \theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4 \in [0,\pi]$

$y = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4\sin\phi$, $\quad \phi \in [0,2\pi]$

$z = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_4$, $\quad 0 < r < \infty$

$w = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3$

$w_1 = r\sin\theta_1\cos\theta_2$

$w_2 = r\cos\theta_1$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 + dw_1{}^2 + dw_2{}^2 \qquad \text{(ek. 2.22)}$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta_1{}^2 + r^2\sin^2\theta_1\, d\theta_2{}^2 + r^2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\, d\theta_3{}^2 + r^2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3 d\theta_4{}^2 + r^2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3\sin^2\theta_4\, d\phi^2$$

$$g_{\mu\gamma} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & g_6 \end{bmatrix}$$

$a_1 = 1\ ,\ b_2 = r^2\ , c_3 =\ r^2 \sin^2\theta_1, d_4 = r^2 \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2$

$e_5 = r^2 \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2 \sin^2\theta_3\ g_6 = r^2 \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2 \sin^2\theta_3 \sin^2\theta_4$ ve diğer terimler sıfırdır.

$g_{\mu\gamma}$ matrisi $g^{\mu\gamma}$ olarak yazılırsa

$$g^{\mu\gamma} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & g_6 \end{bmatrix}$$

$a_1 = 1\ ,\ b_2 = 1/r^2\ , c_3 =\ 1/r^2 \sin^2\theta_1, d_4 = 1/r^2 \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2\ \ e_5 = 1/r^2 \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2 \sin^2\theta_3\ g_6 = 1/r^2 \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2 \sin^2\theta_3 \sin^2\theta_4$ Olarak yazılır ve diğer terimler sıfırdır.

$detg_{\mu\gamma} = g$ (Denkleminde verilen ifade altı boyut için hesaplandığında)

$detg_{\mu\gamma} = r^{10} \sin^8\theta_1 \sin^6\theta_2 \sin^4\theta_3 \sin^2\theta_4$

$$\sqrt{g} = r^5 \sin^4\theta_1 \sin^3\theta_2 \sin^2\theta_3 \sin\theta_4 \qquad \text{(ek. 2.23)}$$

Bulunan bu ifadeler Laplasyan denkleminde yerine yazılırsa;

$$\vec{\nabla}^2$$
$$= \frac{1}{r^5}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^5 \frac{\partial}{\partial r}\right)$$
$$+ \frac{1}{r^2}\left\{\frac{1}{\sin^4\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^4\theta_1 \frac{\partial}{\partial\theta_1}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta_1 \sin^3\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin^3\theta_2 \frac{\partial}{\partial\theta_2}\right)\right.$$
$$+ \frac{1}{\sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2 \sin^2\theta_3}\frac{\partial}{\partial\theta_3}\left(\sin^2\theta_3 \frac{\partial}{\partial\theta_3}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2 \sin^2\theta_3 \sin\theta_4}\left(\sin\theta_4 \frac{\partial}{\partial\theta_4}\right)$$
$$\left. + \frac{1}{\sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2 \sin^2\theta_3 \sin^2\theta_4}\ \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right\} \qquad \text{(ek. 2.24)}$$

Bulunan Laplasyan ifadesi daha önce hesapladığımız. Yörüngesel açısal momentum ifadesini içermektedir. Laplasyan bu ifadeye göre düzenlenirse;

$$\vec{\nabla}_6^{\,2} = \frac{1}{r^5}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^5\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\vec{L}_6^{\,2}}{r^2\hbar^2} \qquad \text{(ek. 2.25)}$$

Olarak hesaplanır.

Yapılan hesaplamalar sonucunda Laplasyan ifadesi için bir genelleştirme yapılabilir;

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r^{d-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{d-1}\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\vec{L}_d^{\,2}}{r^2\hbar^2} \qquad \text{(ek. 2.26)}$$

olur.

Şimdi (ek.2.1) denklemini kullanarak parabolik koordinatlarda $d(d \geq 2)$ boyutlarda Laplasyen değerleri hesaplanacaktır. Hesaplamalar yapılırken;

İlk olarak iki boyut için parabolik koordinatlar için Laplasyen ifadesi hesaplanırsa;

$$x = \sigma\tau$$

$$y = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2)$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$ds^2 = (\sigma^2 + \tau^2)d\sigma^2 + (\sigma^2 + \tau^2)d\tau^2 \qquad \text{(ek. 2.27)}$$

$$g_{\mu\gamma} = \begin{bmatrix} \sigma^2 + \tau^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 + \tau^2 \end{bmatrix} \qquad \text{(ek. 2.28)}$$

Yazmış olduğumuz $g_{\mu\gamma}$ ifadesini $g^{\mu\gamma}$ haliyle yazılması gerekiyor.

$$g^{\mu\gamma} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2 + \tau^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma^2 + \tau^2} \end{bmatrix} \qquad \text{(ek. 2.29)}$$

Ayrıca;

$detg_{\mu\gamma} = g$ olarak yazılır.

$$detg_{\mu\gamma} = (\sigma^2 + \tau^2)^2 \qquad \text{(ek. 2.30)}$$

$\sqrt{g} = \sigma^2 + \tau^2$ olarak bulunur.

Bulduğumuz sonuçları Laplasyan denkleminde yerine yazarsak;

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{\sigma^2+\tau^2}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\sigma^2+\tau^2.\frac{1}{\sigma^2+\tau^2}.\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\sigma^2+\tau^2.\frac{1}{\sigma^2+\tau^2}.\frac{\partial}{\partial\tau}\right) \quad \text{(ek. 2.31)}$$

(ek.2.31)) denkleminde düzenleme yapılırsa;

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{\sigma^2+\tau^2}\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}+\frac{\partial}{\partial\tau}\right) \quad \text{(ek. 2.32)}$$

Parabolik koordinatlarda 2 boyutlu sistem için Laplasyan değeri bulunur.

Şimdi üç boyutta parabolik koordinatlarda Laplasyen ifadesi hesaplanacak olursa;

$x = \sigma\tau\cos\phi \quad , \quad \phi \in [0,2\pi]$

$y = \sigma\tau\sin\phi \quad , \quad 0 < \sigma,\tau < \infty$

$z = \frac{1}{2}(\tau^2-\sigma^2)$

$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

$$ds^2 = (\tau^2+\sigma^2)d\sigma^2 + (\tau^2+\sigma^2)d\tau^2 + \sigma^2\tau^2 d\phi^2 \quad \text{(ek. 2.33)}$$

$$g_{\mu\gamma} = \begin{bmatrix} \tau^2+\sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \tau^2+\sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2\tau^2 \end{bmatrix} \quad \text{(ek. 2.34)}$$

Yazmış olduğumuz $g_{\mu\gamma}$ ifadesini denklemindeki $g^{\mu\gamma}$ haliyle yazılması gerekiyor.

$$g^{\mu\gamma} = \begin{bmatrix} 1/\tau^2+\sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\tau^2+\sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sigma^2\tau^2 \end{bmatrix} \quad \text{(ek. 2.34)}$$

Ayrıca;

$detg_{\mu\gamma} = g$ olarak yazılır.

$$detg_{\mu\gamma} = (\tau^2+\sigma^2)^2\sigma^2\tau^2 \quad \text{(ek. 2.35)}$$

$\sqrt{g} = (\tau^2+\sigma^2)\sigma\tau$

Bulduğumuz sonuçları (ek.2.1) Laplasyan denkleminde yerine yazarsak;

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{(\tau^2+\sigma^2)}\left\{\frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}+\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}+\frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right\}+\frac{1}{\sigma^2\tau^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \quad \text{(ek. 2.36)}$$

Parabolik koordinatlarda üç boyutlu sistem için Laplasyan bu şekilde gösterilir.

Şimdi dört boyutta parabolik koordinatlarda Laplasyen hesaplanacak olursa;

$x = \sigma\tau \sin\theta_2 \cos\phi$

$y = \sigma\tau \sin\theta_2 \sin\phi$

$z = \sigma\tau \cos\theta_2$

$w = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2)$

$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dt^2 + dw^2$

$$ds^2 = (\tau^2 + \sigma^2)d\sigma^2 + (\tau^2 + \sigma^2)d\tau^2 + \sigma^2\tau^2 d{\theta_2}^2 + \sigma^2\tau^2 \sin^2\theta_2 \, d\phi^2 \qquad \text{(ek. 2.37)}$$

$$g_{\mu\gamma} = \begin{bmatrix} \tau^2 + \sigma^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau^2 + \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2\tau^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2\tau^2 \sin^2\theta_2 \end{bmatrix} \qquad \text{(ek. 2.38)}$$

Yazmış olduğumuz $g_{\mu\gamma}$ ifadesini $g^{\mu\gamma}$ haliyle yazılması gerekiyor.

$$g^{\mu\gamma} = \begin{bmatrix} {}^{1}/_{\tau^2 + \sigma^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^{1}/_{\tau^2 + \sigma^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^{1}/_{\sigma^2\tau^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^{1}/_{\sigma^2\tau^2 \sin^2\theta_2} \end{bmatrix} \qquad \text{(ek. 2.39)}$$

Ayrıca;

$det g_{\mu\gamma} = g$ olarak yazılır.

$$det g_{\mu\gamma} = (\tau^2 + \sigma^2)^2(\sigma^2\tau^2)^2 \sin^2\theta_1 \qquad \text{(ek. 2.40)}$$

$\sqrt{g} = (\tau^2 + \sigma^2)(\sigma^2\tau^2)\sin\theta_1$

Bulduğumuz sonuçları Laplasyan denkleminde yerine yazarsak

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{(\tau^2+\sigma^2)}\left\{\frac{2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}+\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}+\frac{2}{\tau}\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right\}$$
$$+\frac{1}{\sigma^2\tau^2}\left(\frac{1}{\sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta_2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) \qquad \text{(ek. 2.41)}$$

Bulunan Laplasyan ifadesi daha önce üç boyutlu sistem için hesaplamış olduğumuz Yörüngesel Açısal Momentum ifadesini içermektedir. Bu bilgiye göre Laplasyan ifadesi düzenlenirse;

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{(\tau^2+\sigma^2)}\left\{\frac{2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}+\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}+\frac{2}{\tau}\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right\}-\frac{\overrightarrow{L_3}^2}{\hbar^2(\sigma^2\tau^2)} \qquad \text{(ek. 3.42)}$$

Parabolik koordinatlarda dört boyutlu sistem için Laplasyan bu şekilde gösterilir.

Şimdi beş boyutta parabolik koordinatlarda Laplasyen hesaplanacak olursa;

$x = \sigma\tau\sin\theta_2\sin\theta_3\cos\phi$

$y = \sigma\tau\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\phi$

$z = \sigma\tau\sin\theta_2\cos\theta_3$

$w = \sigma\tau\cos\theta_2$

$w_1 = \frac{1}{2}(\tau^2-\sigma^2)$

$ds^2 = dx^2+dy^2+dt^2+dw^2+dw_1{}^2$

$$ds^2 = (\tau^2+\sigma^2)d\sigma^2+(\tau^2+\sigma^2)d\tau^2+\sigma^2\tau^2 d\theta_2{}^2+\sigma^2\tau^2\sin^2\theta_2\, d\theta_3{}^2$$
$$+\sigma^2\tau^2\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3\, d\phi^2 \qquad \text{(ek. 2.43)}$$

$$g_{\mu\gamma=}\begin{bmatrix}\tau^2+\sigma^2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \tau^2+\sigma^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma^2\tau^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2\tau^2\sin^2\theta_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2\tau^2\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3\end{bmatrix} \qquad \text{(ek. 2.44)}$$

Yazmış olduğumuz $g_{\mu\gamma}$ ifadesini $g^{\mu\gamma}$ haliyle yazılması gerekiyor.

$$g^{\mu\gamma} = \begin{bmatrix} {}^{1}/_{\tau^2+\sigma^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^{1}/_{\tau^2+\sigma^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^{1}/_{\sigma^2\tau^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^{1}/_{\sigma^2\tau^2\sin^2\theta_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{1}/_{\sigma^2\tau^2\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3} \end{bmatrix}$$

(ek. 2.45)

Ayrıca;

$detg_{\mu\gamma} = g$ olarak yazılır.

$$detg_{\mu\gamma} = (\tau^2+\sigma^2)^2(\sigma^2\tau^2)^3\sin^4\theta_2\sin^2\theta_3 \qquad \text{(ek. 2.46)}$$

$$\sqrt{g} = (\tau^2+\sigma^2)(\sigma^3\tau^3)\sin^2\theta_2\ \sin\theta_3$$

Bulduğumuz sonuçları Laplasyan denkleminde yerine yazarsak

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{(\tau^2+\sigma^2)}\left\{\frac{3}{\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}+\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}+\frac{3}{\tau}\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right\} + \frac{1}{\sigma^2\tau^2}\left(\frac{1}{\sin^2\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin^2\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta_2\sin\theta_3}\frac{\partial}{\partial\theta_3}\left(\sin\theta_3\frac{\partial}{\partial\theta_3}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) \qquad \text{(ek. 2.47)}$$

Bulunan Laplasyan ifadesi daha önce dört boyutlu sistem için hesaplamış olduğumuz Yörüngesel Açısal Momentum ifadesini içermektedir. Bu bilgiye göre Laplasyan ifadesi düzenlenirse;

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{(\tau^2+\sigma^2)}\left\{\frac{3}{\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}+\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}+\frac{3}{\tau}\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right\}-\frac{\overrightarrow{L_4}^2}{\hbar^2(\sigma^2\tau^2)} \qquad \text{(ek. 2.48)}$$

Parabolik koordinatlarda beş boyutlu sistem için Laplasyan bu şekilde gösterilir.

Şimdi altı boyutta parabolik koordinatlarda Laplasyen hesaplanacak olursa;

$x = \sigma\tau\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4\cos\phi$

$y = \sigma\tau\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4\sin\phi$

$z = \sigma\tau\sin\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_4$

$w = \sigma\tau\sin\theta_2\cos\theta_3$

$$w_1 = \sigma\tau\cos\theta_2$$

$$w_2 = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2)$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dt^2 + dw^2 + {dw_1}^2$$

$$ds^2 = (\tau^2+\sigma^2)d\sigma^2 + (\tau^2+\sigma^2)d\tau^2 + \sigma^2\tau^2 {d\theta_2}^2 + \sigma^2\tau^2\sin^2\theta_2\,{d\theta_3}^2 + \sigma^2\tau^2\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3\,{d\theta_4}^2 + \sigma^2\tau^2\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3\sin\theta_4\,d\phi^2 \quad \text{(ek. 2.49)}$$

$$g_{\mu\gamma} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & g_6 \end{bmatrix} \quad \text{(ek. 2.50)}$$

Burada; $a_1 = (\tau^2+\sigma^2)$, $b_2 = (\tau^2+\sigma^2)$, $c_3 = \sigma^2\tau^2$, $d_4 = \sigma^2\tau^2\sin^2\theta_2$, $e_5 = \sigma^2\tau^2\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3$, $g_6 = \sigma^2\tau^2\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3\sin\theta_4$ ve diğer terimlerin değeri sıfırdır.

Yazmış olduğumuz $g_{\mu\gamma}$ ifadesini $g^{\mu\gamma}$ haliyle yazılması gerekiyor.

$$g^{\mu\gamma} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & g_6 \end{bmatrix} \quad \text{(ek. 2.51)}$$

Burada; $a_1 = 1/(\tau^2+\sigma^2)$, $b_2 = 1/(\tau^2+\sigma^2)$, $c_3 = 1/\sigma^2\tau^2$, $d_4 = 1/\sigma^2\tau^2\sin^2\theta_2$, $e_5 = 1/\sigma^2\tau^2\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3$, $g_6 = 1/\sigma^2\tau^2\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3\sin\theta_4$ ve diğer terimlerin değeri sıfırdır.

Ayrıca;

$detg_{\mu\gamma} = g$ olarak yazılır.

$$detg_{\mu\gamma} = (\tau^2+\sigma^2)^2(\sigma^2\tau^2)^4\sin^6\theta_2\sin^4\theta_3\sin^2\theta_4 \quad \text{(ek. 2.52)}$$

$$\sqrt{g} = (\tau^2+\sigma^2)(\sigma^4\tau^4)\sin^3\theta_2\,\sin^2\theta_3\sin\theta_4$$

Bulduğumuz sonuçları Laplasyan denkleminde yerine yazarsak;

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{(\tau^2+\sigma^2)}\left\{\frac{4}{\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}+\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}+\frac{4}{\tau}\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right\}$$
$$+\frac{1}{\sigma^2\tau^2}\left(\frac{1}{\sin^3\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin^3\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3}\frac{\partial}{\partial\theta_3}\left(\sin^2\theta_3\frac{\partial}{\partial\theta_3}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3\sin\theta_4}\frac{\partial}{\partial\theta_4}\left(\sin\theta_4\frac{\partial}{\partial\theta_4}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3\sin^2\theta_4}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)$$

Bulunan Laplasyan ifadesi daha önce beş boyutlu sistem için hesaplamış olduğumuz Yörüngesel Açısal Momentum ifadesini içermektedir. Bu bilgiye göre Laplasyan ifadesi düzenlenirse;

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{(\tau^2+\sigma^2)}\left\{\frac{4}{\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}+\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}+\frac{4}{\tau}\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right\}-\frac{\overrightarrow{L_5}^2}{\hbar^2(\sigma^2\tau^2)} \qquad \text{(ek. 2.53)}$$

Parabolik koordinatlarda altı boyutlu sistem için Laplasyan bu şekilde gösterilir.

Yapılan hesaplamalarda elde edilen sonuçları kullanarak bir genelleme yapılırsa;

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{(\tau^2+\sigma^2)}\left\{\frac{d-2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}+\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}+\frac{d-2}{\tau}\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right\}-\frac{\vec{L}_{d-1}{}^2}{\hbar^2(\sigma^2\tau^2)} \qquad \text{(ek. 3.24)}$$

Olarak yazılır.

EK.3. GEGENBAUER POLİNOMLARI

Ultra küresel harmonikler olarak da bilinen Gegenbauer polinomu;

$$(1-x^2)y'' - (2\lambda+1)xy' + n(n+2\lambda)y = 0 \qquad \text{(ek. 3.1)}$$

(Bell, 1986, Arfken, 1966)

Denklemi çözümlenerek Gegenbauer polinomu elde edilir. Çözüm yapmak için;

$$y(x,s) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{r+s} \quad , a_r \neq 0 \qquad \text{(ek. 3.2)}$$

(ek.3.1) denklemi verilen (ek.3.2) ifadesi cinsinden tekrar yazılırsa;

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r(r+s)(r+s-1)r^{r+s-2} - \sum_{r=0}^{\infty} a_r(r+s)(r+s-1)x^{r+s} - (2\lambda+1)\sum_{r=0}^{\infty} a_r(r+s)x^{r+s} + n(n+2\lambda)\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{r+s} = 0 \qquad \text{(ek. 3.3)}$$

(ek.3.3) denklemi düzenlenirse;

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r(r+s)(r+s-1)r^{r+s-2} - \sum_{r=0}^{\infty} a_r[(r+s)(r+s+2\lambda) - n(n+2\lambda)]x^{r+s} = 0 \qquad \text{(ek. 3.4)}$$

$r-2 = r'$ düzenlemesi yapılarak (ek.3.4.) denklemini tekrar yazılırsa;

$$\sum_{r'=-2}^{\infty} a_{r'+2}(r'+2+s)(r'+s+1)r^{r'+s} - \sum_{r=0}^{\infty} a_r[(r+s)(r+s+2\lambda) - n(n+2\lambda)]x^{r+s} = 0 \qquad \text{(ek. 3.5)}$$

(ek.3.5) $r' \to r$ ve seriler aynı sayıdan başlanırsa;

$$a_0(s)(s-1)x^{s-2} + a_1(s+1)(s)x^{s-1} + \sum_{r=0}^{\infty} a_{r+2}(r+2+s)(r+s+1)x^{r+s}$$

$$-\sum_{r=0}^{\infty} a_r[(r+s)(r+s+2\lambda) - n(n+2\lambda)]x^{r+s} = 0 \qquad \text{(ek. 3.6)}$$

$s = 0\,, s = -1, s = 1$ değerlerini alır.

(ek.3.6) denklemi $s = 0$ için yazılırsa;

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_{r+2}(r+2)(r+1)x^r - \sum_{r=0}^{\infty} a_r[(r)(r+2\lambda) - n(n+2\lambda)]x^r = 0 \qquad \text{(ek. 3.7)}$$

(ek.3.7) denklemini düzenlerse;

$$\frac{a_{r+2}}{a_r} = \frac{r(r+2\lambda) - n(n+2\lambda)}{(r+2)(r+1)} \quad , x^r \neq 0 \qquad \text{(ek. 3.8)}$$

Yazılmış olan (ek.4.8) denklemi düzenlenirse;

$$a_{r+2} = \frac{-(n-r)(r+n+2\lambda)}{(r+2)(r+1)}\, a_r \qquad \text{(ek. 3.9)}$$

$r = 0$ için; $a_2 = \dfrac{(-n)(n+2\lambda)}{1.2}\, a_0$ (ek. 3.10)

$r = 1$ için; $a_3 = \dfrac{-(n-1)(1+n+2\lambda)}{2.3}\, a_1$ (ek. 3.11)

$r = 2$ için ; $a_4 = \dfrac{-(n-2)(2+n+2\lambda)}{3.4}\, a_2$, a_2 denklemde yerine yazılırsa

$$a_4 = \frac{(n)(n-2)(n+2\lambda)(2+n+2\lambda)}{1.2.3.4}\, a_0 \qquad \text{(ek. 3.12)}$$

$r = 3$ için ; $a_5 = \dfrac{-(n-3)(3+n+2\lambda)}{4.5}\, a_3$, a_3 denklemde yerine yazılırsa

$$a_5 = \frac{(n-1)(n-3)(1+n+2\lambda)(3+n+2\lambda)}{2.3.4.5}\, a_1 \qquad \text{(ek. 3.13)}$$

Yazılan iadeleri genelleştirilirse;

Çift değerler için;

$$a_{2r} = (-1)^r a_0 \frac{n(n-2)(n-4)\dots\dots(n-2r+2).(n+2\lambda)(n+2+2\lambda)(n+2r+2\lambda)}{(2r)!} \quad \text{(ek. 3.14)}$$

Tek değerler için;

$$a_{2r+2} = (-1)^r a_1 \frac{(n-1)(n-3)\dots\dots(n-2r+1)(n+1+2\lambda)(n+3+2\lambda)(n+2r+1+2\lambda)}{(2r+1)!} \quad \text{(ek. 3.15)}$$

$$y(x,0) = a_0 \left\{ 1 + \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{n(n-2)(n-4)\dots\dots(n-2r+2).(n+2\lambda)(n+2+2\lambda)(n+2r+2\lambda)}{(2r)!} x^{2r} \right\} + a_1 \left\{ x + \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(n-1)(n-3)\dots\dots(n-2r+1).(n+1+2\lambda)(n+3+2\lambda)(n+2r+1+2\lambda)}{(2r+1)!} \right\}$$

$$y(x,0) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x) \quad , -1 < x < 1 \quad \text{(ek. 3.16)}$$

(ek. 3.8) denklemini $-1 \leq x \leq 1$ için çözümlenmelidir. Çözüm yapılırken Raabe testi uygulanacak;

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{a_{2r}}{a_{2r+1}} - 1\right) = P \text{ iken} \quad \text{(ek. 3.17)}$$

$$P = \begin{cases} \mathrm{P} > 1 \text{ Yakınsal} \\ P < 1 \text{ Iraksak} \\ P = 0 \text{ Bilgi yok} \end{cases} \quad \text{(ek.3.18)}$$

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{(2r+1)(2r+2)}{2r(2r+2\lambda)-n(n+2\lambda)}-1\right) \qquad \text{(ek. 3.19)}$$

$$\lim_{r\to\infty}\left(\frac{6r^2+2r-4\lambda r^2+rn^2+2\lambda nr}{4r^2+4\lambda r-n^2-2\lambda n}\right)$$

$$\frac{6-4\lambda}{4}<1\,.\quad \lambda>-\frac{1}{2}$$

Sonuç ıraksaktır. Bunun için seri $a_r \neq 0$ ve $a_{r+2}=0$ olacak şekilde kesilmelidir.

$$r(r+2\lambda)-n(n+2\lambda)=0 \qquad \text{(ek. 3.20)}$$

$n=r$ olur.

$$\frac{a_{r+2}}{a_r}=\frac{r(r+2\lambda)-n(n+2\lambda)}{(r+2)(r+1)}$$

Denklemi düzenlenirse;

$$a_r=\frac{(r+1)(r+2)}{(r-n)(r+n+2\lambda)}a_{r+2} \qquad \text{(ek. 3.21)}$$

$$r=n-2 \text{ için; } a_{n-2}=\frac{(n-1)(n)}{(-2)(2n-2+2\lambda)}a_n \qquad \text{(ek. 3.22)}$$

(ek.3.22) denklemi düzenlenirse;

$$r=n-2 \text{ için; } a_{n-2}=\frac{(-)(n)(n-1)}{(2)(2n-2+2\lambda)}a_n \qquad \text{(ek. 3.23)}$$

$$r=n-4 \text{ için; } a_{n-4}=\frac{(-)(n-2)(n-3)}{(4)(2n-4+2\lambda)}a_{n-2} \qquad \text{(ek. 3.24)}$$

(ek. 3.24) denklemi düzenlenirse;

$$a_{n-4}=\frac{(n)(n-1)(n-2)(n-3)}{(2)(4)(2n-2+2\lambda)(2n-4+2\lambda)}a_n \qquad \text{(ek. 3.25)}$$

$$r=n-6 \text{ için; } a_{n-6}=\frac{(-)(n-4)(n-5)}{(6)(2n-6+2\lambda)}a_{n-4} \qquad \text{(ek. 3.26)}$$

(ek. 3.26) Denklemi düzenlenirse;

$$a_{n-6} = \frac{-(n)(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{(2)(4)(6)(2n-2+2\lambda)(2n-4+2\lambda)(2n-6+2\lambda)} a_n \qquad \text{(ek. 3.27)}$$

Yazılan denklemleri kullanarak genel bir denklem yazılırsa;

$$a_{n-2r}$$
$$= (-1)^r \frac{(n)(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots\cdots(n-2r+1)}{2^{2r} r!\,(n-1+\lambda)(n-2+\lambda)(n-3+\lambda)\cdots\cdots(n-r+1+\lambda)} a_n \quad \text{(ek. 3.28)}$$

$$y(x) = \sum_{r=0}^{[n/2]} a_{n-2r} x^{n-2r}$$

$$y(x)$$
$$= \sum_{r=0}^{[n/2]} (-1)^r \frac{(n)(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots\cdots(n-2r+1)}{2^{2r} r!\,(n-1+\lambda)(n-2+\lambda)(n-3+\lambda)\cdots\cdots(n-r+1+\lambda)} a_n x^{n-2r}$$

(ek.3.29)

$$(n)(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots\cdots(n-2r+1)$$
$$= (n)(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots(n-2r+1)\frac{(n-2r)(n-2r-1)\cdots 321}{(n-2r)(n-2r-1)\cdots 321} = \frac{n!}{(n-2r)!}$$

(ek.3.30)

$$(n-1+\lambda)(n-2+\lambda)(n-3+\lambda)\cdots\cdots(n-r+1+\lambda)$$
$$(n+\lambda)!\,(n-1+\lambda)(n-2+\lambda)\cdots\cdots(n-r+1+\lambda)\frac{(n+\lambda-1)!}{(n+\lambda-1)!}\frac{1}{(n+\lambda)!}$$
$$= \frac{n!}{(n+\lambda)!\,(n+\lambda-1)!} \qquad \text{(ek. 3.31)}$$

Bu ifadeler kullanılarak (ek.3.29) denklemi tekrar düzenlenirse;

$$C_x^{\lambda}(x) = \sum_{r=0}^{[n/2]} (-1)^r \frac{\Gamma(n-r+\lambda)}{\Gamma(\lambda) r!\,(n-2r)!} (2x)^{n-2r} \qquad \text{(ek. 3.32)}$$

Yazılan Gegenbauer polinomunun bazı özellikleri;

İlk olarak diklik bağıntısı yazılırsa;

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}C_n^{\lambda}(x)C_m^{\lambda}dx = 2^{1-2\lambda}\pi\frac{\Gamma(n+2\lambda)}{(n+\lambda)\{\Gamma(\lambda)\}^2\Gamma(n+1)}\delta_{nm} \qquad \text{(ek. 3.33)}$$

Şeklinde yazılır.

Gegenbauer polinomu için yenileme bağıntıları yazılırsa;

$$(n+2)C_{n+2}^{\lambda}(x) = 2(\lambda+n+1)xC_{n+1}^{\lambda}(x) - (2\lambda+n)C_n^{\lambda}(x) \qquad \text{(ek. 3.34)}$$

$$nC_n^{\lambda}(x) = 2\lambda\left\{xC_{n-1}^{\lambda+1}(x) - C_{n-2}^{\lambda+1}(x)\right\} \qquad \text{(ek. 3.35)}$$

$$(n+2\lambda)C_n^{\lambda}(x) = 2\lambda\left\{C_n^{\lambda+1}(x) - xC_{n-1}^{\lambda+1}\right\} \qquad \text{(ek. 3.36)}$$

$$nC_n^{\lambda}(x) = (n-1+2\lambda)xC_{n-1}^{\lambda}(x) - 2\lambda(1-x^2)C_{n-2}^{\lambda-1}(x) \qquad \text{(ek. 3.37)}$$

$$C_n^{\lambda'}(x) = 2\lambda C_{n+1}^{\lambda+1}(x) \qquad \text{(ek. 3.38)}$$

Not:

Asosye Laguerre polinomunun Diklik bağıntılarını genelleştirirsek;

$$\int_0^{\infty} e^{-x}x^k L_m^k(x)L_n^k(x)dx = \frac{(m+k)!}{m!}, \qquad (\delta m,n) \qquad \text{(ek. 3.39)}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x}x^{k+1} L_m^k(x)L_m^k(x)dx = \frac{(m+k)!}{m!}(2m+k+1) \qquad \text{(ek. 3.40)}$$

(Dereli, Verçin , 2014)

$$\int_0^{\infty} e^{-x}x^{k+1}\left(xL_m^k(x)\right)\left(xL_m^k(x)\right)dx = ? \qquad \text{(ek. 3.41)}$$

(ek.3.41) denkleminin çözümünü arayacağız;

$$\left(xL_m^k(x)\right)\left(xL_m^k(x)\right) = (2m+k+1)^2L_m^kL_m^k + (m+1)^2L_{m+1}^kL_{m+1}^k$$
$$+(m+k)^2L_{m-1}^kL_{m-1}^k - 2(2m+k+1)L_m^kL_{m+1}^k - 2(2m+k+1)L_m^kL_{m-1}^k$$
$$+2(m+1)(m+k)L_{m+1}^kL_{m-1}^k \qquad \text{(ek. 3.42)}$$

(ek.3.42) denklemi

$$\delta m,k=\begin{cases} m=k\ ise=1 \\ m\neq k\ ise=0 \end{cases}$$

İfadesine göre düzenlenirse;

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{k+1}\Big(xL_m^k(x)\Big)\Big(xL_m^k(x)\Big)dx=\int_0^\infty(2m+k+1)^2e^{-x}x^{k+1}L_m^k(x)L_m^k(x)dx$$

$$+\int_0^\infty(m+1)^2e^{-x}x^{k+1}L_{m+1}^k(x)L_{m+1}^k(x)dx+\int_0^\infty(m+k)^2e^{-x}x^{k+1}L_{m-1}^k(x)L_{m-1}^k(x)dx$$

(ek.3.43)

Olarak elde edilir. (ek.3.43) denklemi düzenlenirse;

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{k+1}\Big(xL_m^k(x)\Big)\Big(xL_m^k(x)\Big)dx=(6(m^2+mk+m)+(k+1)(k+2)\frac{(m+k)!}{m!}$$

(ek.3.44)

EK.4. RADYAL OLASILIK DAĞILIMI

$P(r)$ Radyal olasılık dağılımı (Yoğunluğu) hidrojen atomunun kuantum mekaniksel çözümlerinin örneğin çekirdek etrafındaki olasılık dağılımı gibi önemli özelliklerini anlatan bir fonksiyondur.

$$\int_0^{\infty} P(r)dr = 1 = \frac{100}{100} \qquad \text{(ek. 4.1)}$$

Olacak şekilde elektronun r yarıçaplı dr kalınlığında bir küre kabuğu içinde bulunma olasılığının olduğunu gösterir. Bu bölümde Radyal Olasılık Dağılımının boyutlara göre sonucu ele alınacaktır.

İlk olarak üç boyut için radyal olasılık dağılımı ifadesi hesaplanırsa;

$$P(r) = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} u^* u r^2 \sin\theta \, d\theta d\Phi \qquad \text{(ek. 4.2)}$$

$$u = \sqrt{\frac{\beta^3(n-l)!}{(2n)(n+l)!}}\, e^{-\rho/2}\rho^l L_{n-l-1}^{2l+1} Y_{lm}(\theta,\Phi)$$

Üç boyut için tanımlanan ifadeler (ek.4.2) denkleminde yerine konursa;

$$P(r) = {R_{nl}}^2 r^2 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_{lm}(\theta,\Phi){Y_{lm}}^*(\theta,\Phi)\sin\theta \, d\theta d\Phi \qquad \text{(ek. 4.3)}$$

Yazılan (ek.4.3) denkleminin içindeki integral küresel harmonikler olduğundan;

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_{lm}(\theta,\Phi){Y_{lm}}^*(\theta,\Phi)\sin\theta \, d\theta d\Phi = 0$$

olarak yazılır. Buna göre;

$P(r) = {R_{nl}}^2 r^2$ dir.

Şimdi üç boyut için beklenen değerler hesaplanırsa;

$$\langle r\rangle = \int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} u^* r u\, r^2 dr d\theta d\phi \tag{1.86}$$

$$\langle r\rangle = \frac{1}{\beta}\frac{\beta^3(n-l)!}{(2n)(n+l)!}\int_0^{\infty} e^{-\rho}\rho^{2l+1+2}\left\{L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho)\right\}^2 d\rho \tag{1.87}$$

(1.87) denklemindeki integral çözümünü (ek.4.44) kısmında gösterdiğimiz Asosiye Laguerre polinomunun diklik bağıntısına benzemektedir.

$$\int_0^{\infty} e^{-x}x^{k+1}[xL_m^k(x)][xL_m^k(x)]dx$$

$$= [6(n^2+nk+n]+(k+1)(k+2)]\frac{(n+k)!}{n!} \tag{ek. 3.44}$$

Burada ;

$k = 2l+1$ ve $n = n-l-1$

(ek.4.44) denklemine göre çözüm yapıldığında;

$(\beta = 2\kappa)$olarak alınırsa;

$$\langle r\rangle = \frac{3n}{2\kappa}\left[1-\frac{l(l+1)}{3n^2}\right] \tag{1.88}$$

olarak bulunur.

Burada;

$n = 1,2,3,\ldots$

$l = 0,1,2,\ldots,n-1$

$m = -l,\ldots,0,\ldots,l$

dir.

Şimdi dört boyut için radyal olasılık dağılımı hesaplanırsa;

$$P(r) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} U^* U r^3 \sin^2\theta_1 \sin\theta_2 \, d\theta_1 d\theta_2 d\Phi \qquad \text{(ek. 4.7)}$$

$$u = \sqrt{\frac{\beta^4 (n-N_2)!}{(2n+3)(n+N_2+2)!}}\; e^{-\rho/2}\rho^{N_2} L_{n-N_2}^{2N_2+2} Y(\theta_1,\theta_2,\Phi)$$

Dört boyut için tanımlanan ifadeler (ek.4.7) denkleminde yerine konursa;

$$P(r) = {R_{nN_2}}^2 r^3 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{2^{2N_1+1}}{\pi}\frac{n!\{N_1!\}^2(n+N_1+1)}{(n+2N_1+1)!}}\, Y^*(\theta_1,\theta_2,\Phi)$$

$$\sqrt{\frac{2^{2N_1+1}}{\pi}\frac{n!\{N_1!\}^2(n+N_1+1)}{(n+2N_1+1)!}}\, Y(\theta_1,\theta_2,\Phi)\sin^2\theta_1 \sin\theta_2 \, d\theta_1 d\theta_2 d\Phi \qquad \text{(ek. 4.8)}$$

$$P(r) = {R_{nN_2}}^2 r^3 \frac{2^{2N_1+1}}{\pi}\frac{n!\{N_1!\}^2(n+N_1+1)}{(n+2N_1+1)!}\int_0^{\pi} {X_1}^*(\theta_1) X_1(\theta_1)\sin^2\theta_1 \, d\theta_1$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y^*(\theta_2,\Phi) Y(\theta_2,\phi)\sin\theta_2 \, d\theta_2 d\Phi$$

$$P(r) = {R_{nN_2}}^2 r^3 \int_0^{\pi} (1-\cos^2\theta_1)^{\frac{N_1}{2}} C_n^{N_1+1}(cos\theta_1)\,(1\cos^2\theta_1)^{\frac{N_1}{2}} C_n^{N_1+1}(cos\theta_1)\sin^2\theta_1 \, d\theta_1$$

$$P(r) = {R_{nN_2}}^2 r^3 . \frac{2^{2N_1+1}}{\pi}\frac{n!\{N_1!\}^2(n+N_1+1)}{(n+2N_1+1)!}$$

$$\int_0^{\pi} (1\cos^2\theta_1)^{N_1}\left\{C_n^{N_1+1}(cos\theta_1)\right\}^2 \sin^2\theta_1 \, d\theta_1 \qquad \text{(ek. 4.9)}$$

$x = cos\theta_1$, dönüşümü yapılırsa;

$$P(r) = {R_{nl}}^2 r^3 \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{N_1+1/2}\left\{C_n^{N_1+1}\right\}^2 dx \qquad \text{(ek. 4.10)}$$

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} C_n^{\lambda}(x) C_m^{\lambda}(x) dx = 2^{1-2\lambda}\pi \frac{\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(n+1)\{\Gamma(\lambda)\}^2(n+\lambda)} \qquad (1.88)$$

(ek.5.10) denklemindeki integral Gegenbauer integraline benzemektedir. Bu integralin sonucunu kullanırsak;

$$P(r) = {R_{nN_2}}^2 r^3 \qquad \text{(ek. 4.11)}$$

olarak yazılır.

Burada dört boyut için beklenen değer hesaplanırsa;

$$\langle r \rangle_{nN_1N_2m} = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} u^* r u r^3 \sin^2\theta_1 \sin\theta_2 \, d\theta_1 d\theta_2 d\Phi \qquad \text{(ek. 4.12)}$$

(ek.5.12) denkleminde u yerine yazılıp denklem düzenlenirse;

$$\langle r \rangle_{nN_1N_2m} = \frac{1}{\beta} \frac{(n-N_2)!}{(2n+3)(n+N_2+2)!} \int_0^{\infty} e^{-\rho} \rho^{2N_2+4} \left\{ L_{n-N_2}^{2N_2+2} \right\}^2 d\rho \qquad \text{(ek. 4.13)}$$

(ek.4.13) denklemi çözümü bilinen (ek.3.44) denklemi ile aynı formdadır buna göre;

$n = n - N_2, \quad k = 2N_3 + 2$ ve $\beta = 2\kappa$ olarak alınırsa;

$$\langle r \rangle_{nN_1N_2m} = \frac{3n^2}{\kappa} \frac{1}{(2n+3)} \left[1 - \frac{N_2(N_2+2)}{3n^2} + \frac{(3n+2)}{n^2} \right] \qquad \text{(ek. 4.14)}$$

Burada;

$n = 1,2,3, \ldots$

$N_1 = 0,1,2, \ldots, n-1$

$N_2 = 0,1,2,3, \ldots, N_1$

$m = -N_2, \ldots, 0, \ldots, N_2$

dir.

Şimdi beş boyut için radyal olasılık dağılımı hesaplanırsa;

$$P(r) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u^* u\, r^4 \sin^3\theta_1 \sin^2\theta_2 \sin\theta_3\, d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\Phi \qquad \text{(ek. 4.15)}$$

$$u = \sqrt{\frac{\beta^5 (n-N_3)!}{(2n+4)(n+N_3+3)!}}\, e^{-\rho/2} \rho^{N_3} L_{n-N_3}^{2N_3+3} \mathcal{Y}(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\Phi)$$

$$\mathcal{Y}(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\Phi)$$

$$= \sqrt{\frac{2^{2N_1+1}}{\pi}\frac{n!\{N_1!\}^2(n+N_1+1)}{(n+2N_1+1)!}} \sqrt{\frac{2^{2N_2+2}}{\pi}\frac{n!\left\{(N_2+\frac{1}{2})!\right\}^2\left(n+N_2+\frac{3}{2}\right)}{(n+2N_2+2)!}} X_1(\theta_1) X_2(\theta_2) Y(\theta_3,\Phi)$$

Beş boyut için tanımlanan ifadeler (ek.4.15) denkleminde yerine konursa;

$$P(r) = {R_{nN_3}}^2 r^4 \sqrt{\frac{2^{2N_2+2}}{\pi}\frac{n!\left\{(N_2+\frac{1}{2})!\right\}^2\left(n+N_2+\frac{3}{2}\right)}{(n+2N_2+2)!}} \int_0^{\pi} X_1(\theta_1) {X_1}^*(\theta_1) \sin^3\theta_1\, d\theta_1$$

$$\sqrt{\frac{2^{2N_1+1}}{\pi}\frac{n!\{N_1!\}^2(n+N_1+1)}{(n+2N_1+1)!}} \int_0^{\pi} X_2(\theta_2) {X_2}^*(\theta_2) \sin^2\theta_2\, d\theta_2$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y^*(\theta_3,\Phi) Y(\theta_3,\phi) \sin\theta_3\, d\theta_3 d\Phi \qquad \text{(ek. 4.16)}$$

Yazılan (ek.4.13) denklemi çözümlenirse sonuç;

$$P(r) = {R_{nN_3}}^2 r^4$$

Olarak bulunur.

$$\langle r\rangle_{nN_1N_2N_3m} = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u^* r u\, r^4 \sin^3\theta_1 \sin^2\theta_2 \sin\theta_3\, d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\Phi \qquad \text{(ek. 4.17)}$$

(ek.4.17) denkleminde u yerine yazılıp denklem düzenlenirse;

$$\langle r\rangle_{nN_1N_2N_3m} = \frac{1}{\beta}\frac{(n-N_3)!}{(2n+4)(n+N_3+3)!}\int_0^{\infty} e^{-\rho}\rho^{2N_3+5}\left\{L_{n-N_3}^{2N_3+3}\right\}^2 d\rho \qquad \text{(ek. 4.18)}$$

(ek.4.18) denklemi çözümü bilinen (ek.3.44) denklemi ile aynı formdadır buna göre;

$n = n - N_3, \quad k = 2N_3 + 3$ ve $\beta = 2\kappa$ olarak alınırsa;

$$\langle r \rangle_{nN_1N_2N_3m} = \frac{3n^2}{2\kappa}\frac{1}{(n+2)}\left[1 - \frac{N_3(N_3+3)}{3n^2} + \frac{(12n+10)}{n^2}\right] \qquad \text{(ek. 4.19)}$$

Burada;

$n = 1,2,3, \ldots$

$N_1 = 0,1,2, \ldots, n-1$

$N_2 = 0,1,2,3, \ldots, N_1$

$N_3 = 0,1,2,3, \ldots, N_2$

$m = -N_3, \ldots, 0, \ldots, N_3$

dir.

Şimdi altı boyut için radyal olasılık dağılımı hesaplanırsa;

$$P(r) = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} u^* u r^5 \sin^4\theta_1 \sin^3\theta_2 \sin^2\theta_3 \sin\theta_4 \, d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4 d\Phi \quad \text{(ek. 4.20)}$$

$u = R_{nN_4}\mathcal{Y}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \Phi)$

$$R_{nN_4} = \sqrt{\frac{\beta^6(n-N_4)!}{(2n+5)(n+N_4+4)!}}\, e^{-\rho/2}\rho^{N_4}L_{n-N_4}^{2N_4+4}$$

$$\mathcal{Y}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \Phi)\sqrt{\frac{2^{2N_1+1}}{\pi}\frac{n!\{N_1!\}^2(n+N_1+1)}{(n+2N_1+1)!}}\sqrt{\frac{2^{2N_2+2}}{\pi}\frac{n!\left\{(N_2+\frac{1}{2})!\right\}^2\left(n+N_2+\frac{3}{2}\right)}{(n+2N_2+2)!}}$$

$$\sqrt{\frac{2^{2N_3+1}}{\pi}\frac{n!\{(N_3+1)!\}^2(n+N_3+2)}{(n+2N_3+3)!}}X_1(\theta_1)X_2(\theta_2)X_3(\theta_3)Y(\theta_4, \Phi)$$

Altı boyut için tanımlanan ifadeler (ek.4.20) denkleminde yerine konursa;

$$P(r) = {R_{nN_3}}^2 r^5 \sqrt{\frac{2^{2N_3+1}}{\pi}\frac{n!\{(N_3+1)!\}^2(n+N_3+2)}{(n+2N_3+3)!}}\int_0^{\pi} X_1(\theta_1){X_1}^*(\theta_1)\sin^4\theta_1\, d\theta_1$$

$$\sqrt{\frac{2^{2N_2+2}}{\pi}\frac{n!\left\{(N_2+\frac{1}{2})!\right\}^2\left(n+N_2+\frac{3}{2}\right)}{(n+2N_2+2)!}}\int_0^{\pi} X_2(\theta_2){X_2}^*(\theta_1)\sin^3\theta_2\, d\theta_2$$

$$\sqrt{\frac{2^{2N_1+1}}{\pi}\frac{n!\{N_1!\}^2(n+N_1+1)}{(n+2N_1+1)!}}\int_0^{\pi} X_3(\theta_3){X_3}^*(\theta_3)\sin^2\theta_3\, d\theta_3$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y^*(\theta_4,\Phi)Y(\theta_4,\phi)\sin\theta_4\, d\theta_4 d\Phi \qquad \text{(ek. 4.21)}$$

Yazılan (ek.4.21) denklemi çözümlenirse sonuç;

$P(r) = {R_{nN_4}}^2 r^5$

Olarak bulunur.

Altı boyut için beklenen değer hesaplanırsa;

$$\langle r\rangle_{nN_1N_2N_3N_4m}$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} u^* r u r^5 \sin^4\theta_1 \sin^3\theta_2 \sin^2\theta_3 \sin\theta_4\, d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4 d\Phi \qquad \text{(ek. 4.22)}$$

(ek.5.22) denkleminde u yerine yazılıp denklem düzenlenirse;

$$\langle r\rangle_{nN_1N_2N_3N_4m} = \frac{1}{\beta}\frac{(n-N_4)!}{(2n+5)(n+N_4+4)!}\int_0^{\infty} e^{-\rho}\rho^{2N_4+6}\left\{L_{n-N_4}^{2N_4+4}\right\}^2 d\rho \qquad \text{(ek. 4.23)}$$

(ek.4.23) denklemi çözümü bilinen (ek.3.44) denklemi ile aynı formdadır buna göre;

$n = n - N_4, \quad k = 2N_4 + 4$ ve $\beta = 2\kappa$ olarak alınırsa;

$$\langle r\rangle_{nN_1N_2N_3N_4m} = \frac{3n^2}{\kappa}\frac{1}{(2n+5)}\left[1 - \frac{N_4(N_4+4)}{3n^2} + \frac{5(n+1)}{n^2}\right] \qquad \text{(ek. 4.24)}$$

(ek.4.24) için;

$n = 1,2,3, \dots$

$N_1 = 0,1,2, \dots, n-1$

$N_2 = 0,1,2,3, \dots, N_1$

$N_3 = 0,1,2,3, \dots, N_2$

$N_4 = 0,1,2,3, \dots, N_3$

$m = -N_4, \dots, 0, \dots, N_4$

dir.

Yapılan işlemler yedi boyut için tekrar yapıldığında;

Radyal olasılık dağılımı;

$$P(r) = {R_{nN_5}}^2 r^6 \qquad \text{(ek. 4.25)}$$

Beklenen değer;

$$\langle r \rangle_{nN_1N_2N_3N_4N_5m} = \frac{3n^2}{2\kappa} \frac{1}{(n+3)} \left[1 - \frac{N_5(N_5+5)}{3n^2} + \frac{(6n+7)}{n^2} \right] \qquad \text{(ek. 4.26)}$$

Yapılan işlemler sonucunda Radyal olasılık dağılımının genelleştirilmiş ifadesi;

$$P(r) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \dots \int_0^{\pi} uu^* r^{d-1} \sin^{d-2}\theta_1 \sin^{d-3}\theta_2 \dots \dots \sin\theta_{d-2}\, d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{d-2} d\Phi$$

(ek.4.27)

$$u = \sqrt{\frac{\beta^d (n - l - \frac{(d-1)}{2})!}{2n(n + l + \frac{(d-3)}{2})!}}\, e^{-\rho/2} \rho^l L^{2l+(d-2)}_{n-l-\frac{(d-1)}{2}} \mathcal{Y}(\theta_1, \theta_2, \dots \theta_{d-2}, \Phi)$$

d boyut için tanımlanan ifadeler (ek.4.27) denkleminde yerine konursa;

$$P(r) = {R_{nl}}^2 r^{d-1} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{\pi} \mathcal{Y}(\theta_1, \theta_2, \dots \theta_{d-2}, \Phi) \mathcal{Y}^* (\theta_1, \theta_2, \dots \theta_{d-2}, \Phi)$$

$$\sin^{d-2} \theta_1 \sin^{d-3} \theta_2 \dots \dots \sin \theta_{d-2}\, d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{d-2} d\Phi \qquad \text{(ek. 5.28)}$$

(ek.5.28) denklemi düzenlenirse;

$$P(r) = {R_{nl}}^2 r^{d-1} \qquad \text{(ek. 4.29)}$$

olarak bulunur.

Ayrıca d boyutlu sistem için beklenen değer ifadesi için genelleştirme yapılırsa;

$$\langle r \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{(n - N_{d-2})!}{(2n + (d-2))(n + N_{d-2} + (d-2))!} \int_0^{\infty} e^{-\rho} \rho^{2N_{d-2}+d} \left\{ L_{n-N_{d-2}}^{2N_{d-2}+(d-2)}(\rho) \right\}^2 d\rho$$

(ek.4.30)

Yapılan hesaplamalarda görüldüğü gibi Radyal Olasılık Dağılımı Boyutlar arttıkça değişim göstermektedir.

(r, θ, Φ) Koordinat fonksiyonlarından hiçbiri Hidrojen atomunun Hamilton işlemcisi ile sıra değiştiremez. Ayrıca radyal momentum işlemcisi de Hamilton işlemcisi ile sıra değiştiremez. Buna göre e^- belli bir enerji özdurumundayken konum ve momentum belirsizdir. Bu gerçek elektronun çekirdek etrafında belirli yörüngelerde dolandığını ileri süren Bohr varsayımlarından oldukça farklıdır. Ayrıca belirli enerji özdeğerine sahip e^-'nun çekirdek etrafındaki hareketi θ ve Φ açılarından bağımsızdır.

Yani belirli enerji özdeğere sahip olan elektron belirli bir yarıçaplı küresel kabuğun üzerinde olduğunu söyler. Küre kabuğunun üzerindeki hareketinde elektronun küre kabuğu üzerinde nerede olduğunu söylemez. Sadece elektronun hangi yarıçaplı küre kabuğunun üzerinde olduğunu söyleyebiliriz.

Asosiye Laguerre Polinomları $(n-l-1)=nr$. Dereceden polinomlar olduklarından nr tane düğüm noktası yani sıfır vardır.$r\to\infty$ iken R_{nl} ve $P(r)$ sıfıra gittiğinden; $P(0)=0$ olur. $P(r)$'nin $n-l$ tane maksimumu vardır. Bu maksimumlar e^{-}'nun büyük olasılıklarla bulundukları r yarıçaplarıdır. $n=1$ taban durumu için radyal olasılık dağılımının maksimum Bohr yarıçapına karşılık gelir. $(0{,}56\mathring{A})$

$|U|^2$ ifadesinin içinde $|\mathcal{Y}(\theta_1,\theta_2,\dots\theta_{d-2},\Phi)|^2$şeklinde bir çarpan olduğundan küresel harmonik fonksiyon da bulunan $''m''$ değeri için olasılık yoğunlukları z ekseninden x,y düzlemine kayar.

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Kocaeli de doğdum. İlköğretimi Mimar Sinan İlköğretim okulunda okuduktan sonra Lise eğitimimi Namık Kemal lisesinde tamamladım. 2008 yılında Trakya Üniversitesine başladım ve 2012 yılında Mezun oldum. 2014 yılında Kocaeli Üniversitesinde Formasyon eğitimimi tamamladım.

2013 yılında Trakya Üniversitesin Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği alanında yüksek lisansa başladım.