T.C.

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NANO YAPILARIN EŞİL MEKANİK TEORİSİ KULLANILARAK STATİK VE DİNAMİK ANALİZLERİ

UFUK GÜL

DOKTORA TEZİ

MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. METİN AYDOĞDU

EDİRNE-2020

UFUK GÜL'ün hazırladığı "**NANO YAPILARIN EŞİL MEKANİK TEORİSİ KULLANILARAK STATİK VE DİNAMİK ANALİZLERİ**" başlıklı bu tez, tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından **Makine Mühendisliği** Anabilim Dalında bir **Doktora tezi** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri (Ünvan, Ad, Soyad): İmza

Prof. Dr. Metin AYDOĞDU

Prof. Dr. Taner TİMARCI

Prof. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ

Doç Dr. Armağan Fatih KARAMANLI

Dr. Öğr. Üyesi Aytaç ALPARSLAN

Tez Savunma Tarihi: 24/06/2020

Bu tezin Doktora tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

İmza

Prof. Dr. Metin AYDOĞDU
Tez Danışmanı

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Murat YURTCAN

Fen Bilimleri EnstitüsüMüdürü

T.Ü.FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ DOKTORA PROGRAMI
DOĞRULUK BEYANI

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında, tüm verilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini, kullanılan verilerde tahrifat yapılmadığını, tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını, kullanılan tüm literatür bilgilerinin bilimsel normlara uygun bir şekilde kaynak gösterilerek ilgili tezde yer aldığını ve bu tezin tamamı ya da herhangi bir bölümünün daha önceden Trakya Üniversitesi ya da farklı bir üniversitede tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

24/06/2020

Ufuk GÜL

Doktora Tezi
Nano Yapıların Eşil Mekanik Teorisi Kullanılarak Statik ve Dinamik Analizleri
T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

ÖZET

Bu çalışmada, nanoçubuk ve nanokirişlerin statik ve dinamik analizleri Eşil Mekanik teorisi kullanılarak yapılmıştır. Eşil Mekanik teorisinde, makro seviye genleme ve gerilmeler, mikro seviye genleme ve gerilmeler cinsinden tanımlanmaktadır. Bu mikro deformasyonlar ve mikro gerilmeler Taylor serisine açılır ve Taylor serisindeki terimlerin sayısı yaklaşımın derecesini tanımlar. Formülasyonda klasik çubuk teorisi, Euler–Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorileri kullanılmıştır. Yönetici denklemler ve nano yapıların tüm sınır koşulları, varyasyonel ilkeye dayanılarak türetilmiştir. Yönetici denklemlerinin türetilmesinden sonra nanoçubuk ve nanokirişlerde statik deformasyon, burkulma, titreşim ve dalga yayınım problemleri ayrıntılı olarak araştırılmıştır. Eşil Mekanik teorisi kullanılarak elde edilen sonuçlar, klasik elastisite modeli, diğer boyuta bağlı yerel olmayan teoriler, moleküler dinamik simülasyonu ve deneysel çalışmalarla farklı malzeme ve geometrik özellikler için karşılaştırılmış ve mevcut Eşil Mekanik modeli ve bahsedilen diğer sonuçlar arasında iyi bir uyum gözlemlenmiştir. Eşil Mekanik teorisinin diğer ölçeğe bağlı modellerden ana farkı, katının mikro/nano yapısına doğrudan bağlı olmasıdır. Elde edilen sonuçlar, uzunluk ölçeğine bağlı Eşil Mekanik teorisinin nano uzunluk ölçekli yapıların tasarımında kullanılabileceğini göstermiştir.

Yıl : 2020

Sayfa Sayısı : 290

Anahtar Kelimeler : Eşil Mekanik teorisi, nanoçubuk, nanokiriş, mikro genleme, mikro gerilme, statik, dinamik

PhD Thesis

Static and dynamic analyses of nano structures by using doublet mechanics theory

Trakya University Institute of Natural Sciences

Mechanical Engineering Department

ABSTRACT

In this study, static and dynamic analyses of nanorods and nanobeams have been executed by using doublet mechanics theory. Macro level strain and stresses are defined in terms of micro level strain and stresses in the doublet mechanics theory. These micro deformations and micro stresses are expanded in Taylor series and the number of terms in the Taylor series defines degree of the approach. Classical rod theory, Euler –Bernoulli and Timoshenko beam theories have been used in the formulation. Governing equations and all boundary conditions of nanostructures have been derived based on the variational principle. After deriving governing equations static deformation, buckling, vibration and wave propagation problems in nanorods and nanobeams are investigated in detail. The results obtained by using of doublet mechanics theory have been compared to the classical elasticity model, other size dependent nonlocal theories, molecular dynamics simulation and experimental studies for different material and geometrical properties and good agreement has been observed between the present doublet mechanics model and other mentioned results. The main difference of the doublet mechanics theory from other scale dependent models is its direct dependence of the micro/nano structure of the solid. The obtained results showed that a length scale dependent doublet mechanics theory can be used in the nano length scale design of structures.

Year : 2020

Number of Pages : 290

Keywords : Doublet mechanics theory, nanorod, nanobeam, micro strain, micro stress, static, dynamic

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında, bilgisi, tecrübesi, teşvik ediciliği ile beni her zaman destekleyen, doğruluğu ve akademik etiği her zaman ön planda tutarak bana yol gösteren ve kişisel ve mesleki gelişimime büyük katkısı olan çok değerli tez danışmanım Prof. Dr. Metin AYDOĞDU hocama teşekkürlerimi sunarım.

Büyük fedakârlıklarla beni bu günlere getiren annem ve babama, manevi desteğini hiç esirgemeyen ablama ve sevimli yeğenlerime teşekkür ediyorum.

Bu tezin yazımında, manevi yardımları ile hep yanımda olan Elif SABURLU'ya, Ubade KEMERLİ'ye ve Trakya Üniversitesi'ndeki çalışma arkadaşlarıma ayrıca teşekkürü borç bilirim.

Haziran-2020 Ufuk GÜL

İÇİNDEKİLER

DOĞRULUK BEYANI iii
ÖZET iv
ABSTRACT v
TEŞEKKÜR vi
İÇİNDEKİLER vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ ix
ŞEKİLLER VE ÇİZELGELER DİZİNİ xiii
BÖLÜM 1. GİRİŞ 1
1.1. Problem ve Kapsamı 1
1.2. EM Teorisi ile İlgili Literatürde Yer Alan Çalışmalar 2
1.3. Tez Çalışmasının Amacı ve İçeriği 7
BÖLÜM 2. EŞİL MEKANİK TEORİSİ 9
2.1. Eşil Mekanik Formülasyonu 9
BÖLÜM 3. NANO YAPILARIN STATİK VE DİNAMİK DAVRANIŞLARININ YÖNETİCİ DENKLEMLERİ 17
3.1. Giriş 17
3.2. Nanoçubuğun Statik Denge Denklemleri 17
3.3. Nanoçubuğun Hareket Denklemleri 19
3.4. Nanokirişin Statik Denge Denklemleri 21
3.5. Nanokirişin Hareket Denklemleri 23
BÖLÜM 4. NANO YAPILARIN STATİK VE DİNAMİK ANALİZLERİ 25
4.1. Giriş 25
4.2. Nanoçubuk ve Nanokirişlerin EM Teorisi Kullanılarak Statik ve Dinamik Analizleri 25
4.3. Elastik Ortama Gömülü Nanoçubuğun EM Teorisi ile Eksenel Dinamik Analizi 31
4.4. Love Nanoçubuk Modellerinin EM Teorisi ile Titreşim Analizi 38
4.5. Çiftli Nanoçubuk Sistemlerinin EM Teorisi ile Eksenel Titreşim Analizi 44
4.6. Elastik Ortama Gömülü Nanotüplerin (Nanoelyafların) EM Teorisi ile Titreşim ve Burkulma Analizi 52

4.7. Elastik Ortama Gömülü Çiftli Nanokirişlerin (Nanoelyafların) EM Teorisi ile Burkulma Analizi 57
4.8. Elastik Ortama Gömülü Çift Duvarlı Karbon Nanotüplerin EM Teorisi ile Eş Eksenli Olmayan Titreşim ve Burkulma Analizi 61
4.9. Çift Duvarlı Karbon Nanotüplerin EM Teorisi ile Dalga Yayınım Analizi 65
4.10. Periyodik Yapılı Nanoçubukların ve Nanokirişlerin EM Teorisi ile Statik ve Dinamik Analizleri 75
4.11. Periyodik Yapılı Katmanlı Nanokirişlerin EM Teorisi ile Titreşim Analizi . 80
4.12. Mikro-nano Ölçekli Timoshenko Kiriş Modelinin EM Teorisi ile Eğilme, Burkulma ve Titreşim Analizleri 88
BÖLÜM 5. SAYISAL SONUÇLAR..... 101
5.1. Giriş..... 101
5.2. Nanoçubuk ve Nanokirişlerin Statik ve Dinamik Sonuçları 101
5.3. Elastik Ortama Gömülü Nanoçubukların Eksenel Titreşim Sonuçları 110
5.4. Love Nanoçubuk Modellerinin Eksenel Titreşim Sonuçları 118
5.5. Çiftli Nanoçubuk Sistemlerinin Eksenel Titreşim Sonuçları 125
5.6. Elastik Ortama Gömülü Nanotüplerin Burkulma ve Titreşim Analizi Sonuçları 135
5.7. Çiftli Nanotüplerin Burkulma Analizi Sonuçları 149
5.8. Elastik Ortama Gömülü Çift Duvarlı Karbon Nanotüplerin Eş Eksenli Olmayan Titreşim ve Burkulma Analizi Sonuçları 159
5.9. Elastik Ortama Gömülü Çift Duvarlı Karbon Nanotüplerin Dalga Yayınım Analizi Sonuçları 171
5.10. Periyodik Yapılı Nanoçubukların ve Nanokirişlerin Statik ve Dinamik Analiz Sonuçları 183
5.11. Periyodik Yapılı Katmanlı Nanokirişlerin Titreşim Analizi Sonuçları 212
5.12. Mikro/nano Ölçekli Timoshenko Kiriş Modelinde Statik ve Dinamik Analiz Sonuçları 236
BÖLÜM 6. GENEL SONUÇLAR 252
EK-1..... 255
EK-2..... 259
KAYNAKLAR..... 263
ÖZGEÇMİŞ..... 272
TEZ ÖĞRENCİSİNE AİT TEZ İLE İLGİLİ BİLİMSEL FAALİYETLER 273

SİMGELER DİZİNİ

A	Kesit alanı
a'_α, b'_α	Düğüm noktalarının yeni konumu
a_r	Genlik oranı
b	Genişlik
$[B]$	Mikro modülleri içeren simetrik matris
$B_{\alpha\beta}$	α ve β düğümleri arasındaki eksenel mikro-modül
$[C]$	Rijitlik matrisi
c^2	Genleme gradyan teorisinde uzunluk ölçeği parametresi
$c_i (i = 1,2,3,4)$	Belirsiz katsayılar
C_j	Tüpler arasındaki Van der Waals etkileşimi katsayısı
d	Çap
D_i (i=1,..6)	Belirsiz katsayılar
E	Elastisite modülü
e_0a	Yerel olmayan elastisite teorisine ait ölçek parametresi
E_r	Elastisite modülü oranı
f	Eksenel kuvvet
f_{1n}, f_{2n}	Birinci ve ikinci küme frekansları
g^2	Genleme gradyanlı elastisite teorisine ait uzunluk ölçek parametresi
G	Kayma modülü
h	Yükseklik
$[H]$	Dönüşüm matrisi
I	Kiriş kesitinin alan atalet momenti
I_p	Nanoçubuğun polar atalet momenti
k	Dalga sayısı
K	Boyutsuz elastik ortam parametresi
k_e	Elastik ortam parametresi
k_s	Yay sertliği

L	Uzunluk
M	Taylor serisi açılımındaki terimlerin sayısı
$\boldsymbol{m}_\alpha$	Burulma mikro gerilmesi
m_e	Gerilme gradyanlı klasik olmayan moment bileşeni
M_e	Eğilme momenti
n	Mod sayısı
N_e	Van der Waals etkileşimine bağlı eksenel kuvvet
"o"	Katının içindeki düğümlerin (atomların) ilk konfigürasyonu
P	Düzlem içi kuvvet
$\boldsymbol{p}_\alpha$	α-eşilindeki uzama mikro gerilmesi
q	Düzgün yayılı yük
Q_n	Fourier katsayısı
r	Radyal konum
R	Kuvvet çifti
R_1	Nanotüpün iç yarıçapı
R_2	Nanotüpün dış yarıçapı
r_g	Boyutsuz atalet yarıçapı (jirasyon yarıçapı)
R_j	j. nanotüpün yarıçapı
t	Zaman
$\boldsymbol{t}_\alpha$	Kayma mikro gerilmesi
$T_ç$	Çubuğa ait kinetik enerji
t_k	Nanotüp kalınlığı
T_k	Kirişe ait kinetik enerji
$\vec{u}$	Yer değiştirme vektörü
U, V, W	x, y ve z Kartezyen koordinatlarındaki yer değiştirme bileşenleri
u_1	Kiriş kesitinin eğilme deformasyonundan kaynaklanan yer değiştirmesi
$U_ç$	Çubuğun genleme enerjisi
U_e	Çubuk elemanında elastik ortamın genleme enerjisi
U_k	Kirişin genleme enerjisi
U_{ke}	Kiriş elemanında elastik ortamın genleme enerjisi
u_m	Çubuğun orta eksenine göre eksenel yer değiştirme
U_t	Toplam genleme enerjisi

V	Kesme kuvveti
V_g	Grup hızı
V_p	Faz hızı
w	Kirişin enine yer değiştirmesi
$W_ç$	Çubuk elemanında dış kuvvetlerin işi
W_k	Kiriş elemanında dış kuvvetlerin işi
w_n	Kirişin orta düzleminin enine yer değiştirmesi
x,y,z	Kartezyen koordinatlar
α	İkili (eşil) atom sayısı
∇	Delta operatörü
$\Delta\vec{u}_\alpha$	Artımlı yer değiştirme vektörü
ε	Makro genleme
ϵ_α	Eksenel uzama mikro genlemesi
ϵ_β	β-eşili yönündeki eksenel mikro genleme
ε_{xz}	Makro kayma genlemesi
$\eta_\alpha = \lvert\xi_\alpha\rvert = \eta$	Eşil atomlar arasındaki mesafe veya EM teorisindeki iç karakteristik uzunluk
φ	Kiriş kesitinin kayma deformasyonundan kaynaklanan dönme açısı
κ	Kayma düzeltme faktörü
δ	Varyasyonel sembol
λ,μ	Lame sabitleri
λ^2	Çubukta boyutsuz frekans parametresi
ν	Poisson oranı
ρ	Yoğunluk
σ	Makro gerilme
σ_{xx}	Eksenel makro gerilme
σ_{xz}	Makro kayma gerilmesi
$\vec{\tau}_\alpha^0$	α-yönündeki birim vektör
τ_{ij}^0	Mikro gerilmeler ile Kartezyen koordinatlar arasındaki açının kosinüsleri
θ	Şiral açısı
ω	Açısal frekans
Ω^2	Kirişte boyutsuz frekans parametresi

ω_n	Doğal frekans
ω_{sf}	Etkin sınır frekans

KISALTMALAR

A-A	Ankastre-Ankastre
A-B	Ankastre-Basit destekli
A-S	Ankastre-Serbest
B-B	Basit destekli-Basit destekli
Cs	Kosinüs
CT	Klasik Timoshenko Teorisi
ÇDKNT	Çift Duvarlı Karbon Nanotüp
ÇNKS	Çiftli Nanokiriş Sistemi
ÇNÇS	Çiftli Nanoçubuk Sistemi
DEB	Çift Duvarlı Euler-Bernoulli Kirişi
DTB	Çift Duvarlı Timoshenko Kirişi
EBT	Euler-Bernoulli Teorisi
EM	Eşil Mekanik
MD	Moleküler Dinamik
LD	Kafes Dinamiği
LE	Klasik Elastisite Teorisi
NEMS	Nano-Elektro-Mekanik Sistemler
NL	Yerel Olmayan Elastisite Teorisi
NOMS	Nano-Opto-Mekanik Sistemler
Ref.	Referans
S	Sinüs
SG	Genleme gradyanı esaslı sürekli ortam teorisi
S-S	Serbest-Serbest
TBT	Timoshenko Kiriş Teorisi

ŞEKİLLER VE ÇİZELGELER DİZİNİ

Şekil 2.1. Eşil geometride mikro gerilmeler. 10
Şekil 2.2. Eşil düğüm noktalarının deformasyonu. ..10
Şekil 2.3. Üç eşilli nanotüp. ..12
Şekil 4.1. Zigzag nanotüp modeline ait atomların dizilimi. ..26
Şekil 4.2. Elastik ortama gömülü bir nanoçubuk (karbon nanotüp). ..32
Şekil 4.3. Elastik ortamda tek boyutlu molekül zinciri. ...36
Şekil 4.4. Nanoçubuk modeli. ..39
Şekil 4.5. A-A ve A-S ÇNÇS. .. 45
Şekil 4.6. Çiftli nanokiriş sistemi. ...59
Şekil 4.7. Elastik ortama gömülü çift duvarlı karbon nanotüp. ..62
Şekil 4.8. Periyodik nano yapıdaki atomların dizilimi. ..76
Şekil 4.9. (a) Simetrik ve (b) anti-simetrik dört katmanlı nanokiriş. ..82
Şekil 5.1. Nanoçubukların farklı teorilerdeki dalga yayınım eğrileri (LE:Klasik Elastisite, LD: Kafes Dinamiği, NL: Yerel olmayan elastisite, EM: Eşil Mekanik ($\eta = 0.1421$ nm)). ...105
Şekil 5.2. Nanoçubukların farklı teorilerdeki faz hızı değerleri ($\eta = 0.1421$ nm). 106
Şekil 5.3. Nanoçubukların farklı teorilerdeki grup hızı değerleri ($\eta = 0.1421$ nm). 106
Şekil 5.4. Nanokirişlerin boyutsuz yer değiştirmesi (L=1 nm, $\eta = 0.1421$ nm). ..108
Şekil 5.5. Nanokirişlerin kritik burkulma yüklerinin kiriş uzunluğu ile değişimi ($\eta = 0.1421$ nm). ...108
Şekil 5.6. Nanokirişlerin ilk üç moddaki boyutsuz frekans parametrelerinin kiriş uzunluğu ile değişimi ($\eta = 0.1421$ nm). ...109
Şekil 5.7. Nanokirişlerin boyutsuz frekans parametrelerinin mod sayısı ile değişimi (L=1 nm, $\eta = 0.1421$ nm). ..109
Şekil 5.8. Nanokirişlerin boyutsuz frekans parametrelerinin eşil mesafe (η) ile değişimi (L=1 nm). ...110
Şekil 5.9. Nanoçubukta eksenel dalga frekansı ile dalga sayısının değişimi. ..111
Şekil 5.10. Nanoçubukta faz hızı ile dalga sayısının değişimi. ..111
Şekil 5.11. Nanoçubukta grup hızı ile dalga sayısının değişimi. ..112
Şekil 5.12. Nanoçubukta boyutsuz titreşim frekansı parametresi ile uzunluğun değişimi (K=0). ..113
Şekil 5.13. Nanoçubukta boyutsuz titreşim frekansı parametresi ile uzunluğun değişimi (K=10). ...114
Şekil 5.14. Nanoçubukta boyutsuz titreşim frekansı parametresi ile boyutsuz elastik ortam parametresinin ilk üç moddaki değişimi (L=1 nm). ...116
Şekil 5.15. Nanoçubukta boyutsuz titreşim frekansı parametresi ile boyutsuz elastik ortam parametresinin ilk üç moddaki değişimi (L=2 nm). ...117
Şekil 5.16. Nanoçubukta boyutsuz titreşim frekansı parametresi ile eşil mesafenin değişimi (L=1 nm, K=5). ...118
Şekil 5.17. Boyutsuz titreşim frekansı parametresinin mod sayısı ile değişimi. ..124
Şekil 5.18. A-A ÇNÇS'de boyutsuz frekansın mod sayısı ile değişimi (K=0). ..127

Şekil 5.19. A-A ÇNÇS'de boyutsuz frekansın mod sayısı ile değişimi (K=2). ……128
Şekil 5.20. A-S ÇNÇS'de boyutsuz frekansın mod sayısı ile değişimi (K=0). ……129
Şekil 5.21. A-S ÇNÇS'de boyutsuz frekansın mod sayısı ile değişimi (K=2). ……130
Şekil 5.22. İlk üç moddaki A-A ÇNÇS'de boyutsuz frekansın boyutsuz elastik ortam parametresi ile değişimi. ……131
Şekil 5.23. İlk üç moddaki A-S ÇNÇS'de boyutsuz frekansın boyutsuz elastik ortam parametresi ile değişimi. ……132
Şekil 5.24. Düzgün eksenel yük etkisindeki A-A ÇNÇS'de relatif mod şekilleri (L=1 nm, K=0.5). ……..134
Şekil 5.25. Doğrusal eksenel yük etkisindeki A-A ÇNÇS'de relatif mod şekilleri (L=1 nm, K=0.5). ……...135
Şekil 5.26. Kritik burkulma yükünün nanotüp uzunluğu ile değişimi (n=1). ……137
Şekil 5.27. Kritik burkulma yükünün şiral açısı ile değişimi (K=0.5,n=1). ……137
Şekil 5.28. $\frac{P_{kritik}}{EI}$ ile nanotüp uzunluğunun ilk üç moddaki değişimi. ……...139
Şekil 5.29. Nanotüpün ilk moddaki titreşimi (n=1). ……..140
Şekil 5.30. Boyutsuz frekans parametresinin şiral açısı ile ilk üç moddaki değişimi (K=0.5). ……142
Şekil 5.31. Titreşim frekansı oranının nanotüp uzunluğu ile değişimi (K=0.5). ……143
Şekil 5.32. Titreşim frekansı oranının şiral açısı ile değişimi (L=1 nm, K=0.5). ……144
Şekil 5.33. Kritik burkulma yükünün kiriş uzunluğu ile değişimi (E_r=1, I_r=1, η_1=0.1421 nm, η_2=0.1421 nm). ……...153
Şekil 5.34. Kritik burkulma yükünün boyutsuz yay katılığı ile değişimi (E_r=1, I_r=1, η_1=0.1421 nm, η_2=0.1421 nm). ……..155
Şekil 5.35. Kritik burkulma yükünün mod sayısı ile değişimi (E_r=1, I_r=1, η_1=0.1421 nm, η_2=0.1421 nm). ……..156
Şekil 5.36. ÇNKS'de mod şekilleri (E_r=1, I_r=1, η_1=0.1421 nm, η_2=0.1421 nm). ……158
Şekil 5.37. Boyutsuz frekans parametresinin mod sayısı ile değişimi (R_1=0.5 nm, L=1 nm). ……...161
Şekil 5.38. Boyutsuz frekans parametresinin mod sayısı ile değişimi (R_1=0.5 nm, L=5 nm). ……...162
Şekil 5.39. Birinci moddaki boyutsuz frekans parametresinin nanotüp uzunluğu ile değişimi (R_1=0.5 nm). ……...164
Şekil 5.40. Üçüncü moddaki boyutsuz frekans parametresinin nanotüp uzunluğu ile değişimi (R_1=0.5 nm). ……...165
Şekil 5.41. Birinci ve ikinci küme frekanslar için çift duvarlı karbon nanotüplerin mod şekilleri (R_1 =0.5 nm, K=400, L=1 nm). ……168
Şekil 5.42. Çift duvarlı karbon nanotüplerin kritik burkulma yüklerinin uzunluk ile değişimi (R_1=0.5 nm). ……...169
Şekil 5.43. Çift duvarlı karbon nanotüplerin burkulma mod şekilleri (R_1=0.5 nm, K=400, L=1 nm, n=1). ……169
Şekil 5.44. Grafit için indirgenmiş dalga sayısı ile dalga frekansının değişimi ($E = 345$ GPa, $\rho = 2266$ kg/m^3, $\eta = 0.246$ nm, $e_0a = 0.39x0.1421$ nm, $R_1 = 0.5$ nm). ……...172
Şekil 5.45. Dalga frekansının farklı dalga sayıları ile değişimi ($\eta = 0.1421$ nm, $e_0a = 0.39x0.1421$ nm, $R_1 = 0.5$ nm). ……173
Şekil 5.46. Faz hızının farklı dalga sayıları ile değişimi ($\eta = 0.1421$ nm, $e_0a = 0.39x0.1421$ nm, $R_1 = 0.5$ nm). ……174

Şekil 5.47. Grup hızının farklı dalga sayıları ile değişimi ($\eta = 0.1421$ nm, $e_0a = 0.39x0.1421$ nm, $R_1 = 0.5$ nm). ……174
Şekil 5.48. Enine dalga yayınımında dalga frekanslarının farklı dalga sayıları ile değişimi ($R_1 = 0.5$ nm). ……..177
Şekil 5.49. Enine dalga yayınımında genlik oranının dalga frekansları ile değişimi ($R_1 = 0.5$ nm). ……178
Şekil 5.50. Enine dalga yayınımında faz hızlarının farklı dalga sayıları ile değişimi ($R_1 = 0.5$ nm). ……179
Şekil 5.51. Enine dalga yayınımında grup hızlarının farklı dalga sayıları ile değişimi ($R_1 = 0.5$ nm). ……180
Şekil 5.52. Farklı yarıçaplardaki çift duvarlı karbon nanotüplerin dalga frekansının dalga sayısı ile değişimi. ……181
Şekil 5.53. Eksenel dalga yayınımında dalga frekanslarının farklı dalga sayıları ile değişimi ($K = 10^9$ N/m^2, $\eta = 0.1421$ nm, $e_0a = 0.39x0.1421$ nm, $R_1 = 0.5$ nm)182
Şekil 5.54. Nanoçubukların boyutsuz yer değiştirmesinin boyutsuz uzunluk ile değişimi. ……...186
Şekil 5.55. Nanoçubukların ilk üç moddaki frekans parametresinin çubuk uzunluğu ile değişimi. ……189
Şekil 5.56. Nanoçubukların frekans parametresinin mod sayısı ile değişimi. ……192
Şekil 5.57. Nanoçubukların dalga frekanslarının dalga sayısı ile değişimi. ……...194
Şekil 5.58. Nanoçubukların faz hızlarının dalga sayısı ile değişimi. ……..195
Şekil 5.59. Nanoçubukların grup hızlarının dalga sayısı ile değişimi. ……...197
Şekil 5.60. Nanokirişlerin boyutsuz yer değiştirmesinin boyutsuz uzunluk ile değişimi. ……...199
Şekil 5.61. Nanokirişlerin kritik burkulma yükü değerlerinin uzunluk ile değişimi. ….201
Şekil 5.62. Nanokirişlerin ilk üç moddaki frekans parametresinin kiriş uzunluğu ile değişimi. ……204
Şekil 5.63. Nanokirişlerin frekans parametresinin mod sayısı ile değişimi. ……..207
Şekil 5.64. Nanokirişlerin dalga frekanslarının dalga sayısı ile değişimi. ……..209
Şekil 5.65. Nanokirişlerin faz hızlarının dalga sayısı ile değişimi. ……210
Şekil 5.66. Nanokirişlerin grup hızlarının dalga sayısı ile değişimi. ……..212
Şekil 5.67. Simetrik durum için frekans parametrelerinin mod sayısı ile değişimi ($\beta_A/\beta_B = 1$). ……216
Şekil 5.68. Simetrik durum için frekans parametrelerinin E_A/E_B=E_r ile değişimi ($\beta_A/\beta_B = 1$). ……219
Şekil 5.69. Simetrik durum için frekans parametrelerinin *L/h* ile değişimi ($\beta_A/\beta_B = 1$). ……...222
Şekil 5.70. Simetrik durum için frekans parametrelerinin β_A/β_B ile değişimi. ……225
Şekil 5.71. Anti-simetrik durum için frekans parametrelerinin mod sayısı ile değişimi ($\beta_A/\beta_B = 1$). ……229
Şekil 5.72. Anti-simetrik durum için frekans parametrelerinin E_A/E_B=E_r ile değişimi ($\beta_A/\beta_B = 1$). ……231
Şekil 5.73. Anti-simetrik durum için frekans parametrelerinin *L/h* ile değişimi ($\beta_A/\beta_B = 1$). ……234
Şekil 5.74. Anti-simetrik durum için frekans parametrelerinin β_A/β_B ile değişimi. …..236
Şekil 5.75. Zigzag modeline sahip Timoshenko nanokirişinin (a) boyutsuz yer değiştirmesi ve (b) dönmesi (κ=5/6, η=1 nm). ……...244

Şekil 5.76. Koltuk modeline sahip Timoshenko nanokirişinin (a) boyutsuz yer değiştirmesi ve (b) dönmesi (κ=5/6, η=1 nm). ……...245
Şekil 5.77. Farklı L/h değerlerinde Timoshenko nanokirişinin kritik burkulma yükü (κ=5/6, η=1 nm). ……246
Şekil 5.78. Farklı η/h değerlerinde Timoshenko nanokirişinin kritik burkulma yükü (κ=5/6). ……..247
Şekil 5.79. Farklı L/h değerlerinde Timoshenko nanokirişinin boyutsuz frekans parametreleri (κ=5/6, η=1 nm). ……..249
Şekil 5.80. Timoshenko nanokirişinin boyutsuz frekans parametrelerinin mod sayısı ile değişimi (κ=5/6, η=1 nm). ……251
Çizelge 4.1. Farklı çubuk teorileri için deformasyon durumları. ……41
Çizelge 5.1. LE, DM, SG ve Deneysel çalışmalar için farklı indirgenmiş dalga sayılarında (k/k_{max}) grafitin eksenel dalga frekansı (THz). ……...102
Çizelge 5.2. A-A nanoçubuklarda boyutsuz yer değiştirme ($\bar{x}$=0.5). ……102
Çizelge 5.3. B-B nanokirişlerde boyutsuz yer değiştirme ($\bar{x}$=0.5). ……103
Çizelge 5.4. B-B nanokirişlerde farklı uzunluklarda boyutsuz yer değiştirme ($\bar{x}$=0.5). .103
Çizelge 5.5. B-B nanokirişlerde farklı uzunluklarda kritik burkulma yükü değerleri. ...103
Çizelge 5.6. B-B nanokirişlerde farklı uzunluklarda boyutsuz frekans parametreleri. ..104
Çizelge 5.7. S-S (5,5) ve (5,0) karbon nanotüplerinin ilk üç moddaki doğal frekansları (THz). ……120
Çizelge 5.8. A-S (5,5) ve (5,0) karbon nanotüplerinin ilk moddaki doğal frekansları (THz). ……120
Çizelge 5.9. A-S (5,5) ve (5,0) karbon nanotüplerinin ilk moddaki doğal frekansları (THz). ……121
Çizelge 5.10a. A-A nanoçubuklarında boyutsuz doğal frekanslar (zigzag model) ($\nu = 1/3, \eta = 0.1421$ nm). ……...122
Çizelge 5.10b. A-S nanoçubuklarında boyutsuz doğal frekanslar (zigzag model) ($\nu = 1/3, \eta = 0.1421$ nm). ……...123
Çizelge 5.11. ÇNÇS'nin A-S sınır koşullarında ilk dört doğal frekans değerleri (GHz) (k_e=8 N/nm, $\bar{e} = 1$ nN, L=1 nm, m=10^{-9} kg/m). ……125
Çizelge 5.12. A-S sınır koşuluna sahip ÇNÇS'nin ilk dört doğal frekans değerlerinin (THz) yerel olmayan elastisite ve MD simülasyonu ile karşılaştırılması. ……126
Çizelge 5.13. Elastik ortama gömülü nanotüplerin farklı sınır koşullarındaki titreşim frekansları (n=1). ……...146
Çizelge 5.14. Elastik ortama gömülü nanotüplerin farklı sınır koşullarındaki titreşim frekansları (n=2). ……...147
Çizelge 5.15. Elastik ortama gömülü nanotüplerin farklı sınır koşullarındaki titreşim frekansları (n=3). ……...148
Çizelge 5.16. Elastik ortama gömülü nanotüplerin farklı sınır koşullarındaki kritik burkulma yükleri (n=1). ……149
Çizelge 5.17. ÇNKS'de kritik burkulma yükü değerlerinin karşılaştırılması (K=10). ...151
Çizelge 5.18a. B-B çift duvarlı karbon nanotüplerin birinci küme frekansı parametrelerinin karşılaştırılması. ……170
Çizelge 5.18b. B-B çift duvarlı karbon nanotüplerin ikinci küme frekansı parametrelerinin karşılaştırılması. ……170
Çizelge 5.19. B-B çift duvarlı karbon nanotüplerin birinci küme kritik burkulma yükü parametrelerinin karşılaştırılması (R_1=0.5 nm, η =0.1421 nm). ……171
Çizelge 5.20a. Faz hızının farklı dalga sayıları ile kıyaslanması (Birinci küme). ……..175

Çizelge 5.20b. Faz hızının farklı dalga sayıları ile kıyaslanması (İkinci küme). ……175
Çizelge 5.21. Düzgün yayılı yük uygulanmış B-B kirişlerde maksimum çökme ($\overline{w}$) ifadeleri. ……239
Çizelge 5.22. Düzgün yayılı yük uygulanmış B-B Timoshenko mikrokirişlerinde maksimum çökme ($\overline{w}$) ifadeleri. ……239
Çizelge 5.23. B-B noktasal yük P=100 μN etkisindeki Timoshenko mikrokirişlerinde boyutsuz çökme ($\overline{w} = 100w(EI/PL^3)$) ve dönme ($\overline{\varphi} = 100\varphi(EI/PL^2)$) ifadeleri ($x = L/4$, L=20h, h=l=η=17.6 μm, ν=0.38, b=2h, E=1.44 GPa, $\kappa = 5/6$). ……..240
Çizelge 5.24. B-B nanokirişlerde kritik burkulma yükü değerleri ($\bar{P}$). ……...240
Çizelge 5.25. B-B kirişlerde boyutsuz frekans parametresinin ($\overline{\omega}_1$) karşılaştırılması. ..241
Çizelge 5.26a. Farklı teoriler için B-B kirişlerde boyutsuz frekans parametresinin ($\overline{\omega}_1$) karşılaştırılması (Birinci spektrum). ……..241
Çizelge 5.26b. Farklı teoriler için B-B kirişlerde boyutsuz frekans parametresinin ($\overline{\omega}_2$) karşılaştırılması (İkinci spektrum). ……242

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu tez çalışmasında, mühendislikte kullanılan nano yapıların (nanoçubuk, nanokiriş) ölçek etkisini dikkate alan Eşil Mekanik teorisi kullanılarak statik ve dinamik analizleri gerçekleştirilmiştir. Nanotüpler, Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorileri kullanılarak modellenmiş ve kullanılan Eşil Mekanik teorisinin fiziksel anlamı tartışılarak, nanotüplere ait statik deformasyon ifadeleri, kritik burkulma yükleri, serbest titreşim frekansları ve dalga yayınım karakteristikleri elde edilmiş ve sonuçlar literatürdeki bazı sürekli ortam teorileri ve deneysel sonuçlarla kıyaslanarak Eşil Mekanik teorisinin doğruluğu araştırılmıştır.

Bu bölümde ilk olarak, problemin önemi ve kapsamı üzerinde durulmuştur. Daha sonra, literatürde Eşil Mekanik teorisi kullanılarak yapılan çalışmalara yer verilmiş ve son olarak da bu tez çalışmasının amacından ve içeriğinden bahsedilmiştir.

1.1. Problem ve Kapsamı

Feynman (1960), "aşağıda daha çok yer var" başlıklı meşhur konuşmasında, nano ölçekli yapıların tasarlanması için tek tek atomların doğrudan kullanılma olasılığından bahsetmiştir. Son yıllarda, nano yapılar olağanüstü mekanik, elektriksel ve fiziksel özellikleri nedeniyle büyük ilgi görmüştür. Nano yapılar günümüzde, fiber olarak kompozitlerde, prob ucu olarak atomik kuvvet mikroskoplarında ve biyomekanik uygulamalarında kullanılmaktadır. Ayrıca bu yapıların, güneş pillerinde, hidrojen depolarında, aktüatörlerde, nano ölçekli motorlarda kullanılması planlanmaktadır. Nano ölçekli malzemelerden biri olan karbon nanotüpler, Iijima (1991) tarafından keşfedilmiştir. Bu yüksek mukavemetli yapılar, olağanüstü fiziksel özellikleri nedeniyle elektronikte nano-sensör yapımında, nano-transistörlerde, nano-rezonatörlerde ve nano-

kompozitlerde olmak üzere nano-elektro-mekanik sistemlerin (NEMS) tasarımında sıkça kullanılmaktadır (Hutchinson, 2000; J. Wang & Musameh, 2003). Nanotüpler, tek başına yukarıda belirtilen şekillerde modellenebildiği gibi elastik bir ortama gömülü olarak da modellenebilir. Ayrıca tek duvarlı ve çok duvarlı olarak da üretilebilen nanotüplerin statik ve dinamik analizleri literatürde oldukça önemli bir yer tutmaktadır.

Klasik elastisite teorisi, ince, uzun çubuk ve kirişlerin statik ve dinamik analizleri için yeterli olsa da nano ölçekli kısa yapıların ölçek etkisini dikkate almadığı için nanoçubuk ve nanokirişlerin mekanik analizlerinde kullanışlı değildir. Bu nedenle, nano yapıların statik ve dinamik analizlerinde ölçek etkisini de dikkate alan yüksek mertebeli sürekli ortam modelleri kullanılmaktadır. Bu sürekli ortam teorilerinden en çok kullanılanlar, yerel olmayan elastisite teorisi (Eringen, 1976, 1983), kuvvet çifti gerilme teorisi (Cosserat & Cosserat, 1909), genleme esaslı gradyan teorisi (Mindlin, 1964), düzeltilmiş genleme esaslı gradyan teorisi (Askes, Suiker, & Sluys, 2002), peridinamik (Silling, 2000) ve mikropolar teori (Eringen, 1967) olarak sıralanabilir. Bu sürekli ortam teorileri, mekanik davranışların modellenmesi sırasında malzemelerin iç karakteristik uzunluğunu hesaba dahil etmektedirler. Genleme esaslı gradyan teorilerinde, gradyan teriminin negatif veya pozitif alınması durumuna göre, malzemelerde klasik elastisite teorisine göre yumuşama veya sertleşme davranışları ortaya çıkmaktadır. Negatif işaretli genleme gradyan teorisi pozitif işaretli bir enerjiden türetilirken, pozitif işaretli genleme gradyan teorisi ise negatif tanımlı bir enerji fonksiyonuna sahiptir. Buna ek olarak, pozitif işaretli genleme gradyan teorisi, ayrık bir sistemden elde edilebilmektedir. Buna karşılık, bu model negatif işaretli gradyan teorisine kıyasla kararlılığı ve çözümün tekliğini garanti etmez (Altan & Aifantis, 1997; Askes vd., 2002). Negatif işaretli genleme gradyan teorisi ise statik problemlerde teklik ve kararlılığı garanti ederken, dinamik problemlerde sanal frekanslar ve sonsuz grup hızları vermektedir (Askes vd., 2002). Nano ölçekte, pozitif işaretli genleme gradyan teorisinde klasik elastisite teorisine göre yumuşama davranışı gözlenirken, negatif işaretli genleme gradyan teorisinde ise sertleşme davranışı gözlenmektedir. Oysa, deneysel çalışmalardan bilindiği gibi (Fleck, Muller, Ashby, & Hutchinson, 1994; Lam, Yang, Chong, Wang, & Tong, 2003; X. H. Liu vd., 2012) malzemede görülen yumuşama veya sertleşme davranışları, dikkate alınan malzemenin doğrudan mikro yapısıyla alakalıdır. Bu nedenle, genleme gradyanı teorisinin statik ve dinamik problemlerde kullanımı hakkında bazı kafa karışıklıkları hala mevcuttur.

Literatürde kullanılan ölçek etkisini dikkate alan bir diğer teori ise Eringen'in (Eringen, 1983) geliştirdiği diferansiyel tip yerel olmayan elastisite teorisidir. Yerel olmayan elastisite teorisinde, katı içerisindeki bir noktadaki gerilme, o noktaya komşu olan bölgedeki noktaların genlemelerinin bir fonksiyonu olmaktadır. Yerel olmayan elastisite teorisi, nano ve mikro yapıların statik ve dinamik analizlerinde klasik elastisite teorisine göre daha doğru tahminde bulunmasına karşın mikro ölçekli yapıların mekanik davranışlarını incelemek için günümüzde daha fiziksel teorilere ihtiyaç duyulmaktadır.

Yukarıda adı geçen ölçek etkisini dikkate alan sürekli ortam teorilerine ek olarak, Granik (1978) tarafından mikro-yapılı malzemelerin mekanik davranışını incelemek için Eşil Mekanik (Doublet Mechanics) (EM) olarak adlandırılan bir mikro-mekanik teorisi geliştirilmiştir. EM teorisinin diğer ölçek etkisini dikkate alan modellerden temel farkı, katının mikro/nano yapısına doğrudan bağlı olmasıdır. EM teorisinin aksine, malzemedeki iç karakteristik uzunluğun belirlenmesi yukarıda bahsedilen sürekli ortam modelleri için açık bir problemdir. Halbuki, iç karakteristik uzunluk malzemenin atomik yapısıyla doğrudan ilişkilidir. EM teorisinde, katıyı oluşturan atomlar arasındaki bağ uzunluğunun değeri iç karakteristik uzunluk olarak alınmaktadır. Ayrıca yukarıda bahsedilen sürekli ortam modelleri deneylerle tanımlanamayan çok sayıda fenomenolojik makro sabitleri içerir. Bu nedenle, EM teorisi diğer ölçek bağımlı sürekli ortam teorileri gibi fenomenolojik değildir. EM teorisi karbon nanotüpler gibi yapıların modellemesinde alternatif bir teori olarak kullanılabilir. EM teorisinde, mikro ölçekli gerilme ve genlemeler, vektörel olarak Taylor serisine açılır. Bu mikro deformasyonlar, katıyı oluşturan atomlar arasındaki uzaklığı gösteren iç karakteristik uzunluğu da içermektedirler. EM teorisinde katıyı oluşturan her bir parça (atom) için eksenel, kayma ve burulma deformasyonları için mikro gerilme ve mikro genleme ilişkileri belirlenir. Daha sonra, elde edilen mikro gerilme-genleme ilişkileri makro gerilme-genleme ifadelerine dönüştürülür. Böylece, EM teorisine ait yönetici denklemler, makro deformasyonları, malzeme özelliklerini ve malzemenin iç karakteristik uzunluğunu da içerecek şekilde elde edilmektedir. EM teorisine ait yönetici diferansiyel denklemlerin mertebesi Taylor serisinde dikkate alınan terim sayısına bağlı olarak değişmektedir. Taylor serisinde dikkate alınan terim sayısı yaklaşımın doğruluğunu göstermemektedir. Taylor serisindeki terim sayısı doğrudan katının mikro yapısına bağlı olarak değişmektedir. Dolayısıyla, Taylor serisi açılımında malzemenin mikro yapısına bağlı

olarak optimum terim sayısı alınmaktadır. Fazla sayıda terim sayısı alınması yönetici diferansiyel denklemin ve genel sınır koşullarının mertebesinin artmasına yol açarak çözümü zorlaştırmaktadır. EM teorisinde katı malzemenin ayrık mikro yapısı dikkate alınır ve aşağıdan yukarıya bir yaklaşım uygulanarak makro seviyedeki deformasyonlar mikro deformasyonlardan elde edilir. Böylece, EM teorisi ayrık sistemle sürekli ortam mekaniği arasında köprü vazifesi görmektedir. Çok ölçekli EM teorisi, kafes dinamiği ve sürekli ortam mekaniğine iki sınırda da yakınsamaktadır. Bunun yanında, EM teorisi hariç tüm sürekli ortam teorileri, gerilmelerin çeşitli tensörleri ile ilgilidir. Gerilme tensörleri, yalnızca herhangi bir iç noktaya uygulanan bir kuvvetin hareketinin her yöne iletildiği, süreklilik durumları açısından gerçek anlam ifade eder. Bununla birlikte, mikro yapılı bir katının herhangi bir parçacığına uygulanan kuvvetin etkisi, bir parçacıktan diğerine sadece belirtilen yönlerde iletilir. Ayrık mikro yapının bu temel özelliği, tensör bazlı elastisite teorileri temelinde tarif edilemez. Bu teorilerin aksine, EM, skaler veya vektörel olarak, yönlü parçacık etkileşimlerinin mikro kuvvetlerini ve mikroçiftlerini yeterince temsil eden bir çiftli mikro gerilme tekniği kullanır. Bu özellik, EM'yi daha fiziksel yapıya kavuşturur ve bu da katı yapının mikro yapı ile mekanik davranışının daha iyi kavranmasını sağlar.

1.2. EM Teorisi ile İlgili Literatürde Yer Alan Çalışmalar

Mikro yapı teorisi olarak bilinen ve malzemeyi oluşturan atomların ölçek etkisini dikkate alan EM, Granik (1978) tarafından önerilmiştir. Sağlam bir termodinamik temele dayanan EM teorisi, Granik ve Ferrari (1993) tarafından tanecikli malzemelere uygulanmıştır.

Bir katı malzemeye ait çok eksenli akma ve kopma özellikleri çekme, basma ve kayma durumları açısından EM teorisi kullanılarak aynı yazarlar tarafından (Ferrari & Granik, 1994) araştırılmıştır. Daha sonra tanecikli malzemelerin modellenmesi için, EM teorisi kullanılarak mikro denklemler türetilmiş ve kinematik ilişkiler ayrıntılı olarak sunulmuştur (Ferrari, Granik, & Imam, 1997).

J. Liu ve Ferrari (2002), EM teorisini kullanarak nano-mekaniğin doku karakterizasyonunda nicel olarak incelenmesini sağlamışlardır. Gentile, Sakamoto, Righetti, Decuzzi, ve Ferrari (2011), kötü huylu dokuların ultrason karakterizasyonu için yeni bir EM modeli geliştirmişlerdir. Bu çalışmaların yanı sıra, EM teorisinin

biyomekanik uygulamalarına yönelik bazı çalışmalar da literatürde mevcuttur (Bruno, Decuzzi, & Gentile, 2016; Layman & Wu, 2004; Ling, Xiao-Zhou, Jie-Hui, & Xiu-Fen, 2014; Junru Wu, Layman, & Liu, 2004; Xin, Xiao-Zhou, & Jun-Ru, 2009).

Yan-Fang, Jue, Jing, ve Ferrari (2004), EM teorisindeki uzama ve kayma mikro gerilmelerini dikkate alarak, kübik bir tetrahedral kafeste düzlem dalga yayınımının dinamik denklemlerini çıkarmışlardır.

Lin ve Shen (2005), hareketli yüke maruz kalan ve tanecikli parçalardan oluşan düzlemin mikro ölçekli gerilme alanlarını EM teorisi ile çıkartmışlar ve elde edilen mikro gerilme alanları ile makro gerilme alanlarını birbiriyle kıyaslamışlardır. EM teorisinde, mikro gerilme alanlarının hareketli yük uygulama noktasına göre simetrik olmayan desen gösterdiği sonucuna varılmıştır.

Asfalt malzemelerini modellemek için EM teorisi ile birlikte sonlu elemanlar analizi Sadd ve Dai (2005) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada, EM ile sonlu elemanlar yaklaşımı arasındaki farklılıklar ve benzerlikler ortaya konmuştur.

Kojic, Vlastelica, Decuzzi, Granik, ve Ferrari (2011), EM teorisinin sonlu elemanlar formülasyonunu mikro malzemelerin mekanik modellenmesi için türetmişlerdir. EM kullanılarak elde edilen sonlu elemanlar formülasyonunun temeli bu çalışmada doğrulanmıştır. Bu durum, karmaşık mikroyapısal problemlerin çözümünü sağlaması açısından oldukça önemlidir.

Son yıllarda karbon nanotüplerin statik ve dinamik analizleri EM teorisi yardımıyla ele alınmıştır. Fatahi-Vajari ve Imam (2016a), tek duvarlı karbon nanotüplerin eksenel titreşimini EM teorisi ile incelemişlerdir. Tek duvarlı karbon nanotüpe ait eksenel titreşim modunu düzenleyen bir dördüncü mertebeden diferansiyel denklemi EM teorisi için türetmişler ve nanotüpe ait iç karakteristik uzunluk parametresinin önemli bir rol oynadığını göstermişlerdir. Bir diğer çalışmada, tek duvarlı karbon nanotüplerin burulma titreşimleri EM teorisi ile aynı araştırmacılar tarafından çalışılmıştır (Fatahi-Vajari & Imam, 2016b). EM ile karbon nanotüplere ait burulma titreşim modları farklı nanotüp modelleri (zigzag, koltuk) ve farklı geometrik uzunluklar için sunulmuş ve elde edilen sonuçlar klasik sürekli ortam teorisi ve moleküler dinamik modeli ile kıyaslanmıştır.

Tek duvarlı karbon nanotüplerin radyal titreşim analizi EM kullanılarak Fatahi-Vajari ve Imam (2016) tarafından araştırılmıştır. Bu çalışmada zigzag ve koltuk nanotüp

modelleri kullanılmış ve EM sonuçlarının literatürdeki deneysel sonuçlarla uyumlu olduğu gözlenmiştir. Aynı zamanda, çift duvarlı nanotüplerin radyal titreşim analizi de Fatahi-Vajari (2018) tarafından gerçekleştirilmiştir.

Gul, Aydogdu, ve Gaygusuzoglu (2017), elastik ortama gömülü nanoçubukların eksenel titreşim analizini EM teorisi ile gerçekleştirmişlerdir. Elde edilen sonuçlar klasik elastisite teorisi ve kafes dinamiği çözümüyle kıyaslanmış ve EM sonuçlarının kafes dinamiği sonuçları ile oldukça uyumlu olduğu gözlenmiştir.

Başka bir çalışmada, EM teorisi kullanılarak çift duvarlı karbon nanotüplerin dalga yayınım analizi yapılmıştır (Gul & Aydogdu, 2017). Bu çalışmada elde edilen EM sonuçları deneysel sonuçlarla kıyaslanmış ve iki sonuç arasında uyum olduğu gözlenmiştir.

Euler-Bernoulli ve Timoshenko nanokirişlerine ait statik çökme analizi EM teorisi kullanılarak Ebrahimian, Imam, ve Najafi (2018) tarafından sunulmuştur. Bu çalışmada, zigzag ve koltuk nanokiriş modellerine ait statik çözümler literatürde var olan diğer sürekli ortam teorileri ve moleküler dinamik simülasyonu ile kıyaslanmıştır. Özelde, EM teorisinin klasik elastisite teorisine göre yumuşama ve sertleşme davranışları üzerinde durulmuştur.

Gul ve Aydogdu (2018b), EM teorisi ile nanoçubuk ve nanokirişlerin statik ve dinamik analizlerini incelemişlerdir. EM teorisinin, diğer ölçek etkisini dikkate alan sürekli ortam teorilerine göre dalga yayınım analizinde deney ve kafes dinamiği ile mükemmel sonuçlar verdiği sonucuna varılmıştır. Bu sonuç, EM teorisinin fiziksel temelinin güçlü olduğunu ispat etmektedir.

Elastik ortama gömülü çiftli elyafın burkulma analizi ve elastik ortama gömülü tekli elyafın titreşim ve burkulma analizleri EM teorisi yardımıyla ayrı ayrı sunulmuştur (Aydogdu & Gul, 2018b; Gul, Aydogdu, & Gaygusuzoglu, 2018). Winkler elastik ortamı kullanılarak yapılan bu analizler neticesinde, EM teorisinin nano ölçekli yapıların mekanik modellemesinde kullanılabileceği sonucuna varılmıştır.

Başka bir çalışmada, elastik ortama gömülü çift duvarlı karbon nanotüplerin titreşim ve burkulma analizleri EM ile yapılmıştır (Gul & Aydogdu, 2018a). Bu analiz neticesinde çift duvarlı karbon nanotüplerin bazı frekans değerlerinde eş eksenli hareket etmedikleri gözlenmiştir. Eş eksenli olmayan titreşim ve burkulma hareketi karbon

nanotüplerin fiziksel özelliklerini etkilemektedir. Eş eksenli olmayan karbon nanotüp hareketi NEMS tasarımında önemli bir rol oynamaktadır.

Aydogdu ve Gul (2018a), kademeli nanoçubukların EM teorisi ile eksenel dalga yayınım analizini gerçekleştirmişlerdir. Kademeli çubuklarda sırasıyla iletilen ve yansıyan dalga matrisleri elde edilmiştir.

Azimzadeh ve Fatahi-Vajari (2019), tek duvarlı karbon nanotüplerin fraksiyonel sönümlü eksenel titreşimini EM teorisi çerçevesinde incelemişlerdir. Bu çalışmada, karbon nanotüplere sönümleme etkisini dahil etmek için Kelvin-Vigot modeli kullanılmıştır.

Nanoçubukların eksenel titreşimi, Love yaklaşımı da dikkate alınarak EM teorisi ile Gul ve Aydogdu (2019) tarafından incelenmiştir. EM teorisi kullanılarak, her iki ucu ankastre ve bir ucu ankastre diğer ucu serbest nanoçubukların eksenel titreşim frekansları elde edilmiş ve elde edilen titreşim frekansları zigzag ve koltuk nanotüp modelleri için moleküler dinamik simülasyonu (G. Cao, Chen, & Kysar, 2006) ile doğrulanmıştır.

Yakın bir zamanda, Aydogdu ve Gul (2020) bir ikili nanoçubuk sisteminin serbest ve zorlanmış eksenel titreşimini EM teorisi çerçevesinde araştırmışlardır. Çift nanoçubuk sistemine ait hareket denklemleri ve sınır koşulları Hamilton prensibi ile elde edildikten sonra, nanoçubukların geometrisinin, iç karakteristik uzunluğunun ve nanoçubukların birbirine bağlanmasını sağlayan yaylara ait yay sertliğinin ikili nanoçubuk sisteminin titreşimine etkileri gösterilmiştir. Buna göre literatürde, EM teorisi ile ilgili şimdiye kadar yapılan yaklaşık otuz çalışma olduğu görülmektedir.

1.3. Tez Çalışmasının Amacı ve İçeriği

Bu tez çalışmasının temel amacı, fiziksel tabanı güçlü olan EM teorisinin nanoteknolojide kullanılan nano yapıların (nanoçubuk, nanokiriş) mekanik tasarımında ve optimizasyonunda kullanılabileceğini göstermektir. Ölçek etkisini dikkate alan diğer sürekli ortam teorilerinin aksine, EM teorisinde dikkate alınan malzemenin atomik yapısının malzemenin mekanik davranışını doğrudan etkilediği gösterilecektir. Bunun için sırasıyla Bölüm 2'de, EM teorisinin kısa bir açıklamasının ardından bu teoriye ait mikro ve makro ölçekli gerilme ve genleme ifadeleri çıkarılacaktır. 3. Bölümde ise nanoçubuk ve nanokirişe ait yönetici denklemler ile birlikte ilgili genel sınır koşullarını

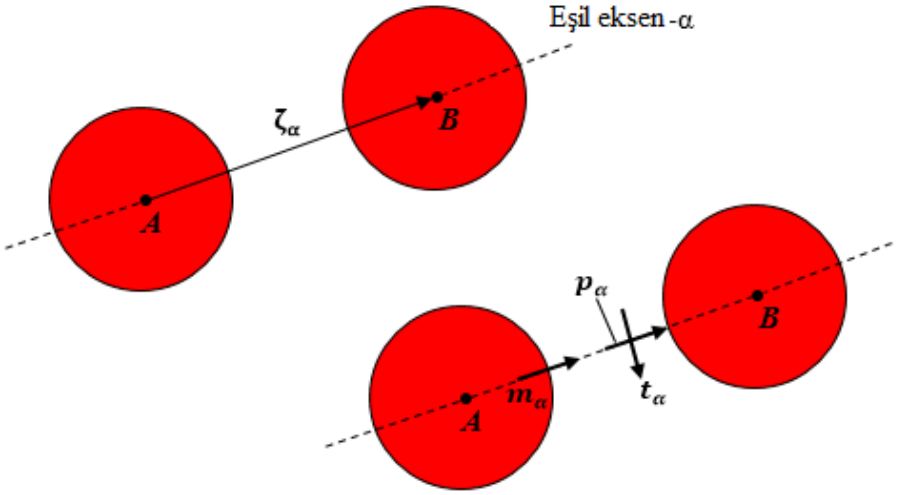
veren ifadeler varyasyonel yaklaşım kullanılarak statik ve dinamik analiz için elde edilecektir. Daha sonra, Bölüm 4'te, sırasıyla nanotüplere ait eksenel ve enine olmak üzere statik ve dinamik analizler EM teorisi ile gerçekleştirilecektir. Burada nanotüpler çubuk ve Euler-Bernoulli kiriş modeli olacak şekilde tasarlanmıştır. Daha sonra, elastik ortama gömülü bir karbon nanotüpe ait eksenel titreşim frekansları ve dalga yayınım eğrileri EM ve kafes dinamiği teorileri kullanılarak elde edilecek ve sonuçlar birbiriyle kıyaslanacaktır. Buna ek olarak, bir nanoçubuğa ait titreşim analizi, yanal atalet etkileri dikkate alınarak Love teorisi çerçevesinde incelenecek, çiftli nanoçubuk sisteminin eksenel titreşimi ankastre-ankastre ve ankastre-serbest sınır koşullarında EM teorisi kullanılarak araştırılacaktır. Elastik ortama gömülü bir nanokirişin burkulma ve titreşim analizleri, elastik ortama gömülü çiftli nanokiriş sisteminin burkulma analizi ve çift duvarlı karbon nanotüpe ait titreşim ve dalga yayınım analizleri yine EM teorisi ile ayrı ayrı araştırılacaktır. Bunlara ek olarak, periyodik nano yapılara ait nanoçubuk, nanokiriş ve katmanlı nanokirişlerin EM modeli ile statik ve dinamik analizlerine yer verilecektir. Son olarak da Timoshenko kiriş modeline ait statik yer değiştirme, dönme, burkulma ve titreşim ifadeleri her iki ucu basit mesnetli sınır koşulu için EM teorisi kapsamında incelenecektir. Bölüm 5'te, bir önceki bölümde elde edilen sayısal sonuçlar tablo ve grafiklerle yorumlanacaktır. Son olarak, Bölüm 6'da tez çalışmasından elde edilen genel sonuçlar paylaşılacaktır.

BÖLÜM 2

EŞİL MEKANİK TEORİSİ

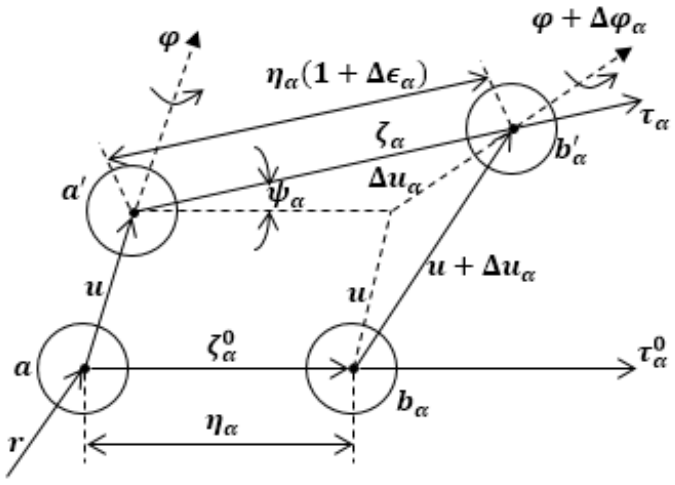
2.1. Eşil Mekanik Formülasyonu

EM, boyuta bağlı bir mikro-mekanik modeldir. Bu teoride, katıyı oluşturan atomlar sınırlı bir mesafede bulunan noktalar veya düğümler olarak kabul edilir. Katıdaki herhangi iki atom (düğüm) "eşil (doublet)", iki atom arasındaki mesafe ise modellenecek katı malzemenin "iç karakteristik uzunluğu" olarak tanımlanmaktadır. Her düğümde (atomda) uzama ve/veya dönme olabilir. Bu değişkenlerin artışı, Taylor serisi açılımı yapılarak tanımlanmaktadır. Taylor serisindeki terimlerin sayısı, katının yapısına olan yaklaşımın derecesini gösterir. Bu çalışmada çoğunlukla, Taylor serisinin ilk üç terimi dikkate alınmıştır, ancak daha fazla terim de kullanılabilir. Taylor serisindeki dikkate alınan terim sayısı yaklaşımın doğruluğunu göstermez. Çeşitli mikro yapı modelleri için en uygun olacak şekilde farklı terim sayısı dikkate alınmaktadır. Ancak unutulmamalıdır ki, Taylor serisi açılımında kullanılan terim sayısındaki artış yönetici diferansiyel denklemlerin mertebesini ve ilgili sınır koşullarının sayısını arttıracaktır. Bu da çözümün zorlaşmasına sebebiyet vermektedir. Bu nedenle mikro yapı modeline ait EM teorisi ile analiz yapılırken, en uygun sayıda Taylor serisi terimi seçmek oldukça önemlidir. Deformasyon sırasında en genel durumda, üç gerilme bileşeni göz önünde bulundurulur. Bunlar, uzama mikro gerilmesi $\boldsymbol{p}_{\alpha}$, kayma mikro gerilmesi, $\boldsymbol{t}_{\alpha}$ ve burulma mikro gerilmesi $\boldsymbol{m}_{\alpha}$ dir ve bu gerilmeler vektörel büyüklüklerdir. Bu gerilmeler Şekil 2.1'de gösterilmektedir.



Şekil 2.1. Eşil geometride mikro gerilmeler (Ferrari vd., 1997).

Basitlik için, kayma mikro gerilmesi ve burulma mikro gerilmesi ($\boldsymbol{t}_\alpha, \boldsymbol{m}_\alpha$) dikkate alınmamaktadır ve sadece uzama mikro gerilmesi/mikro genlemesi ($\boldsymbol{p}_\alpha$, ϵ_α) bu tez çalışmasında ele alınmıştır. Tüm bu mikro-gerilmelerin ve deformasyon sırasında gözlenen mikro genlemelerin göz önüne alınması durumunda analiz çok karmaşık hale gelmektedir ve bu tür mikro etkiler gelecekteki EM çalışmaları için düşünülebilir. Klasik elastisite ve diğer sürekli ortam teorilerinin aksine, EM teorisinde, mikro gerilmeler ve mikro genlemeler skaler veya vektörel formda yazılabilmektedir; daha sonra bu mikro ilişkiler makro gerilme-genleme ilişkilerine dönüştürülür. EM teorisi için tipik bir deformasyon modeli ise Şekil 2.2'te gösterilmiştir.



Şekil 2.2. Eşil düğüm noktalarının deformasyonu (Ferrari vd., 1997).

Şekil 2.2'de gösterilen her α düğümü ve ona komşu düğümler arasındaki mesafe eşil atomlar arasındaki mesafe olarak tanımlanmaktadır ($\eta_\alpha = |\xi_\alpha|$). Bu şekilde, katının deformasyonundan sonra yeni düğüm noktalarının konumları a'_α ve b'_α olarak gösterilmektedir. Buna göre, artımlı yer değiştirme vektörü ($\Delta\vec{u}_\alpha$) aşağıdaki gibi tanımlanabilir (Ferrari vd., 1997):

$$\Delta\vec{u}_\alpha = \vec{u}(\vec{r} + \vec{\xi}^0_\alpha, t) - \vec{u}(\vec{r}, t) \tag{2.1}$$

Burada, $\vec{u}$ yer değiştirme vektörünü, α=1,2,…,m eşil (ikili atom) sayısını, $\vec{r}$, α-düğümünün konum vektörünü, t zamanı ve ξ_α eşil atomlar arasındaki mesafeyi göstermektedir. Buna göre eksenel mikro genleme (ϵ_α) aşağıdaki gibi tanımlanabilir (Ferrari vd., 1997):

$$\epsilon_\alpha = \frac{\vec{\tau}^0_\alpha . \Delta\vec{u}_\alpha}{\eta_\alpha} \tag{2.2}$$

η_α, eşil mesafeyi yani malzemenin iç karakteristik uzunluğunu (karbon nanotüp için (η_α=0.1421 nm) ve $\vec{\tau}^0_\alpha$ ise α-yönündeki birim vektörü temsil eder. Daha sonra eksenel mikro genleme, aşağıdaki şekildeki gibi Taylor serisine açılır:

$$\epsilon_\alpha = \sum_{\chi=1}^{M} \frac{(-\eta_\alpha)^{\chi-1}}{\chi!} \vec{\tau}^0_\alpha . \left(\vec{\tau}^0_\alpha . \vec{\nabla}\right)^\chi \vec{u} \tag{2.3}$$

Burada, $\vec{\nabla}$ Delta operatörü ve M ise Taylor serisi açılımındaki terimlerin sayısıdır. Taylor serisi açılımında sadece ilk terim dikkate alınırsa, klasik elastisite teorisi elde edilmektedir. Buna benzer olarak, eksenel mikro gerilme de aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Ferrari vd., 1997):

$$p_\alpha = \sum_\beta B_{\alpha\beta}\, \epsilon_\beta \tag{2.4}$$

p_α, α-eşilindeki mikro eksenel gerilmeyi, ϵ_β, β-eşili yönündeki eksenel mikro genlemeyi ve $B_{\alpha\beta}$ ise α ve β düğümleri arasındaki eksenel mikro-modülü ifade etmektedir. Buna göre makro gerilme (σ) ile mikro gerilme (p_α) arasındaki ilişki aşağıdaki gibi tanımlanabilir (Ferrari vd., 1997):

$$\sigma = \sum_{\alpha=1}^{M} \vec{\tau}_{\alpha}^{o} \vec{\tau}_{\alpha}^{o} \sum_{\chi=1}^{M} \frac{(-\eta_{\alpha})^{\chi-1}}{\chi!} \frac{(-\eta_{\alpha})^{\chi-1}}{\chi!} \left(\vec{\tau}_{\alpha}^{0}.\vec{\nabla}\right)^{\chi-1} p_{\alpha} \tag{2.5}$$

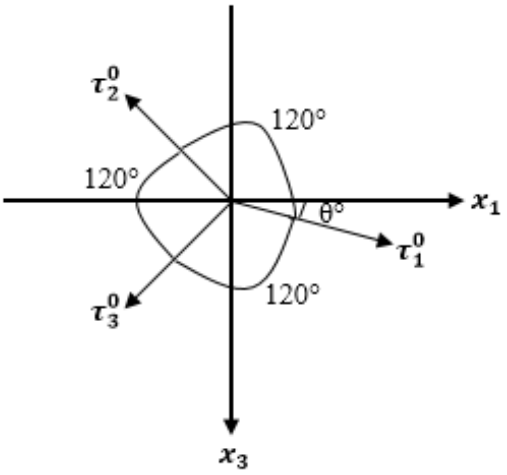
Denklem (2.5), üç boyutlu formülasyonlar için kullanılabilir. Düzlem gerilme problemi için, mikro gerilme ve makro gerilme arasındaki ilişki,

$$\{\sigma\} = [H]\{p\} \tag{2.6}$$

olacak şekilde yazılmaktadır. Burada $[H]$ dönüşüm matrisini gösterir. Düzlem gerilme problemleri için makro gerilme tensörü σ, mikro gerilme tensörü p ve dönüşüm matrisi $[H]$ aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}, \qquad [H] = \begin{bmatrix} (\tau_{11}^{0})^2 & (\tau_{21}^{0})^2 & (\tau_{31}^{0})^2 \\ (\tau_{12}^{0})^2 & (\tau_{22}^{0})^2 & (\tau_{32}^{0})^2 \\ \tau_{11}^{0}\tau_{12}^{0} & \tau_{21}^{0}\tau_{22}^{0} & \tau_{31}^{0}\tau_{32}^{0} \end{bmatrix}, \qquad \{p\} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

Yukarıda üst indis olarak gösterilen "^{0}" katının içindeki düğümlerin (atomların) ilk konfigürasyonunu temsil eder, alt indis olarak gösterilen "$_{1,2,3}$" ise üç boyutlu Kartezyen koordinatta yönleri gösterir. Dönüşüm matrisinde gösterilen τ_{ij}^{0}, mikro gerilmeler ile Kartezyen koordinatlar arasındaki açının kosinüsleridir. Denklem (2.7)' de görüldüğü gibi, eksenel makro gerilme σ_{xx}, τ_{ij}^{0} ile değişmektedir. Bu da sırasıyla zigzag, şiral ve koltuk nanotüp modelleri için makro gerilme değerlerinin birim vektöre bağlı olarak farklı değerler alabileceğini göstermektedir. Nanotüp modeline göre birim vektörler dönüşüm matrisinde ($[H]$) farklı değerler alırlar. Aynı uzunluktaki üç eşilden (ikili atom çifti) oluşan bir nanotüp Şekil 2.3'de gösterilmiştir.



Şekil 2.3. Üç eşilli nanotüp.

Aynı zamanda, düğümler arasındaki mesafe aynı ve $\eta = \eta_\alpha$ $(\alpha = 1,2,3)$ olacak şekilde kabul edilmektedir. Şekil 2.3'e göre birim vektörler aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\tau_{11}^o = cos\theta, \qquad \tau_{12}^o = cos90, \qquad \tau_{13}^o = sin\theta,$$
$$\tau_{21}^o = -\sin(30-\theta), \qquad \tau_{22}^o = cos90, \quad \tau_{23}^o = -\cos(30-\theta),$$
$$\tau_{31}^o = -\cos(60-\theta), \qquad \tau_{32}^o = cos90, \quad \tau_{33}^o = \sin(60-\theta). \tag{2.8}$$

Yukarıdaki Denklemde (2.8), θ açısı, $0° \leq \theta° \leq 30°$ arasında değişir. θ=0° için zigzag nanotüp modeli, θ=30° için koltuk nanotüp modeli ve bu iki açı değeri arasındaki herhangi bir açı değeri için de şiral nanotüp modeli elde edilmektedir (Iijima & Ichihashi, 1993). Buna bağlı olarak da her nanotüp modeli için eksenel makro gerilme değeri σ_{xx} farklı olmaktadır. $\theta = 0°$ olduğunda (zigzag nanotüp modeli) Kartezyen koordinatlardaki birim vektörler aşağıdaki gibi olmaktadır:

$$\tau_{11}^o = 1, \qquad \tau_{12}^o = 0, \qquad \tau_{13}^o = 0,$$
$$\tau_{21}^o = -1/2, \qquad \tau_{22}^o = 0, \quad \tau_{23}^o = -\sqrt{3}/2,$$
$$\tau_{31}^o = -1/2, \qquad \tau_{32}^o = 0, \quad \tau_{33}^o = \sqrt{3}/2. \tag{2.9a}$$

$\theta = 30°$ olduğunda (koltuk nanotüp modeli) Kartezyen koordinatlardaki birim vektörler ise aşağıdaki gibi olmaktadır:

$$\tau_{11}^o = \sqrt{3}/2, \qquad \tau_{12}^o = 0, \qquad \tau_{13}^o = 1/2,$$
$$\tau_{21}^o = 0, \qquad \tau_{22}^o = 0, \quad \tau_{23}^o = -1,$$
$$\tau_{31}^o = -\sqrt{3}/2, \qquad \tau_{32}^o = 0, \quad \tau_{33}^o = 1/2. \tag{2.9b}$$

Daha sonra, mikro genleme ϵ ile makro genleme ε arasındaki ilişki aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\{\epsilon\} = [H]^T[\varepsilon] \tag{2.10}$$

Burada,

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}, \qquad \{\epsilon\} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix}. \tag{2.11}$$

olmaktadır. Makro ölçekte Hooke Kanunu aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \tag{2.12}$$

Burada, $[C]$ rijitlik matrisini göstermektedir ve izleyen şekilde ifade edilir:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

Rijitlik matrisinin elemanları Lame sabitleri (λ,μ) cinsinden (Ferrari vd., 1997):

$$C_{11} = C_{22} = 4\mu\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\right), \qquad C_{12} = C_{21} = \frac{2\mu\lambda}{\lambda+2\mu}, \qquad C_{33} = \mu. \tag{2.14}$$

olacak şekilde tanımlanmaktadır. Denklem (2.6), (2.10) ve (2.12)'yi kullanarak aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$[C] = [H][B][H]^T \tag{2.15}$$

$[B]$, mikro modülleri içeren simetrik bir matristir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

Denklem (2.16)'da matris elemanları izleyen formda ifade edilmektedir:

$$B_{ij} = \begin{Bmatrix} \frac{4}{9}\mu\frac{7\lambda+10\mu}{\lambda+2\mu} & i=j\ için \\ \frac{4}{9}\mu\frac{\lambda-2\mu}{\lambda+2\mu} & i\neq j\ için \end{Bmatrix} i,j = 1,2,3. \tag{2.17}$$

Lame sabitleri λ ve μ mühendislik malzemeleri cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \qquad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}. \tag{2.18}$$

Burada, *E* elastisite modülünü, *G* kayma modülünü ve *ν* Poisson oranını göstermektedir. Denklem (2.16)'da $\lambda = 2\mu$ yazılırsa ve eğer $i \neq j$ ise $B_{ij} = 0$ olur ve böylece herbir mikro gerilme, Denklem (2.4)'teki ilgili mikro genlemeye bağlı olacaktır. $\lambda = 2\mu$ seçildiğinde $\nu = 1/3$ olur. Literatüre göre nanotüpün Poisson oranı hakkında fikir birliği yoktur. Önerilen değerler 0.14-0.34 gibi geniş bir bantta değişmektedir (Tu & Ou-Yang, 2002). Bu yüzden, şimdiki tez çalışmasında tüm nanotüp analizlerinde Poisson oranı 1/3 olarak seçilmiştir. Önerilen aralıkta seçilen bu Poisson oranı değeri, analizdeki terimlerin sayısını azaltarak, analizin basitleşmesine sebep olur. Bu durumda, düzlem gerilme durumunda Eşitlik (2.16)'nın köşegen terimleri B_0'a eşit olurken, diğer terimler ise sıfıra eşit olmaktadır. Böylece,

$$B_0 = \frac{8\mu}{3} = E \tag{2.19}$$

eşitliği elde edilebilir. Denklem (2.3)'te verilen mikro genlemeler, Taylor serisinin ilk üç terimine göre (*M*=3) aşağıdaki gibi açılabilir:

$$\epsilon_\alpha = \vec{\tau}_\alpha^0.(\vec{\nabla}\vec{u})\vec{\tau}_\alpha^0 + \frac{1}{2}\eta_\alpha\left[\vec{\tau}_\alpha^0.(\vec{\tau}_\alpha^0.\vec{\nabla}).(\vec{\tau}_\alpha^0.\vec{\nabla}\vec{u})\right] + \frac{1}{6}\eta_\alpha^2\left[\vec{\tau}_\alpha^0.(\vec{\tau}_\alpha^0.\vec{\nabla})(\vec{\tau}_\alpha^0.\vec{\nabla})(\vec{\tau}_\alpha^0.\vec{\nabla}\vec{u})\right] \tag{2.20}$$

Kartezyen koordinatlarda $\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i}\vec{e}_i$ eşitliği kullanılarak ve $\vec{\tau}_\alpha^0$ genişletilerek, Denklem (2.20) aşağıdaki şeklini alır:

$$\epsilon_\alpha = \tau_{\alpha m}^0 \tau_{\alpha n}^0 \left(\varepsilon_{mn} + \frac{1}{2}\eta_\alpha \tau_{\alpha s}^0 \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial x_s} + \frac{1}{6}\eta_\alpha^2 \tau_{\alpha t}^0 \tau_{\alpha s}^0 \frac{\partial^2 \varepsilon_{mn}}{\partial x_t \partial x_s} \right) \tag{2.21}$$

Eşitlik (2.5) kullanılarak, makro gerilmeler, mikro gerilmeler cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\sigma_{ij}^{(M)} = \sum_{\alpha=1}^{n} \tau_{\alpha i}^0 \tau_{\alpha j}^0 \left\{ \left(p_\alpha - \frac{1}{2}\eta_\alpha \vec{\tau}_\alpha^0 . (\nabla p_\alpha) + \frac{1}{6}\eta_\alpha^2 [(\vec{\tau}_\alpha^0 . \nabla)(\vec{\tau}_\alpha^0 . \nabla p_\alpha)] \right) \right\} \tag{2.22}$$

Benzer şekilde, eksenel mikro gerilme *M*=3 için izleyen şeklide yazılabilir (Ferrari vd., 1997):

$$p_\alpha = E \tau_{\alpha m}^0 \tau_{\alpha n}^0 \left(\varepsilon_{mn} + \frac{1}{2}\eta_\alpha \tau_{\alpha s}^0 \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial x_s} + \frac{1}{6}\eta_\alpha^2 \tau_{\alpha t}^0 \tau_{\alpha s}^0 \frac{\partial^2 \varepsilon_{mn}}{\partial x_t \partial x_s} \right) \tag{2.23}$$

Daha sonra, (2.22) ve (2.23) eşitlikleri kullanılarak, EM teorisine ait makro gerilme izleyen formda elde edilir:

$$\sigma_{ij}^{(M)} = \sum_{\alpha=1}^{n} E \tau_{\alpha i}^0 \tau_{\alpha j}^0 \tau_{\alpha m}^0 \tau_{\alpha n}^0 \left(\varepsilon_{mn} + \frac{1}{12}\eta_\alpha^2 \tau_{\alpha t}^0 \tau_{\alpha s}^0 \frac{\partial^2 \varepsilon_{mn}}{\partial x_t \partial x_s} \right) \tag{2.24}$$

Eşitlik (2.24) daha açık bir şekilde aşağıdaki gibi türetilebilir:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(M)} = {} & B_0 \left(\sum_{\alpha=1}^{3} \tau_{\alpha 1}^4 \right) \varepsilon_{11} + \frac{1}{12} B_0 \left(\sum_{\alpha=1}^{3} \eta^2 \tau_{\alpha 1}^6 \right) \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x^2} + B_0 \left(\sum_{\alpha=1}^{3} \tau_{\alpha 1}^2 \tau_{\alpha 2}^2 \right) \varepsilon_{22} \\ & + \frac{1}{12} B_0 \left(\sum_{\alpha=1}^{3} \eta^2 \tau_{\alpha 1}^4 \tau_{\alpha 2}^2 \right) \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^2} + B_0 \left(\sum_{\alpha=1}^{3} \tau_{\alpha 1}^2 \tau_{\alpha 3}^2 \right) \varepsilon_{33} \\ & + \frac{1}{12} B_0 \left(\sum_{\alpha=1}^{3} \eta^2 \tau_{\alpha 1}^4 \tau_{\alpha 3}^2 \right) \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x^2} \end{aligned} \tag{2.25}$$

Burada, modelleme yapılırken atomlar arasındaki mesafe eşit olarak kabul edilmiştir ($\eta = \eta_\alpha$). Düzlem gerilme durumunda, $-\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = \nu = \frac{1}{3}$ yazılır ve sadece eksenel genleme dikkate alınırsa, EM teorisine ait gerilme ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\sigma_{xx}^M = B_0 \left(V_1(\theta)\varepsilon_{11} + V_2(\theta)\frac{1}{12}\eta^2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x^2} \right) \tag{2.26}$$

Yukarıdaki denklemde, ε_{11} eksenel genleme bileşenini temsil ederken, η ise katıyı oluşturan iki atom (eşil) arasındaki mesafeyi veya malzemenin iç karakteristik uzunluğunu temsil eder ve bu mesafe de, atomlar arasındaki bağ uzunluğuna eşittir. Düzlem gerilme durumunda nanotüp için Denklem (2.26)'da $B_0 = E$ olmaktadır. Denklem (2.26)'daki ilk terim Cauchy gerilmesi olarak bilinen klasik gerilme bileşenini gösterirken, ikinci terim ise Taylor serisi açılımına ve katıdaki düğüm noktalarının Kartezyen koordinatlardaki yerleşim düzenine bağlı olarak değişen EM teorisinden gelen eşil gerilmesi olarak ifade edilebilir. Bu nedenle Denklem (2.26), genel formda aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$\sigma_{xx}^{M} = V_1(\theta)\sigma_{xx}^{LE} + V_2(\theta)\sigma_{xx}^{EM} \tag{2.27}$$

$V_1(\theta)$ ve $V_2(\theta)$ fonksiyonları ise nanotüpü oluşturan atomların diziliş yönüne göre değişik değerler almaktadır. Bu özellik EM teorisinde, modellenecek katının direk olarak mekanik davranışını etkilemesi açısından oldukça önemlidir. Daha önce de bahsedildiği gibi, θ açısı 0°-30° aralığında değer alabilmektedir ve θ=0° için zigzag nanotüp modeli elde edilirken, θ=30° için koltuk nanotüp modeli elde edilir. θ=0° durumu için, düzlem gerilme koşulunda yukarıda çıkarılan denklemler ile [H] dönüşüm matrisinin elemanlarının değerini veren Denklem (2.9a)'daki birim vektörler dikkate alınırsa, zigzag nanotüp modeli için makro gerilme aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\sigma_{xx}^{M} = E\left(\varepsilon_{11} + \frac{1}{12}\eta^2\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x^2}\right) \tag{2.28}$$

Benzer şeklide, θ=30° durumu için [H] dönüşüm matrisinin elemanlarının değerini veren Denklem (2.9b)'deki birim vektörler dikkate alınırsa, koltuk nanotüp modeli için makro gerilme aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\sigma_{xx}^{M} = E\left(\varepsilon_{11} + \frac{3}{4}\frac{1}{12}\eta^2\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x^2}\right) \tag{2.29}$$

Denklem (2.28) ve Denklem (2.29)'da görüldüğü gibi, zigzag ve koltuk nanotüp modelleri için EM teorisi kullanılarak elde edilen gerilme bileşenlerinin ilk terimleri (Cauchy gerilme bileşeni) aynı olurken, ikinci gerilme bileşenleri (eşil gerilme bileşenleri) birbirinden farklı olmaktadır.

BÖLÜM 3

NANO YAPILARIN STATİK VE DİNAMİK DAVRANIŞLARININ YÖNETİCİ DENKLEMLERİ

3.1. Giriş

Bu bölümde, nanoçubuk ve nanokiriş olarak modellenebilen nanotüplerin EM teorisi çerçevesinde yönetici denklemleri ve genel sınır koşullarını veren ifadeler, statik ve dinamik analiz için çıkarılacaktır. Nanoçubuk ve nanokirişlerin statik analizinde kullanılan yönetici denklemler ve genel sınır koşullarını veren ifadeler "minimum potansiyel enerji prensibi" ile türetilirken, aynı nano yapılara ait dinamik analizde kullanılan yönetici denklemler ile genel sınır koşullarını veren ifadeler ise "Hamilton prensibi" kullanılarak elde edilecektir.

3.2. Nanoçubuğun Statik Denge Denklemleri

Nanotüpler, eksenel statik ve dinamik analizler için bir çubuk olarak modellenebilir. Bir nanoçubuğa ait statik denge denklemleri ve sınır koşullarını veren ifadeler minimum potansiyel enerji prensibinden elde edilebilir (Reddy, 2002):

$$\delta\left(U_{ç} - W_{ç}\right) = 0 \tag{3.1}$$

Burada, δ varyasyonel sembolü, $U_{ç}$ genleme enerjisini ve $W_{ç}$ ise dış kuvvetlerin işini göstermektedir. Bir çubuğa ait genleme enerjisi aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$U_{ç} = \frac{1}{2}\int_{0}^{L} [V_1(\theta)\tau.\varepsilon - V_2(\theta)\mu.\nabla\varepsilon]dx \tag{3.2}$$

Burada, L nanoçubuğun uzunluğunu, τ çubuk ekseni boyunca (x-ekseni) olan makro gerilmeyi gösterir ve Denklem (3.2)'deki terimler şöyle tanımlanır:

$$\nabla\varepsilon = d\varepsilon/dx\,, \quad \tau = Eu', \quad \mu = \frac{\eta^2}{12}Eu''. \tag{3.3}$$

$$u' = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad u'' = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{3.4}$$

Buna göre, genleme enerjisi $U_ç$ şöyle ifade edilebilir:

$$U_ç = \frac{1}{2}\int_0^L AE\left[V_1(\theta)(u')^2 - V_2(\theta)\frac{\eta^2}{12}(u'')^2\right]dx \tag{3.5}$$

Yukarıda *A* çubuğun kesit alanını göstermektedir. Genleme enerjisinin birinci varyasyonu aşağıdaki gibi alınabilir:

$$\delta U_ç = -\int_0^L AE\left(V_1(\theta)u'' + V_2(\theta)\frac{\eta^2}{12}u^{IV}\right)\delta u dx + \left[AE\left(V_1(\theta)u' + V_2(\theta)\frac{\eta^2}{12}u'''\right)\delta u\right]_0^L + \left[AEV_2(\theta)\frac{\eta^2}{12}u''\delta u'\right]_0^L \tag{3.6}$$

Ayrıca, dış kuvvetlerin *P* (noktasal kuvvet), *f* (eksenel kuvvet), *R* (kuvvet çifti) ayrı ayrı varyasyonları alınarak toplam işin varyasyonu aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\delta W_ç = \int_0^L f\delta u dx + [P\delta u]_0^L + [R\delta u']_0^L \tag{3.7}$$

Denklem (3.6) ve (3.7), Denklem (3.1)' de yerine yazılırsa;

$$\delta\left(U_ç - W_ç\right) = \int_0^L \left[AE\left(V_1(\theta)u'' + V_2(\theta)\frac{\eta^2}{12}u^{IV}\right) + f\right]\delta u dx + \left[\left\{P - AE\left(V_1(\theta)u' + V_2(\theta)\frac{\eta^2}{12}u'''\right)\right\}\delta u\right]_0^L + \left[\left\{R + V_2(\theta)AE\frac{\eta^2}{12}u''\right\}\delta u'\right]_0^L = 0 \tag{3.8}$$

eşitliği elde edilebilir. Denklem (3.8)'deki her bir köşeli parantez sıfıra eşit olmalıdır. Böylece çubuğa ait yönetici denklem, Denklem (3.8)'in ilk köşeli parantezinden aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

$$AE\left[(V_1(\theta)u''(x) + V_2(\theta)\frac{\eta^2}{12}u^{IV}(x)\right] + f = 0 \tag{3.9}$$

Denklem (3.8)'in ikinci ve üçüncü köşeli parantezlerinde yer alan eşitlikler de çubuğa ait sınır koşullarını vermektedir:

$$\left[P(L) - AE\left[V_1(\theta)u'(L) + V_2(\theta)\frac{\eta^2}{12}u'''(L)\right]\right]\delta u(L)$$
$$- \left[P(0) - AE\left[V_1(\theta)u'(0) + V_2(\theta)\frac{\eta^2}{12}u'''(0)\right]\right]\delta u(0) = 0,$$
$$\left[R(L) - AE\left[-V_2(\theta)\frac{\eta^2}{12}u''(L)\right]\right]\delta u'(L) - \left[R(0) - AE\left[-V_2(\theta)\frac{\eta^2}{12}u''(0)\right]\right]\delta u'(0)$$
$$= 0. \tag{3.10}$$

Burada, u yer değiştirme ve $AE\left[V_1(\theta)u' + V_2(\theta)\frac{\eta^2}{12}u'''\right]$ eksenel kuvveti, klasik sınır şartlarını gösterirken, u' ve $AEV_2(\theta)\frac{\eta^2}{12}u''$ (kuvvet çifti) ise klasik olmayan sınır koşullarını göstermektedir. Görüldüğü üzere, çubuğa ait (3.9) eşitliği ile gösterilen dördüncü mertebe diferansiyel denklemin çözümü, (3.10) eşitliğinde elde edilen dört adet sınır koşulu yardımıyla EM teorisi çerçevesinde çözülebilmektedir. Eğer EM teorisinde malzemenin iç karakteristik uzunluğunu (eşil mesafe) gösteren η, statik yönetici denklemi (3.9) ve genel sınır koşullarını veren eşitlik (3.10)' da sıfıra eşitlenirse, çubuğa ait klasik elastisite denklemi ve klasik sınır koşullarını veren ifadeler elde edilebilir.

3.3. Nanoçubuğun Hareket Denklemleri

Bir çubuğa ait hareket denklemi ve genel sınır koşullarını veren ifadeler Hamilton Prensibi kullanılarak elde edilebilir:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta\left(U_{ç} - T_{ç} - W_{ç}\right)dt = 0 \tag{3.11}$$

Burada, $U_{ç}$ Denklem (3.5)'de verilen genleme enerjisini, $W_{ç}$ Denklem (3.7)'de varyasyonu ifade edilen dış kuvvetlerin yapmış olduğu toplam işi gösterirken, $T_{ç}$ ise çubuğa ait kinetik enerjiyi göstermektedir. Çubuğun kinetik enerjisi aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$T_{ç} = \frac{1}{2}\int_0^L \rho A\dot{u}^2\, dx \tag{3.12}$$

Burada, ρ çubuğun yoğunluğunu, $(\cdot)$ ise zamana göre birinci türevi göstermektedir. Buna ek olarak, dış kuvvetlerin (P,f,R) yapmış olduğu işin varyasyonu Hamilton Prensibinde aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta W_{ç} dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{0}^{L} f(x,t)\, \delta u dx dt + \int_{t_0}^{t_1} \{[P\delta u]_0^L + [R\delta u']_0^L\}\, dt \tag{3.13}$$

Böylece, Denklem (3.6), (3.12) ve (3.13)'deki ifadeler kullanılarak, Denklem (3.11) aşağıdaki halini alır:

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{0}^{L} \left[AE\left(V_1(\theta)u'' + V_2(\theta)\frac{\eta^2}{12}u^{IV} \right) + f - \rho A\ddot{u} \right] \delta u dx dt$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \left[\left\{ P - AE(V_1(\theta)u' + V_2(\theta)\frac{\eta^2}{12}u''') \right\} \delta u \right]_0^L dt$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \left[\left\{ R - AE(V_2(\theta) - \frac{\eta^2}{12}u'') \right\} \delta u' \right]_0^L dt + \int_{0}^{L} [\rho A\dot{u}\delta u]_{t_0}^{t_1} dx = 0 \tag{3.14}$$

Denklem (3.14)'deki her bir köşeli parantez sıfıra eşit eşitlenerek, çubuğa ait hareket denklemi aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

$$AE\left[(V_1(\theta)u''(x,t) + \frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)u^{IV}(x,t) \right] + f = \rho A\ddot{u}(x,t) \tag{3.15}$$

Varyasyonel analiz sonrasında ortaya çıkan başlangıç koşulları ise

$$\dot{u}(x,t_1)\delta u(x,t_1) - \dot{u}(x,t_0)\delta u(x,t_0) = 0 \tag{3.16}$$

şeklinde yazılabilir. Son olarak Denklem (3.14)'den çubuğa ait genel sınır koşullarını veren ifadeler EM teorisi çerçevesinde aşağıdaki şekilde ortaya çıkmaktadır:

$$\left[P(L,t) - AE\left[V_1(\theta)u'(L,t) + \frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)u'''(L,t) \right] \right] \delta u(L,t)$$

$$- \left[P(0,t) - AE\left[V_1(\theta)u'(0,t) + \frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)u'''(0,t) \right] \right] \delta u(0,t) = 0,$$

$$\left[R(L,t) - AE\left[-\frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)u''(L,t) \right] \right] \delta u'(L,t)$$

$$- \left[R(0,t) - AE\left[-\frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)u''(0,t) \right] \right] \delta u'(0,t) = 0. \tag{3.17}$$

Statik duruma benzer şekilde, Denklem (3.15) ve (3.17)'de uzunluk ölçeği parametresi (η) ihmal edilirse, klasik elastisite teorisine ait hareket denklemi ve klasik sınır şartları elde edilebilir.

3.4. Nanokirişin Statik Denge Denklemleri

Bir nanokirişte statik yönetici denklemleri ve sınır koşullarını elde etmek için minimum potansiyel enerji prensibi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\delta(U_k - W_k) = 0 \tag{3.18}$$

Kirişe ait genleme enerjisi U_k izleyen şekilde tanımlanır:

$$U_k = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left[V_1(\theta)(w'')^2 - \frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)(w''')^2\right]dx \tag{3.19}$$

Burada, U_k kirişin genleme enerjisini, W_k dış kuvvetlerin yapmış olduğu toplam işi, I kiriş kesitinin alan atalet momentini ve w kirişin enine yer değiştirmesini ifade etmektedir. Daha sonra, genleme enerjisinin ilk varyasyonu aşağıdaki formda tanımlanabilir:

$$\begin{aligned}\delta U_k = \int_0^L EI\left(V_1(\theta)w^{IV} + \frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)w^{VI}\right)\delta w dx + \left[EI\left(V_1(\theta)w''' - \frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)w^{V}\right)\delta u\right]_0^L \\ + \left[EI\left(\frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)w^{VI} - V_1(\theta)w''\right)\delta w'\right]_0^L \\ - \left[EI\frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)w'''\delta w''\right]_0^L\end{aligned} \tag{3.20}$$

Ayrıca, dış kuvvetler tarafından yapılan toplam işin (W_k) varyasyonu,

$$\delta W_k = -\int_0^L f\delta w dx - [V\delta w]_0^L + [M_e\delta w']_0^L + [m_e\delta w'']_0^L \tag{3.21}$$

olacak şekilde tanımlanmaktadır. Burada, kesme kuvveti, $V = \partial M_e/\partial x$ eşittir. M_e eğilme momentini ve m_e gerilme gradyanlı klasik olmayan moment bileşenini göstermektedir. Böylece, Denklem (3.18) aşağıdaki hali alır:

$$\begin{aligned}\delta(U_k - W_k) = \int_0^L \left[EI\left(V_1(\theta)w^{IV} + \frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)w^{VI}\right) + f\right]\delta w dx \\ + \left[\left\{V - EI\left(V_1(\theta)w''' + \frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)w^{V}\right)\right\}\delta w\right]_0^L\end{aligned}$$

$$-\left[\left\{M_e - EI\left(V_1(\theta)w'' + \frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)w^{IV}\right)\right\}\delta w'\right]_0^L$$

$$-\left[\left\{m_e - EI\left(-\frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)w^{IV}\right)\right\}\delta w''\right]_0^L = 0 \tag{3.22}$$

Daha sonra, yukarıdaki denklemde (3.22) her bir köşeli parantezdeki ifadeler ayrı ayrı sıfıra eşitlenirse, bir nanokirişe ait statik yönetici denklem

$$EI\left[V_1(\theta)w^{IV}(x) + \frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)w^{VI}(x)\right] + f = 0 \tag{3.23}$$

ve genel sınır koşullarını veren ifadeler

$$\left[V(L) - EI\left[V_1(\theta)w'''(L) + \frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)w^{V}(L)\right]\right]\delta w(L)$$

$$-\left[V(0) - EI\left[V_1(\theta)w'''(0) + \frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)w^{V}(0)\right]\right]\delta w(0) = 0,$$

$$\left[M_e(L) - EI\left[V_1(\theta)w''(L) + \frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)w^{IV}(L)\right]\right]\delta w'(L)$$

$$-\left[M_e(0) - EI\left[V_1(\theta)w''(0) + \frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)w^{IV}(0)\right]\right]\delta w'(0) = 0,$$

$$\left[m_e(L) - EI\left[-\frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)w'''(L)\right]\right]\delta w''(L) - \left[m_e(0) - EI\left[-\frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)w'''(0)\right]\right]\delta w''(0)$$

$$= 0. \tag{3.24}$$

olacak şeklide bulunabilir. Burada kirişin enine yer değiştirmesi *w*, kesme kuvveti $V = EI(V_1(\theta)w''' + \frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)w^{V})$, moment $M_e = EI(V_1(\theta)w'' + \frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)w^{IV})$ EM teorisine ait klasik sınır koşullarını gösterirken, w'' ve gerilme gradyanlı moment $m_e = EI\frac{\eta^2}{12}f_2(\theta)w'''$ ifadeleri klasik olmayan sınır koşullarını göstermektedir. Böylece, kirişe ait (3.23) eşitliği ile gösterilen altıncı mertebe diferansiyel denklemin çözümü, (3.24)'deki altı adet sınır koşulu yardımıyla EM teorisi çerçevesinde çözülebilmektedir. Eğer EM teorisinde malzemenin iç karakteristik uzunluğunu (eşil mesafe) gösteren η, statik yönetici denklemi (3.23) ve genel sınır koşullarını veren eşitlik (3.24)' de sıfıra eşitlenirse, kirişe ait klasik elastisite denklemi ve klasik sınır koşullarını veren ifadeler elde edilebilir.

3.5. Nanokirişin Hareket Denklemleri

Kirişin hareket denklemleri ve sınır koşullarını veren ifadeler Hamilton Prensibi yazılarak bulunabilir:

$$\delta\left[\int_{t_0}^{t_1}(T_k - W_k - U_k)dt\right] = 0 \tag{3.25}$$

Buna göre, kirişe ait kinetik enerjinin (T_k) varyasyonu aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\delta T_k = \delta\left[\frac{1}{2}\int_0^L \rho A\dot{w}^2\,dx\right] \tag{3.26}$$

Denklemler (3.20), (3.21) ve (3.26) eşitlik (3.25)'te yerine yazılırsa, varyasyonel eşitlik izleyen şekilde elde edilir:

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^L\left[EI\left(V_1(\theta)w^{IV} + \frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)w^{VI}\right) + f + \rho A\ddot{w}\right]\delta w dx dt$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\left[\left\{V - EI(V_1(\theta)w''' + \frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)w^{V})\right\}\delta w\right]_0^L dt$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\left[\left\{M_e + EI(V_1(\theta)w'' + \frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)w^{IV})\right\}\delta w'\right]_0^L dt$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\left[\left\{m_e - EI\frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)w'''\right\}\delta w''\right]_0^L dt - \int_0^L[\rho A\dot{w}\delta w]_{t_0}^{t_1}dx = 0 \tag{3.27}$$

Denklem (3.27)'deki birinci köşeli parantezdeki ifade sıfıra eşitlenirse, nanokirişin hareket denklemi EM teorisi temelinde aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$EI\left[V_1(\theta)w^{IV}(x) + \frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)w^{VI}(x)\right] + \rho A\ddot{w} + f = 0 \tag{3.28}$$

Varyasyonel analiz sonrasında ortaya çıkan başlangıç koşulları ise

$$[\rho A\dot{w}\delta w]_{t_0}^{t_1} = 0 \tag{3.29}$$

şeklindedir. Sınır koşullarını veren ifadeler ise aşağıdaki gibi elde edilmektedir:

$$\left[V(L,t) - EI\left[V_1(\theta)w'''(L,t) + \frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)w^V(L,t)\right]\right]\delta w(L,t)$$

$$- \left[V(0,t) - EI\left[V_1(\theta)w'''(0,t) + \frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)w^V(0,t)\right]\right]\delta w(0,t) = 0,$$

$$\left[M_e(L,t) - EI\left[V_1(\theta)w''(L,t) + \frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)w^{IV}(L,t)\right]\right]\delta w'(L,t)$$

$$- \left[M_e(0,t) - EI\left[V_1(\theta)w''(0,t) + \frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)w^{IV}(0,t)\right]\right]\delta w'(0,t) = 0,$$

$$\left[m_e(L,t) - EI\left[-\frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)w'''(L,t)\right]\right]\delta w''(L,t)$$

$$- \left[m_e(0,t) - EI\left[-\frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)w'''(0,t)\right]\right]\delta w''(0,t) = 0. \qquad (3.30)$$

Statik duruma benzer şekilde, Denklemler (3.28) ve (3.30)'da η=0 durumu için klasik elastisite teorisine ait hareket denklemiyle klasik sınır koşullarını veren ifadeler elde edilebilir.

BÖLÜM 4

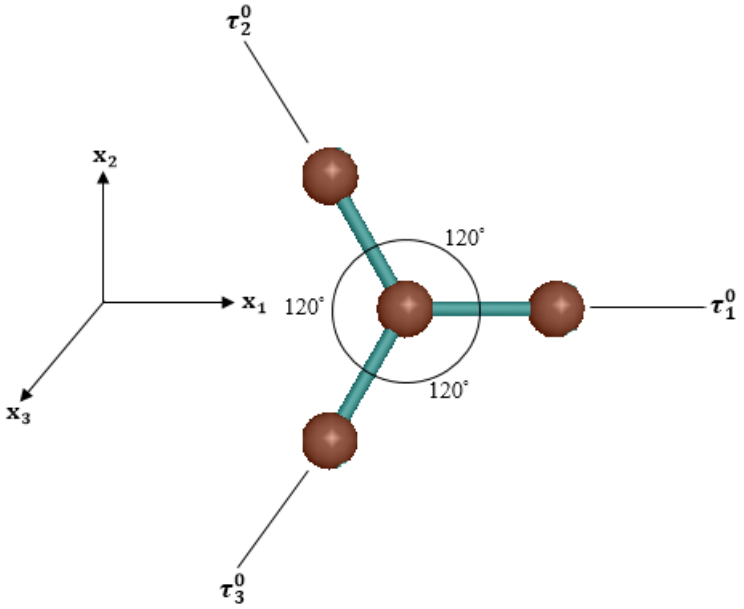
NANO YAPILARIN STATİK VE DİNAMİK ANALİZLERİ

4.1. Giriş

Bu bölümde, sırasıyla, EM teorisi kullanılarak, nanoçubuk ve nanokirişlere ait statik ve dinamik analizlere, elastik ortama gömülü nanotüplerin dinamik analizine, yanal atalet etkileri dikkate alınan nanoçubukların titreşim analizine, ikili nanoçubuk sistemlerinin eksenel titreşim analizine, elastik ortama gömülü nanokirişlerin burkulma ve titreşim analizlerine, elastik ortama gömülü ikili nanokiriş sistemlerinde burkulma analizine, çift duvarlı karbon nanotüplerin titreşim, burkulma ve dalga yayınım analizlerine, periyodik nano yapılara (nanoçubuk, nanokiriş) ait statik ve dinamik analizlere, periyodik yapıya sahip katmanlı nano kirişlerin titreşim analizine ve Timoshenko nanokiriş modellerinin statik ve dinamik analizlerine yer verilecektir.

4.2. Nanoçubuk ve Nanokirişlerin EM Teorisi Kullanılarak Statik ve Dinamik Analizleri

Bu bölümde, nanoçubuk ve nanokirişlerle ilgili bazı statik ve dinamik problemler çözülecektir. Nanoçubuk ve nanokirişler, EM teorisi kullanılarak, zigzag nanotüp modeli olarak tasarlanmıştır (Şekil 4.1).



Şekil 4.1. Zigzag nanotüp modeline ait atomların dizilimi.

Problemlerin çözüm sırası aşağıda özetlenmiştir:

• Nanoçubukların statik analizi: Her iki ucu ankastre bağlı düzgün bir eksenel yük etkisi altındaki nanoçubuk.

• Nanoçubukların dinamik analizi: Eksenel dalga yayınımı.

• Nanokirişlerin statik analizi: Her iki ucu basit destekli bir nanokirişin eğilmesi ve burkulması.

• Nanokirişlerin dinamik analizi: Her iki ucu basit destekli bir nanokirişin titreşimi ve enine dalga yayınımı.

İlk olarak, her iki ucu ankastre bağlı bir L uzunluğunda, düzgün bir yük (f) etkisinde bir nanoçubuk dikkate alınmaktadır. Bir nanoçubuğun eksenel deformasyonu için Bölüm 3'te çıkarılan yönetici Denklem (3.9) aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir:

$$AE\left[(V_1(\theta)u''(x) + V_2(\theta)\frac{\eta^2}{12}u^{IV}(x)\right] = -f \tag{4.1}$$

Burada zigzag nanotüp modeli için $V_1(\theta) = V_2(\theta) = 1$ olmaktadır. Buna göre, Denklem (4.1) boyutsuz olacak şekilde aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$u'' + \beta^2 u^{IV} = \bar{q} \tag{4.2}$$

Burada boyutsuz parametreler aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\bar{q} = \frac{-fL}{EA}, \quad \beta^2 = \frac{\eta^2}{12L^2}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{u} = \frac{u}{L}. \tag{4.3}$$

Denklem (4.2)'nin genel çözümü aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\bar{u}(\bar{x}) = c_1 + c_2\bar{x} + c_3 sin\left(\frac{\bar{x}}{\beta}\right) + c_4 cos\left(\frac{\bar{x}}{\beta}\right) + \frac{\bar{q}}{2}\bar{x}^2 \quad (4.4)$$

Burada, c_i $(i = 1,2,3,4)$ belirsiz katsayıları göstermektedir. Ankastre-ankastre (A-A) bağlı olan bir nanoçubukta her iki uçtaki $(\bar{x} = 0,1)$ sınır koşulları, $\bar{u}(0) = \bar{u}''(0) = \bar{u}(1) = \bar{u}''(1) = 0$ boyutsuz olacak şekilde yazılabilir. Böylece, sınır koşulları Denklem (4.4)'te yerine yazılarak belirsiz katsayılar aşağıdaki gibi elde edilir:

$$c_1 = -\bar{q}\beta^2, \qquad c_2 = -\frac{\bar{q}}{2}, \quad c_3 = \frac{\bar{q}\beta^2}{sin\left(\frac{1}{\beta}\right)} - \bar{q}\beta^2 \cot\left(\frac{1}{\beta}\right), \qquad c_4 = \bar{q}\beta^2. \quad (4.5)$$

Böylece A-A nanoçubuğuna ait eksenel yer değiştirme denklemi analitik olarak aşağıdaki gibi elde edilmektedir:

$$\bar{u}(\bar{x}) = -\bar{q}\beta^2 - \frac{\bar{q}}{2}\bar{x} + \left(\frac{\bar{q}\beta^2}{sin\left(\frac{1}{\beta}\right)} - \bar{q}\beta^2 \cot\left(\frac{1}{\beta}\right)\right) sin\left(\frac{\bar{x}}{\beta}\right) + \bar{q}\beta^2 cos\left(\frac{\bar{x}}{\beta}\right) + \frac{\bar{q}}{2}\bar{x}^2 \quad (4.6)$$

Yukarıdaki denklemde (4.6), boyutsuz ölçek parametresi $\beta = 0$ alınarak, klasik elastisite teorisine ait çözüm de elde edilebilir.

Ayrıca, Bölüm 3'te elde edilen, bir nanoçubuğa ait hareket Denklemi (3.15) (f=0) aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$AE\left[(u''(x,t) + \frac{\eta^2}{12}u^{IV}(x,t)\right] = \rho A\ddot{u}(x,t) \quad (4.7)$$

Eksenel dalga yayınımı için yer değiştirme ifadesi u izleyen formda tanımlanabilir:

$$u = ae^{i(kx-\omega t)} \quad (4.8)$$

Burada, a dalga genliğini, k dalga sayısını ve ω açısal frekansı göstermektedir. Denklem (4.8), Denklem (4.7)'de yerine yazılırsa, EM teorisi çerçevesinde nanoçubuğa ait dalga yayınım ilişkisi bulunabilir ve açısal frekans aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\omega^{EM} = c\sqrt{k^2(1 - \frac{\eta^2}{12}k^2)} \quad (4.9)$$

burada

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (4.10)$$

eşit olmaktadır. Faz hızı (V_p) ve grup hızı (V_g) ise sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$V_p^{EM} = c\sqrt{1 - \frac{\eta^2}{12}k^2} \tag{4.11}$$

$$V_g^{EM} = \frac{c}{2}\left[k^2(1 - \frac{\eta^2}{12}k^2)\right]^{-1/2}\left(2k - 4k^3\frac{\eta^2}{12}\right) \tag{4.12}$$

Denklem (4.9)'da görüldüğü gibi EM teorisinde, klasik elastisite teorisine göre daha düşük frekans değerleri elde edilmektedir. Bu iki teori arasındaki fark dalga sayısı k ile birlikte artmaktadır. Şimdiki çalışmada elde edilen EM teorisi sonuçlarının doğruluğunu göstermek amacıyla, EM teorisinden elde edilen dalga yayınımı çözümleri, yerel olmayan elastisite teorisi ve bir boyutlu Born-Karman Kafes Dinamiği (LD) çözümüyle kıyaslanmaktadır. Yerel olmayan elastisite teorisine (NL) ait eksenel dalga denklemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Q. Wang, 2005):

$$-k^2 + \mu c^2\omega^2k^2 + c^2\omega^2 = 0 \tag{4.13}$$

Burada μ yerel olmayan elastisite teorisine ait ölçek parametresini ifade etmektedir. Denklem (4.13) çözülerek, yerel olmayan elastisite teorisine ait açısal frekans, faz hızı ve grup hızı ifadeleri sırasıyla aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\omega^{NL} = k\sqrt{\frac{1}{\mu c^2k^2 + c^2}} \tag{4.14}$$

$$V_p^{NL} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{1}{\mu k^2 + 1}} \tag{4.15}$$

$$V_g^{NL} = \frac{1}{c}\left[\sqrt{\frac{1}{\mu k^2 + 1}} - \frac{\mu k^2}{(\mu k^2 + 1)^{3/2}}\right] \tag{4.16}$$

Ayrıca, LD modeli için dalga frekansı, faz hızı ve grup hızı (Brillouin, 1946):

$$\omega^{LD} = \mathrm{c}\frac{2}{\eta}\sin\left(k\frac{\eta}{2}\right) \tag{4.17}$$

$$V_p^{LD} = \frac{2c}{k\eta}sin\left(k\frac{\eta}{2}\right) \tag{4.18}$$

$$V_g^{LD} = ccos\left(k\frac{\eta}{2}\right) \tag{4.19}$$

olarak bulunur.

Her iki ucu (x=0,L) basit destekli (B), L uzunluğunda, düzgün yayılı yük (q) etkisinde bir nanokiriş dikkate alınmaktadır. Bir nanokirişin eğilme deformasyonu için Bölüm 3'te çıkarılan yönetici Denklem (3.23) aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir:

$$EI\left[V_1(\theta)w^{IV}(x)+\frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)w^{VI}(x)\right]=q(x) \tag{4.20}$$

Nanoçubuktakine benzer şekilde, zigzag nanotüp modeli için $V_1(\theta)=V_2(\theta)=1$ olmaktadır. Denklem (4.20) için çözüm ifadesi aşağıdaki gibi kabul edilebilir:

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}w_n sin\frac{n\pi x}{L}e^{i\omega_n t} \tag{4.21}$$

Burada w_n, kirişin orta düzleminin enine yer değiştirmesini göstermektedir. Buna göre, düzgün yayılı yük $q(x)$ ve Fourier katsayısı Q_n izleyen formdaki gibi tanımlanabilir:

$$q(x)=\sum_{n=1}^{\infty}Q_n sin\frac{n\pi x}{L},\quad Q_n=\frac{2}{L}\int_0^L q(x)sin\frac{n\pi x}{L}dx. \tag{4.22}$$

Bu çalışmada, $q(x)$ düzgün yük olarak tanımlanmıştır ve dolayısıyla Q_n aşağıdaki halini alır:

$$q(x)=q_0,\quad Q_n=\frac{4q_0}{n\pi},\qquad n=1,3,5,\ldots. \tag{4.23}$$

Eşitlik (4.21), Eşitlik (4.20)'de yerine yazılırsa ve boyutsuzlaştırma yapılırsa, nanokirişe ait boyutsuz yer değiştirme izleyen şekilde ifade edilir:

$$\bar{w}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\pi[(n\pi)^4-\beta^2(n\pi)^6]}sinn\pi\bar{x} \tag{4.24}$$

Burada boyutsuz yer değiştirme ifadesi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\bar{w}=\frac{EI}{q_0L^4}w \tag{4.25}$$

EM teorisinden elde edilen eğilme değerlerinin, klasik elastisite teorisinden elde edilen eğilme değerlerinden daha yüksek olduğu Denklem (4.24)'te açık bir şekilde görülmektedir.

Daha sonra aynı B-B kiriş modeli için, düzlem içi P kuvveti etkisinde burkulma yönetici denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$EIw^{IV}+\frac{\eta^2}{12}EIw^{VI}+Pw''=0 \tag{4.26}$$

Eşitlik (4.26)'nın çözümü aşağıdaki şekilde kabul edilebilir:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \sin\frac{n\pi x}{L} \tag{4.27}$$

Daha sonra Eşitlik (4.27), Eşitlik (4.26)'da yerine yazılıp boyutsuzlaştırma işlemi yapılırsa, nanokirişe ait kritik burkulma yükü ($\bar{P}$) EM teorisi çerçevesinde aşağıdaki gibi bulunur:

$$\bar{P} = \gamma^2 - \beta^2\gamma^4 \tag{4.28}$$

Burada boyutsuz parametreler aşağıdaki gibidir.

$$\bar{P} = \frac{PL^2}{EI}, \qquad \gamma = n\pi. \tag{4.29}$$

Denklem (4.28)'den gözlendiği gibi EM sonuçları, klasik elastisite teorisinden düşük burkulma yükü değerleri vermektedir. Bu özellik, EM teorisinin klasik teoriye göre yumuşak malzeme davranışı tahmin ettiğini gösterir.

B-B nanokirişin serbest titreşimini EM teorisi ile incelemek için, zigzag nanokiriş modeline ait hareket denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$EIw^{IV} + \frac{\eta^2}{12}EIw^{VI} + \rho A\ddot{w} = 0 \tag{4.30}$$

Denklem (4.30)'un çözümü izleyen formda ifade edilebilir:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\omega t \tag{4.31}$$

Eşitlik (4.31), Eşitlik (4.30)'da yerine yazılırsa ve boyutsuzlaştırma işlemi yapılırsa, EM teorisine ait boyutsuz titreşim frekans parametresi aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\Omega = \sqrt{\gamma^4 - \beta^2\gamma^6} \tag{4.32}$$

Burada boyutsuz frekans parametresi

$$\Omega^2 = \frac{\rho A\omega^2 L^4}{EI} \tag{4.33}$$

olacak şekilde tanımlanır. Eşitlik (4.32)'de görüldüğü gibi ölçek parametresi β, boyutsuz frekansı azaltmaktadır. Boyutsuz titreşim frekansları, n>1/β ile sınırlıdır. Bu kritik frekansın üstünde titreşim fiziksel değildir, çünkü bu durumda Denklem (4.32) negatif frekans değerleri vermektedir.

Son olarak, EM teorisi kullanılarak, nanokirişe ait enine dalga yayınım analizi gerçekleştirilecektir. Nanokirişin yer değiştirmesi izleyen şekilde ifade edilmektedir.

$$w = ae^{i(kx-\omega t)} \tag{4.34}$$

Böylece, Denklem (4.34), Denklem (4.30)'da yerine yazılırsa, nanokirişe ait açısal hız ω, faz hızı V_p ve grup hızı V_g ifadeleri aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

$$\omega = d\sqrt{k^4\left(1-\frac{\eta^2}{12}k^2\right)} \tag{4.35}$$

$$V_p = dk\sqrt{1-\frac{\eta^2}{12}k^2} \tag{4.36}$$

$$V_g = \frac{d}{2}\left[k^4\left(1-\frac{\eta^2}{12}k^2\right)\right]^{-1/2}\left(4k^3-6k^5\frac{\eta^2}{12}\right) \tag{4.37}$$

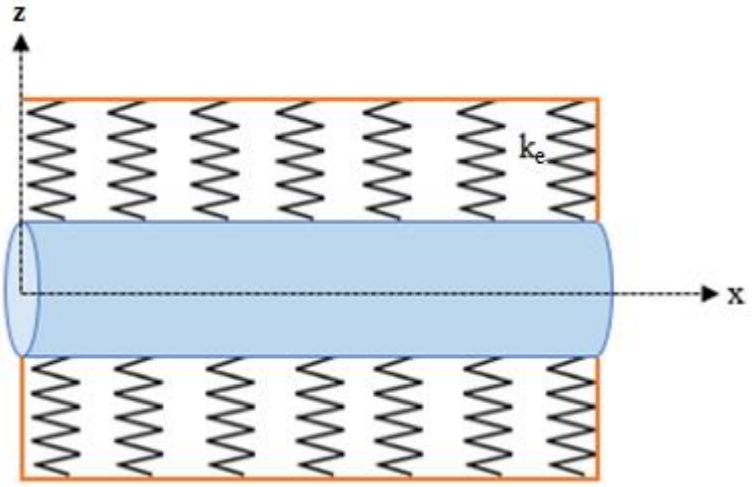
Burada,

$$d = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{4.38}$$

olmaktadır. Eşitlik (4.35)'te gözlendiği gibi, nanokirişteki enine dalgalar EM modeli için dispersivdir. EM teorisi kullanılarak elde edilen enine dalga frekansı, dalga sayısı ile birlikte artmakta, daha sonra global bir maksimum değere ulaştıktan sonra sıfıra düşmektedir.

4.3. Elastik Ortama Gömülü Nanoçubuğun EM Teorisi ile Eksenel Dinamik Analizi

Son zamanlarda, elastik bir matrise gömülü karbon nanotüplerin mekanik özelliklerinin araştırılması, karbon nanotüp yapılarının olağanüstü özellikleri (yüksek özgül mukavemet, düşük ağırlık vs.) nedeniyle popüler hale gelmiştir. Buna göre, elastik ortama gömülü nanotüplerin eksenel titreşimi bazı araştırmacılar tarafından yerel olmayan elastisite ve genleme esaslı gradyan süreklilik modelleri ile incelenmiştir (Adhikari, Murmu, & McCarthy, 2014; Aydogdu, 2012; Kiani, 2010; Murmu & Pradhan, 2009). Bu bölümde, elastik ortama gömülü olan nanoçubukların (karbon nanotüplerin) serbest titreşimi, EM teorisi kullanılarak araştırılmaktadır (Şekil 4.2).



Şekil 4.2. Elastik ortama gömülü bir nanoçubuk (karbon nanotüp).

Bu bölümde, dikkate alınan karbon nanotüp modelinde yönetici denklem, birbirine komşu üç atomlu yapı için çıkarılmıştır (Şekil 4.1). Çubuğun uçlarında, ankastre-serbest (A-S) ve A-A sınır koşulları dikkate alınmıştır. Karbon nanotüp uzunluğu, eşil mesafe ve elastik ortam sertliği gibi farklı parametrelerin elastik ortama gömülü nanotüplerin titreşimleri üzerindeki etkileri incelenmiştir. Buna ek olarak, EM teorisinin dalga yayınım sonuçları, kafes dinamiği sonuçları ile kıyaslanarak EM teorisinin geçerliliği araştırılmıştır.

Elastik ortama gömülü bir nanoçubuğun genleme enerjisi, elastik ortamın ve çubuğun şekil değiştirme enerjilerinin toplamı (U_t) olacak şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U_t = U_ç + U_e \tag{4.39}$$

Burada çubuğun genleme enerjisi ($U_ç$) Bölüm 3'te tanımlanmıştır (Denklem (3.5)). Elastik ortamın genleme enerjisi (U_e) ise aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U_e = \frac{1}{2}\int_0^L k_e u^2\, dx \tag{4.40}$$

Burada k_e elastik ortam parametresini göstermektedir. Denklem (3.5), (4.39), (4.40) ile birlikte nanoçubuğa ait kinetik enerji (3.12) ve dış kuvvetlerin yapmış olduğu iş (3.13) denklemleri de kullanılıp, Hamilton Prensibi yazıldığında, elastik ortama gömülü bir nanotüpün hareket denklemi aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$AE\left[(u''(x,t) + \frac{\eta^2}{12}u^{IV}(x,t)\right] = \rho A\ddot{u}(x,t) + k_e u \tag{4.41}$$

Harmonik titreşim hareketi varsayımı yapılarak, çubuğun eksenel yer değiştirmesi u izleyen şekilde ifade edilir:

$$u(x,t) = U(x)e^{i\omega_n t} \tag{4.42}$$

Burada, ω_n doğal frekansı temsil etmektedir. Eşitlik (4.42), Eşitlik (4.41)'de yerine yazılırsa, nanoçubuğun hareket denklemi boyutsuz olarak aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$U'' + \beta^2 U^{IV} + (\Omega^2 - K)U = 0 \tag{4.43}$$

Burada, boyutsuz parametreler aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\beta^2 = \frac{\eta^2}{12L^2}, \qquad \Omega^2 = \frac{\rho {\omega_n}^2 L^2}{EA}, \qquad K = \frac{k_e L^2}{EA}. \tag{4.44}$$

Ω^2 ve K sırasıyla, boyutsuz frekans parametresi ve boyutsuz elastik ortam katılığını göstermektedir. Buna göre Denklem (4.43)'ün analitik çözümü izleyen formda elde edilmektedir:

$$U(\bar{x}) = c_1 \sin\gamma\bar{x} + c_2 cos\gamma\bar{x} + c_3 sin\theta\bar{x} + c_4 cos\theta\bar{x} \tag{4.45}$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 4\beta^2(\Omega^2 - K)}}{2\beta^2}} \tag{4.46}$$

$$\theta = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 4\beta^2(\Omega^2 - K)}}{2\beta^2}} \tag{4.47}$$

Bu çalışmada, nanoçubuk için A-A ve A-S sınır şartları dikkate alınmıştır. Bölüm 3'te nanoçubuk için belirtilen sınır koşulları kullanılarak, A ve S sınır şartları için klasik ve klasik olmayan sınır şartları boyutsuz şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir:

A: $U(\bar{x}) = 0$ (klasik),

$U(\bar{x})'' = 0$ (klasik olmayan) $\bar{x}$=0,1.

S: $P = \left(U'(\bar{x}) + \beta^2 U'''(\bar{x})\right) = 0$ (klasik),

$U(\bar{x})'' = 0$ (klasik olmayan) $\bar{x}$=0,1. (4.48)

Denklemler (4.45) ve (4.48) kullanılarak, elastik ortama gömülü nanokirişlerin A-A ve A-S sınır şartları için doğal frekansları bulunabilir. A-A sınır şartı için:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\gamma^2 & 0 & -\theta^2 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ -\gamma^2\sin(\gamma) & -\gamma^2\cos(\gamma) & -\theta^2\sin(\theta) & -\theta^2\cos(\theta) \end{vmatrix} = 0 \tag{4.49}$$

olacak şekilde doğal frekansları veren karakteristik denklem elde edilir. Buna göre determinant (4.49)'un çözümü aşağıdaki şekilde bulunmaktadır:

$$-(\gamma^2-\theta^2)^2\sin(\gamma)\sin(\theta)=0 \tag{4.50}$$

Denklem (4.50)'ye göre üç farklı durum söz konusudur.

i) $\sin(\gamma)=0$ durumu için frekanslar:

$$\Omega_1=\sqrt{\frac{1-[n^2\pi^2 2\beta^2-1]^2}{4\beta^2}+K} \tag{4.51}$$

olacak şekilde elde edilmektedir.

ii) $\sin(\theta)=0$ durumu için frekanslar:

$$\Omega_2=\sqrt{\frac{1-[1-n^2\pi^2 2\beta^2]^2}{4\beta^2}+K} \tag{4.52}$$

olacak şekilde bulunur.

iii) $-(\gamma^2-\theta^2)^2=0$ durumu için frekanslar:

$$\Omega_3=\sqrt{\frac{1}{4\beta^2}+K} \tag{4.53}$$

ifadesine eşit olmaktadır. Açık bir şekilde görüldüğü gibi, Ω_1 ve Ω_2 frekansları tam olarak aynı frekans köklerini vermektedir ve Ω_3 frekansları ise diğer iki frekans köklerinden (Ω_1,Ω_2) özel hal olarak elde edilmektedir.

A-S sınır şartı için:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\gamma^2 & 0 & -\theta^2 \\ Cs(\gamma)\,\gamma-\beta^2\gamma^3\,Cs(\gamma) & -S(\gamma)\,\gamma+\beta^2\gamma^3\,S(\gamma) & Cs(\theta)\,\theta-\beta^2\theta^3\,C\,s(\theta) & -S(\theta)\,\theta+\beta^2\theta^3\,S(\theta) \\ -\gamma^2\,S(\gamma) & -\gamma^2\,Cs(\gamma) & -\theta^2\,S(\theta) & -\theta^2\,C\,s(\theta) \end{vmatrix} = 0 \tag{4.54}$$

olacak şekilde katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşitlenir. Burada *S*, "sinüs" terimini, *Cs* ise "kosinüs" terimini göstermektedir. Buna göre, Determinant (4.54)'ten çözüm aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\Omega=A_1A_2[A_3-A_4+A_5-A_6] \tag{4.55}$$

Yukarıdaki çözümde yer alan terimler aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir:

$$A_1=\gamma^2-\theta^2,\qquad A_2=\gamma\theta,\qquad A_3=\sin(\theta)\left[2sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2-1\right]\beta^2\gamma^2\theta,$$

$$A_4 = \sin(\gamma)\left[2sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 - 1\right]\beta^2\gamma\theta^2, \qquad A_5 = \sin(\gamma)\left[2sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 - 1\right]\gamma,$$

$$A_6 = \sin(\theta)\left[2sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - 1\right]\theta. \tag{4.56}$$

Denklem (4.43) ve Denklem (4.48)'de $\beta^2 = \frac{\eta^2}{12L^2} = 0$ durumu dikkate alınarak yapılan analitik çözümler neticesinde klasik teoriye ait titreşim frekansı çözümleri elde edilebilir. Buna göre, A-A sınır koşulu için klasik çözüm:

$$\Omega = \sqrt{n^2\pi^2 + K} \tag{4.57}$$

A-S sınır koşulu için klasik çözüm:

$$\Omega = \sqrt{\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4} + K} \tag{4.58}$$

olacak şekilde elde edilir. Mevcut EM teorisinin geçerliliğini kontrol etmek için elastik ortama gömülü bir nanoçubukta dalga yayınımı EM ve Kafes Dinamiği (LD) modeli kullanılarak incelenmektedir. Elastik bir ortam olmaksızın, benzer dalga yayınım problemi, Askes vd. (2002) ve Altan ve Aifantis (1997) tarafından ele alınmıştır. Eksenel dalga yayınımı için $u(x, t)$, Denklem (4.8)'deki gibi ifade edilebilir. Daha sonra, Denklem (4.8), Denklem (4.41)'de yerine yazılırsa, elastik ortama gömülü bir nanoçubuğun açısal frekansı aşağıdaki gibi bulunur:

$$\omega^{EM} = c\sqrt{\left(k^2 - \frac{\eta^2}{12}k^4 + \frac{k_e}{EA}\right)} \tag{4.59}$$

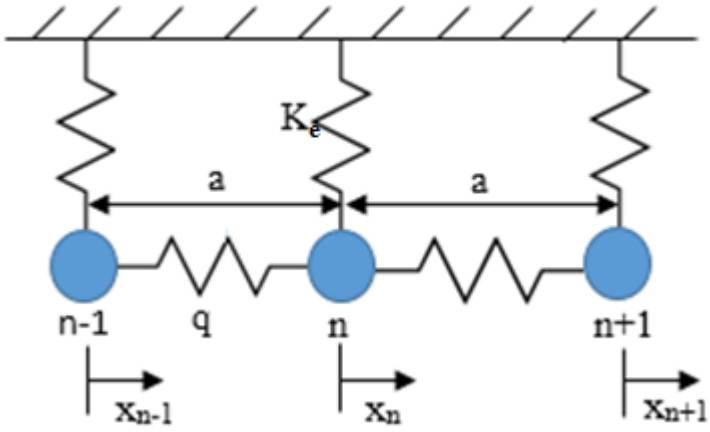
Eşitlik (4.59)'da $k \to 0$ ifadesi EM teorisine ait etkin sınır frekansın $\omega_{sf} = \sqrt{\frac{k}{\rho A}}$ olacak şekilde ortaya çıkmasını sağlar. Ayrıca faz hızı ve grup hızı ifadeleri de sırasıyla,

$$V_p^{EM} = \frac{c}{k}\sqrt{\left(k^2 - \frac{\eta^2}{12}k^4 + \frac{k_e}{EA}\right)} \tag{4.60}$$

$$V_g^{EM} = c\frac{k - 2\frac{\eta^2}{12}k^3}{\sqrt{\left(k^2 - \frac{\eta^2}{12}k^4 + \frac{k_e}{EA}\right)}} \tag{4.61}$$

olarak bulunur. Denklem (4.59)'dan açık bir şekilde görüldüğü gibi, EM teorisi klasik elastisiteye göre daha düşük dalga frekansı değerleri vermektedir ve iki teori arasındaki fark, dalga sayısı (k) arttıkça artmaktadır.

Son olarak, bir kristal içindeki atomların LD teorisiyle dalga yayınım analizi gerçekleştirilmektedir. Bu bölümde, elastik ortamın etkileri de dikkate alınarak Born-Karman kafes modeli kullanılmıştır.



Şekil 4.3. Elastik ortamda tek boyutlu molekül zinciri.

Şekil 4.3' te verilen model için, Euler-Lagrange denklemi aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\frac{\partial L}{\partial x_n} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n}\right) = 0 \tag{4.62}$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_n{}^2 - \frac{1}{2}q(x_n - x_{n-1})^2 - \frac{1}{2}q(x_{n+1} - x_n)^2 - \frac{1}{2}Kx_n{}^2 \tag{4.63}$$

Burada m, bir atomun kütlesini gösterir ve $m = a\rho A$'dir. q ise yay sabitini temsil eder ve değeri $q=EA/a$ ifadesine eşit olmaktadır. a, atomlar arasındaki bağ uzunluğunu, K_e ($K_e = k_e a$) ise elastik ortamın katılığını ifade etmektedir. Buna göre,

$$\frac{\partial L}{\partial x_n} = -q(x_n - x_{n-1}) + q(x_{n+1} - x_n) - K_e x_n \tag{4.64}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n}\right) = m\ddot{x}_n \tag{4.65}$$

eşitlikleri yazılabilir. Denklem (4.64) ve Denklem (4.65), Denklem (4.62)'de yerine yazılarak, x_n konumundaki bir atomun hareket denklemi aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$m\ddot{x}_n = -q[2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}] - K_e x_n \tag{4.66}$$

Denklem (4.66)'nın çözümü izleyen şekilde ifade edilebilir:

$$x_n(t) \sim exp\{i(kna) - \omega t\} \tag{4.67}$$

Burada n mod sayısı, k ise yarı dalga sayısıdır. Atomları oluşturan zincirin uçları birbirine bağlı olduğu varsayımı yapılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilmektedir:

$X_{N+1} = X_1$,

$$X_0 = X_N. \tag{4.68}$$

Böylece, sınır koşulları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$x_{N+1} \sim exp\{i[k(N+1)a - \omega t]\} \tag{4.69}$$

$$x_1 \sim exp\{i[ka - \omega t]\} \tag{4.70}$$

$$1 = exp[ikNa] \rightarrow kNa = 2\pi n \tag{4.71}$$

Yarı dalga sayısı dalga boyu cinsinden ($\lambda = aN/n$) izleyen formda yazılabilir:

$$k = \frac{2\pi n}{aN} = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{4.72}$$

Minimum dalga boyu, $\lambda_{min} = 2a$ dır. Üstel çözüm, hareket denkleminde yerine yazılırsa LD'ye ait dalga frekansı, faz hızı ve grup hızı ifadeleri aşağıdaki gibi bulunmaktadır:

$$-m\omega^2 e^{i(kna-\omega t)} = -q\left[2 - e^{-ika} - e^{ika} + \frac{K_e}{q}\right] e^{i(kna-\omega t)} \tag{4.73}$$

$$\omega^{LD} = \sqrt{\frac{2q(1-\cos ka) + K_e}{m}} = \sqrt{4\frac{q}{m}\sin^2\left(\frac{1}{2}ka\right) + \frac{K_e}{m}} \tag{4.74}$$

$$V_p^{LD} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{k}\sqrt{4\frac{q}{m}\sin^2\left(\frac{1}{2}ka\right) + \frac{K_e}{m}} \tag{4.75}$$

$$V_g^{LD} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{aq\sin(ka)}{m\sqrt{\frac{4q\sin^2\left(\frac{1}{2}ka\right) + K_e}{m}}} \tag{4.76}$$

LD formülasyonunu EM teorisi ile kıyaslayabilmek için Denklem (4.74) aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$(\omega^{LD})^2 = 4\frac{q}{m}\sin^2\left(\frac{1}{2}ka\right) + \frac{K_e}{m} = \frac{E}{\rho}\left(k^2 - \frac{k^4a^2}{12} + \frac{k_e}{EA}\right) + O(a^6) \tag{4.77}$$

EM teorisine ait dalga frekansı ifadesi ise

$$(\omega^{EM})^2 = c^2\left(k^2 - \frac{\eta^2}{12}k^4 + \frac{k_e}{EA}\right) \tag{4.78}$$

olacak şekilde yazılmaktadır. Denklem (4.77) ve Denklem (4.78) kıyaslandığında,

$$\frac{\eta^2}{12} = \frac{a^2}{12} \tag{4.79}$$

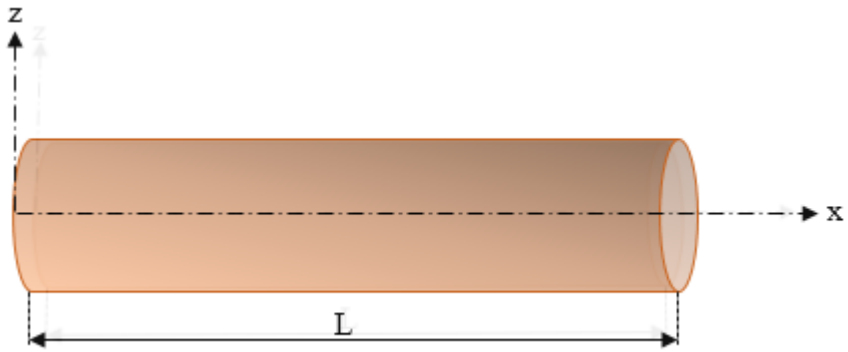
eşitliğinin dikkate alındığı görülmektedir. Böylece, LD modeli ve EM modeli için aynı karakteristik iç uzunluğun kullanıldığı anlaşılmaktadır.

4.4. Love Nanoçubuk Modellerinin EM Teorisi ile Titreşim Analizi

Bu bölümde, nanoçubuğun yanal atalet etkileri dikkate alınarak (Love varsayımı) titreşim analizi, EM teorisi çerçevesinde araştırılmaktadır. Nanoçubuk modeline ait yönetici denklem ve ilgili sınır koşullarını veren ifadeler Hamilton Prensibi ile çıkarılmıştır. Titreşim frekansı değerleri A-A ve A-S sınır şartları için elde edilmiştir. EM ile elde edilen sonuçlar, klasik elastisite teorisi, yerel olmayan elastisite teorisi ve Moleküler Dinamik (MD) sonuçları ile kıyaslanmıştır. Özelde, uzunluk ölçek parametresi, çubuk uzunluğu ve yanal atalet etkilerinin nanoçubuğun titreşimine etkisi gösterilmiştir.

Geçmişten günümüze kadar, makro ve nano boyuttaki çubuk elemanlarının statik ve dinamik analizlerini incelemek için farklı modeller geliştirilmiştir. İlk ve en basit çubuk teorisi, 18. yüzyılda eksenel titreşim için Bernoulli (1753) tarafından geliştirilmiştir. Bu teori ilk olarak bir boyutlu dalga yayınımının ve ince çubukların titreşim analizi için kullanılmıştır. Klasik çubuk modelinde, çubuğun sadece eksenel deformasyonu hesaba dahil edilir. Daha sonra, Strutt ve Rayleigh (1945) çubukların eksenel titreşiminde yanal ataleti dikkate alan bir çubuk teorisi geliştirmişlerdir. Love (1959) ise, günümüzde Love çubuk teorisi olarak adlandırılan bu teoriyi daha da geliştirmiştir. Yanal atalet etkileri, düşük uzunluk/çap (L/d) oranlarında oldukça önemli bir yer tutar. Love teorisinde, yanal atalet etkileri malzemenin Poisson oranına bağlı olarak doğrudan değişmektedir. Bu teoride, radyal deformasyon eksenel deformasyon cinsinden ifade edilmektedir. Dolayısıyla, Love çubuk teorisi yer değiştirme alanı cinsinden bir serbestlik derecesine sahip olur ve bazı durumlarda tek modlu teori olarak da adlandırılmaktadır. Ayrıca, Love teorisine ait yönetici denklemde, Poisson oranı veya atalet yarıçapı terimleri sıfır alınarak klasik çubuk teorisi elde edilebilmektedir. Yanal atalet etkileri dikkate alınarak çubuk elemanlarının dinamik analizlerine ait literatürdeki bazı önemli çalışmalara (Han, Hong, Song, & Kwon, 2014; X.-F. Li, Tang, Shen, & Lee, 2017; X. F. Li, Shen, & Lee, 2017; Narendar, 2011) örnek olarak verilebilir. Yukarıda belirtilen çalışmalarda, bir nanoçubuğun dinamik analizlerinde genellikle yerel olmayan elastisite teorisi, genleme esaslı gradyan teorisi ve modifiye edilmiş kuvvet çifti teorileri kullanılmıştır. Bu çalışmada ise zigzag ve koltuk nanotüp modellerinin titreşim analizleri Love varsayımı kullanılarak EM teorisi çerçevesinde incelenecektir.

L uzunluğunda ve d çaplı bir nanoçubukta, u ve w sırasıyla nanoçubuğun eksenel ve radyal yönler boyunca yer değiştirmesini belirtmektedir (Şekil 4.4).



Şekil 4.4. Nanoçubuk modeli.

Love teorisine göre, nanoçubuğun tipik bir noktasının radyal deformasyonu $w = -rvu'$dir. Burada r, noktanın radyal konumunu, ν ise nanoçubuğun Poisson oranını göstermektedir. Sıfır olmayan r'ye sahip çubuktaki tipik bir nokta, klasik modelin aksine, sadece eksenel yönde değil, aynı zamanda radyal yönde de hareket eder. Deformasyondan önce düzlem olan çubuk kesiti deformasyon boyunca da düzlem olarak kaldığı kabul edilir. Bir nanoçubuğa ait yönetici denklem ve genel sınır koşullarını veren ifadeler Hamilton Prensibi kullanılarak elde edilebilir. Burada, Denklem (3.11)'deki Hamilton Prensibi kullanılabilir ve çubuğa ait genleme enerjisi Denklem (3.5)'teki gibi, dış kuvvetlerin yapmış olduğu toplam işin varyasyonu ise Denklem (3.7)'deki gibi tanımlanabilir. Çubuğa ait kinetik enerji ifadesi ise yanal atalet etkileri de dikkate alınarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$T_{ç} = \frac{1}{2}\int_0^L \left[\rho A(\dot{u})^2 + \rho \nu^2 I_p(\dot{u}')^2\right] dx \tag{4.80}$$

Burada I_p nanoçubuğun polar atalet momentini göstermektedir. Denklem (4.80)'deki integralin birinci ve ikinci terimleri sırasıyla, eksenel ve radyal hareketten dolayı ortaya çıkan kinetik enerji terimlerini ifade etmektedir. Böylece, EM teorisi çerçevesinde nanoçubuğun titreşimi için radyal ataletin etkisi de dikkate alınmış olur. Böylece, EM ile birleştirilmiş Love çubuk teorisinin hareket denklemi ve ilgili sınır koşulları, Denklem (3.5), Denklem (3.7) ve Denklem (4.80)'in, Denklem (3.11)'de yerine yazılmasıyla elde edilebilir. Bu durumda, Denklem (3.11) varyasyonel olarak aşağıdaki gibi elde edilmektedir:

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{0}^{L}\left[AE\left(u'' + \frac{\eta^2}{12}u^{IV}\right) + f - \rho A\ddot{u} + \rho v^2 I_p(\ddot{u}'')^2\right]\delta u dx dt$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1}\left[\left\{N - AE\left(u' + \frac{\eta^2}{12}u'''\right) - \rho v^2 I_p(\ddot{u}')^2\right\}\delta u\right]_0^L dt$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1}\left[\left\{R - AE(-\frac{\eta^2}{12}u'')\right\}\delta u'\right]_0^L dt + \int_0^L [\rho A\dot{u}\delta u]_{t_0}^{t_1} dx = 0 \qquad (4.81)$$

Denklem (4.81) 'den, sırasıyla nanoçubuğun hareket denklemi, başlangıç koşulları ve sınır koşulları elde edilebilir.

$$AE\left[(u''(x,t) + \frac{\eta^2}{12}u^{IV}(x,t)\right] + f - \rho A\ddot{u}(x,t) + \rho v^2 I_p\ddot{u}''(x,t) = 0 \qquad (4.82)$$

Denklem (4.82), EM teorisine dayanan bir nanoçubuğun Love varsayımı ile hareket denklemini göstermektedir. Denklem (4.82)'nin son terimi, nanoçubuğun yanal ataleti ile ilgilidir. Yukarıdaki hareket denklemi zigzag nanotüp modeli için elde edilmiştir. Aynı zamanda Denklem (2.29)'daki koltuk modeli için elde edilen gerilme ifadesi de kullanılarak, koltuk nanotüp modeline ait hareket denklemi de elde edilebilir. Bölüm 2'de zigzag ve koltuk nanotüp modelleri için elde edilen gerilme bileşenlerinin birbirine oldukça benzer olduğu görülmektedir. Bu nedenle, her iki nanotüp modeli için elde edilen titreşim frekansı değerleri de birbirine oldukça yakın çıkacaktır. Ele alınan iki model için titreşim frekansı değerleri Bölüm 5'te verilmiştir. Eğer Denklem (4.82)'de son terim sıfıra eşitlenirse, EM modeline ait nanoçubuğun hareket denklemi elde edilebilir. Buna ek olarak, Denklem (4.82)'nin son terimi ile birlikte uzunluk ölçek parametresi $\eta^2 = 0$'a eşitlenirse klasik çubuk teorisi elde edilebilir. Başlangıç koşulları ise

$$\dot{u}(x,t_1)\delta u(x,t_1) - \dot{u}(x,t_0)\delta u(x,t_0) = 0 \qquad (4.83)$$

olacak şekilde elde edilir. Genel sınır koşulları ise aşağıdaki şekilde ortaya çıkmaktadır:

$$\left[N(L,t) - AE\left[u'(L,t) + \frac{\eta^2}{12}u'''(L,t) - \rho v^2 I_p\ddot{u}'(L,t)\right]\right]\delta u(L,t)$$

$$- \left[N(0,t) - AE\left[u'(0,t) + \frac{\eta^2}{12}u'''(0,t) - \rho v^2 I_p\ddot{u}'(0,t)\right]\right]\delta u(0,t) = 0,$$

$$\left[R(L,t) - AE\left[-\frac{\eta^2}{12}u''(L,t)\right]\right]\delta u'(L,t) - \left[R(0,t) - AE\left[-\frac{\eta^2}{12}u''(0,t)\right]\right]\delta u'(0,t) = 0 \quad (4.84)$$

Yukarıdaki sınır koşullarını veren Denklem (4.84) incelendiğinde, Bölüm 3'te elde edilen sınır koşullarından farklı olarak yanal atalet etkilerini de içeren eksenel kuvvet $N = AE\left[u' + \frac{\eta^2}{12}u''' - \rho v^2 I_p \ddot{u}'\right]$ olacak şekilde ortaya çıkmaktadır. Denklem (4.84)'teki yanal atalet terimleri (v = 0 veya I_p= 0'a eşitlenerek) ihmal edilerek, nanoçubuk modelinin EM için sınır koşulları elde edilebilir. Ayrıca, hareket denklemine benzer olarak, Eşitlik (4.84)'te hem yanal atalet terimleri hem de uzunluk ölçeği parametresi göz ardı edilerek, basit çubuk teorisi için sınır koşulları elde edilebilir. Yanal atalet etkileri göz önüne alınarak nanoçubukların eksenel serbest titreşimi EM teorisi kullanılarak analiz edilmiştir. Değişkenlerin ayrılması metoduna göre, eksenel yer değiştirme ifadesi *u*(*x*,*t*), Denklem (4.42)'deki gibi ifade edilebilir. Buna göre, Denklem (4.42), Denklem (4.82)'de yerine yazılırsa ve *f*=0 alınırsa aşağıdaki boyutsuz denklem elde edilir:

$$\beta^2 U^{IV} + \left(1 - \Omega^2 r_g^2 v^2\right)U'' + \Omega^2 U = 0 \quad (4.85)$$

Burada r_g boyutsuz atalet yarıçapını temsil etmektedir. Diğer boyutsuz terimler ise bir önceki bölümde tanımlanmıştır.

$$r_g^2 = \frac{I_p}{AL^2} \quad (4.86)$$

Denklem (4.85)'te yer alan terimlerin katkısı deformasyon durumları dikkate alınarak Çizelge 1'de sunulmuştur.

Çizelge 4.1. Farklı çubuk teorileri için deformasyon durumları.

Teori	Deformasyon Durumu			
	Eksenel deformasyon	Eksenel atalet	Eşil genleme gradyanı	Yanal atalet
Klasik Teori	✓	✓		
Love Teorisi	✓	✓		✓
Klasik EM Teorisi	✓	✓	✓	
Love Yaklaşımı ile EM teorisi	✓	✓	✓	✓

$\beta = 0$ ve v=0 veya r_g=0 durumunda, klasik çubuk teorisine ait hareket denklemi elde edilmektedir. Bu durumdaki hareket denklemi sadece eksenel deformasyon ve eksenel atalet terimlerini içerir. $\beta = 0$ durumu için ve v ve r_g değerlerinin sıfırdan farklı olması

halinde ise klasik Love teorisi için hareket denklemi elde edilmektedir. Bu durumda ise, eksenel deformasyon, eksenel atalet ve yanal atalet terimleri dikkate alınmaktadır. $\beta \neq 0$, ve $\nu = r_g = 0$ durumu için klasik EM teorisi için çubuk hareket denklemi elde edilmektedir. Bu durumda, eksenel deformasyon ve atalet terimleri ile birlikte eşil genleme gradyanı dikkate alınmaktadır. Son olarak ise Love yaklaşımı ile EM teorisi için çubuk hareket denklemi çıkarıldığında Çizelge 1.1'de verilen deformasyon durumlarının hepsi dikkate alınmış olur. Denklem (4.85)'in analitik çözümü izleyen şekilde bulunabilir:

$$U(\bar{x}) = c_1 sin\gamma_L \bar{x} + c_2 cos\gamma_L \bar{x} + c_3 sin\theta_L \bar{x} + c_4 cos\theta_L \bar{x} \tag{4.87}$$

Yukarıdaki denklemde, c_i (i=1,2,3,4) belirsiz katsayıları göstermektedir ve γ_L, θ_L terimleri aşağıdaki şekilde ortaya çıkmaktadır:

$$\gamma_L = \sqrt{\frac{\left(1 - \Omega^2 r_g^2 \nu^2\right) + \sqrt{\left(1 - \Omega^2 r_g^2 \nu^2\right)^2 - 4\beta^2 \Omega^2}}{2\beta^2}},$$

$$\theta_L = \sqrt{\frac{\left(1 - \Omega^2 r_g^2 \nu^2\right) - \sqrt{\left(1 - \Omega^2 r_g^2 \nu^2\right)^2 - 4\beta^2 \Omega^2}}{2\beta^2}}. \tag{4.88}$$

Her iki ucu A-A çubuk için boyutsuz sınır şartları Denklem (4.48)'de bulunmuştu. Buna göre A-A sınır şartı için Denklem (4.48) kullanılarak, Denklem (4.87) çözülebilir:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -{\gamma_L}^2 & 0 & -{\theta_L}^2 \\ sin(\gamma_L) & cos(\gamma_L) & sin(\theta_L) & cos(\theta_L) \\ -{\gamma_L}^2 sin(\gamma_L) & -{\gamma_L}^2 cos(\gamma_L) & -{\theta_L}^2 sin(\theta_L) & -{\theta_L}^2 cos(\theta_L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = 0 \tag{4.89}$$

Denklem (4.89)'un aşikar olmayan çözümü, katsayılar matrisinin determinantının sıfıra eşitlenmesiyle bulunabilir. Böylece A-A sınır koşuluna sahip nanoçubuğun titreşim frekansları aşağıdaki eşitlikten bulunabilir:

$$-\left({\gamma_L}^2 - {\theta_L}^2\right)^2 \sin(\gamma_L) \sin(\theta_L) = 0 \tag{4.90}$$

Denklem (4.90)'ın çözümünden, A-A nanoçubuğun, Love varsayımı ile EM teorisi çerçevesindeki titreşim frekansları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\Omega = \frac{n\pi \sqrt{-(n\pi\beta - 1)(n\pi\beta + 1)\left(n^2\pi^2 r_g^2 \nu^2 + 1\right)}}{n^2\pi^2 r_g^2 \nu^2 + 1} \tag{4.91}$$

Denklem (4.91)'e göre, belirli bir nanoçubuk uzunluğu için maksimum mod sayısı (n), $n = 1/\pi\beta$ ile elde edilir. Bu durumda maksimum mod sayısı Van Hove tekilliğini temsil eder. $n>1/\pi\beta$ olduğunda Denklem (4.91)'de bulunan doğal frekansların kökleri sanal değerler alırlar ve EM-Love nanoçubuk modelinde bu kritik mod sayısının üzerinde titreşim gerçekleşmez. Örneğin, EM teorisinde L = 1 nm iken n = 7 mod sayısına kadar anlamlı doğal frekanslar elde edilirken, L = 2 nm iken n = 15 mod sayısına kadar anlamlı doğal frekanslar elde edilir. Buna karşılık, klasik çubuk teorisi için sonsuz sayıda doğal frekans modu gözlemlenmektedir.

A-S sınır koşulu için klasik ve klasik olmayan sınır koşulları Denklem (4.48)'de çıkarılmıştı. Bunlardan farklı olarak, nanoçubuğun serbest ucunda ($\bar{x} = 1$) sıfıra eşit olan eksenel kuvvet değeri yanal atalet etkilerini de içerecek şekilde boyutsuz olarak yeniden aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$N = \left[U'(\bar{x})\left(1 - \Omega^2 r_g^2 v^2\right) + \beta^2 U'''(\bar{x})\right] = 0 \tag{4.92}$$

Denklem (4.92)'de görüldüğü gibi, S sınır koşulları hem ölçek parametresine hem de yanal atalete bağlıdır; A sınır koşulları ise bu etkilerden bağımsızdır. Denklemler (4.92) ve Denklem (4.48)'de verilen sınır koşulları kullanılarak, Denklem (4.87)'nin çözümü, matris biçiminde aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\gamma_L{}^2 & 0 & -\theta^2 \\ \mathrm{Cs}(\gamma_L)\,\gamma_L \mathrm{T} - \beta^2\gamma_L{}^3\,\mathrm{Cs}(\gamma_L) & -\mathrm{S}(\gamma_L)\,\gamma_L \mathrm{T} + \beta^2\gamma_L{}^3\,\mathrm{S}(\gamma_L) & \mathrm{Cs}(\theta_L)\,\theta_L \mathrm{T} - \beta^2\theta_L{}^3\,\mathrm{Cs}(\theta_L) & -\mathrm{S}(\theta_L)\,\theta_L \mathrm{T} + \beta^2\theta_L{}^3\,\mathrm{S}(\theta_L) \\ -\gamma_L{}^2\,\mathrm{S}(\gamma_L) & -\gamma_L{}^2\,\mathrm{Cs}(\gamma_L) & -\theta_L{}^2\,\mathrm{S}(\theta_L) & -\theta_L{}^2\,\mathrm{Cs}(\theta_L) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{C}_1 \\ \mathrm{C}_2 \\ \mathrm{C}_3 \\ \mathrm{C}_4 \end{bmatrix} = 0 \tag{4.93}$$

Denklem (4.93)'de katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşitlenerek A-S nanoçubuğunun EM-Love teorisi çerçevesinde doğal frekansları bulunabilir:

$$Z_1[Z_2 - Z_3 - Z_4 + Z_5] = 0 \tag{4.94}$$

Burada

$$Z_1 = -\gamma_L\theta_L\left(\gamma_L{}^2 - \theta_L{}^2\right),$$
$$Z_2 = \gamma_L T sin(\gamma_L)\cos(\theta_L),$$
$$Z_3 = \theta_L T cos(\gamma_L)\sin(\theta_L),$$
$$Z_4 = \gamma_L\beta^2\theta_L{}^2 sin(\gamma_L)\cos(\theta_L),$$
$$Z_5 = \gamma_L{}^2\beta^2\theta_L cos(\gamma_L)\sin(\theta_L). \tag{4.95}$$

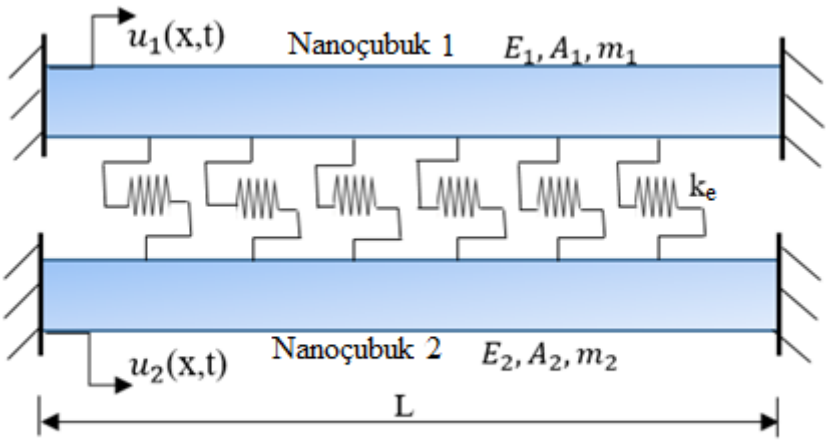
eşit olmaktadır. Denklem (4.94)'ün çözümü EM-Love nanoçubuk modelinin A-S sınır koşulu için doğal frekanslarını verir.

4.5. Çiftli Nanoçubuk Sistemlerinin EM Teorisi ile Eksenel Titreşim Analizi

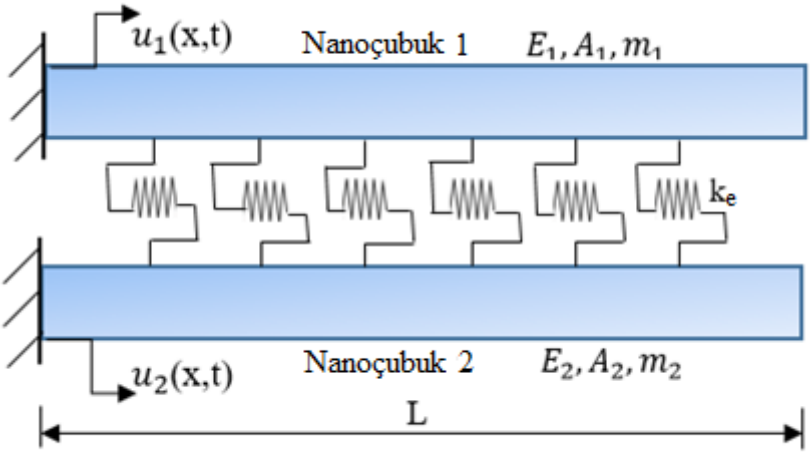
Bu bölümde, çiftli nanoçubuk sistemlerinin eksenel serbest ve zorlanmış titreşim analizi EM teorisi kullanılarak gerçekleştirilecektir. Titreşim frekansları ve dinamik yer değiştirmeler, nanoçubukların farklı malzeme ve geometrik özelliklerinin ve EM modeline ait uzunluk ölçeği parametresinin etkilerini göstermek için belirlenmiştir. Günümüzde, birleştirilmiş nanoçubuk sistemleri, nano-elektro-mekanik cihazların tasarımı için önemli bir teknoloji haline gelmiştir. Nanosensörler, nanorezonatörler, nanoaktüatörler ve nano-opto-mekanik sistemler (NOMS) alanında bu nanotüplerin birçok uygulaması vardır. Dolayısıyla, bu tür cihazların titreşim frekanslarının belirlenmesi, bu nano-elektro-mekanik cihazların tasarım prosedürleri için oldukça yararlı olabilir. Bu problemin klasik versiyonu önceki çalışmaların bazılarında dikkate alınmıştır. Erol ve Gürgöze (2004) klasik çubuk modelini dikkate alarak homojen çiftli çubuk sisteminin titreşimini incelemişlerdir. De Rosa ve Lippiello (2007), diferansiyel quadrature eleman metodu kullanarak çiftli kiriş sistemlerinin titreşimlerini incelemişlerdir. Çiftli kiriş sisteminin uçlarında yay bağlı olacak şekilde modelleme yapmışlar ve böylece, dönme ve öteleme etkilerinin analize dahil edilmesini sağlamışlardır. Birleştirilmiş nanoçubukların en önemli uygulama alanlarından biri Q. Cao vd. (2007) tarafından araştırılan ince film transistörlerdir. Sonlu elemanlar modelini kullanarak, dielektrik içine gömülü paralel aralıklı tek duvarlı karbon nanotüplerden oluşan ince film transistörlerin kapasitansını hesaplamışlardır. Son zamanlarda, çoklu nano yapıları modellemek için ölçek parametresine bağlı sürekli ortam teorileri kullanılmıştır. Çiftli nanoçubuk sistemlerinin eksenel titreşimi, Murmu ve Adhikari (2010a) tarafından araştırılmıştır. Bu çalışmada, elastik ortamın etkisini hesaba dahil etmek için, nanoçubuklar dikey yaylar kullanılarak birbirine bağlanmıştır. Narendar ve Gopalakrishnan (2011), yerel olmayan elastisite teorisini kullanarak, birleştirilmiş nanoçubuk sistemlerinin eksenel dalga yayınımını incelemişlerdir. Bu çalışmada, çiftli nanoçubuk sistemlerinin sınır frekansı ve kurtulma frekansı elde edilmiştir. Yerel olmayan viskoelastik elastisite teorisi kullanılarak, çiftli nanoçubuk sistemlerinin eksenel titreşimi Karličić, Cajić, Murmu, ve Adhikari (2015) tarafından çalışılmıştır. Elde edilen

sonuçlar, literatürdeki diğer sayısal yaklaşımlarla doğrulama için karşılaştırılmıştır. Bunlara ek olarak, çiftli nanotüp sistemlerinin statik ve dinamiği üzerindeki manyetik ve termal etkileri içeren bazı çalışmalar da literatürde yer almaktadır (Arani, Amir, Dashti, & Yousefi, 2014; Karličić, Kozić, & Pavlović, 2016; Pavlović, Karličić, Pavlović, Janevski, & Ćirić, 2016).

Bir çiftli nanoçubuk sistemi (ÇNÇS), Şekil 4.5'te gösterilmektedir. Çiftli nanoçubuklar arasındaki elastik ortam veya Van der Waals etkileşimini belirtmek için düzgün yayılı yaylar kullanılmıştır. Bu bölümde dikkate alınan ÇNÇS lerinde yayların sertliği, Winkler sabiti olarak kabul edilmektedir. A-A ve A-S sınır koşulları dikkate alınmıştır.



a)



b)

Şekil 4.5. A-A ve A-S ÇNÇS.

Daha önce EM teorisi çerçevesinde bir zigzag nanoçubuk modeli için elde edilen hareket denklemi (4.7) kullanılarak, ÇNÇS lerin yönetici denklemleri izleyen şekilde yazılabilir:

$$-E_1A_1u_1''(x,t)+k_e[u_1(x,t)-u_2(x,t)]+m_1\ddot{u}_1(x,t)-E_1A_1\frac{\eta^2}{12}u_1^{IV}(x,t)=0, \quad (4.96a)$$

$$-E_2A_2u_2''(x,t)-k_e[u_1(x,t)-u_2(x,t)]+m_2\ddot{u}_2(x,t)-E_2A_2\frac{\eta^2}{12}u_2^{IV}(x,t)=0. \quad (4.96b)$$

Burada, m_1 ve m_2 sırasıyla, birinci ve ikinci çubuğun birim uzunluk başına düşen kütlelerini, $u_1(x,t)$ ve $u_2(x,t)$ ise sırasıyla, birinci ve ikinci çubuğun eksenel yer değiştirmelerini göstermektedir. Analizi basitleştirmek için, aşağıdaki ifadeler tanımlanabilir (Erol & Gürgöze, 2004):

$$E_1A_1=E_2A_2=\bar{e}\equiv \text{sabit}, \qquad m_1=m_2=m\equiv \text{sabit} \quad (4.97)$$

Böylece Denklem (4.97)'deki ifadeler, Denklem (4.96)'da yerine yazılırsa ÇNÇS ait hareket denklemi aşağıdaki hali alır:

$$-\bar{e}u_1''(x,t)+k_e[u_1(x,t)-u_2(x,t)]+m\ddot{u}_1(x,t)-\bar{e}\frac{\eta^2}{12}u_1^{IV}(x,t)=0,$$

$$-\bar{e}u_2''(x,t)-k_e[u_1(x,t)-u_2(x,t)]+m\ddot{u}_2(x,t)-\bar{e}\frac{\eta^2}{12}u_2^{IV}(x,t)=0. \quad (4.98)$$

Daha sonra, birinci nanoçubuğun, ikinci nanoçubuğa göre bağıl yer değiştirmesi (Erol & Gürgöze, 2004):

$$u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t) \quad (4.99)$$

olacak şeklide tanımlanabilir. Buna göre, Denklem (4.99) aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$u_1(x,t)=u(x,t)+u_2(x,t) \quad (4.100)$$

Denklem (4.99) ve Denklem (4.100) kullanılarak, Denklem (4.96) aşağıdaki halini alır:

$$-\bar{e}u''(x,t)+2k_eu(x,t)+m\ddot{u}(x,t)-\bar{e}\frac{\eta^2}{12}u^{IV}(x,t)=0, \quad (4.101a)$$

$$-\bar{e}u_2''(x,t)+m_2\ddot{u}_2(x,t)-\bar{e}\frac{\eta^2}{12}u_2^{IV}(x,t)=k_eu(x,t). \quad (4.101b)$$

Denklem (4.101)'de $\eta^2=0$ yazıldığında, (Erol & Gürgöze, 2004) referansında yer alan klasik elastisite denklemlerinin aynısı elde edilmektedir.

Bu bölümde ilk olarak, Denklem (4.101a)'daki bağıl yer değiştirme $u(x,t)$ için çözüm yapılacaktır. Daha sonra da Denklem (4.101b) çözülecektir. $u=0$ olduğunda, iki nanotüp sanki bir nanotüp gibi aynı genlikte titreşecektir. Harmonik titreşim varsayımı yapılarak, Denklem (4.101a)'nın çözümü Denklem (4.42)'deki gibi kabul edilebilir. Buna

göre, Denklem (4.42), Denklem (4.101a)'da yerine yazılırsa, aşağıdaki gibi dördüncü mertebeden bir diferansiyel denklem elde edilir:

$$-\bar{e}\frac{\eta^2}{12}U^{IV}(x,t) - \bar{e}U''(x,t) + 2k_eU(x,t) - m{\omega_n}^2U(x,t) = 0 \qquad (4.102)$$

Denklem (4.102), boyutsuz bir şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\beta^2U^{IV}(\bar{x}) + U''(\bar{x}) + (\Omega^2 - 2K)U(\bar{x}) = 0 \qquad (4.103)$$

Buradaki boyutsuz parametreler aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$K = \frac{k_eL^2}{\bar{e}}, \qquad \Omega^2 = \frac{m\omega^2L^2}{\bar{e}}. \qquad (4.104)$$

Denklem (4.103)'ün çözümü aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$U(\bar{x}) = c_1e^{\gamma_c\bar{x}} + c_2e^{-\gamma_c\bar{x}} + c_3e^{\theta_c\bar{x}} + c_4e^{-\theta_c\bar{x}} \qquad (4.105)$$

$$\gamma_c = \frac{\sqrt{-\frac{\sqrt{1-4\Omega^2\beta^2+8\beta^2K}+1}{\beta^2}}}{\sqrt{2}},$$

$$\theta_c = \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{1-4\Omega^2\beta^2+8\beta^2K}-1}{\beta^2}}}{\sqrt{2}}. \qquad (4.106)$$

Denklem (4.48)'de tanımlanan klasik ve klasik olmayan sınır koşulları kullanılarak, A-A ve A-S sınır koşulları için ÇNÇS lerin doğal frekansları elde edilebilir. Klasik ve klasik olmayan sınır koşulları, A-A sınır koşulu için boyutsuz biçimde aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

A-A: $U_1(0,t) = 0,\ U_1(1,t) = 0$ (klasik),

$U_1''(0,t) = 0,\ U_1''(1,t) = 0$ (klasik olmayan) $\bar{x}$=0,1; nanoçubuk-1 için.

$U_2(0,t) = 0,\ U_2(1,t) = 0$ (klasik),

$U_2''(0,t) = 0,\ U_2''(1,t) = 0$ (klasik olmayan) $\bar{x}$=0,1; nanoçubuk-2 için. (4.107)

Denklem (4.99) kullanılarak, aşağıdaki eşitlik elde edilebilir:

$$U(0,t) = U_1(0,t) - U_2(0,t), \qquad U(1,t) = U_1(1,t) - U_2(1,t), \qquad (4.108a)$$

$$U''(0,t) = U_1''(0,t) - U_2''(0,t), \qquad U''(1,t) = U_1''(1,t) - U_2''(1,t). \qquad (4.108b)$$

Son olarak, Denklem (4.108a) ve (4.108b) kullanılarak, sınır koşulları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U(0,t) = 0, \qquad U''(0,t) = 0, \qquad U(1,t) = 0, \qquad U''(1,t) = 0. \qquad (4.109)$$

Böylece, Denklem (4.109) ve Denklem (4.105) kullanılarak, A-A ÇNÇS için, dört bilinmeyenli, dört homojen denklem sistemi elde edilebilir. Bu denklem sisteminde aşikar olmayan çözüm için, katsayılar matrisinin determinantı aşağıdaki gibi sıfıra eşitlenmelidir:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ {\gamma_c}^2 & {\gamma_c}^2 & {\theta_c}^2 & {\theta_c}^2 \\ e^{\gamma_c} & e^{-\gamma_c} & e^{\theta} & e^{-\theta} \\ -\dfrac{e^{\gamma_c}+e^{\gamma_c}y}{2\beta^2} & -\dfrac{e^{-\gamma_c}+e^{-\gamma_c}y}{2\beta^2} & \dfrac{e^{\theta_c}y-e^{\theta_c}}{2\beta^2} & \dfrac{e^{-\theta_c}y-e^{-\theta_c}}{2\beta^2} \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.110)$$

Burada y ifadesi,

$$y = \sqrt{1 - 4\beta^2\Omega^2 + 8\beta^2 K} \qquad (4.111)$$

eşittir. Buna göre, Determinant (4.110)'un sonucu aşağıdaki karakteristik denklemi verir:

$$ye^{-2\theta_c}(2\,sinh(\theta_c)\,e^{\gamma_c+2\theta_c} - 2\,sinh(\theta_c)\,e^{2\theta_c-\gamma_c})({\gamma_c}^2 - {\theta_c}^2) = 0 \qquad (4.112)$$

Denklem (4.112)'nin kökleri A-A sınır koşuluna sahip ÇNÇS nin doğal frekanslarını vermektedir. Bulunan doğal frekans sonuçları $U_1 - U_2 \neq 0$ durumu için elde edilmiştir. Aynı zamanda, $U_1 - U_2 = 0$ durumu için ikinci nanoçubuğun titreşim analizi de yapılabilir. Aynı işlem adımları Denklem (4.101b)'yi çözmek için kullanılabilir. Denklemler (4.101b-4.109)'da gerekli değişiklikler yapılarak, bir önceki duruma benzer şekilde dört bilinmeyenli dört homojen denklem sistemi elde edilir ve çözüm gerçekleştirilebilir. A-A ÇNÇS de $U_1 - U_2 \neq 0$ durumunda elde edilen doğal frekans değerleri, $U_1 - U_2 = 0$ durumunda ortaya çıkan doğal frekans değerlerinin hepsini içermektedir. Ayrıca, $U_1 - U_2 = 0$ durumu için bulunan doğal frekans değerleri iki nanoçubuğun arasında bulunan yayların rijitlik değerinden bağımsızdır.

A-S sınır koşulu için de benzer prosedürler uygulanabilir. ÇNÇS de, klasik ve klasik olmayan sınır koşulları, boyutsuz biçimde A-S sınır koşulu için şu şekilde tanımlanır:

A-S: $U_1(0,t) = 0,\ \ P_1(1,t) = ({U_1}'(1,t) + \beta^2 {U_1}'''(1,t)) = 0$ (klasik),

$${U_1}''(0,t) = 0,\ {U_1}''(1,t) = 0 \text{ (klasik olmayan) } \bar{x}\text{=0,1; nanoçubuk-1 için.}$$

$$U_2(0,t) = 0,\ \ P_2(1,t) = ({U_2}'(1,t) + \beta^2 {U_2}'''(1,t)) = 0 \text{ (klasik),}$$

$${U_2}''(0,t) = 0,\ {U_2}''(1,t) = 0 \text{ (klasik olmayan) } \bar{x}\text{=0,1; nanoçubuk-2 için.} \qquad (4.113)$$

Denklem (4.99) kullanılarak, aşağıdaki eşitlik elde edilebilir:

$$U(0,t)=0, \qquad U''(0,t)=0, \qquad [U'(1,t)+\beta^2 U'''(1,t)]=0,$$
$$U''(1,t)=0. \tag{4.114}$$

Denklem (4.114) ve Denklem (4.105) kullanılarak, A-S ÇNÇS için, dört bilinmeyenli bir homojen denklemler sistemi elde edilir. Aşikar olmayan çözüm için, bu sistemin katsayılar matrisinin determinantı aşağıdaki gibi sıfıra eşitlenir:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ {\gamma_c}^2 & {\gamma_c}^2 & {\theta_c}^2 & {\theta_c}^2 \\ \dfrac{e^{\gamma_c}\gamma_c - e^{\gamma_c}\gamma_c y}{2} & \dfrac{e^{-\gamma_c}\gamma_c y - e^{-\gamma_c}\gamma_c}{2} & \dfrac{e^{\theta_c}\theta_c - e^{\theta_c}\theta_c y}{2} & \dfrac{-e^{-\theta_c}\theta_c - e^{-\theta_c}\theta_c y}{2} \\ -\dfrac{e^{\gamma_c}+e^{\gamma_c}y}{2\beta^2} & -\dfrac{e^{-\gamma_c}+e^{-\gamma_c}y}{2\beta^2} & \dfrac{e^{\theta_c}y - e^{\theta_c}}{2\beta^2} & \dfrac{e^{-\theta_c}y - e^{-\theta_c}}{2\beta^2} \end{vmatrix} = 0 \tag{4.115}$$

Determinant (4.115)'in sonucu aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$A_1[A_2 - A_3 + A_4 + A_5 - A_6] = 0 \tag{4.116}$$

$$A_1 = e^{-2\theta_c}({\gamma^2 - \theta_c}^2),$$

$$A_2 = e^{\gamma_c + 3\theta_c}(\theta_c - \gamma_c + 2\gamma_c y) - e^{3\theta_c - \gamma_c}(\gamma_c + \theta_c - 2\gamma_c y),$$

$$A_3 = e^{\theta_c - \gamma_c}(\theta_c - \gamma_c + 2\gamma_c y + 2\theta_c y),$$

$$A_4 = e^{\theta_c + \gamma_c}(\theta_c + \gamma_c - 2\gamma_c y + 2\theta_c y),$$

$$A_5 = 2y^2 \sinh(\theta_c)\, e^{2\theta_c - \gamma_c}(\theta_c - \gamma_c),$$

$$A_6 = 2y^2 \sinh(\theta_c)\, e^{2\theta_c + \gamma_c}(\theta_c + \gamma_c). \tag{4.117}$$

Yukarıda elde edilen doğal frekans sonuçları $U_1 - U_2 \neq 0$ için bulunmuştur. Aynı zamanda, $U_1 - U_2 = 0$ durumu için de ikinci nanoçubuğun titreşim analizi yapılabilir. A-A sınır koşulundakine benzer şekilde, Denklemler (4.101b-4.109) ve Denklemler (4.113,4.114) kullanılarak dört bilinmeyenli homojen dört denklem sistemi elde edilerek sonuca gidilebilir. Aynı şekilde, A-S ÇNÇS de $U_1 - U_2 \neq 0$ durumu için elde edilen doğal frekans sonuçları, $U_1 - U_2 = 0$ durumunda ortaya çıkan doğal frekans değerlerinin hepsini içermektedir. Bu nedenle, $U_1 - U_2 = 0$ için ayrıca çözüm işlemi yapmaya gerek yoktur.

Bu bölümde ayrıca, düzgün ve doğrusal eksenel yükler altında ÇNÇS nin zorlanmış titreşimi A-A sınır koşulu için incelenmiştir. Buna göre, ÇNÇS'ye uygulanan harmonik kuvvet aşağıdaki gibi kabul edilebilir:

$$f_i(\bar{x},t) = F_i(\bar{x}) sin\omega t \quad i = 1,2. \tag{4.118}$$

İlk olarak, üniform yayılı yük için ($F_i(\bar{x}) = F_i$) eşitliği dikkate alınarak, Denklem (4.42) ve Denklem (4.118), Denklem (4.101a)'da yerine yazılırsa ve boyutsuzlaştırma işlemi yapılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilebilir:

$$\beta^2 U^{IV}(\bar{x},t) + U''(\bar{x},t) + (\Omega^2 - 2K)U(\bar{x},t) = F_1 - F_2 \tag{4.119}$$

$$F_1 = \frac{f_1 L^2}{\bar{e}}, \qquad F_2 = \frac{f_2 L^2}{\bar{e}}. \tag{4.120}$$

Denklem (4.120)'nin genel çözümü aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\bar{\bar{u}}(\bar{x}) = c_1 e^{\gamma\bar{x}} + c_2 e^{-\gamma\bar{x}} + c_3 e^{\theta\bar{x}} + c_4 e^{-\theta\bar{x}} + \frac{F_2 - F_1}{\Omega^2} \tag{4.121}$$

Burada boyutsuz dinamik yer değiştirme ($\bar{\bar{u}}(\bar{x})$)

$$\bar{\bar{u}}(\bar{x}) = U(x)\frac{\bar{e}}{(F_1 - F_2)L^2} \tag{4.122}$$

olacak şekilde tanımlanmaktadır. Denklem (4.109)'da verilen sınır koşullarının, Denklem (4.121)'e uygulanmasıyla belirsiz katsayılar (c_1, c_2, c_3, c_4) aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$c_1 = \frac{\frac{1}{\Omega^2}\left({\theta_c}^2 e^{-\gamma_c} - {\theta_c}^2\right)}{{\gamma_c}^2 e^{\gamma_c} - {\theta_c}^2 e^{\gamma_c} - {\gamma_c}^2 e^{-\gamma_c} + {\theta_c}^2 e^{-\gamma_c}},$$

$$c_2 = \frac{\frac{1}{\Omega^2}\left({\theta_c}^2 - {\theta_c}^2 e^{\gamma_c}\right)}{{\gamma_c}^2 e^{\gamma_c} - {\theta_c}^2 e^{\gamma_c} - {\gamma_c}^2 e^{-\gamma_c} + {\theta_c}^2 e^{-\gamma_c}},$$

$$c_3 = \frac{\frac{1}{\Omega^2}\left({\gamma_c}^2 - {\gamma_c}^2 e^{-\theta_c}\right)}{{\gamma_c}^2 e^{\theta_c} - {\theta_c}^2 e^{\theta_c} - {\gamma_c}^2 e^{-\theta_c} + {\theta_c}^2 e^{-\theta_c}},$$

$$c_4 = \frac{\frac{1}{\Omega^2}\left({\gamma_c}^2 e^{-\theta_c} - {\gamma_c}^2\right)}{{\gamma_c}^2 e^{\theta_c} - {\theta_c}^2 e^{\theta_c} - {\gamma_c}^2 e^{-\theta_c} + {\theta_c}^2 e^{-\theta_c}}. \tag{4.123}$$

Böylece, boyutsuz dinamik yer değiştirme, A-A sınır koşulu için bir ÇNÇS'de aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\bar{\bar{u}}(\bar{x}) = \frac{\frac{1}{\Omega^2}\left({\theta_c}^2 e^{-\gamma_c} - {\theta_c}^2\right)}{{\gamma_c}^2 e^{\gamma_c} - {\theta_c}^2 e^{\gamma_c} - {\gamma_c}^2 e^{-\gamma_c} + {\theta_c}^2 e^{-\gamma_c}} e^{\gamma_c\bar{x}} + \frac{\frac{1}{\Omega^2}\left({\theta_c}^2 - {\theta_c}^2 e^{\gamma_c}\right)}{{\gamma_c}^2 e^{\gamma_c} - {\theta_c}^2 e^{\gamma_c} - {\gamma_c}^2 e^{-\gamma_c} + {\theta_c}^2 e^{-\gamma_c}} e^{-\gamma_c\bar{x}}$$

$$+\frac{\frac{1}{\Omega^2}\left({\gamma_c}^2-{\gamma_c}^2e^{-\theta_c}\right)}{{\gamma_c}^2e^{\theta_c}-{\theta_c}^2e^{\theta_c}-{\gamma_c}^2e^{-\theta_c}+{\theta_c}^2e^{-\theta_c}}e^{\theta_c\bar{x}}$$

$$+\frac{\frac{1}{\Omega^2}\left({\gamma_c}^2e^{-\theta_c}-{\gamma_c}^2\right)}{{\gamma_c}^2e^{\theta_c}-{\theta_c}^2e^{\theta_c}-{\gamma_c}^2e^{-\theta_c}+{\theta_c}^2e^{-\theta_c}}e^{-\theta_c\bar{x}}+\frac{F_2-F_1}{\Omega^2-2K} \tag{4.124}$$

İkinci olarak, doğrusal eksenel yük durumu ($F_i(\bar{x})=F_i\bar{x}$) için, Denklem (4.119)'un genel çözümü aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\bar{\bar{u}}(\bar{x})=c_1e^{\gamma_c\bar{x}}+c_2e^{-\gamma_c\bar{x}}+c_3e^{\theta_c\bar{x}}+c_4e^{-\theta_c\bar{x}}+\frac{F_2x-F_1x}{\Omega^2-2K} \tag{4.125}$$

Denklem (4.109)'da verilen sınır koşullarının, Denklem (4.125)'e uygulanmasıyla belirsiz katsayılar (c_1, c_2, c_3, c_4) aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$c_1=\frac{\frac{1}{\Omega^2}{\theta_c}^2}{{\gamma_c}^2e^{\gamma_c}-{\theta_c}^2e^{\gamma_c}-{\gamma_c}^2e^{-\gamma_c}+{\theta_c}^2e^{-\gamma_c}},$$

$$c_2=\frac{\frac{1}{\Omega^2}{\theta_c}^2}{{\gamma_c}^2e^{\gamma_c}-{\theta_c}^2e^{\gamma_c}-{\gamma_c}^2e^{-\gamma_c}+{\theta_c}^2e^{-\gamma_c}},$$

$$c_3=\frac{\frac{1}{\Omega^2}{\gamma_c}^2}{{\gamma_c}^2e^{\theta_c}-{\theta_c}^2e^{\theta_c}-{\gamma_c}^2e^{-\theta_c}+{\theta_c}^2e^{-\theta_c}},$$

$$c_4=\frac{\frac{1}{\Omega^2}{\gamma_c}^2}{{\gamma_c}^2e^{\theta_c}-{\theta_c}^2e^{\theta_c}-{\gamma_c}^2e^{-\theta_c}+{\theta_c}^2e^{-\theta_c}}. \tag{4.126}$$

Son olarak, doğrusal eksenel yük altında boyutsuz dinamik yer değiştirme aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\bar{\bar{u}}(\bar{x})=\frac{\frac{1}{\Omega^2}{\theta_c}^2}{{\gamma_c}^2e^{\gamma_c}-{\theta_c}^2e^{\gamma_c}-{\gamma_c}^2e^{-\gamma_c}+{\theta_c}^2e^{-\gamma_c}}e^{\gamma_c\bar{x}}$$

$$+\frac{\frac{1}{\Omega^2}{\theta_c}^2}{{\gamma_c}^2e^{\gamma_c}-{\theta_c}^2e^{\gamma_c}-{\gamma_c}^2e^{-\gamma_c}+{\theta_c}^2e^{-\gamma_c}}e^{-\gamma_c\bar{x}}$$

$$+\frac{\frac{1}{\Omega^2}{\gamma_c}^2}{{\gamma_c}^2e^{\theta_c}-{\theta_c}^2e^{\theta_c}-{\gamma_c}^2e^{-\theta_c}+{\theta_c}^2e^{-\theta_c}}e^{\theta_c\bar{x}}$$

$$+\frac{\frac{1}{\Omega^2}{\gamma_c}^2}{{\gamma_c}^2e^{\theta_c}-{\theta_c}^2e^{\theta_c}-{\gamma_c}^2e^{-\theta_c}+{\theta_c}^2e^{-\theta_c}}e^{-\theta_c\bar{x}}+\frac{F_2-F_1}{\Omega^2-2K}\bar{x} \tag{4.127}$$

Eğer Denklem (4.124) ve Denklem (4.127)'de uzunluk ölçek parametresi η^2=0 alınırsa, klasik elastisite teorisine ait boyutsuz dinamik yer değiştirme ifadeleri elde edilebilir.

4.6. Elastik Ortama Gömülü Nanotüplerin (Nanoelyafların) EM Teorisi ile Titreşim ve Burkulma Analizi

Bu bölümde, karbon nanotüplerin burkulma ve titreşim analizleri elastik ortam dikkate alınarak EM teorisi ile gerçekleştirilmiştir. Yapılan çalışmada, basit destekli-basit destekli (B-B), A-A ve A-B sınır koşulları dikkate alınmıştır. Özel olarak, nanotüp uzunluğunun, nanotüpe ait şiral açısının ve elastik ortam sertliği parametresinin elastik ortama gömülü nanotüplerin titreşimi ve burkulması üzerindeki etkileri araştırılmıştır. Elastik ortama gömülü bir karbon nanotüp için yönetici denklem ve olası sınır koşulları Hamilton prensibi kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\delta\left[\int_{t_0}^{t_1}(T_k - W_k - U_t)dt\right] = 0 \tag{4.128}$$

Burada kinetik enerji ve toplam iş ifadeleri Bölüm 3'te Denklemler (3.21) ve (3.26)'da ifade edilmişti. Elastik ortama gömülü bir nanotüp (nanokiriş) modeli için toplam genleme enerjisi (U_t) izleyen şekilde ifade edilmektedir:

$$U_t = U_k + U_{ke} \tag{4.129}$$

Yukarıda U_k, nanotüpe ait genleme enerjisini göstermektedir ve Denklem (3.19)'da tanımlanmıştır. Elastik ortamın genleme enerjisi (U_{ke}) ise

$$U_{ke} = \frac{1}{2}\int_0^L k_e w^2\, dx \tag{4.130}$$

şeklinde tanımlanabilir. Böylece, Denklem (4.128)'deki varyasyonel işlemler yapılarak elastik ortama gömülü bir nanotüp için yönetici denklem en genel halde aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$EI\left[\frac{\eta^2}{12}w^{VI}(x) + w^{IV}(x)\right] + k_e w + Pw'' + \rho A\ddot{w} = 0 \tag{4.131}$$

Genel sınır koşullarını veren ifadeler ise Denklem (3.30)'daki gibi ortaya çıkmaktadır. (B), (A) ve (S) sınır koşulları boyutsuz bir biçimde ($\overline{w} = w/L$ and $\bar{x} = x/L$) izleyen şekilde ifade edilebilir:

B: $\overline{w}(x) = 0$,

$M = \left(\bar{w}''(\bar{x}) + \beta^2 \bar{w}^{IV}(\bar{x})\right) = 0,$

$\bar{w}(\bar{x})'' = 0 \quad \bar{x}$=0,1.

A: $\bar{w}(\bar{x}) = 0,$

$\bar{w}'(\bar{x}) = 0,$

$\bar{w}(\bar{x})'' = 0 \quad \bar{x}$=0,1.

S: $M = \left(\bar{w}''(\bar{x}) + \beta^2 \bar{w}^{IV}(\bar{x})\right) = 0,$

$V = \left(\bar{w}'''(\bar{x}) + \beta^2 \bar{w}^{V}(\bar{x})\right) = 0,$

$\bar{w}(\bar{x})'' = 0 \quad \bar{x}$=0,1. (4.132)

Buna göre, elastik ortama gömülü bir L uzunluğuna sahip (B-B) nanotüpün doğal titreşiminin analitik çözümü gerçekleştirilebilir. Nanotüp için yönetici denklem, Denklem (4.131)'de elde edilmiştir ve düzlem içi bir yük olmadan (P = 0) yeniden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$EI\frac{\eta^2}{12}w^{VI} + EIw^{IV} + \rho A\ddot{w} + k_e w = 0 \quad (4.133)$$

Denklem (4.133)'ün çözümü aşağıdaki gibi varsayılabilir:

$$w(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\omega t \quad (4.134)$$

Burada w_m nanotüpün orta düzleminin enine yer değiştirmesini göstermektedir. Denklem (4.134) ile Denklem (4.133) kullanılarak nanotüpe ait boyutsuz frekans parametresi aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\Omega = \sqrt{\gamma^4 - \beta^2\gamma^6 + K} \quad (4.135)$$

Yukarıdaki boyutsuz parametreler

$$\Omega = \sqrt{\frac{\rho A\omega^2 L^4}{EI}}, \qquad \gamma = n\pi, \qquad K = \frac{k_e L^4}{EI}. \quad (4.136)$$

olacak şekilde tanımlanmıştır. Denklem (4.135)'te görüldüğü gibi uzunluk ölçek parametresi titreşim frekansını azaltmaktadır. Denklem (4.135)'te K=0 olması durumunda boyutsuz frekans parametresi $n_{kritik} > 12L/\eta\pi$ olacak şekilde bir kritik mod sayısında (n_{kritik}) sınırlanmaktadır. EM teorisi için bu kritik mod sayısı üstünde titreşim gerçekleşmez. Buna karşılık, klasik elastisite teorisi için ($\beta = 0$) sonsuz sayıda frekans bulunduğu gözlenmektedir. Ayrıca, elastik ortam parametresi, hem EM teorisi hem de klasik elastisite modelinde titreşim frekansını arttırmaktadır.

Denklem (4.131), düzlemsel bir P kuvvetinin etkisi altında titreşim atalet terimi ihmal edilerek aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{\eta^2}{12} EIw^{VI} + EIw^{IV} + Pw'' + k_e w = 0 \tag{4.137}$$

Denklem (4.137)'nin çözümü, B-B sınır koşulu için aşağıdaki gibi varsayılabilir:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} w_m \, sin \frac{n\pi x}{L} \tag{4.138}$$

Denklem (4.138), Denklem (4.137)'de yerine yazılıp boyutsuzlaştırma işlemi yapılırsa nanotüpe ait kritik burkulma yükü parametresi ($\bar{P}$) aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\bar{P} = \gamma^2 - \beta^2\gamma^4 + \frac{K}{\gamma^2} \tag{4.139}$$

Burada boyutsuz burkulma yükü aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\bar{P} = \frac{PL^2}{EI} \tag{4.140}$$

Denklem (4.139)'da β=0 alınarak, klasik elastisite çözümüne ait kritik burkulma yükleri bulunabilir. Denklem (4.139)'da görüldüğü gibi, EM teorisi klasik elastisite teorisine göre daha küçük kritik burkulma değerleri vermektedir. Bu da, EM teorisinde, katıların ayrık yapısının dikkate alınmasının nano yapıyı daha yumuşak hale getirdiğini göstermektedir. Buna ek olarak, elastik ortam parametresi de beklendiği gibi kritik burkulma yükü değerini arttırmaktadır.

Bu bölümde ayrıca, elastik ortama gömülü nanotüplerin titreşim ve burkulma analizleri farklı sınır koşulları için de gerçekleştirilmiştir. Düzlemsel bir P kuvvetinin etkisi altında elastik ortama gömülü nanotüpün denklemi boyutsuz şekilde aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\beta^2\bar{w}^{VI} + \bar{w}^{IV} + \bar{P}\bar{w}'' + (K - \Omega^2)\bar{w} = 0 \tag{4.141}$$

Denklem (4.141)'in genel çözümü titreşim için (P = 0) aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\bar{w}(x) = D_1 \, cosh\sqrt{a_1}x + D_2 sinh\sqrt{a_1}x + e^{c_3 x}[D_3 sind_3 x + D_4 cosd_3 x] + e^{c_5 x}[D_5 sind_5 x + D_6 cosd_5 x] \tag{4.142}$$

Burada, D_i (i=1,..6) belirsiz katsayıları göstermektedir. a_1, c_3, c_5, d_3, d_5 parametreleri ise aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$a_1 = \left[f_1 - \frac{1}{3\beta^2} + \frac{\frac{1}{9\beta^4} - \frac{\bar{P}}{3\beta^2}}{f_1} \right], \tag{4.143a}$$

$$f_1 = \left(\frac{\bar{P}}{6\beta^4} - \frac{K}{2\beta^2} + \sqrt{\frac{K}{27\beta^8} + \frac{\Omega^4}{4\beta^4} - \frac{\Omega^2}{27\beta^8} + \frac{K^2}{4\beta^4} + \frac{\bar{P}^3}{27\beta^6} - \frac{\bar{P}^2}{108\beta^8} - \frac{\Omega^2 K}{2\beta^4} + - \frac{\Omega^2 \bar{P}}{6\beta^6} - - \frac{K\bar{P}}{6\beta^6}} - \frac{1}{27\beta^6} + \frac{\Omega^2}{2\beta^2} \right)^{1/3}, \tag{4.143b}$$

$$c_3 = \sqrt{\frac{a_3}{2} + \frac{\sqrt{(a_3)^2 + (b_3)^2}}{2}}, \tag{4.143c}$$

$$c_5 = -\sqrt{\frac{a_3}{2} + \frac{\sqrt{(a_3)^2 + (b_3)^2}}{2}}, \tag{4.143d}$$

$$a_3 = -\frac{f_1}{2} - \frac{1}{3\beta^2} - \frac{\frac{1}{9\beta^4} - \frac{\bar{P}}{3\beta^2}}{2f_1}, \tag{4.143e}$$

$$d_3 = \frac{b_3}{2c_3}, \quad d_5 = \frac{b_5}{2c_5}, \tag{4.143f}$$

$$b_3 = -\frac{\sqrt{3}\left(f_1 - \frac{\frac{1}{9\beta^4} - \frac{\bar{P}}{3\beta^2}}{f_1} \right)}{2}, \tag{4.143g}$$

$$b_5 = \frac{\sqrt{3}\left(f_1 - \frac{\frac{1}{9\beta^4} - \frac{\bar{P}}{3\beta^2}}{f_1} \right)}{2}. \tag{4.143h}$$

Burada, Denklem (4.142)'nin çözümünü elde etmek için $\sqrt{c_3 + d_3 i} = a_3 + b_3 i$ ve $\sqrt{c_5 + d_5 i} = a_3 + b_5 i$ dönüşümleri uygulanmıştır. Buna göre Denklem (4.132)'deki sınır koşulları ifadeleri kullanılarak, Denklem (4.141)'in genel çözümü, altı bilinmeyenli homojen altı denklem sistemi olacak şekilde elde edilir. Bu homojen denklem sisteminin

aşikar olmayan çözümü, katsayılar matrisinin determinantının sıfıra eşitlenmesi ile bulunabilir. B-B sınır koşulu için katsayılar matrisinin determinantı aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.144)$$

Denklem (4.144)'te verilen determinantın terimleri Ek-1'de gösterilmiş ve B-B sınır şartı için de çözüm yine Ek-1'de ifade edilmiştir. Ayrıca, diğer sınır koşulları için (A-A), (A-B) çözümler de Ek-1'de elde edilmiştir. Burada, $\bar{P} = 0$ alınarak titreşim frekansı parametrelerinin elde edildiği not edilmelidir. Denklem (4.144)'ün çözümü altıncı dereceden bir karakteristik denklem vermektedir. Bu denklem de, literatürde Soldatos ve Sophocleous (2001) tarafından tarif edilen bir yöntem kullanılarak çözülmüştür.

Burkulma problemi için (Denklem (4.141)'de $\Omega^2 = 0$ alınarak), Denklem (4.141)'in genel çözümü aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\bar{w}(x) = D_1 cos\sqrt{h_1}x + D_2 sin\sqrt{h_1}x + e^{c_2 x}[D_3 sinh_2 x + D_4 cosh_2 x] + e^{c_4 x}[D_5 sinh_3 x + D_6 cosh_3 x]. \qquad (4.145)$$

Denklem (4.145)'te açık bir şekilde, titreşim çözümünden farklı olarak, burkulma problemi için elde edilen çözümdeki tüm terimlerin trigonometrik olduğu görülmektedir. Denklem (4.145)'teki terimler ise aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$h_1 = \left[\frac{1}{3\beta^2} - \frac{\frac{1}{9\beta^4} - \frac{\bar{P}}{3\beta^2}}{f_2} - f_2\right], \qquad (4.146a)$$

$$f_2 = \left(\frac{\bar{P}}{6\beta^4} - \frac{K}{2\beta^2} + -\frac{1}{27\beta^6} + \sqrt{\frac{K}{27\beta^8} + \frac{K^2}{4\beta^4} + \frac{\bar{P}^3}{27\beta^6} - \frac{\bar{P}^2}{108\beta^8} - \frac{K\bar{P}}{6\beta^6}}\right)^{1/3}, \qquad (4.146b)$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{v_2}{2} + \frac{\sqrt{(v_2)^2 + (a_2)^2}}{2}}, \qquad (4.146c)$$

$$c_4 = -\sqrt{\frac{v_2}{2} + \frac{\sqrt{(v_2)^2 + (a_2)^2}}{2}}, \qquad (4.146d)$$

$$v_2 = -\frac{f_2}{2} - \frac{1}{3\beta^2} - \frac{\frac{1}{9\beta^4} - \frac{\bar{P}}{3\beta^2}}{2f_2}, \tag{4.146e}$$

$$h_2 = \frac{a_2}{2c_2}, \quad h_3 = \frac{a_4}{2c_4}, \tag{4.146f}$$

$$a_2 = -\frac{\sqrt{3}\left(-f_2 + \frac{\frac{1}{9\beta^4} - \frac{\bar{P}}{3\beta^2}}{f_2}\right)}{2}, \tag{4.146g}$$

$$a_4 = \frac{\sqrt{3}\left(-f_2 + \frac{\frac{1}{9\beta^4} - \frac{\bar{P}}{3\beta^2}}{f_2}\right)}{2}. \tag{4.146h}$$

Denklem (4.145)'in çözümünde $\sqrt{c_2 + h_2 i} = v_2 + a_2 i$ ve $\sqrt{c_4 + h_3 i} = v_2 + a_4 i$ dönüşümleri uygulanmıştır. Böylece, Denklemler (4.131) ve (4.145) kullanılarak, elastik ortama gömülü bir nanotüpün kritik burkulma yükleri hesaplanabilir ve B-B, A-A ve A-B sınır koşulları için verilen çözümler Ek-2'de verilmiştir. (E.1.1), (E.2.8) ve (E.2.15) determinantlarının çözümleri, verilen sınır koşulları için elastik ortama gömülü nanotüpün kritik burkulma yükü değerlerini vermektedir.

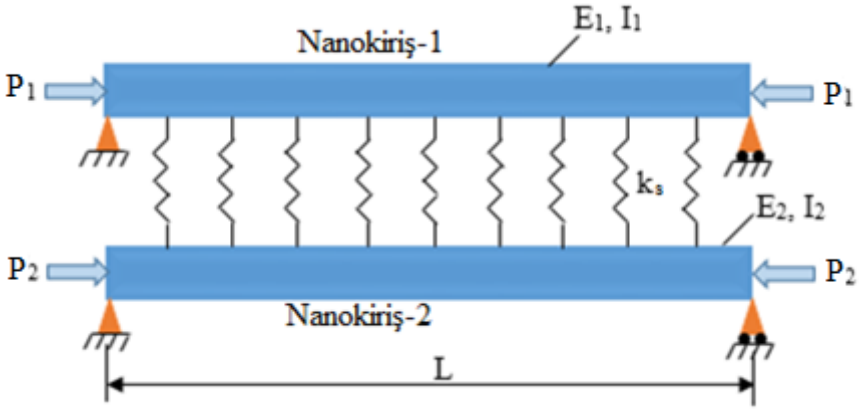
4.7. Elastik Ortama Gömülü Çiftli Nanokirişlerin (Nanoelyafların) EM Teorisi ile Burkulma Analizi

Bu bölümde, elastik ortama gömülü çiftli nano elyafların burkulma analizleri Euler-Bernoulli kiriş modeli ile gerçekleştirilmiştir. Çiftli nanokirişlerin modellenmesi EM teorisi çerçevesinde gerçekleştirilmiştir.

En önemli nano yapılardan biri olan çiftli nanokirişler, sensörler, transistörler, aktüatörler ve rezonatörler gibi nano-elektro-mekanik sistemlerde (NEMS) kullanılmaktadır (Deotare, McCutcheon, Frank, Khan, & Lončar, 2009). Çiftli nanokirişlerin statik ve dinamik analizleri, bu nano yapıların mekanik davranışlarını doğru bir şekilde tahmin etmek için oldukça önemlidir. Önceki çalışmaların bazılarında makro ölçekli çiftli nanokirişlerin mekanik analizleri yapılmıştır. Oniszczuk (2000), iki kiriş arasındaki enine yaylardan oluşan basit destekli bir çiftli kiriş sisteminin titreşimini araştırmıştır. Ayrıca, literatürde makro ölçekli çiftli kiriş sistemlerinin mekanik

davranışları ile ilgili bazı çalışmalar bulunmaktadır (Seelig & Hoppmann, 1963; Vu, Ordonez, & Karnopp, 2000; Y. Zhang, Lu, Wang, & Liu, 2008). Bu çalışmalara ek olarak, nano ölçekli çiftli kiriş sistemleri analiz etmek için ölçeğe bağlı teoriler de kullanılmıştır. Çiftli nanokiriş sistemleri, bir elastik ortam (yani elektrostatik kuvvet, Van der Waals kuvveti) ile birbirine bağlanan iki nanokiriş ile modellenebilir. Buna göre, bir çiftli nanokiriş sisteminin burkulması üzerine yapılan ilk çalışmalardan biri Murmu ve Adhikari (2011) tarafından incelenmiştir. Yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak yapılan burkulma çözümleri, çiftli nanokiriş sistemlerinin eş-fazlı ve zıt-fazlı modları için sunulmuştur. D.-H. Wang ve Wang (2011), yüzey etkilerini de dikkate alarak, çiftli nanokiriş sisteminin titreşim ve burkulma analizlerini yapmışlardır. Başka bir çalışmada, Karličić, Murmu, Cajić, Kozić, ve Adhikari (2014), yerel olmayan visko-elastisite teorisi çerçevesinde manyetik alanı dikkate alarak, çoklu karbon nanotüp sistemlerinin titreşimini incelemişlerdir. Doğrulama için, bu makaleden elde edilen sonuçlar, trigonometrik ve sayısal yöntemlerle karşılaştırılmıştır. Çoklu nanokiriş sistemlerin burkulması ve titreşimi, eksenel yük etkisi altında B-B sınır koşulları için araştırılmıştır (Karličić vd., 2016). Son zamanlarda, Rahmani, Hosseini, ve Parhizkari (2017), yerel olmayan elastisite teorisi kullanarak, fonksiyonel olarak derecelendirilmiş çiftli nanokiriş sistemlerinin burkulması için analitik bir çözüm geliştirmişlerdir. Çoklu nanokiriş sistemleri için yapılan diğer deneysel ve teorik çalışmalar (Karabalin, Cross, & Roukes, 2009; Murmu & Adhikari, 2010b; Pavlović vd., 2016)'de görülebilir.

Bu çalışmada, Şekil 4.6'da gösterildiği gibi eksenel düzlem içi yükler altında bir çiftli nanokiriş sistemi ele alınmıştır. İki nanokiriş yaylarla birbirine tutturulmuştur. Yaylar, iki nanokiriş arasındaki elastik ortamı göstermek için kullanılabilir. Yayların sertliği (k_s), çiftli nanokiriş sisteminde Winkler sabitini temsil etmektedir. B-B sınır koşulları göz önünde bulundurulmuş ve modelde yer alan iki nanokirişin uzunluğu L'dir.



Şekil 4.6. Çiftli nanokiriş sistemi.

Buna göre zigzag nanotüp modeline göre Denklem (4.26) kullanılarak çiftli nanokiriş sistemine ait burkulma denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E_1 I_1 w_1^{IV}(x) + k_s[w_1(x) - w_2(x)] + P_1 w_1''(x) + E_1 I_1 \frac{\eta^2}{12} w_1^{VI}(x) = 0,$$

$$E_2 I_2 w_2^{IV}(x) - k_s[w_1(x) - w_2(x)] + cN_1 w_2''(x) + E_2 I_2 \frac{\eta^2}{12} w_2^{VI}(x) = 0. \qquad (4.147)$$

Burada, $w_1(x)$ ve $w_2(x)$ sırasıyla, birinci ve ikinci nanokirişin enine yer değiştirmelerini ve c ise iki nanokiriş arasındaki burkulma yükü ilişkisini göstermektedir ve $N_2 = cN_1$'dir. Denklem (4.147) ise boyutsuz şekilde aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\bar{w}_1^{IV}(\bar{x}) + K[\bar{w}_1(\bar{x}) - \bar{w}_2(\bar{x})] + \bar{P}\bar{w}_1''(\bar{x}) + \beta_1^2 \bar{w}_1^{VI}(\bar{x}) = 0,$$

$$\bar{w}_2^{IV}(\bar{x}) - KE_r I_r[\bar{w}_1(\bar{x}) - \bar{w}_2(\bar{x})] + cE_r I_r \bar{P}\bar{w}_2''(\bar{x}) + \beta_2^2 \bar{w}_2^{VI}(\bar{x}) = 0. \qquad (4.148)$$

Yukarıdaki denklemdeki boyutsuz parametreler ise

$$K = \frac{k_s L^4}{E_1 I_1}, \bar{P} = \frac{P_1 L^2}{E_1 I_1}, E_r = \frac{E_1}{E_2}, I_r = \frac{I_1}{I_2}, \beta_i^2 = \frac{\eta_i^2}{12L^2} \ (i = 1,2), \bar{x} = \frac{x}{L}. \qquad (4.149)$$

olarak tanımlanmaktadır. B-B sınır şartı için Denklem (4.148)'in çözümü aşağıdaki gibi varsayılabilir:

$$W(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sin\alpha\bar{x}, \qquad \alpha = n\pi, \qquad j = 1,2. \qquad (4.150)$$

Burada, a_j j. nanotüpün genliğini, n ise yarı dalga sayısını temsil etmektedir. Denklem (4.150), Denklem (4.148)'de yerine yazılırsa, özdeğer denklemi izleyen şekilde bulunabilir:

$$\begin{bmatrix} \alpha^4 + K - \bar{P}\alpha^2 - \beta_1^2\alpha^6 & -K \\ -KE_r I_r & \alpha^4 + KE_r I_r - cE_r I_r \bar{P}\alpha^2 - \beta_2^2\alpha^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (4.151)$$

Aşikar olmayan çözüm için, Denklem (4.151)'de verilen katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşitlenmelidir. Böylece, karakteristik denklem

$$\bar{P}^2 Z_1 + \bar{P}(Z_2 + Z_3 + Z_4) + Z_5 + Z_6 + Z_7 = 0 \tag{4.152}$$

olacak şekilde elde edilebilir. Yukarıdaki denklemdeki katsayılar aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$Z_1 = E_r I_r \alpha^4 c,$$
$$Z_2 = -\alpha^6 + \alpha^8 \beta_2^2,$$
$$Z_3 = -E_r I_r \alpha^6 c - E_r I_r K \alpha^2,$$
$$Z_4 = -E_r I_r K \alpha^2 c + E_r I_r \alpha^8 c \beta_1^2,$$
$$Z_5 = K\alpha^4 + \alpha^8 - \alpha^{10}\beta_1^2 - \alpha^{10}\beta_2^2,$$
$$Z_6 = -K\alpha^6 \beta_2^2 + \alpha^{12}\beta_1^2 \beta_2^2,$$
$$Z_7 = E_r I_r K \alpha^4 - E_r I_r K \alpha^6 \beta_1^2. \tag{4.153}$$

Buna göre, Denklem (4.152)'nin çözümü çiftli nanokiriş sisteminin kritik burkulma yükü değerlerini vermektedir:

$$\bar{P}_{1,2} = \frac{-(Z_2 + Z_3 + Z_4) \pm \sqrt{(Z_2 + Z_3 + Z_4)^2 - 4Z_1(Z_5 + Z_6 + Z_7)}}{2Z_1} \tag{4.154}$$

Denklem (4.154)'deki çözümde görüldüğü gibi, çiftli nanokiriş sisteminde iki adet kritik burkulma yükü değeri bulunur. Düşük kritik burkulma yükü, sistem için kritik burkulma yüküdür. Bu nedenle, Denklem (4.154)'ün en küçük kökü bu çalışmada dikkate alınacaktır. Denklem (4.152)'de $\beta_i^2 = 0$ alındığında klasik elastisite teorisi için kritik burkulma yükü değerleri elde edilebilir ve EM teorisi, klasik elastisite modeline kıyasla daha düşük burkulma yükleri vermektedir. Ayrıca, bulunan kritik burkulma yükü değerleri, Denklem (4.151)'de yerine yazılırsa, nanokirişlere ait genlik oranları aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\alpha^4 + KE_r I_r - cE_r I_r \bar{P}\alpha^2 - \beta_2^2 \alpha^6}{KE_r I_r} \tag{4.155}$$

Denklem (4.155)'e göre, genlik oranları a_1/a_2 pozitif veya negatif olabilir. Pozitif genlik oranı, iki nanokirişin aynı yönde burkulduğunu ifade ederken, negatif genlik oranı ise iki nanokirişin zıt yönlerde burkulduğunu göstermektedir. Bu davranış, çiftli nanokiriş sistemlerinin bazı özelliklerini değiştirebilir.

4.8. Elastik Ortama Gömülü Çift Duvarlı Karbon Nanotüplerin EM Teorisi ile Eş Eksenli Olmayan Titreşim ve Burkulma Analizi

Bu bölümde, B-B sınır koşullarına sahip elastik bir ortama gömülü çift duvarlı karbon nanotüplerin serbest titreşimi ve burkulması incelenmiştir. Analizde, EM teorisi kullanılmıştır ve karbon nanotüpler Euler-Bernoulli kiriş modeli olacak şekilde modellenmiştir.

Çok duvarlı nanotüplerin titreşimi ilk olarak Ru (2002) tarafından klasik kiriş teorileri kullanılarak araştırılmıştır. Bu çalışmada, nanotüplere ait doğal frekanslar ve eş eksenli olmayan titreşim modları elde edilmiştir. Yoon, Ru, ve Mioduchowski (2003), elastik ortama gömülü çok duvarlı karbon nanotüplerin titreşimini çoklu elastik kiriş modeli kullanarak araştırmışlardır. Özellikle, elastik ortamın nanotüplerin titreşimi üzerindeki etkisine odaklanmışlardır. Tek ve çift duvarlı karbon nanotüplerin titreşimi ise C. Li ve Chou (2004) tarafından çalışılmıştır. Bir başka çalışmada ise, elastik ortama gömülü çok duvarlı karbon nanotüplerin titreşimi, R. Li ve Kardomateas (2007) tarafından yerel olmayan bir kabuk modeli kullanılarak incelenmiştir. Cinefra, Carrera, ve Brischetto (2011) ise Carrera'nın birleşik formülasyonunu kullanarak çok duvarlı nanotüplerin titreşim analizini araştırmışlardır. Pourasghar ve Kamarian (2013), bir elastik zemin üzerindeki fonksiyonel derecelendirilmiş çok duvarlı nanotüpün titreşim analizini üç boyutlu çözüm kullanarak gerçekleştirmişlerdir. Bunlara ek olarak, (Adali, 2009; Ansari, Hemmatnezhad, & Ramezannezhad, 2010; Kitipornchai, He, & Liew, 2005; Ru, 2001; BL Wang & Wang, 2013) yerel olmayan modellere dayanan çok duvarlı nanotüplerin titreşimi ve burkulması ile ilgili bazı teorik ve deneysel çalışmalar bulunmaktadır.

N tane iç içe geçmiş çok duvarlı bir karbon nanotüp ele alalım. Bu iç içe geçmiş karbon nanotüpler Şekil (4.7)'de gösterildiği gibi elastik bir ortama gömülüdür. İç içe geçmiş karbon nanotüplerin her biri Van der Waals etkileşimi ile birleştirilmektedir. *N* tane iç içe geçmiş karbon nanotüplerin enine titreşimi, EM teorisi çerçevesinde aşağıdaki gibi *N* adet birleşik denklemlerle ifade edilir:

$$c_1(w_2 - w_1) = EI_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + \frac{\eta^2}{12} EI_1 \frac{\partial^6 w_1}{\partial x^6} + \rho A_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - N_e \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2},$$

$$c_2(w_3 - w_2) - c_1(w_2 - w_1)$$
$$= EI_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + \frac{\eta^2}{12} EI_2 \frac{\partial^6 w_2}{\partial x^6} + \rho A_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - N_e \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + k_e w_2,$$

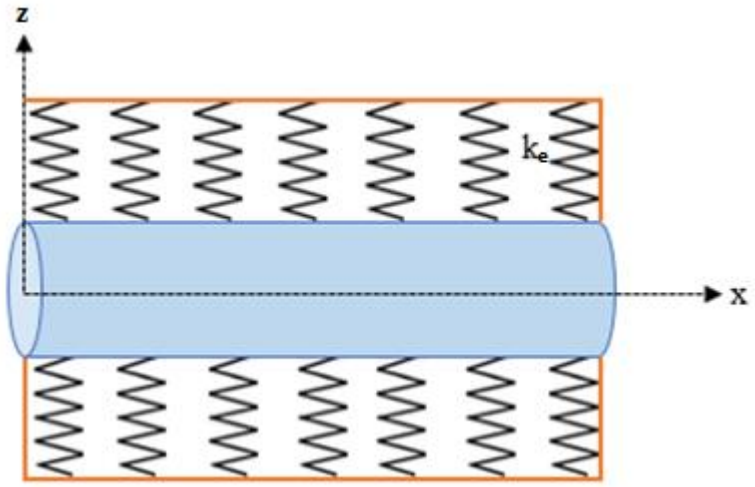
……

$$-c_{(N-1)}(w_N - w_{N-1})$$
$$= EI_N \frac{\partial^4 w_N}{\partial x^4} + \frac{\eta^2}{12} EI_N \frac{\partial^6 w_N}{\partial x^6} + \rho A_N \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - N_e \frac{\partial^2 w_N}{\partial x^2} + k_e w_N. \quad (4.156)$$

burada w_j (j = 1,2,…, N), j. nanotüpün çökmesini, A_j ve I_j sırasıyla, j. nanotüpün kesit alanı ve atalet momentini göstermektedir. Alt simge "$_N$", nanotüp miktarlarını ifade etmektedir. C_j tüpler arası etkileşim katsayılarıdır. N_e, tüpler arasındaki Van der Waals etkileşimine bağlı eksenel kuvveti göstermektedir. Komşu tüpler arasındaki Van der Waals etkileşim katsayısı aşağıdaki gibi tanımlanabilir (Ru, 2002):

$$c = \frac{320 \times (2R_j) erg/cm^2}{0.16 d^2}, \quad d = 0.1421nm, \quad j = 1,2,...,N-1. \quad (4.157)$$

Burada R_j, j. nanotüpün yarıçapıdır. Bu çalışmada, elastik ortama gömülü bir çift duvarlı karbon nanotüpün (Şekil 4.7) titreşimi ve burkulması incelenmiştir.



Şekil 4.7. Elastik ortama gömülü çift duvarlı karbon nanotüp.

Elastik ortama gömülü bir Çift Duvarlı Karbon Nanotüpün (ÇDKNT) hareket denklemleri Denklem (4.156)'da N = 2 alınarak aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$c_1(w_2 - w_1) = EI_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + \frac{\eta^2}{12} EI_1 \frac{\partial^6 w_1}{\partial x^6} + \rho A_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - N_e \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2},$$

$$-c_1(w_2 - w_1) = EI_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + \frac{\eta^2}{12} EI_2 \frac{\partial^6 w_2}{\partial x^6} + \rho A_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - N_e \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + k_e w_2. \quad (4.158)$$

Denklem (4.158) aşağıdaki gibi boyutsuz biçimde ifade edilebilir:

$$\bar{c}_1(\bar{w}_2 - \bar{w}_1) = \bar{w}_1{}^{IV} + \beta^2 \bar{w}_1{}^{VI} - f_n^2 \bar{w}_1 - \bar{P}\bar{w}_1{}^{II},$$
$$-\bar{c}_1(\bar{w}_2 - \bar{w}_1) = \bar{w}_2{}^{IV} + \beta^2 \bar{w}_2{}^{VI} - f_n^2 \bar{R}\bar{w}_2 - \bar{P}\bar{R}\bar{w}_2{}^{II} + K\bar{Z}\bar{w}_2. \quad (4.159)$$

Yukarıdaki boyutsuz terimler

$$\bar{c}_1 = \frac{c_1 L^4}{EI_1}, \quad \beta^2 = \frac{\eta^2}{12L^2}, \quad f_n^2 = \frac{\rho A_1 \omega^2 L^4}{EI_1}, \quad \bar{R} = \frac{A_2 I_1}{A_1 I_2}, \quad \bar{P} = \frac{N_e L^2}{EI_1},$$
$$\bar{Z} = \frac{I_1}{I_2}, \quad K = \frac{k_e L^4}{EI_2}, \quad \bar{w}_1 = \frac{w_1}{L}, \quad \bar{w}_2 = \frac{w_2}{L}. \quad (4.160)$$

olacak şekilde tanımlanmaktadır. Burada, f_n boyutsuz frekans parametresini ve K ise boyutsuz elastik ortam parametresini göstermektedir. Denklem (4.132)'de verilen sınır koşulları kullanılarak, nanotüplerin farklı sınır koşullarındaki titreşim analizini yapmak mümkündür. Ancak, Denklem (4.159)'da verilen yönetici denklemlerin genel çözümünün elde edilmesi için ayrıntılı hesaplamalara ihtiyaç duyulmaktadır. Bu nedenle, mevcut problem için bazı başlangıç seviyesinde kıyaslama sonuçları vermek için, tüm nanotüplerin B-B sınır koşullarındaki titreşim analizi gerçekleştirilecektir. Harmonik titreşim varsayımı yapılarak, $w_i(x,t)$ aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$w_i(x,t) = a_i \sin(n\pi x)\, sin\omega t \qquad i = 1,2,3,\ldots N \quad (4.161)$$

a_i, N. nanotüpün titreşim genliğini göstermektedir. Eğer, Denklem (4.161), Denklem (4.159)'da yerine yazılırsa, özdeğer denklemi aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\begin{bmatrix} n^4\pi^4 - \beta^2 n^6\pi^6 - f_n^2 + \bar{P}n^2\pi^2 + \bar{c}_1 & -\bar{c}_1 \\ -\bar{c}_1\bar{Z} & n^4\pi^4 - \beta^2 n^6\pi^6 - f_n^2\bar{R} + \bar{P}\bar{R}n^2\pi^2 + \bar{c}_1\bar{Z} + K\bar{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.162)$$

Denklem (4.162)'de verilen katsayılar matrisinin determinantı aşağıdaki karakteristik denklemi verir:

$$Y_1 f_k^4 - (Y_2 Y_3 + Y_4 + Y_5) f_k^2 + (Y_6 + Y_7 + Y_8 Y_3 + Y_9 + Y_{10} + Y_{11}) = 0 \quad (4.163)$$

Yukarıdaki denklemdeki katsayılar aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$Y_1 = \bar{R},$$
$$Y_2 = n^4\pi^4 - \beta^2 n^6\pi^6 + \bar{c}_1,$$
$$Y_3 = \bar{R} + 1,$$
$$Y_4 = \bar{P}n\pi\bar{R}(n\pi + 1),$$
$$Y_5 = K\bar{Z},$$
$$Y_6 = n^8\pi^8,$$
$$Y_7 = -2\beta^2 n^{10}\pi^{10} + \bar{P}\bar{R}n^6\pi^6 + 2\bar{c}_1 n^4\pi^4 + K\bar{Z}n^4\pi^4 + \beta^2 n^{12}\pi^{12},$$

$$Y_8 = -\bar{P}\beta^2 n^8 \pi^8,$$
$$Y_9 = -2\beta^2 n^6 \pi^6 \bar{c}_1 - \beta^2 n^6 \pi^6 K\bar{Z} + \bar{P}^2 \bar{R} n^4 \pi^4,$$
$$Y_{10} = (\bar{P} n^2 \pi^2 \bar{c}_1) H_3 \,,$$
$$Y_{11} = \bar{P} n^2 \pi^2 K\bar{Z} + \bar{c}_1 K\bar{Z} \,. \qquad (4.164)$$

Buna göre, Denklem (4.163)'ün çözümü aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$f_{1n}^2 = \frac{Y_2 Y_3 + Y_4 + Y_5 - \sqrt{(Y_2 Y_3 + Y_4 + Y_5)^2 - 4Y_1(Y_6 + Y_7 + Y_8 Y_3 + Y_9 + Y_{10} + Y_{11})}}{2Y_1} \quad (4.165a)$$

$$f_{2n}^2 = \frac{Y_2 Y_3 + Y_4 + Y_5 + \sqrt{(Y_2 Y_3 + Y_4 + Y_5)^2 - 4Y_1(Y_6 + Y_7 + Y_8 Y_3 + Y_9 + Y_{10} + Y_{11})}}{2Y_1} \quad (4.165b)$$

Denklem (4.165)'te görüldüğü gibi tek bir yarı dalga sayısında iki adet titreşim frekansı (f_{1n}, f_{2n}) elde edilmektedir. Benzer gözlemler, Yoon vd. (2003) tarafından da elde edilmiştir ve elde edilen iki frekans kümesi, daha düşük ve daha yüksek mertebe olarak adlandırılmıştır. Buna göre, Denklem (4.165)'te $\bar{P} = 0$ alınarak, elastik ortama gömülü ÇDKNT'de, sırasıyla *n*. mertebe düşük, f_{1n} ve yüksek, f_{2n} frekans değerleri elde edilebilir. Ayrıca, elde edilen boyutsuz frekans parametreleri Denklem (4.162)'de yerine yazılırsa, nanotüplere ait titreşim genliği oranları izleyen şekilde ifade edilir:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\bar{c}_1}{n^4\pi^4 - \beta^2 n^6 \pi^6 - f_n^2 \bar{R} + \bar{P}\bar{R} n^2 \pi^2 + \bar{c}_1 + K\bar{Z}} \qquad (4.166)$$

Denklem (4.166)'ya göre, genlik oranı a_2/a_1 içteki ve dıştaki nanotüplerin hareket yönlerine bağlı olarak pozitif veya negatif çıkabilir. Pozitif genlik oranı tüplerin eş fazlı hareketini belirtirken, negatif oran tüplerin zıt fazlı hareketini belirtir. Başka bir deyişle, zıt fazlı durumda, nanotüp duvarları eş eksenli olmayan hareket halindedir. Bu da karbon nanotüplerin bazı mekanik davranışlarını değiştirebilir.

Denklem (4.162) ve Denklem (4.166)'da titreşim terimleri göz ardı edilerek ($f_n = 0$), ÇDKNT'lerde kritik burkulma yükleri ve mod şekilleri elde edilebilir. Burkulma durumu için, Denklem (4.162)'de verilen katsayılar matrisinin determinantı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$S_1 \bar{P}^2 + (S_2 + S_3 + S_4 + S_5)\bar{P} + (S_6 + S_7 + S_8) = 0 \qquad (4.167)$$

Denklem (4.167)'deki katsayılar aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$S_1 = n^4 \pi^4 \bar{R},$$
$$S_2 = n^6 \pi^6 (1 + \bar{R}),$$
$$S_3 = n^2 \pi^2 c_1 (1 + \bar{R}),$$

$$S_4 = -n^8\pi^8\beta^2(1+\bar{R}),$$
$$S_5 = n^2\pi^2 K\bar{Z},$$
$$S_6 = 2n^2\pi^2 c_1 + n^8\pi^8 - 2n^{10}\pi^{10}\beta^2,$$
$$S_7 = n^{12}\pi^{12}\beta^4 + n^4\pi^4 K\bar{Z} - 2n^6\pi^6\beta^2 c_1,$$
$$S_8 = K\bar{Z}c_1 - n^6\pi^6 K\bar{Z}\beta^2. \quad (4.168)$$

Böylece, Denklem (4.167)'nin çözümü aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\bar{P}_{1n} = \frac{-(S_2+S_3+S_4+S_5) - \sqrt{(S_2+S_3+S_4+S_5)^2 - 4S_1(S_6+S_7+S_8)}}{2S_1} \quad (4.169a)$$

$$\bar{P}_{2n} = \frac{-(S_2+S_3+S_4+S_5) + \sqrt{(S_2+S_3+S_4+S_5)^2 - 4S_1(S_6+S_7+S_8)}}{2S_1} \quad (4.169b)$$

Burada, $\bar{P}_{1n}$ ve $\bar{P}_{2n}$ sırasıyla *n*. mertebeden küçük ve büyük kritik burkulma yükü değerlerini vermektedir. Burada elde edilen en küçük kök ($\bar{P}_{1n}$) ÇDKNT'lerde kritik burkulma yükü olarak adlandırılır. Denklem (4.169a)'da elde edilen kritik burkulma yükleri, Denklem (4.167)'de yerine yazılırsa, burkulma durumu için tüplere ait genlik oranı aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\bar{c}_1}{n^4\pi^4 - \beta^2 n^6\pi^6 + \bar{P}\bar{R}n^2\pi^2 + \bar{c}_1 + K\bar{Z}} \quad (4.170)$$

Titreşim durumuna benzer şekilde, burkulma durumu için de genlik oranı pozitif veya negatif olabilir.

4.9. Çift Duvarlı Karbon Nanotüplerin EM Teorisi ile Dalga Yayınım Analizi

Bu bölümde, elastik bir ortama gömülü çift duvarlı karbon nanotüplerde enine ve eksenel yönde dalga yayınımı ve tek duvarlı karbon nanotüplerde eksenel dalga yayınımı EM teorisi çerçevesinde araştırılmıştır. Elastik ortama gömülü tek duvarlı ve çift duvarlı karbon nanotüplerin dalga yayınım analizi Natsuki, Hayashi, ve Endo (2005) tarafından çalışılmıştır. P. Liu, Gao, ve Zhang (2008) ise çok duvarlı karbon nanotüplerde enine dalga yayınımını moleküler dinamik simülasyonu kullanarak incelemişlerdir. Çok duvarlı karbon nanotüplerde eksenel dalga yayınımı Aydogdu (2014) tarafından yerel olmayan elastisite teorisi ile araştırılmıştır. Çift duvarlı karbon nanotüplerde enine dalga yayınımı üzerindeki ölçek etkisi ise Q. Wang, Zhou, ve Lin (2006) tarafından çalışılmıştır. Nanotüpler, Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş modelleri olarak modellenmiş ve bu çalışmada yerel olmayan süreklilik modelleri kullanılmıştır. Tek ve çift duvarlı karbon

nanotüplerde dalga yayınım analizi yerel olmayan kabuk modeli kullanılarak incelenmiştir (Hu, Liew, Wang, He, & Yakobson, 2008). Bu çalışmada koltuk karbon nanotüp modelleri için analiz gerçekleştirilmiştir. Bir diğer çalışmada, Dong, Zhu, ve Wang (2008), bir silindirik kabuk modeli kullanarak bir elastik matrise gömülü çok duvarlı nanotüplerin dalga yayınımını araştırmışlardır. Bu çalışmalara ek olarak, elastik ortama gömülü karbon nanotüplerin dalga yayınımı bazı araştırmacılar tarafından (Dong & Wang, 2007; Laurenzi, Pastore, Giannini, & Marchetti, 2013; L. Wang, Guo, & Hu, 2008; JX Wu, Li, & Cao, 2013) yerel olmayan elastisite, genleme gradyanı esaslı teoriler ve deneysel olarak araştırılmıştır. Yukarıdaki çalışmalarda Winkler veya Pasternak zemin modelleri dikkate alınmıştır.

Bir önceki bölümdeki gibi, N tane iç içe geçmiş, elastik ortama gömülü çok duvarlı bir karbon nanotüpe ait hareket denklemleri, N_e=0 kabulü ile Denklem (4.156)'daki gibi yazılabilir. Bu durumda, iki duvarlı karbon nanotüpler için (N=2) hareket denklemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$c(w_2 - w_1) = EI_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + \frac{\eta^2}{12} EI_1 \frac{\partial^6 w_1}{\partial x^6} + \rho A_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2},$$

$$-c(w_2 - w_1) = EI_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + \frac{\eta^2}{12} EI_2 \frac{\partial^6 w_2}{\partial x^6} + \rho A_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + k_e w_2. \quad (4.171)$$

Buna göre, her tüpteki enine dalga yayınımı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$w_j(x,t) = a_j e^{i(kx-\omega t)}, \qquad j = 1,2. \quad (4.172)$$

Burada w_j tüplerin enine yer değiştirmesini, a_j ise tüplerin yer değiştirme genliğini göstermektedir. Denklem (4.172), Denklem (4.171)'de yerine yazılırsa aşağıdaki denklem sistemi elde edilebilir:

$$\begin{bmatrix} EI_1 k^4 - \frac{\eta^2}{12} EI_1 k^6 - \rho A_1 \omega^2 + c & -c \\ -c & EI_2 k^4 - \frac{\eta^2}{12} EI_2 k^6 - \rho A_2 \omega^2 + c + k_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.173)$$

Denklem (4.173)'teki katsayılar matrisinin determinantı aşağıdaki karakteristik denklemi vermektedir:

$$R_1 \omega^4 + R_2 \omega^2 + R_3 = 0 \quad (4.174)$$

Yukarıdaki denklemdeki katsayılar

$$R_1 = \rho^2 A_1 A_2,$$

$$R_2 = \rho A_1 E I_2 \frac{\eta^2}{12} k^6 - \rho A_1 c - \rho A_2 c - \rho A_1 E I_2 k^4 - \rho A_2 E I_1 k^4 - \rho A_1 K + \rho A_2 E I_1 \frac{\eta^2}{12} k^6,$$

$$R_3 = E^2 I_1 I_2 k^8 + E I_1 k_e k^4 + E I_1 c k^4 + E I_2 c k^4 - E I_1 k_e \frac{\eta^2}{12} k^6 - E I_1 c \frac{\eta^2}{12} k^6 - E I_2 c \frac{\eta^2}{12} k^6 - 2E^2 I_1 I_2 \frac{\eta^2}{12} k^{10} + E^2 I_1 I_2 \left(\frac{\eta^2}{12}\right)^2 k^{12} + k_e c\,. \quad (4.175)$$

olacak şekilde tanımlanmaktadır. Denklem (4.175)'in çözümü elastik ortama gömülü iki duvarlı nanotüpe ait frekans değerlerini verir:

$$\omega_1^{EM} = \sqrt{\frac{-R_2 - \sqrt{{R_2}^2 - 4R_1R_3}}{2R_1}} \quad (4.176a)$$

$$\omega_2^{EM} = \sqrt{\frac{-R_2 + \sqrt{{R_2}^2 - 4R_1R_3}}{2R_1}} \quad (4.176b)$$

Verilen iki duvarlı karbon nanotüp modeli için iki adet dalga frekansının elde edildiği açıkça görülmektedir. İki duvarlı karbon nanotüp modellerinin frekansları, literatürdeki diğer sürekli ortam modelleri kullanılarak da elde edilebilir. Genleme gradyanı esaslı sürekli ortam teorisi için elastik ortama gömülü iki duvarlı karbon nanotüplerin hareket denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir (Dong vd., 2008):

$$c(w_2 - w_1) = E I_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} - g^2 E I_1 \frac{\partial^6 w_1}{\partial x^6} + \rho A_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2},$$

$$-c(w_2 - w_1) = E I_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} - g^2 E I_2 \frac{\partial^6 w_2}{\partial x^6} + \rho A_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + k_e w_2. \quad (4.177)$$

Burada, g^2 genleme gradyanlı elastisite teorisine ait uzunluk ölçek parametresini göstermektedir. Denklem (4.172), Denklem (4.177)'de yerine yazılırsa, genleme gradyanlı elastisite teorisine ait denklem sistemi aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\begin{bmatrix} E I_1 k^4 + g^2 E I_1 k^6 - \rho A_1 \omega^2 + c & -c \\ -c & E I_2 k^4 + g^2 E I_2 k^6 - \rho A_2 \omega^2 + c + k_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.178)$$

Buna göre, Denklem (4.178)'deki katsayılar matrisinin determinantı aşağıdaki karakteristik denklemi vermektedir:

$$T_1 \omega^4 + T_2 \omega^2 + T_3 = 0 \quad (4.179)$$

Yukarıdaki denklemdeki katsayılar,

$$T_1 = \rho^2 A_1 A_2,$$

$$T_2 = -\rho A_1 E I_2 g^2 k^6 - \rho A_1 c - \rho A_2 c - \rho A_1 E I_2 k^4 - \rho A_2 E I_1 k^4 - \rho A_1 k_e - \rho A_2 E I_1 g^2 k^6,$$

$$T_3 = E^2 I_1 I_2 k^8 + E I_1 k_e k^4 + E I_1 c k^4 + E I_2 c k^4 + E I_1 k_e g^2 k^6 + E I_1 c g^2 k^6 + E I_2 c g^2 k^6 + 2E^2 I_1 I_2 g^2 k^{10} + E^2 I_1 I_2 g^4 k^{12} + k_e c\,. \quad (4.180)$$

olacak şekilde tanımlanmaktadır. Denklem (4.179)'un çözümü aşağıdaki frekans değerlerini vermektedir:

$$\omega_1^{SG} = \sqrt{\frac{-T_2 - \sqrt{{T_2}^2 - 4T_1T_3}}{2T_1}} \quad (4.181a)$$

$$\omega_2^{SG} = \sqrt{\frac{-T_2 + \sqrt{{T_2}^2 - 4T_1T_3}}{2T_1}} \quad (4.181b)$$

Burada "SG" üst simgesi genleme gradyanı esaslı süreklilik modelini temsil etmektedir. Yerel olmayan elastisite teorisi için elastik ortama gömülü iki duvarlı karbon nanotüplerin hareket denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir (Q. Wang vd., 2006):

$$c(w_2 - w_1) = EI_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + \rho A_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - (e_0 a)^2 \rho A_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial t^2} + (e_0 a)^2 c \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right),$$

$$-c(w_2 - w_1) = EI_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + \rho A_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - (e_0 a)^2 \rho A_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2 \partial t^2} + (e_0 a)^2 c \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) + k_e w_2. \quad (4.182)$$

Burada e_0 yerel olmayan elastisite teorisine ait sabit parametredir. Denklem (4.172), Denklem (4.182)'de yerine yazılırsa, yerel olmayan elastisite teorisine ait denklem sistemi aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\begin{bmatrix} EI_1 k^4 - \rho A_1 \omega^2 + c - (e_0 a)^2 \rho A_1 \omega^2 k^2 + (e_0 a)^2 c k^2 & -c - (e_0 a)^2 c k^2 \\ -c - (e_0 a)^2 c k^2 & EI_2 k^4 - \rho A_2 \omega^2 + c - (e_0 a)^2 \rho A_2 \omega^2 k^2 + (e_0 a)^2 c k^2 + k_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.183)$$

Buna göre, Denklem (4.183)'teki katsayılar matrisinin determinantı aşağıdaki karakteristik denklemi vermektedir:

$$Z_1\omega^4 + Z_2\omega^2 + Z_3 = 0 \tag{4.184}$$

Yukarıdaki denklemdeki katsayılar,

$$Z_1 = \rho^2 A_1 A_2 (e_0 a)^4 k^4 + 2\rho^2 A_1 A_2 (e_0 a)^2 k^2 + \rho^2 A_1 A_2,$$

$$\begin{aligned} Z_2 = {} & -\rho A_1 c - \rho A_2 c - \rho A_1 E I_2 k^4 - \rho A_2 E I_1 k^4 - \rho A_1 k_e - \rho A_1 k_e (e_0 a)^2 k^2 \\ & - 2\rho A_1 c (e_0 a)^2 k^2 - 2\rho A_2 c (e_0 a)^2 k^2 - \rho A_1 c (e_0 a)^4 k^4 \\ & - \rho A_2 c (e_0 a)^4 k^4 - \rho A_1 E I_2 (e_0 a)^2 k^6 - \rho A_2 E I_1 (e_0 a)^2 k^6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_3 = {} & E^2 I_1 I_2 k^8 + E I_1 k_e k^4 + E I_1 c k^4 + E I_2 c k^4 + k_e (e_0 a)^2 c k^2 + E I_1 c (e_0 a)^2 k^6 \\ & + E I_2 c (e_0 a)^2 k^6 + k_e c \end{aligned} \tag{4.185}$$

olacak şekilde tanımlanmaktadır. Denklem (4.184)'ün çözümü aşağıdaki frekans değerlerini vermektedir:

$$\omega_1^{NL} = \sqrt{\frac{-Z_2 - \sqrt{{Z_2}^2 - 4Z_1 Z_3}}{2Z_1}} \tag{4.186a}$$

$$\omega_2^{NL} = \sqrt{\frac{-Z_2 + \sqrt{{Z_2}^2 - 4Z_1 Z_3}}{2Z_1}} \tag{4.186b}$$

Eğer, özdeğer Denklemlerinde (4.173), (4.178), (4.183) iç uzunluk ölçeği parametreleri $(\eta^2, g^2, (e_0 a)^2)$ sıfır alınırsa, klasik elastisite teorisi için elastik ortama gömülü iki duvarlı karbon nanotüplerin dalga frekansları elde edilebilir. Dalga sayısı $k \rightarrow 0$ dikkate alındığında, iki duvarlı karbon nanotüplerin kesme frekansları şu şekilde elde edilebilir:

$$\omega_1, \omega_2 = 0, \qquad \omega_3, \omega_4 = \pm \frac{\sqrt{c\rho A_1 A_2 (A_1 + A_2)}}{\rho A_1 A_2} \tag{4.187}$$

Sıfır frekanslar, dalganın sıfır hızdan yayılmaya başladığını gösterir. İki duvarlı karbon nanotüplerin frekansı, kesme frekansı değerinden düşükse, sadece bir faz hızı oluşur. Diğer yandan, frekans kesme frekansından daha yüksekse iki faz hızı meydana gelir. SG ve NL teorileri yoluyla bulunan iki duvarlı karbon nanotüplerin kesme frekanslarının, EM modeli ile tamamen aynı olduğuna dikkat edilmelidir. Ayrıca, elde edilen açısal frekansların (4.174), (4.179), (4.184) denklemlerine eklenmesiyle, sırasıyla EM, SG ve NL teorilerine ait tüplerin genlik oranları aşağıdaki şekildeki gibi elde edilebilir:

$$\frac{a_2^{EM}}{a_1^{EM}} = a_r = \frac{c}{c + E I_2 k^4 - \frac{\eta^2}{12} E I_2 k^6 - \rho A_2 \omega^2 + k_e} \tag{4.188a}$$

$$\frac{a_2^{SG}}{a_1^{SG}} = a_r = \frac{c}{c + EI_2k^4 + g^2EI_2k^6 - \rho A_2\omega^2 + k_e} \qquad (4.188b)$$

$$\frac{a_2^{NL}}{a_1^{NL}} = a_r = \frac{c + (e_0a)^2ck^2}{c + EI_2k^4 - \rho A_2\omega^2 - (e_0a)^2\rho A_2\omega^2k^2 + (e_0a)^2ck^2 + k_e} \qquad (4.188c)$$

Denklem (4.188)'e göre, genlik oranı (a_2/a_1) pozitif veya negatif olabilir. Pozitif oran tüplerin eş fazlı hareket ettiğini gösterirken, negatif oran tüplerin zıt fazlı hareketini temsil etmektedir. Bu davranış, karbon nanotüplerin bazı özelliklerini değiştirebilir. Klasik elastisite teorisi için genlik oranının, Denklem (4.188)'de verilen iç uzunluk ölçeği parametreleri göz ardı edilerek elde edilebileceği ayrıca gözlenmektedir.

Bir nanotüpün eksenel yönde hareket denklemi, EM kullanılarak, Taylor serisinde ilk üç terim dikkate alınarak (M = 3) Denklem (4.7)'deki gibi ifade edilmişti. Buna ek olarak, EM teorisinde Taylor serisi açılımındaki ilk beş terim (M = 5) göz önüne alındığında, bir nanotüpün hareket denklemi şöyle yazılabilir:

$$AE\left[u''(x,t) + \frac{\eta^2}{12}u^{IV}(x,t) + \frac{\eta^4}{360}u^{VI}(x,t)\right] = \rho A\ddot{u}(x,t) \qquad (4.189)$$

Eksenel dalga yayınımı için $u(x, t)$, Denklem (4.8)'de tanımlanmıştı. Buna göre, Denklem (4.8); Denklem (4.7) ve Denklem (4.189)'da ayrı ayrı yerine yazılırsa, EM teorisi için dalga frekansı, faz hızı ve grup hızı ifadeleri M=3 ve M=5 için aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\omega^{EM} = \sqrt{\frac{E}{\rho}\left(k^2 - \frac{\eta^2}{12}k^4\right)} \qquad (M = 3) \qquad (4.190)$$

$$\omega^{EM} = \sqrt{\frac{E}{\rho}\left(k^2 - \frac{\eta^2}{12}k^4 + \frac{\eta^4}{360}k^6\right)} \qquad (M = 5) \qquad (4.191)$$

$$V_p^{EM} = \frac{\sqrt{\frac{E}{\rho}\left(k^2 - \frac{\eta^2}{12}k^4\right)}}{k} \qquad (M = 3) \qquad (4.192)$$

$$V_p^{EM} = \frac{\sqrt{\frac{E}{\rho}\left(k^2 - \frac{\eta^2}{12}k^4 + \frac{\eta^4}{360}k^6\right)}}{k} \qquad (M = 5) \qquad (4.193)$$

$$V_g^{EM} = \frac{\frac{E}{\rho}\left(k - 2\frac{\eta^2}{12}k^3\right)}{\sqrt{\frac{E}{\rho}\left(k^2 - \frac{\eta^2}{12}k^4\right)}} \qquad (M = 3) \qquad (4.194)$$

$$V_g^{EM} = \frac{\frac{E}{\rho}\left(\frac{\eta^4 k^5}{60} - 4\frac{\eta^2}{12}k^3 + 2k\right)}{2\sqrt{\frac{E}{\rho}\left(\frac{\eta^4 k^6}{360} - \frac{\eta^2}{12}k^4 + k^2\right)}} \qquad (M = 5) \qquad (4.195)$$

Yerel olmayan elastisite teorisi için bir nanotüpün eksenel hareket denklemi aşağıdaki biçimde yazılabilir (H. Wang, Dong, Men, Yan, & Wang, 2010):

$$AEu''(x,t) + (e_0 a)^2 \rho A\ddot{u}''(x,t) = \rho A\ddot{u}(x,t) \qquad (4.196)$$

Buna göre, Denklem (4.8), Denklem (4.196)'da yerine yazılırsa, NL teorisi için dalga frekansı aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\omega^{NL} = \sqrt{\frac{\frac{E}{\rho}k^2}{1 + (e_0 a)^2 k^2}} \qquad (4.197)$$

Faz hızı ve grup hızı ifadeleri

$$V_p^{NL} = \sqrt{\frac{E}{\rho}\left(\frac{k^2}{1 + (e_0 a)^2 k^2}\right)} \qquad (4.198)$$

$$V_g^{NL} = \frac{E}{\rho}\left[\frac{k}{(1 + (e_0 a)^2 k^2)^2 \sqrt{\frac{\frac{E}{\rho}k^2}{1 + (e_0 a)^2 k^2}}}\right] \qquad (4.199)$$

olacak şekilde bulunabilir. SG teorisi için bir nanotüpün eksenel hareket denklemi aşağıdaki biçimde yazılabilir (Aizawa, Souda, Otani, Ishizawa, & Oshima, 1990):

$$AE[(u''(x,t) - g^2 u^{IV}(x,t)] = \rho A\ddot{u}(x,t) \qquad (4.200)$$

Buna göre, Denklem (4.8), Denklem (4.200)'de yerine yazılırsa, SG teorisi için dalga frekansı aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\omega^{SG} = \sqrt{\frac{E}{\rho}(k^2 + g^2 k^4)} \qquad (4.201)$$

Faz hızı ve grup hızı ifadeleri ise

$$V_p^{SG} = \frac{\sqrt{\frac{E}{\rho}(k^2 + g^2 k^4)}}{k} \qquad (4.202)$$

$$V_g^{SG} = \frac{\frac{E}{\rho}(k + 2g^2k^3)}{\sqrt{\frac{E}{\rho}(k^2 + g^2k^4)}} \tag{4.203}$$

olacak şekilde bulunur. Son olarak, dalga yayınım ilişkisi, faz hızı ve grup hızı, Born-Karman Kafes Dinamiği (LD) modeli için aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\omega^{LD} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\frac{2}{\eta}\sin\left(k\frac{\eta}{2}\right) \tag{4.204}$$

$$V_p^{LD} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\frac{2}{k\eta}sin\left(k\frac{\eta}{2}\right) \tag{4.205}$$

$$V_g^{LD} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}cos\left(k\frac{\eta}{2}\right) \tag{4.206}$$

Elastik ortama gömülü *N* tane iç içe geçmiş karbon nanotüplerin eksenel hareket denklemleri, EM teorisi çerçevesinde *N* adet birleşik denklemlerle aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$c_1(u_2 - u_1) = -\frac{\eta^2}{12}EA_1\frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} - EA_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \rho A_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},$$

$$c_2(u_3 - u_2) - c_1(u_2 - u_1) = -\frac{\eta^2}{12}EA_2\frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} - EA_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \rho A_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + k_e u_2,$$

……

$$-c_{(N-1)}(u_N - u_{N-1}) = -\frac{\eta^2}{12}EA_N\frac{\partial^4 u_N}{\partial x^4} - EA_N\frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2} + \rho A_N\frac{\partial^2 u_N}{\partial t^2} + k_e u_N. \tag{4.207}$$

Burada u_j (j = 1,2,…, *N*), *j*. nanotüpün eksenel yer değiştirmesidir. Elastik ortama gömülü iki duvarlı karbon nanotüpün hareket denklemleri, Denklem (4.207)'de N = 2 alınarak aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$c(u_2 - u_1) = -\frac{\eta^2}{12}EA_1\frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} - EA_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \rho A_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},$$

$$-c(u_2 - u_1) = -\frac{\eta^2}{12}EA_2\frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} - EA_2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \rho A_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + k_e u_2. \tag{4.208}$$

Her bir tüpteki eksenel dalga yayınımı şu şekilde ifade edilebilir:

$$u_j(x,t) = a_j e^{i(kx-\omega t)}, \qquad j = 1,2. \tag{4.209}$$

Denklem (4.209), Denklem (4.208)'de yerine yazılırsa aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} EA_1k^2 - \frac{\eta^2}{12}EA_1k^4 - \rho A_1\omega^2 + c & -c \\ -c & EA_2k^2 - \frac{\eta^2}{12}EA_2k^4 - \rho A_2\omega^2 + c + k_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.210)$$

Denklem (4.210)'da verilen katsayılar matrisinin determinantı EM teorisi için aşağıdaki karakteristik denklemi verir:

$$F_1\omega^4 + F_2\omega^2 + F_3 = 0 \quad (4.211)$$

Burada, katsayılar aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$F_1 = \rho^2 A_1 A_2,$$

$$F_2 = 2A_1A_2\rho E\frac{\eta^2}{12}k^4 - 2A_1A_2\rho Ek^2 - A_1k_e\rho - A_1\rho c - A_2\rho c,$$

$$F_3 = k_e c + A_1A_2E^2k^4 + A_1Ek_ek^2 + A_1Eck^2 + A_2Eck^2 - A_1Ek_ek^4\frac{\eta^2}{12} - A_1Eck^4\frac{\eta^2}{12} - A_2Eck^4\frac{\eta^2}{12} - 2A_1A_2E^2k^6\frac{\eta^2}{12} + A_1A_2E^2k^8\left(\frac{\eta^2}{12}\right)^2. \quad (4.212)$$

Denklem (4.211)'in çözümü aşağıdaki frekans köklerini vermektedir:

$$\omega_1^{EM} = \sqrt{\frac{-F_2 - \sqrt{{F_2}^2 - 4F_1F_3}}{2F_1}} \quad (4.213a)$$

$$\omega_2^{EM} = \sqrt{\frac{-F_2 + \sqrt{{F_2}^2 - 4F_1F_3}}{2F_1}} \quad (4.213b)$$

SG teorisi için elastik ortama gömülü iki duvarlı karbon nanotüplerin eksenel hareket denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir (Askes vd., 2002):

$$c(u_2 - u_1) = g^2EA_1\frac{\partial^4u_1}{\partial x^4} - EA_1\frac{\partial^2u_1}{\partial x^2} + \rho A_1\frac{\partial^2u_1}{\partial t^2},$$

$$-c(u_2 - u_1) = g^2EA_2\frac{\partial^4u_2}{\partial x^4} - EA_2\frac{\partial^2u_1}{\partial x^2} + \rho A_2\frac{\partial^2u_2}{\partial t^2} + k_eu_2. \quad (4.214)$$

Denklem (4.209), Denklem (4.214)'te yerine yazılırsa SG teorisi için aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} EA_1k^2 + g^2EA_1k^4 - \rho A_1\omega^2 + c & -c \\ -c & EA_2k^2 + g^2EA_2k^4 - \rho A_2\omega^2 + c + k_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.215)$$

Aşikar olmayan çözüm için, Denklem (4.215)'te verilen katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşitlenerek aşağıda verilen karakteristik denklem elde edilebilir:

$$Q_1\omega^4 + Q_2\omega^2 + Q_3 = 0 \quad (4.216)$$

Burada, katsayılar ise

$$Q_1 = \rho^2 A_1 A_2,$$
$$Q_2 = -2A_1A_2\rho E g^2k^4 - 2A_1A_2\rho Ek^2 - A_1k_e\rho - A_1\rho c - A_2\rho c,$$
$$Q_3 = k_e c + A_1A_2E^2k^4 + A_1Ek_ek^2 + A_1Eck^2 + A_2Eck^2 + A_1Ek_ek^4g^2 + A_1Eck^4g^2 + A_2Eck^4g^2 + 2A_1A_2E^2k^6g^2 + A_1A_2E^2k^8g^4. \quad (4.217)$$

eşit olacak şekilde tanımlanmaktadır. Böylece, Denklem (4.216)'nın çözümü aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\omega_1^{SG} = \sqrt{\frac{-Q_2 - \sqrt{{Q_2}^2 - 4Q_1Q_3}}{2Q_1}} \quad (4.218a)$$

$$\omega_2^{SG} = \sqrt{\frac{-Q_2 + \sqrt{{Q_2}^2 - 4Q_1Q_3}}{2Q_1}} \quad (4.218b)$$

Yerel olmayan elastisite teorisi için elastik ortama gömülü iki duvarlı karbon nanotüplerin eksenel hareket denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir (Aydogdu, 2014):

$$c(u_2 - u_1) = EA_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \rho A_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - (e_0a)^2\rho A_1\frac{\partial^4 u_1}{\partial x^2\partial t^2} + (e_0a)^2 c\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right),$$

$$-c(u_2 - u_1) = EA_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \rho A_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - (e_0a)^2\rho A_2\frac{\partial^4 u_2}{\partial x^2\partial t^2} + (e_0a)^2 c\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right) + k_e u_2. \quad (4.219)$$

Denklem (4.209), Denklem (4.219)'da yerine yazılırsa NL teorisi için aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{EA_1k^2 - \rho A_1\omega^2 + c - (e_0a)^2\rho A_1\omega^2k^2 + (e_0a)^2ck^2} & \mathrm{-c - (e_0a)^2ck^2} \\ \mathrm{-c - (e_0a)^2ck^2} & \mathrm{EA_2k^2 - \rho A_2\omega^2 + c - (e_0a)^2\rho A_2\omega^2k^2 + (e_0a)^2ck^2 + k_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.220)$$

Aşikar olmayan çözüm için, Denklem (4.220)'de verilen katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşitlenerek aşağıda verilen karakteristik denklem elde edilebilir:

$$Y_1\omega^4 + Y_2\omega^2 + Y_3 = 0 \tag{4.221}$$

Burada, katsayılar aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \rho^2 A_1 A_2 (e_0 a)^4 k^4 + 2\rho^2 A_1 A_2 (e_0 a)^2 k^2 + \rho^2 A_1 A_2, \\
Y_2 &= -\rho A_1 c - \rho A_2 c - 2\rho A_1 A_2 E k^2 - 2\rho A_1 A_2 E k^4 (e_0 a)^2 - \rho A_1 k_e - \rho A_1 k_e (e_0 a)^2 k^2 \\
&\quad - 2\rho A_1 c (e_0 a)^2 k^2 - 2\rho A_2 c (e_0 a)^2 k^2 - \rho A_1 c (e_0 a)^4 k^4 \\
&\quad - \rho A_2 c (e_0 a)^4 k^4, \\
Y_3 &= E A_1 k_e k^2 + E A_1 c k^2 + E A_2 c k^2 + k_e (e_0 a)^2 c k^2 + E A_1 c (e_0 a)^2 k^4 \\
&\quad + E A_2 c (e_0 a)^2 k^4 + A_1 A_2 E^2 k^4 + k_e c\,.
\end{aligned} \tag{4.222}$$

Böylece, Denklem (4.221)'in çözümü aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\omega_1^{NL} = \sqrt{\frac{-Y_2 - \sqrt{{Y_2}^2 - 4Y_1Y_3}}{2Y_1}} \tag{4.223a}$$

$$\omega_2^{NL} = \sqrt{\frac{-Y_2 + \sqrt{{Y_2}^2 - 4Y_1Y_3}}{2Y_1}} \tag{4.223b}$$

Eğer, özdeğer Denklemlerinde (4.211), (4.216), (4.221) iç uzunluk ölçeği parametreleri $(\eta^2, g^2, (e_0a)^2)$ sıfır alınırsa, klasik elastisite teorisi için elastik ortama gömülü iki duvarlı karbon nanotüplerin eksenel dalga frekansları elde edilebilir.

Ayrıca, elde edilen eksenel dalga frekanslarının (4.174), (4.179), (4.184) numaralı denklemlere eklenmesiyle, sırasıyla EM, SG ve NL teorilerine ait tüplerin genlik oranları aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\frac{a_2^{EM}}{a_1^{EM}} = a_r = \frac{c}{c + EA_2k^2 - \frac{\eta^2}{12}EA_2k^4 - \rho A_2\omega^2 + k_e} \tag{4.224a}$$

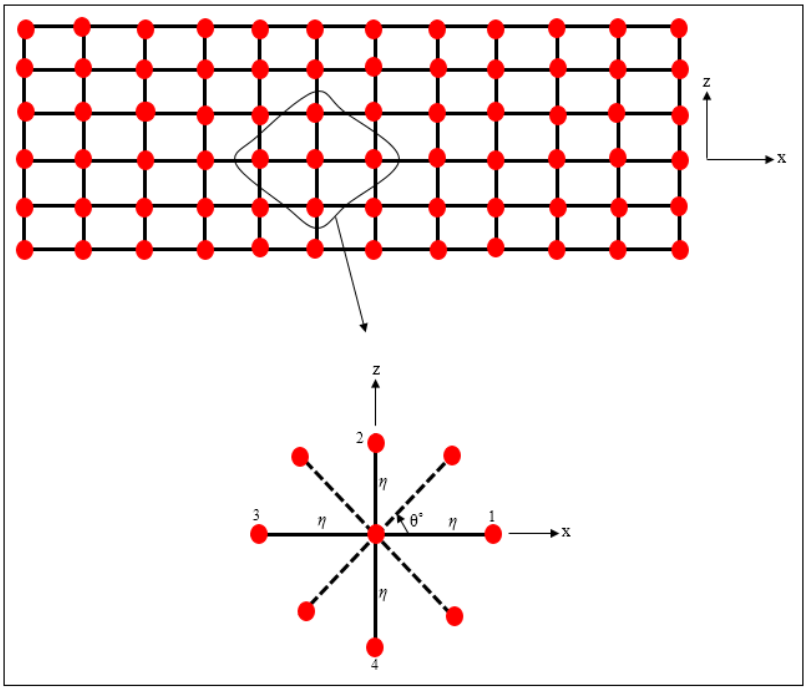
$$\frac{a_2^{SG}}{a_1^{SG}} = a_r = \frac{c}{c + EA_2k^2 + g^2EA_2k^4 - \rho A_2\omega^2 + k_e} \tag{4.224b}$$

$$\frac{a_2^{NL}}{a_1^{NL}} = a_r = \frac{c + (e_0a)^2ck^2}{c + EA_2k^2 - \rho A_2\omega^2 - (e_0a)^2\rho A_2\omega^2k^2 + (e_0a)^2ck^2 + k_e} \tag{4.224c}$$

4.10. Periyodik Yapılı Nanoçubukların ve Nanokirişlerin EM Teorisi ile Statik ve Dinamik Analizleri

Genleme gradyanı esaslı elastisite teorisi, modifiye edilmiş çiftli gerilme teorisi ve yerel olmayan elastisite teorisi gibi malzemenin ölçek etkisine bağlı teorilerin sadece bir tür yumuşatma veya sertleşme davranışı öngördüğü bilinmektedir. Ancak, deneysel gözlemlere göre, mikro/nano uzunluk ölçeğinde, dikkate alınan malzemenin iç yapısına bağlı olarak yumuşama veya sertleşme mekanik davranışları gözlenebilir (Fleck vd., 1994; Lam vd., 2003; X. H. Liu vd., 2012). Bu tez çalışmasında kullanılan EM teorisi, hem sertleşme hem de yumuşama davranışlarını malzemede gözleyebilmektedir. Bu davranışları göstermek için, şimdiki bölümde, basit kare kafes tipine sahip periyodik nano yapıların (nanoçubuklar, nanokirişler) statik ve dinamik analizleri gerçekleştirilecektir. Buna göre, periyodik basit kare mikro yapılı bir katı, bu çalışmada iki boyutlu periyodik bir yapı olarak modellenmiştir. EM teorisi ile yapılan analizler neticesinde, periyodik nano yapıların şiral açısının ve kullanılan uzunluk ölçeği parametresinin, malzemenin yumuşatma veya sertleştirme tepkilerini değiştirdiği görülmüştür. Dolayısıyla, elde edilen bu önemli sonuçların, nanoteknolojide kullanılan nano boyutlu yapıların tasarımı ve optimizasyonu için faydalı bir yaklaşım sağlayacağına inanılmaktadır.

EM teorisine ait gerilme ifadesi Denklem (2.26)'da bulunmuştu. Denklem (2.26)'daki gerilme ifadesinde yer alan $V_1(\theta)$ ve $V_2(\theta)$ fonksiyonları ise nanotüpü oluşturan atomların diziliş yönüne göre farklı değerler almaktadır. Bu bölümde, bir katıdaki atomların şiral açısının (θ) değeri 0° ile 30° arasında değişmektedir.



Şekil 4.8. Periyodik nano yapıdaki atomların dizilimi.

Bu bölümde, periyodik nano yapılı malzemenin basit kare kafes yapısı dikkate alınmıştır (Şekil 4.8) ve bu kafes tipi için $V_1(\theta)$ ve $V_2(\theta)$ aşağıdaki gibi olmaktadır:

$$V_1(\theta) = (\cos(\theta))^4 + \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)^4 + (\cos(\pi+\theta))^4 + \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)\right)^4 - \frac{1}{3}\Bigg[(\cos(\theta))^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)^2 + \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)^2(\cos(\theta))^2 + (\cos(\pi+\theta))^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)^2 + \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)\right)^2(\cos(\theta))^2\Bigg] \quad (4.225)$$

$$V_2(\theta) = (\cos(\theta))^6 + \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)^6 + (\cos(\pi+\theta))^6 + \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)\right)^6 - \frac{1}{3}\Bigg[(\cos(\theta))^4\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)^2 + \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)^4(\cos(\theta))^2 + (\cos(\pi+\theta))^4\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)^2 + \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)\right)^4(\cos(\theta))^2\Bigg] \quad (4.226)$$

Daha önce de bahsedildiği gibi, θ açısı 0°-30° aralığında değerler alabilmektedir ve Denklem (4.225) ve Denklem (4.226)'da sırasıyla θ=0° yazılarak zigzag nanotüp modeli elde edilirken, θ=30° yazılmasıyla koltuk nanotüp modeli için $V_1(\theta)$ ve $V_2(\theta)$ elde edilebilir.

Nanoçubuğun statik denge denklemi EM teorisi kullanılarak boyutsuz şekilde Denklem (4.2)'de ifade edilmişti. Bu nanoçubuğa etki eden eksenel yük $\bar{f}$ Fourier sinüs serisi formunda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n sin\frac{n\pi x}{L}, \quad F_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad (4.227)$$

Buna göre boyutsuz $\bar{F}_n$ katsayısı aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\bar{f}(\bar{x}) = \bar{f}_0, \qquad \bar{F}_n = \frac{4\bar{f}_0}{n\pi}, \qquad n = 1,3,5,\ldots. \quad (4.228)$$

A-A sınır koşullarında, yer değiştirme alanı aşağıdaki gibi seçilebilir:

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_m sin\frac{n\pi x}{L} \tag{4.229}$$

Denklem (4.229)'un boyutsuz hali aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\bar{u}(\bar{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_m sinn\pi\bar{x} \tag{4.230}$$

Denklemler (4.2), (4.228), (4.230)'un uygun kullanımından sonra, Denklem (4.2)'nin analitik çözümü aşağıdaki biçimde ortaya çıkar:

$$\bar{u} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\bar{f}_0}{n\pi[f_1(\theta)(n\pi)^2 - f_2(\theta)\beta^2(n\pi)^4]} sinn\pi\bar{x} \tag{4.231}$$

Periyodik yapılı bir nanoçubuğun hareket denklemi, eksenel f yükü dikkate alınmadan Denklem (3.15)'te tanımlanmıştı. Buna göre, A-A sınır koşuluna sahip nanoçubuklarda Navier tipi çözüm gerçekleştirilebilir. A-A sınır koşulları için aşağıdaki gibi yer değiştirme alanı tanımlanabilir:

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_m cos\frac{n\pi x}{L} \cos\omega t \tag{4.232}$$

Burada u_m çubuğun orta eksenine göre eksenel yer değiştirmeyi göstermektedir. Denklem (4.232), Denklem (3.15)'te yerine yazılırsa ve boyutsuzlaştırma işlemi yapılırsa, nanoçubuğa ait boyutsuz frekans aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\lambda = \sqrt{n^2\pi^2 V_1(\theta) - V_2(\theta)\beta^2 n^4\pi^4} \tag{4.233}$$

Burada λ^2 olarak tanımlanan boyutsuz frekans parametresi aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\lambda^2 = \frac{\rho\omega^2 L^2}{E} \tag{4.234}$$

Periyodik yapılı bir nanoçubukta eksenel yer değiştirme, Denklem (4.8)'deki gibi tanımlanabilir. Buna göre, Denklem (4.8), Denklem (3.15)'te yerine yazılırsa, EM teorisi çerçevesinde periyodik yapılı bir nanoçubuğa ait dalga yayınım ilişkisi bulunabilir ve açısal frekans aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\omega = c\sqrt{k^2 V_1(\theta) - \frac{\eta^2}{12} V_2(\theta) k^4} \tag{4.235}$$

Daha sonra, EM modeli için nanoçubukların faz (V_p) ve grup (V_g) hızları aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$V_p = c\sqrt{V_1(\theta) - \frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)k^2} \tag{4.236}$$

$$V_g = \frac{c}{2}\left(V_1(\theta)k^2 - \frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)k^4\right)^{-1/2}\left(2V_1(\theta)k - 4V_2(\theta)\frac{\eta^2}{12}k^3\right) \tag{4.237}$$

Burada, faz hızlarının ve grup hızlarının farklı dalga sayısı ile farklı değerler aldığı açıkça görülmektedir. Böylece nanoçubuklarda dispersiv dalgalar oluşmaktadır. Ayrıca, Denklemler (4.235), (4.263), (4.237)'de uzunluk ölçek parametresi (η) ihmal edilerek periyodik nanoçubukların klasik elastite çözümü elde edilebilir. Bu durumda nanoçubukların faz ve grup hızları aynıdır ve klasik elastisite çözümü için nanoçubuklarda dispersiv olmayan dalgalar oluşur.

B-B periyodik yapılı bir nanokiriş modelinin eğilmesi EM teorisi çerçevesinde incelenebilir. Bir nanokirişin statik yönetici denklemi, Denklem (4.20)'de ifade edilmişti. Buna göre, periyodik yapılı bir nanokirişin statik yönetici denklemi, Denklemler (4.20), (4.22), (4.23) kullanılarak boyutsuz şekilde aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\bar{w} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\bar{q}_0}{n\pi[V_1(\theta)(n\pi)^4 - V_2(\theta)\beta^2(n\pi)^6]} sinn\pi\bar{x} \tag{4.238}$$

Denklem (4.238)'deki ölçek parametresi ihmal edilerek, klasik elastisite teorisine ait eğilme ifadesi elde edilebilmektedir.

B-B periyodik yapılı bir nanokirişin burkulma denklemi EM teorisi yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$EIV_1(\theta)w^{IV} + \frac{\eta^2}{12}V_2(\theta)EIw^{VI} + Pw'' = 0 \tag{4.239}$$

Daha sonra Denklem (4.27), Denklem (4.239)'da yerine yazılırsa ve gerekli boyutsuzlaştırma işlemi yapılırsa, periyodik yapılı bir nanokirişin kritik burkulma yükü aşağıdaki gibi bulunur:

$$\bar{P} = V_1(\theta)(n\pi)^2 - \beta^2 V_2(\theta)(n\pi)^4 \tag{4.240}$$

Denklem (4.240)'ta görüldüğü gibi, EM teorisi klasik elastisite teorisinden daha düşük kritik burkulma yükleri vermektedir.

Periyodik yapılı bir nanokirişin hareket denklemi yayılı yük ihmal edilerek Denklem (3.28)'deki gibi yazılabilir. Navier tipi çözümü dikkate alınarak, B-B sınır şartına sahip nanokirişte yer değiştirme alanı ise Denklem (4.31)'de ifade edilmişti. Buna göre, Denklem (4.31), Denklem (3.28)'de yerine yazılarak, nanokirişe ait boyutsuz frekans parametresi aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\Omega = \sqrt{V_1(\theta)(n\pi)^4 - \beta^2 V_2(\theta)(n\pi)^6} \tag{4.241}$$

Denklem (4.241)'e bakılarak, EM teorisinin klasik elastisite teorisine kıyasla daha düşük frekanslar verdiği söylenebilir.

Son olarak, EM teorisi kullanılarak, periyodik yapılı nanokirişe ait enine dalga yayınım analizi gerçekleştirilecektir. Eşitlik (4.34), Eşitlik (3.28)'de yerine yazılırsa, EM teorisine ait sırasıyla, dalga frekansı, faz hızı ve grup hızı ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\omega = d\sqrt{k^4 V_1(\theta) - \frac{\eta^2}{12} V_2(\theta) k^6} \tag{4.242}$$

$$V_p = dk\sqrt{V_1(\theta) - \frac{\eta^2}{12} V_2(\theta) k^2} \tag{4.243}$$

$$V_g = \frac{d}{2}\left(V_1(\theta)k^4 - \frac{\eta^2}{12} V_2(\theta) k^6\right)^{-1/2}\left(4V_1(\theta)k^3 - 6V_2(\theta)\frac{\eta^2}{12}k^5\right) \tag{4.244}$$

Nanoçubuktaki dalga yayınımına benzer şekilde, periyodik yapılı nanokirişlerde de EM teorisinde dalgalar dispersiv olarak görülür. Aynı şekilde Denklemler (4.242-4.244)'te uzunluk ölçeği parametresi (η) ihmal edilerek klasik elastisite çözümü sonuçları elde edilebilir. Bu durumda, nanokirişlerde dispersiv olmayan dalgalar görülür ve yayınım boyunca dalgaların geometrik şekli değişmez.

4.11. Periyodik Yapılı Katmanlı Nanokirişlerin EM Teorisi ile Titreşim Analizi

Bu bölümde, periyodik yapılı simetrik ve anti-simetrik dört katmanlı nanokirişlerin serbest titreşimi EM teorisi ile incelenmiştir. İki boyutlu periyodik yapı, basit bir kare kristal kafes yapısı olarak modellenmiştir (Şekil 4.8). Bu bağlamda, katmanlı nanokirişlerin basit bir kare kristal kafes yapısı için yönetici diferansiyel denklemleri elde edilmiş ve Navier tipi çözümler EM teorisi çerçevesinde sunulmuştur.

Uzunluk ölçeği parametresi, kirişin en-boy oranı ve her katmanın malzeme özelliklerinin çözüm üzerindeki etkileri, farklı şiral açıları için araştırılmıştır.

Katmanlı nano yapılar; nanosensörler, biyosensörler, helikopter kanatları, uçak kanatları ve NEMS gibi birçok mühendislik cihazlarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Aslında, bu tip katmanlı yapılar, yüksek mukavemet ve yüksek elastisite modülü/ağırlık oranı nedeniyle iyi mekanik özelliklere sahiptirler. Bu homojen olmayan malzemeler genellikle elastik bir ortamla birleştirilebilen veya birleştirilemeyen iki farklı tür malzemeden oluşur. En iyi yapısal bütünlüğü elde etmek için, katmanlı yapıların, sandviç yapıların ve fonksiyonel olarak derecelendirilmiş yapıların malzeme özellikleri, uzaysal koordinatlar boyunca sürekli olarak değişir. Bu da, gerilme yığılmaları ve katmanların ayrılma hataları gibi bazı istenmeyen mekanik davranışları önler. Nano katmanlı yapılarda meydana gelen önemli gelişmeler, nanoteknoloji alanındaki farklı küçük makinelerin daha fazla kullanılmasını sağlayacaktır.

Son yıllarda, birçok araştırmacı katmanlı nano yapıların mekanik davranışını incelemişlerdir. Kammoun, Jrad, Bouaziz, Soula, ve Haddar (2017), yerel olmayan elastisite teorisi kullanarak, üç katmanlı nanokirişlerin titreşim analizini gerçekleştirmişlerdir. Bu çalışmada, Timoshenko ve Euler-Bernoulli kiriş modelleri kullanılarak problem farklı sınır koşulları için çözülmüştür. Katmanlı kirişlerin titreşim analizi, Fernando, Wang, ve Chowdhury (2018) tarafından sonlu eleman modellemesi dikkate alınarak incelenmiştir. Analiz, farklı sınır koşulları ve farklı kiriş yükseklikleri için gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmada önerilen çözüm yöntemi, kiriş, kabuk ve üç boyutlu katı elemanlar için geçerlidir. Başka bir çalışmada, Ni ve Hua (2018), eksenel yüklü çok katmanlı kirişlerin serbest ve zorlanmış titreşimini analitik bir şekilde incelemişlerdir. Elde edilen sonuçlar, sonlu elemanlar yöntemi ile iyi bir uyum göstermiştir. Çok katmanlı viskoelastik nanokirişlerin dinamik analizi Hashemi ve Khaniki (2017) tarafından hareketli bir nano parçacık ile viskoelastik ortam dikkate alınarak araştırılmıştır. Çözümde Laplace dönüşüm yöntemi kullanılmıştır. Saadatnia ve Esmailzadeh (2017), piezoelektrik katmanlı bir nanotüpün doğrusal olmayan titreşimini analiz etmişlerdir. Analizde, Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisi ve enerji yaklaşımı kullanılmıştır. Mastorakos, Abdolrahim, ve Zbib (2010), nano katmanlı metalik kompozitlerin ve nanotellerin deformasyon davranışını araştırmışlardır. Bu nano katmanlı metalik kompozitler ve nanoteller dökme malzemeler açısından karşılaştırılmıştır. Bunlara ek

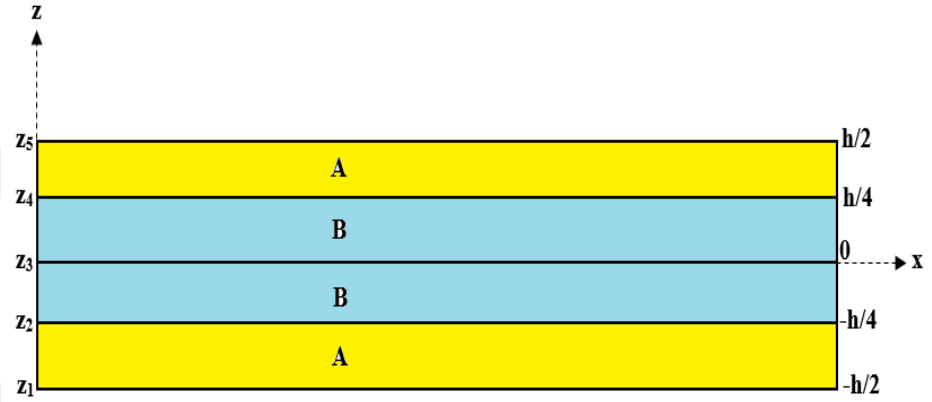
olarak, literatürde katmanlı makro ve nano yapılar ile ilgili bazı makaleler mevcuttur (Arefi & Zenkour, 2019; Awrejcewicz, Krysko, Zhigalov, Saltykova, & Krysko, 2008; Kordkheili & Moshrefzadeh-Sani, 2013; Matsunaga, 2001).

Bir kirişte eksenel yer değiştirme $u(x, z, t)$ ve enine yer değiştirme $w(x, z, t)$ şu şekilde tanımlanabilir:

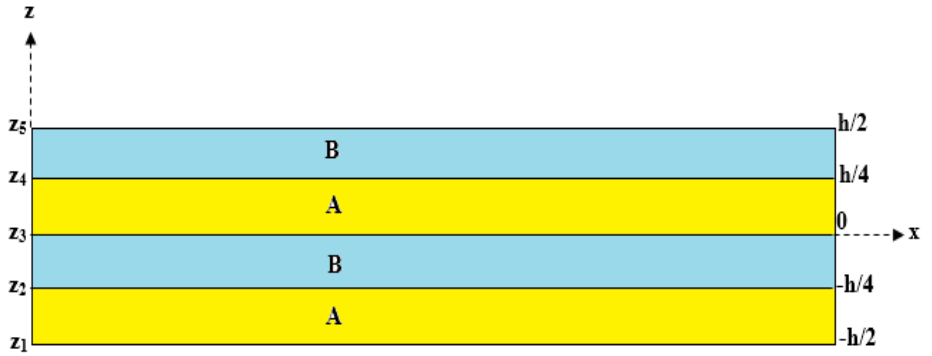
$$U(x,z,t) = u(x,t) - z\frac{\partial w}{\partial x} \tag{4.245}$$

$$W(x,z,t) = w(x,t) \tag{4.246}$$

Simetrik ve anti-simetrik dört katmanlı nanokirişler Şekil 4.9'da gösterilmektedir.



(a)



(b)

Şekil 4.9. (a) Simetrik ve (b) anti-simetrik dört katmanlı nanokiriş.

Buna göre, EM teorisi göz önünde bulundurularak, her katman için normal gerilme σ_x aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\sigma_x^A = E_A \varepsilon_x V_1(\theta) + \frac{\eta_A^2}{12} E_A \varepsilon_{x,xx} V_2(\theta) \tag{4.247a}$$

$$\sigma_x^B = E_B \varepsilon_x V_1(\theta) + \frac{\eta_B^2}{12} E_B \varepsilon_{x,xx} V_2(\theta) \tag{4.247b}$$

Bu çalışmada, nanokirişin basit kare periyodik kafes yapısı dikkate alınmıştır (Şekil 4.8). Denklem (4.247)'de, $V_1(\theta)$ve $V_2(\theta)$, periyodik malzemedeki atomik yapının şiral açısına (θ) bağlı olarak doğrultman kosinüslerini göstermektedir ve Denklemler (4.225) ve (4.226)'da tanımlanmıştır. σ_x^A ve σ_x^B A ve B katmanlarındaki normal gerilmeyi, E_A ve E_B katmanlardaki elastisite modülünü ve η_A ve η_B, nanokirişteki her katmanın iç uzunluk ölçek parametrelerini temsil etmektedir. Katmanlı nanokirişte meydana gelen normal genleme ε_x, aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{4.248}$$

Denklem (4.248), Denklemler (4.247a) ve (4.247b)'de yerine yazılırsa, nanokirişteki her bir katman için normal gerilme aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\sigma_x^A = E_A\left(\frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)V_1(\theta) + \frac{\eta_A^2}{12}E_A\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - z\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)V_2(\theta) \tag{4.249a}$$

$$\sigma_x^B = E_B\left(\frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)V_1(\theta) + \frac{\eta_B^2}{12}E_B\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - z\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)V_2(\theta) \tag{4.249b}$$

Eksenel kuvvet ve moment ifadeleri ise sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_x dz\,, \qquad M_x = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_x z dz. \tag{4.250}$$

Daha sonra, katmanlı nanokirişlerin hareket denklemleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = \rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho_1\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} = \rho_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho_1\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} - \rho_2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2}. \tag{4.251}$$

burada ρ_i (i = 0,1,2) katsayıları, eksenel kuvvet, N_x ve moment, M_x ifadeleri EM teorisi için şu şekilde yazılmaktadır:

$$\rho_i = \int_{-h/2}^{h/2}\rho z^i\, dz \quad (i = 0,1,2),$$

$$N_x = A_{11}^c\frac{\partial u}{\partial x} + A_{11}^d\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - B_{11}^c\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - B_{11}^d\frac{\partial^4 w}{\partial x^4},$$

$$M_x = B_{11}^c\frac{\partial u}{\partial x} + B_{11}^d\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - D_{11}^c\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{11}^d\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}. \tag{4.252}$$

Burada üst simgeler "c" ve "d" sırasıyla klasik teori ve EM modelini temsil etmektedir. İlk olarak, simetrik durum için, $A_{11}^c, A_{11}^d, B_{11}^c, B_{11}^d, D_{11}^c, D_{11}^d$ katsayıları aşağıdaki gibi yazılabilir (Şekil 4.9a):

$$A_{11}^{c} = \sum_{k=1}^{N=4} {Q_{11}}^{(N)}(z_k - z_{k-1}) = \frac{E_A}{1-\nu^2}\frac{h}{2}V_1(\theta) + \frac{E_B}{1-\nu^2}\frac{h}{2}V_1(\theta),$$

$$A_{11}^{d} = \frac{E_A}{1-\nu^2}\frac{h}{2}\frac{\eta_A^2}{12}V_2(\theta) + \frac{E_B}{1-\nu^2}\frac{h}{2}\frac{\eta_B^2}{12}V_2(\theta),$$

$$B_{11}^{c} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N=4} {Q_{11}}^{(N)}({z_k}^2 - {z_{k-1}}^2) = 0,$$

$$B_{11}^{d} = 0,$$

$$D_{11}^{c} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{N=4} {Q_{11}}^{(N)}({z_k}^3 - {z_{k-1}}^3) = \frac{E_A}{1-\nu^2}\frac{7h^3}{96}V_1(\theta) + \frac{E_B}{1-\nu^2}\frac{h^3}{96}V_1(\theta),$$

$$D_{11}^{d} = \frac{E_A}{1-\nu^2}\frac{7h^3}{96}\frac{\eta_A^2}{12}V_2(\theta) + \frac{E_B}{1-\nu^2}\frac{h^3}{96}\frac{\eta_B^2}{12}V_2(\theta). \qquad (4.253)$$

Yukarıda, ${Q_{11}}^{(N)}$ kirişin malzeme özelliği, z kirişin kalınlık koordinatını, N nanokirişe ait katman sayısını ifade eder ve mevcut çalışma için N=4 katman sayısı dikkate alınmıştır. Burada, EM teorisi kullanılarak oluşturulan simetrik dört katmanlı nanokiriş modeli için, nanokirişteki her katmanın simetrik dizilimine bağlı olarak, $B_{11}^{c} = B_{11}^{d} = 0$ olduğuna dikkat edilmelidir. Bu durumda, simetrik dört katmanlı nanokiriş için ${Q_{11}}^{(N)}$ aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$${Q_{11}}^{(1)} = {Q_{11}}^{(4)} = \frac{E_A}{1-\nu^2}, \qquad {Q_{11}}^{(2)} = {Q_{11}}^{(3)} = \frac{E_B}{1-\nu^2}. \qquad (4.254)$$

Denklem (4.250)'nin integrali alınarak ve Denklem (4.249) kullanılarak, eksenel kuvvet ve moment aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$N_x = E_A\frac{h}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}V_1(\theta) + \frac{\eta_A^2}{12}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}V_2(\theta)\right] + E_B\frac{h}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}V_1(\theta) + \frac{\eta_B^2}{12}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}V_2(\theta)\right] \qquad (4.255)$$

$$M_x = E_A\frac{7h^3}{96}\left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}V_1(\theta) - \frac{\eta_A^2}{12}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}V_2(\theta)\right] + E_B\frac{h^3}{96}\left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}V_1(\theta) - \frac{\eta_B^2}{12}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}V_2(\theta)\right] \qquad (4.256)$$

Böylece, Denklemler (4.251), (4.255), (4.256) kullanılarak, simetrik dört katmanlı nanokirişin hareket denklemleri şu şekilde ifade edilebilir:

$$A_{11}^{c}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{11}^{d}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho_1\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \qquad (4.257a)$$

$$-D_{11}^{c}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - D_{11}^{d}\frac{\partial^6 w}{\partial x^6} = \rho_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho_1\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} - \rho_2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2}. \qquad (4.257b)$$

Burada, ρ_1 simetrik durum için sıfıra eşittir ve dört katmanlı nanokirişin hareket denklemleri, $u(x,t)=\bar{u}(\bar{x})sin\lambda t$, $w(x,t)=\overline{w}(\bar{x})sin\Omega t$ varsayılarak, aşağıdaki gibi boyutsuz biçimde yazılabilir:

$$\bar{A}_{11}^{c}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2}+\bar{A}_{11}^{d}\frac{\partial^4\bar{u}}{\partial\bar{x}^4}+\lambda^2\bar{u}=0 \qquad (4.258a)$$

$$-\bar{D}_{11}^{c}\frac{\partial^4\overline{w}}{\partial\bar{x}^4}-\bar{D}_{11}^{d}\frac{\partial^6\overline{w}}{\partial\bar{x}^6}-\frac{h^2}{12L^2}\Omega^2\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial\bar{x}^2}+\Omega^2\overline{w}=0 \qquad (4.258b)$$

Burada, boyutsuz terimler aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\bar{u}=\frac{u}{L},\qquad \bar{x}=\frac{x}{L},\qquad \lambda^2=\Omega^2=\frac{\rho_0L^4\omega^{*2}}{D_0},\qquad D_0=E_Bh^3,\qquad \bar{A}_{11}^{c}=\frac{A_{11}^{c}L^2}{D_0},$$

$$\bar{A}_{11}^{d}=\frac{A_{11}^{d}}{D_0},\qquad \overline{w}=\frac{w}{L},\quad \bar{D}_{11}^{c}=\frac{D_{11}^{c}}{D_0},\qquad \bar{D}_{11}^{d}=\frac{D_{11}^{d}}{D_0L^2}. \qquad (4.259)$$

Burada, λ ve Ω sırasıyla, eksenel ve enine boyutsuz frekans parametrelerini göstermektedir.

İkinci olarak, bir anti-simetrik dört katmanlı nanokirişin hareket denklemleri elde edilecektir (Şekil 4.9b). $B_{11}^{c*}, B_{11}^{d*}\ D_{11}^{c*}, D_{11}^{d*}$ katsayıları anti-simetrik durum için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$B_{11}^{c*}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N=4}{Q_{11}}^{(N)}({z_k}^2-{z_{k-1}}^2)=\frac{E_B}{1-\nu^2}\frac{h^2}{16}V_1(\theta)-\frac{E_A}{1-\nu^2}\frac{h^2}{16}V_1(\theta),$$

$$B_{11}^{d*}=\frac{E_B}{1-\nu^2}\frac{h^2}{16}\frac{\eta_B^2}{12}V_2(\theta)-\frac{E_A}{1-\nu^2}\frac{h^2}{16}\frac{\eta_A^2}{12}V_2(\theta),$$

$$D_{11}^{c*}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{N=4}{Q_{11}}^{(N)}({z_k}^3-{z_{k-1}}^3)=\frac{E_A}{1-\nu^2}\frac{h^3}{24}V_1(\theta)+\frac{E_B}{1-\nu^2}\frac{h^3}{24}V_1(\theta),$$

$$D_{11}^{d*}=\frac{E_A}{1-\nu^2}\frac{h^3}{24}\frac{\eta_A^2}{12}V_2(\theta)+\frac{E_B}{1-\nu^2}\frac{h^3}{24}\frac{\eta_B^2}{12}V_2(\theta). \qquad (4.260)$$

Simetrik durumdan farklı olarak, katmanlı nanokirişin anti-simetrik durumunda, B_{11} katsayısı sıfır değildir. Bu, anti-simetrik dört katmanlı nanokirişlerde çiftli (eksenel ve enine) titreşim modlarının oluşmasını sağlar. Bu durumda, anti-simetrik dört katmanlı nanokirişte ${Q_{11}}^{(N)}$ şu şekilde tanımlanabilir:

$${Q_{11}}^{(1)}={Q_{11}}^{(3)}=\frac{E_A}{1-\nu^2},\qquad {Q_{11}}^{(2)}={Q_{11}}^{(4)}=\frac{E_B}{1-\nu^2}. \qquad (4.261)$$

Daha sonra, simetrik duruma benzer şekilde, Denklem (4.250)'nin integrali alınarak ve Denklem (4.249) kullanılarak, eksenel kuvvet ve moment ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$N_x = E_A\left[\frac{h}{2}\frac{\partial u}{\partial x}V_1(\theta) + \frac{h^2}{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}V_1(\theta) + \frac{h}{2}\frac{\eta_A^2}{12}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}V_2(\theta) + \frac{h^2}{16}\frac{\eta_A^2}{12}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}V_2(\theta)\right]$$
$$+ E_B\left[\frac{h}{2}\frac{\partial u}{\partial x}V_1(\theta) - \frac{h^2}{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}V_1(\theta) + \frac{h}{2}\frac{\eta_B^2}{12}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}V_2(\theta)\right.$$
$$\left. - \frac{h^2}{16}\frac{\eta_B^2}{12}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}V_2(\theta)\right] \quad (4.262)$$

$$M_x = E_A\left[-\frac{h^2}{16}\frac{\partial u}{\partial x}V_1(\theta) - \frac{h^3}{24}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}V_1(\theta) - \frac{h^2}{16}\frac{\eta_A^2}{12}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}V_2(\theta) - \frac{h^3}{24}\frac{\eta_A^2}{12}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}V_2(\theta)\right]$$
$$+ E_B\left[\frac{h^2}{16}\frac{\partial u}{\partial x}V_1(\theta) - \frac{h^3}{24}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}V_1(\theta) + \frac{h^2}{16}\frac{\eta_B^2}{12}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}V_2(\theta)\right.$$
$$\left. - \frac{h^3}{24}\frac{\eta_B^2}{12}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}V_2(\theta)\right] \quad (4.263)$$

Böylece, Denklemler (4.251), (4.262), (4.263) kullanılarak, anti-simetrik dört katmanlı nanokirişin hareket denklemleri, boyutsuz biçimde şu şekilde ifade edilebilir:

$$\bar{A}_{11}^{c}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \bar{A}_{11}^{d}\frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial \bar{x}^4} - \bar{B}_{11}^{c*}\frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{x}^3} - \bar{B}_{11}^{d*}\frac{\partial^5 \bar{w}}{\partial \bar{x}^5} + \omega^2 \bar{u} = 0 \quad (4.264a)$$

$$\bar{B}_{11}^{c*}\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x}^3} + \bar{B}_{11}^{d*}\frac{\partial^5 \bar{u}}{\partial \bar{x}^5} - \bar{D}_{11}^{c*}\frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} - \bar{D}_{11}^{d*}\frac{\partial^6 \bar{w}}{\partial \bar{x}^6} - \frac{h^2}{12L^2}\omega^2\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \omega^2 \bar{w} = 0 \quad (4.264b)$$

Burada, boyutsuz terimler aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\bar{B}_{11}^{c*} = \frac{B_{11}^{c*}L}{D_0}, \omega^2 = \frac{\rho_0 L^4 \omega^{*2}}{D_0}, \bar{B}_{11}^{d*} = \frac{B_{11}^{d*}}{D_0 L}, \bar{D}_{11}^{c*} = \frac{D_{11}^{c*}}{D_0}, \bar{D}_{11}^{d*} = \frac{D_{11}^{d*}}{D_0 L^2}. \quad (4.265)$$

Simetrik dört katmanlı nanokirişlerin, B-B sınır koşulu için Navier tipi titreşim çözümü gerçekleştirilebilir. Buna göre, simetrik katmanlı nanokirişteki boyutsuz yer değiştirmeler aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\bar{u}(\bar{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{U}_m cosn\pi\bar{x}\, e^{i\lambda t} \quad (4.266)$$

$$\bar{w}(\bar{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{W}_m sinn\pi\bar{x}\, e^{i\Omega t} \quad (4.267)$$

Burada, $\bar{U}_m$ ve $\bar{W}_m$ sırasıyla, kirişin eksenel ve enine yer değiştirme genliğidir. Buna göre, Denklemler (4.266), (4.267), Denklemler (4.258a), (4.258b)'de yerine yazılırsa, eksenel ve enine boyutsuz frekans parametrelerinin pozitif kökleri B-B sınır koşulu için aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\lambda = \sqrt{(n\pi)^2 \bar{A}_{11}^c - \bar{A}_{11}^d (n\pi)^4} \tag{4.268}$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{\bar{D}_{11}^c (n\pi)^4 - \bar{D}_{11}^d (n\pi)^6}{1 + \frac{h^2}{12L^2}(n\pi)^2}} \tag{4.269}$$

Denklem (4.268) ve Denklem (4.269)'da iç uzunluk ölçek parametrelerinin (η_A, η_B) ihmal edilmesiyle $\bar{A}_{11}^d$ ve $\bar{D}_{11}^d$ katsayıları sıfıra eşit olmaktadır. Böylece klasik elastisite çözümü aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\lambda = \sqrt{(n\pi)^2 \bar{A}_{11}^c} \tag{4.270}$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{\bar{D}_{11}^c (n\pi)^4}{1 + \frac{h^2}{12L^2}(n\pi)^2}} \tag{4.271}$$

Periyodik atomik yapının şiral açısına (θ) bağlı olarak, EM'nin klasik elastisite teorisinden daha yüksek veya daha düşük frekanslar verdiğine dikkat edilmelidir.

Anti-simetrik dört katmanlı nanokirişlerin titreşim analizi B-B sınır şartı için Navier tipi çözüm uygulanarak gerçekleştirilebilir. Buna göre, boyutsuz yer değiştirmeler şu şekilde yazılabilir:

$$\bar{u}(\bar{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{U}_m cosn\pi\bar{x}\, e^{i\omega t} \tag{4.272}$$

$$\bar{w}(\bar{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{W}_m sinn\pi\bar{x}\, e^{i\omega t} \tag{4.273}$$

Denklemler (4.272), (4.273), Denklem (4.264a), (4.264b)'de yerine yazılırsa, aşağıdaki gibi bir homojen denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} -\bar{A}_{11}^c (n\pi)^2 + \bar{A}_{11}^d (n\pi)^4 + \omega^2 & \bar{B}_{11}^{c*} (n\pi)^3 - \bar{B}_{11}^{d*} (n\pi)^5 \\ \bar{B}_{11}^{c*} (n\pi)^3 - \bar{B}_{11}^{d*} (n\pi)^5 & -\bar{D}_{11}^{c*} (n\pi)^4 + \bar{D}_{11}^{d*} (n\pi)^6 + \omega^2 + \frac{h^2}{12L^2}(n\pi)^2 \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_m \\ W_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.274}$$

Daha sonra, Denklem (4.274)'te verilen denklem sisteminde, katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşitlenerek, dört katmanlı anti-simetrik nanokirişin titreşim frekansını veren karakteristik denklem elde edilebilir. Ayrıca, Denklem (4.274)'te iç uzunluk ölçek parametrelerinin (η_A, η_B) ihmal edilmesiyle, klasik elastisite çözümü elde edilebilir.

4.12. Mikro-nano Ölçekli Timoshenko Kiriş Modelinin EM Teorisi ile Eğilme, Burkulma ve Titreşim Analizleri

Bu bölümde, bir mikro-nano ölçekli Timoshenko kiriş modeli EM teorisi kullanılarak araştırılmıştır. Hareket denklemleri ve olası tüm sınır koşulları Hamilton prensibi kullanılarak EM modeline göre elde edilmiştir. Mikro ölçekli Timoshenko kirişlerinin statik eğilme, burkulma ve titreşim problemleri ayrıntılı olarak incelenmiştir. EM modeli tarafından öngörülen eğilme, dönme, kritik burkulma yükleri ve doğal frekanslar, zigzag ve koltuk modeline sahip B-B mikro ölçekli Timoshenko kirişlerinde Navier çözümü ile elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar, klasik elastisite ve klasik olmayan literatürdeki diğer sürekli ortam teorileri ile karşılaştırılmıştır. Bu çalışmada kullanılan EM modelinin etkisini göstermek için, dikkate alınan malzemenin kalınlık/uzunluk ölçeği parametresi oranının ve narinlik oranının statik eğilme, burkulma ve titreşim problemleri üzerindeki etkileri araştırılmıştır. Kayma deformasyonunun etkisinin, özellikle küçük narinlik oranı ve yüksek titreşim modları için daha önemli olduğu gözlenmiştir.

Euler-Bernoulli teorisi en basit kiriş teorisi olarak bilinir ve bu teoride kirişlerde meydana gelen kayma deformasyonu etkileri ihmal edilir. Euler-Bernoulli kiriş teorisi, ince (narin) kirişler için kabul edilebilir sonuçlar verirken, kalın kirişlerde kayma deformasyonu ve dönme atalet etkileri önemli hale gelmektedir. Timoshenko kiriş teorisi (TBT) ise kayma deformasyonu ve dönme atalet etkilerini dikkate alır ve kiriş kalınlığı boyunca sabit kayma gerilmesini varsayar (Timoshenko, 1921). Aslında, kirişin üst ve alt yüzeylerinde kayma gerilmeleri sıfıra eşittir. Bu nedenle, TBT'de kiriş kalınlığı boyunca kayma gerilmesi dağılımını telafi etmek için bir kayma düzeltme faktörü kullanılır, böylece TBT'de kirişin üst ve alt yüzeylerinde sıfır kayma gerilmesi durumu sağlanmaktadır.

TBT'ye ek olarak, herhangi bir kayma düzeltme faktörüne ihtiyaç duymadan kirişin üst ve alt yüzeylerinde sıfır kayma gerilmesi şartını sağlayan, üçüncü mertebeden parabolik kayma kiriş teorisi (Levinson, 1981; Reddy, 1984) ve genel üstel kiriş teorisi (Aydogdu, 2009) gibi bazı yüksek mertebe kiriş teorileri de mevcuttur. Bu kapsamda, de Sciarra ve Barretta (2014), Timoshenko nanokirişlerinin statik analizlerini yeni bir yerel olmayan termodinamik formülasyonu geliştirerek ortaya koymuşlardır. Bu makalede

çözümler, A-S ve B-B sınır koşullarına sahip nanokirişler için sunulmuştur. Bir Timoshenko kirişinin hareket ve sınır koşullarını veren denklemler, kirişin mikroyapısı dikkate alınarak, Lazopoulos ve Lazopoulos (2011) tarafından türetilmiştir. Bu makalede, Mindlin'in genleme esaslı gradyan teorisi kullanılmış ve B-B Timoshenko kirişleri için eğilme ve titreşim analizleri gösterilmiştir. Başka bir makalede, Binglei Wang, Zhao, ve Zhou (2010), genleme esaslı gradyan teorisini kullanarak mikro ölçekli Timoshenko kirişlerinin statik ve dinamik problemlerini araştırmışlardır. Timoshenko mikrokirişine ait yönetici denklemleri ve sınır koşullarını, Hamilton prensibi kullanarak elde etmişlerdir. Akgöz ve Civalek (2013), B-B mikrokirişler için modifiye edilmiş bir genleme esaslı gradyan teorisi geliştirmişlerdir. Trigonometrik kayma deformasyon kiriş modeli ile mikro kirişlerin statik eğilmesi ve serbest titreşimleri Navier çözüm yöntemi kullanılarak araştırılmıştır. Ayrıca, Timoshenko kirişlerinin statik eğilme ve burkulma davranışları, hiperbolik kayma deformasyon kiriş modeli kullanılarak aynı yazarlar tarafından araştırılmıştır (Akgöz & Civalek, 2015). Bir Timoshenko mikrokirişi için sonlu eleman formülasyonu, B. Zhang, He, Liu, Gan, ve Shen (2014) tarafından genleme esaslı gradyan teorisi çerçevesinde türetilmiştir. Statik eğilme, burkulma ve titreşim çözümleri literatürdeki diğer çalışmalarla karşılaştırılmış ve iyi bir uyum gözlenmiştir. Başka bir çalışmada, boyuta bağlı süreklilik modeli olarak bilinen modifiye çiftli gerilme teorisi kullanılarak, uzunluk ölçek parametresinin Timoshenko mikrokirişlerinin titreşim ve deformasyonları üzerindeki etkileri araştırılmıştır (Ma, Gao, & Reddy, 2008). Kahrobaiyan, Asghari, ve Ahmadian (2014), modifiye çiftli gerilme teorisini kullanarak Timoshenko kirişinde statik analiz yapmışlardır. Bu makalede elde edilen statik sonuçlar, deneysel sonuçlar ile iyi bir uyum göstermişlerdir. Dehrouyeh-Semnani ve Nikkhah-Bahrami (2015), modifiye çiftli gerilme teorisini kullanarak, Euler-Bernoulli ve Timoshenko mikrokiriş modelleri üzerindeki Poisson etkisini incelemişlerdir. Mikro kirişlerin eğilme rijitliği farklı kiriş kalınlıkları için deneysel çalışma (Lam vd., 2003) ile karşılaştırılmıştır.

Zigzag ve koltuk mikro-nanokiriş modelleri için EM teorisi çerçevesinde makro gerilmeler, Denklem (2.24) kullanılarak elde edilebilir. Buna göre, Şekil 2.3'te gösterilen üç eşilli atom modeline bakılarak birim vektörler aşağıdaki gibi yazılabilir:

$\tau_{11}^{0} = cos\theta, \tau_{12}^{0} = cos90, \tau_{13}^{0} = sin\theta, \tau_{21}^{0} = -sin(30-\theta)\,, \tau_{22}^{0} = cos90,$

$\tau_{23}^0 = -\cos(30-\theta)$, $\tau_{31}^0 = -\cos(60-\theta)$, $\tau_{32}^0 = cos90$, $\tau_{33}^0 = \sin(60-\theta)$ (4.275)

$\theta = 0°$ olduğunda zigzag kiriş modeline ait birim vektörlerin elde edildiği hatırlanmalıdır. Bu şekilde birim vektörler aşağıdaki biçimde olur:

$$\tau_{11}^0 = 1,\ \tau_{12}^0 = 0,\ \tau_{13}^0 = 0,\ \tau_{21}^0 = -\frac{1}{2},\ \tau_{22}^0 = 0,$$

$$\tau_{23}^0 = -\sqrt{3}/2, \qquad \tau_{31}^0 = -1/2, \qquad \tau_{32}^0 = 0, \qquad \tau_{33}^0 = \sqrt{3}/2. \tag{4.276}$$

Burada, $-\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{xx}} = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} = \nu = \frac{1}{3}$ varsayımı yapılmıştır. Bu bağlamda, Denklem (2.24)'e göre ${\sigma_{xx}}^{(M)}$ ve ${\sigma_{xz}}^{(M)}$ gerilmeleri zigzag kiriş modeli için aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$${\sigma_{xx}}^{(M)} = B_0\left(\varepsilon_{xx} + \frac{\eta_\alpha^2}{12}\varepsilon_{xx,xx} + \frac{\eta_\alpha^2}{32}\varepsilon_{xz,xz}\right) \tag{4.277}$$

$${\sigma_{xz}}^{(M)} = B_0\left(\frac{3}{4}\varepsilon_{xz} + \frac{\eta_\alpha^2}{64}\varepsilon_{xz,xx} + \frac{3\eta_\alpha^2}{64}\varepsilon_{xz,zz}\right) \tag{4.278}$$

$\theta = 30°$ için koltuk kiriş modeli gözlenir. Böylece, Denklem (4.275)'teki birim vektörler aşağıdaki değerleri alır:

$$\tau_{11}^0 = \sqrt{3}/2, \qquad \tau_{12}^0 = 0, \qquad \tau_{13}^0 = 1/2, \qquad \tau_{21}^0 = 0, \qquad \tau_{22}^0 = 0,$$

$$\tau_{23}^0 = -1, \qquad \tau_{31}^0 = -\sqrt{3}/2, \qquad \tau_{32}^0 = 0, \qquad \tau_{33}^0 = 1/2. \tag{4.279}$$

Buna göre, Denklem (4.279) kullanılarak, Denklem (2.24)'e göre ${\sigma_{xx}}^{(M)}$ ve ${\sigma_{xz}}^{(M)}$ gerilmeleri koltuk kiriş modeli için aşağıdaki gibi bulunabilir:

$${\sigma_{xx}}^{(M)} = B_0\left(\varepsilon_{xx} + \frac{\eta_\alpha^2}{16}\varepsilon_{xx,xx} + \frac{3\eta_\alpha^2}{32}\varepsilon_{xz,xz} + \frac{\eta_\alpha^2}{48}\varepsilon_{xx,zz}\right) \tag{4.280}$$

$${\sigma_{xz}}^{(M)} = B_0\left(\frac{3}{4}\varepsilon_{xz} + \frac{3\eta_\alpha^2}{64}\varepsilon_{xz,xx} + \frac{\eta_\alpha^2}{64}\varepsilon_{xz,zz} + \frac{\eta_\alpha^2}{24}\varepsilon_{xx,xz}\right) \tag{4.281}$$

Buna göre, TBT'de yer değiştirme alanı aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$U(x,z,t) = u(x,t) - z\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + f(z)u_1(x,t), \qquad (f(z) = z),$$

$$V(x,z,t) = 0,$$

$$W(x,z,t) = w(x,t). \tag{4.282}$$

ve kiriş kesitinin eğilme deformasyonundan kaynaklanan dönmesi (u_1) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$u_1(x,t) = \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} - \varphi(x,t) \tag{4.283}$$

Burada, *U*, *V* ve *W* sırasıyla *x*, *y* ve *z* Kartezyen koordinatlarındaki yer değiştirme vektörleridir. φ kiriş kesitinin kayma deformasyonundan kaynaklanan dönme açısını, *u* ve *w* ise sırasıyla, kirişin orta düzlemindeki eksenel ve enine yer değiştirmeyi göstermektedir. Kiriş yüksekliği boyunca kayma genlemesi ve kayma gerilmesi dağılımı TBT'de sabit kabul edilir ve kiriş yüksekliği boyunca kayma gerilmesi-genlemesi dağılımını düzeltmek için TBT'de kayma düzeltme faktörü κ kullanılır. Sıfır olmayan diğer eksenel genleme ε_{xx}ve kayma genlemesi ε_{xz} aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + z\frac{\partial u_1}{\partial x} \tag{4.284}$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial x} + u_1 \tag{4.285}$$

Denklemler (4.282-4.285)'te verilen yer değiştirme alanı ifadeleri dikkate alınarak, gerilme ifadeleri bir zigzag kiriş modeli için aşağıdaki biçimde bulunabilir:

$$\sigma_{xx} = E\left(u_{,x} - z\varphi_{,x}\right) + \frac{E\eta^2}{12}\left(u_{,xxx} - z\varphi_{,xxx}\right) \tag{4.286}$$

$$\sigma_{xz} = \frac{3E}{4}\left(w_{,x} - \varphi\right) + \frac{E\eta^2}{64}\left(w_{,xxx} - \varphi_{,xx}\right) \tag{4.287}$$

Burada "$_{,x}$", *x*'e göre kısmi türevi temsil eder. Buna göre, genleme enerjisi (U_k) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U_k = \frac{1}{2}\int_A \int_0^L [\sigma_{xx}^c.\,\varepsilon_{xx} - \sigma_{xx}^d.\,\nabla\varepsilon_{xx} + \sigma_{xz}^c.\,\varepsilon_{xz} - \sigma_{xz}^d.\,\nabla\varepsilon_{xz}]dxdA \tag{4.288}$$

$$\nabla\varepsilon_{xx} = d\varepsilon_{xx}/dx,$$

$$\sigma_{xx}^c = E\varepsilon_{xx},$$

$$\sigma_{xx}^d = \frac{\eta^2}{12}E\varepsilon'_{xx},$$

$$\sigma_{xz}^d = \frac{\eta^2}{12}E\varepsilon'_{xz}. \tag{4.289}$$

Burada, üst simge "^{c}" klasik gerilme bileşenlerini, üst simge "^{d}" ise EM teorisine ait gerilme bileşenlerini temsil eder. Zigzag kiriş modelinin $[t_1, t_2]$ zaman aralığındaki genleme enerjisinin ilk varyasyonu şu şekilde yazılabilir:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} U_k dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \int_A \left\{ [Eu' - Ez\varphi'][u' - z\varphi'] - \left[E\frac{\eta^2}{12} u'' - E\frac{\eta^2}{12} z\varphi'' \right] [u'' - z\varphi''] \right.$$
$$+ \left[\frac{3E}{4} w' - \frac{3E}{4} \varphi \right] [-\varphi + w']$$
$$\left. - \left[-E\frac{\eta^2}{64} \varphi' + E\frac{\eta^2}{64} w'' \right] [-\varphi' + zw'] \right\} dA dx dt \qquad (4.290)$$

Düzlem gerilme durumunda, kayma modülünün $G = E/2(1+\nu) = 3B_0/8 = 3E/8$ varsayılmasıyla, Denklem (4.290)'daki varyasyonel işlem aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\delta U_k = \int_0^L -[EAu'']\delta u dx dt - [EI\varphi'']\delta\varphi dx dt - \left[EA\frac{\eta^2}{12} u^{IV} \right] \delta u dx dt$$
$$- \left[EI\frac{\eta^2}{12} \varphi^{IV} \right] \delta\varphi dx dt - [GA\kappa w']\delta\varphi dx dt + [GA\kappa\varphi]\delta\varphi dx dt$$
$$+ [GA\kappa\varphi']\delta w dx dt - [GAKw'']\delta w dx dt + \left[GA\kappa\frac{\eta^2}{48} \varphi'' \right] \delta\varphi dx dt$$
$$- \left[GA\kappa\frac{\eta^2}{48} w''' \right] \delta\varphi dx dt + \left[GA\kappa\frac{\eta^2}{48} \varphi''' \right] \delta w dx dt$$
$$- \left[GA\kappa\frac{\eta^2}{48} w^{IV} \right] \delta w dx dt + [EAu'\delta u]_0^L dt + [EI\varphi'\delta\varphi]_0^L dt$$
$$- \left[EA\frac{\eta^2}{12} u''\delta u' \right]_0^L dt + \left[EA\frac{\eta^2}{12} u'''\delta u \right]_0^L dt - \left[EI\frac{\eta^2}{12} \varphi''\delta\varphi' \right]_0^L dt$$
$$+ \left[EI\frac{\eta^2}{12} \varphi'''\delta\varphi \right]_0^L dt - [GA\kappa\varphi\delta w]_0^L dt + [GA\kappa w'\delta w]_0^L dt$$
$$- \left[GA\kappa\frac{\eta^2}{48} \varphi'\delta\varphi \right]_0^L dt + \left[GA\kappa\frac{\eta^2}{48} w''\delta\varphi \right]_0^L dt + \left[GA\kappa\frac{\eta^2}{48} \varphi'\delta w' \right]_0^L dt$$
$$- \left[GA\kappa\frac{\eta^2}{48} \varphi''\delta w \right]_0^L dt + \left[GA\kappa\frac{\eta^2}{48} w'''\delta w \right]_0^L dt$$
$$- \left[GA\kappa\frac{\eta^2}{48} w''\delta w' \right]_0^L dt \qquad (4.291)$$

Burada kirişin dönme atalet momenti (I) ve kirişin kesit alanı (A) aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$I = \int_A z^2 dA\,, \qquad A = \int_A bhdA. \tag{4.292}$$

Denklem (4.291)'de görülen κ ifadesi TBT'de kayma düzeltme faktörüdür ve bu çalışma için 5/6 olarak alınmıştır. Ayrıca, dış kuvvetlerin işi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$W_e = \int_0^L qwdx + [Pu]_0^L + [\tilde{P}u']_0^L + [Qw]_0^L + \left[\tilde{Q}w'\right]_0^L - [M\varphi]_0^L + [m\varphi']_0^L \tag{4.293}$$

Burada q yayılı yükü, *P*, *Q*, M_e sırasıyla eksenel kuvveti, kesme kuvvetini ve eğilme momentini, $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$ ve m_e ise sırasıyla eksenel kuvvet çiftini, kesme kuvveti çiftini ve eğilme momenti çiftini göstermektedir. Burada, $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$ ve m_e nin genleme gradyanı nedeniyle ortaya çıktığına dikkat edilmelidir. Son olarak kirişin kinetik enerjisi aşağıdaki gibi yazılır:

$$T_k = \frac{1}{2}\left[\int_0^L (\rho A\dot{u}^2 + \rho A\dot{w}^2 + \rho A\dot{\varphi}^2)\right] dx \tag{4.294}$$

Buna göre, kinetik enerjinin ilk varyasyonu,

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T_k dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (\rho A\ddot{u}\delta u + \rho A\ddot{w}\delta w + \rho I\ddot{\varphi}\delta\varphi)\, dx \tag{4.295}$$

olacak şekilde elde edilebilir. Hamilton prensibi bir Timoshenko kirişi için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta U_k + \delta W_k - \delta T_k) dt = 0 \tag{4.296}$$

Denklemler (4.290), (4.293), (4.295), Denklem (4.296)'da yerine yazılırsa, bir zigzag Timoshenko kiriş modelinin hareket denklemleri aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\begin{aligned}
\delta u: &\quad \rho A\ddot{u} - q - EAu'' - EA\frac{\eta^2}{12}u^{IV} = 0,\\
\delta w: &\quad \rho A\ddot{w} - q + GA\kappa\varphi' - GA\kappa w'' + GA\kappa\frac{\eta^2}{48}\varphi''' - GA\kappa\frac{\eta^2}{48}w^{IV} = -Pw'',\\
\delta\varphi: &\quad \rho I\ddot{\varphi} - EI\varphi'' - EI\frac{\eta^2}{12}\varphi^{IV} - GA\kappa w' + GA\kappa\varphi + GA\kappa\frac{\eta^2}{48}\varphi'' - GA\kappa\frac{\eta^2}{48}w''' \\
&\qquad = 0.
\end{aligned} \tag{4.297}$$

Başlangıç koşulları ise

$$[\rho A\dot{u}\delta w]_{t_1}^{t_2} + [\rho I\dot{\varphi}\delta w]_{t_1}^{t_2} + [\rho A\dot{w}\delta w]_{t_1}^{t_2} = 0 \tag{4.298}$$

olacak şekilde bulunur. Kirişin iki ucundaki ($x = 0$ ve $x = L$) genel sınır koşulları şu şekilde elde edilmektedir:

$$\delta u = 0 \text{ veya } P = \left[EAu' + EA\frac{\eta^2}{12}u'''\right] = 0,$$

$$\delta u' = 0 \text{ veya } \tilde{P} = \left[-EA\frac{\eta^2}{12}u''\right] = 0,$$

$$\delta\varphi = 0 \text{ veya } M_e = \left[EI\varphi' + EI\frac{\eta^2}{12}\varphi''' - GA\kappa\frac{\eta^2}{48}\varphi' + GA\kappa\frac{\eta^2}{48}w''\right] = 0,$$

$$\delta\varphi' = 0 \text{ veya } m_e = \left[-EI\frac{\eta^2}{12}\varphi''\right] = 0,$$

$$\delta w = 0 \text{ veya } Q = \left[-GA\kappa\varphi + GA\kappa w' - GA\kappa\frac{\eta^2}{48}\varphi'' + GA\kappa\frac{\eta^2}{48}w'''\right] = 0,$$

$$\delta w' = 0 \text{ veya } \tilde{Q} = \left[GA\kappa\frac{\eta^2}{48}\varphi' - GA\kappa\frac{\eta^2}{48}w''\right] = 0. \tag{4.299}$$

Ayrıca, Denklemler (4.282-4.285)'te verilen yer değiştirme alanı ifadeleri kullanılarak, bir koltuk kiriş modeli için gerilme bileşenleri aşağıdaki biçimde bulunabilir:

$$\sigma_{xx} = E\left(u_{,x} - z\varphi_{,x}\right) + \frac{E\eta^2}{16}\left(u_{,xxx} - z\varphi_{,xxx}\right) \tag{4.300}$$

$$\sigma_{xz} = \frac{3E}{4}\left(w_{,x} - \varphi\right) - \frac{17E\eta^2}{192}\varphi_{,xx} + \frac{3E\eta^2}{64}w_{,xxx} \tag{4.301}$$

Zigzag kiriş modeline benzer şekilde, koltuk kiriş modeline ait hareket denklemleri ve genel sınır koşullarını veren ifadeleri bulmak için de aynı prosedür uygulanabilir. Denklemler (4.300) ve (4.301)'in integrali alınarak ve Denklem (4.296)'daki Hamilton prensibi kullanılarak, Timoshenko koltuk kiriş modelinin hareket denklemleri şu şekilde elde edilebilir:

$$\delta u: \quad \rho A\ddot{u} - q - EAu'' - EA\frac{\eta^2}{16}u^{IV} = 0,$$

$$\delta w: \quad \rho A\ddot{w} - q + GA\kappa\varphi' - GA\kappa w'' + \frac{13}{9}GA\kappa\frac{\eta^2}{16}\varphi''' - GA\kappa\frac{\eta^2}{16}w^{IV} = -Pw'',$$

$$\delta\varphi: \quad \rho I\ddot{\varphi} - EI\varphi'' - EI\frac{\eta^2}{16}\varphi^{IV} - GA\kappa w' + GA\kappa\varphi + \frac{17}{9}GA\kappa\frac{\eta^2}{16}\varphi''$$
$$- \frac{13}{9}GA\kappa\frac{\eta^2}{16}w''' = 0. \tag{4.302}$$

Genel sınır koşulları ise

$$\delta u = 0 \text{ veya } P = \left[EAu' + EA\frac{\eta^2}{16}u'''\right] = 0,$$

$$\delta u' = 0 \text{ veya } \tilde{P} = \left[-EA\frac{\eta^2}{16}u''\right] = 0,$$

$$\delta\varphi = 0 \text{ veya } M_e = \left[EI\varphi' + EI\frac{\eta^2}{16}\varphi''' - \frac{17}{9}GA\kappa\frac{\eta^2}{16}\varphi' + \frac{13}{9}GA\kappa\frac{\eta^2}{16}w''\right] = 0,$$

$$\delta\varphi' = 0 \text{ veya } m_e = \left[-EI\frac{\eta^2}{16}\varphi''\right] = 0,$$

$$\delta w = 0 \text{ veya } Q = \left[-GA\kappa\varphi + GA\kappa w' - \frac{13}{9}GA\kappa\frac{\eta^2}{16}\varphi'' + GA\kappa\frac{\eta^2}{16}w'''\right] = 0,$$

$$\delta w' = 0 \text{ veya } \tilde{Q} = \left[\frac{13}{9}GA\kappa\frac{\eta^2}{16}\varphi' - GA\kappa\frac{\eta^2}{16}w''\right] = 0. \qquad (4.303)$$

olacak şekilde elde edilmektedir. Burada, hareket denklemlerinin ve sınır koşulları denklemlerinin katsayılarının, zigzag ve koltuk Timoshenko kiriş modelleri için farklı olduğu açıkça görülmektedir. Bu fark, malzemenin atomik yapısının her iki kiriş modeli için farklı şiral açısına sahip olmasından kaynaklanmaktadır.

Düzgün yayılı bir yüke maruz kalan B-B bir Timoshenko kirişi düşünüldüğünde, aşağıdaki yer değiştirme alanları, bu B-B kirişin sınır koşullarını otomatik olarak karşılar.

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad \varphi(x) = \varphi_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \qquad (4.304)$$

Burada, W_n ve φ_n Fourier katsayılarıdır. Statik eğilme problemi için, tüm zamana bağlı türevler ve Denklemler (4.297), (4.302)'deki burkulma yükleri sıfıra eşittir. Böylece, bir zigzag Timoshenko kirişinin yönetici denklemleri, aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$-q(x) + GA\kappa\varphi' - GA\kappa w'' + GA\kappa\frac{\eta^2}{48}\varphi''' - GA\kappa\frac{\eta^2}{48}w^{IV} = 0 \qquad (4.305a)$$

$$-EI\varphi'' - EI\frac{\eta^2}{12}\varphi^{IV} - GA\kappa w' + GA\kappa\varphi + GA\kappa\frac{\eta^2}{48}\varphi'' - GA\kappa\frac{\eta^2}{48}w''' = 0 \qquad (4.305b)$$

Daha sonra, kiriş üzerine uygulanan yük $q(x)$, Fourier serisinde Denklem (4.22)'deki gibi genişletilebilir. Mevcut çalışma için, $q(x)$ düzgün yük olarak seçilmiştir, böylece Q_n katsayısı da Denklem (4.23)'teki halini alır. Buna göre, Denklemler (4.22,4.23)'ü kullanıp ve Denklem (4.304), Denklem (4.305a,4.305b)'de yerine yazılırsa aşağıdaki denklem sistemi elde edilebilir:

$$\left[-GA\kappa\frac{n\pi}{L}+GA\kappa\frac{\eta^2}{48}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^3\right]\varphi_n+\left[GA\kappa\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2-GA\kappa\frac{\eta^2}{48}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4\right]w_n=\frac{4q_0}{n\pi},$$

$$\left[EI\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2-EI\frac{\eta^2}{12}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4+GA\kappa-GA\kappa\frac{\eta^2}{48}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right]\varphi_n$$

$$+\left[-GA\kappa\frac{n\pi}{L}+GA\kappa\frac{\eta^2}{48}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^3\right]w_n=0. \tag{4.306}$$

Denklem (4.306) boyutsuz formda çözülerek, B-B destekli zigzag Timoshenko mikro-nanokiriş modelinin dönme açısı ve statik eğilmesi EM teorisi çerçevesinde aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\bar{\varphi}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\bar{q}}{n\pi\left(n^3\pi^3-\frac{\beta^2}{12}n^5\pi^5\right)}cosn\pi\bar{x} \tag{4.307}$$

$$\bar{w}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{4\bar{q}}{n\pi}\left(\alpha_1-\left(\frac{-n\pi+\frac{\beta^2}{48}n^3\pi^3}{n^3\pi^3-\frac{\beta^2}{12}n^5\pi^5}\right)\right)}{n^2\pi^2-\frac{\beta^2}{48}n^4\pi^4}sinn\pi\bar{x} \tag{4.308}$$

Burada boyutsuz parametreler

$$\bar{\varphi}=\varphi_n,\qquad \bar{q}=\frac{q_0L^3}{EI},\quad \alpha_1=\frac{EI}{GA\kappa L^2}. \tag{4.309}$$

olacak şekilde tanımlanmaktadır.

B-B koltuk modeline sahip Timoshenko mikro-nano-kirişinde dönme açısı ve statik eğilme ifadeleri benzer bir işlem uygulanarak elde edilebilir. Buna göre, koltuk kiriş modeli için, eksenel deformasyon olmadığı varsayılarak statik yönetici denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$-q(x)+GA\kappa\varphi'-GA\kappa w''+\frac{13}{9}GA\kappa\frac{\eta^2}{16}\varphi'''-GA\kappa\frac{\eta^2}{16}w^{IV}=0 \tag{4.310a}$$

$$-EI\varphi''-EI\frac{\eta^2}{16}\varphi^{IV}-GA\kappa w'+GA\kappa\varphi+\frac{17}{9}GA\kappa\frac{\eta^2}{16}\varphi''-\frac{13}{9}GA\kappa\frac{\eta^2}{16}w'''=0 \tag{4.310b}$$

Denklemler (4.22,4.23) kullanılarak ve Denklem (4.304), Denklem (4.310a,4.310b)'de yerine yazılarak,

$$\left[-GA\kappa\frac{n\pi}{L}+\frac{13}{9}GA\kappa\frac{\eta^2}{16}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^3\right]\varphi_n+\left[GA\kappa\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2-GA\kappa\frac{\eta^2}{16}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4\right]w_n=\frac{4q_0}{n\pi},$$

$$\left[EI\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - EI\frac{\eta^2}{16}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 + GA\kappa - \frac{17}{9}GA\kappa\frac{\eta^2}{16}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right]\varphi_n$$

$$+\left[-GA\kappa\frac{n\pi}{L} + \frac{13}{9}GA\kappa\frac{\eta^2}{48}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^3\right]w_n = 0. \quad (4.311)$$

olacak şekilde denklem sistemi elde edilebilir. Daha sonra, Denklem (4.311) boyutsuz formda çözülerek, B-B destekli koltuk modele sahip Timoshenko mikro-nanokirişinin dönme açısı ve statik eğilmesi EM teorisi çerçevesinde aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\bar{\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{4\bar{q}\alpha_1}{n\pi}\left(1 - \frac{b_1}{\left(b_1 - \frac{d_1 a_1}{c_1}\right)}\right)}{a_1} cosn\pi\bar{x} \quad (4.312)$$

$$\bar{w} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{4\bar{q}}{n\pi}\alpha_1}{\left(b_1 - \frac{d_1 a_1}{c_1}\right)} sinn\pi\bar{x} \quad (4.313)$$

Yukarıdaki denklemlerde görülen boyutsuz parametreler aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$a_1 = -n\pi + \frac{13}{9}\frac{\beta^2}{16}n^3\pi^3, \qquad b_1 = n^2\pi^2 - \frac{\beta^2}{16}n^4\pi^4,$$

$$c_1 = \alpha_1 n^3\pi^3 - \alpha_1\frac{\beta^2}{16}n^5\pi^5 + n\pi - \frac{17}{9}\frac{\beta^2}{16}n^3\pi^3, \qquad d_1 = -n^2\pi^2 + \frac{13}{9}\frac{\beta^2}{16}n^4\pi^4. \quad (4.314)$$

Denklemler (4.307), (4.308), (4.312), (4.313)'te uzunluk ölçeği parametresi η = 0 alındığında klasik TBT'ye ait sonuçlar elde edilir. Klasik TBT, hem zigzag hem de koltuk kiriş modelleri için EM teorisinden daha düşük bir dönme ve daha düşük bir eğilme değeri vermektedir.

B-B sınır koşuluna sahip zigzag mikro-nanokiriş modelinin burkulma problemini araştırmak için Denklem (4.297), q ve tüm zamana bağlı terimlerin türevleri sıfıra eşitlenerek aşağıdaki gibi yeniden ifade edilebilir:

$$GA\kappa\varphi' - GA\kappa w'' + GA\kappa\frac{\eta^2}{48}\varphi''' - GA\kappa\frac{\eta^2}{48}w^{IV} + Pw'' = 0 \quad (4.315a)$$

$$-EI\varphi'' - EI\frac{\eta^2}{12}\varphi^{IV} - GA\kappa w' + GA\kappa\varphi + GA\kappa\frac{\eta^2}{48}\varphi'' - GA\kappa\frac{\eta^2}{48}w''' = 0 \quad (4.315b)$$

Denklem (4.304), Denklemler (4.315a,4.315b)'de yerine yazılırsa, aşağıdaki boyutsuz denklem elde edilebilir:

$$\begin{bmatrix} n^2\pi^2 - \frac{1}{48}\beta^2 n^4\pi^4 - \bar{P}\alpha_1 n^2\pi^2 & -n\pi + \frac{1}{48}\beta^2 n^3\pi^3 \\ -n\pi + \frac{1}{48}\beta^2 n^3\pi^3 & \alpha_1 n^2\pi^2 - \alpha_1\frac{1}{12}\beta^2 n^4\pi^4 + 1 - \frac{1}{48}\beta^2 n^2\pi^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{W} \\ \bar{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.316)$$

Denklem (4.316)'nın aşikar olmayan çözümü için, Denklemin katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşitlenir. Böylece, zigzag Timoshenko mikrokiriş modeli için boyutsuz kritik burkulma yükü elde edilebilir.

Ayrıca, B-B koltuk mikro-nano-kiriş modelinin burkulma problemini araştırmak için Denklem (4.302), q ve zamana bağlı terimlerin türevlerinin sıfıra eşitlenmesiyle izleyen şekilde yeniden ifade edilebilir:

$$GA\kappa\varphi' - GA\kappa w'' + \frac{13}{9}GA\kappa\frac{\eta^2}{16}\varphi''' - GA\kappa\frac{\eta^2}{16}w^{IV} + Pw'' = 0 \quad (4.317a)$$

$$-EI\varphi'' - EI\frac{\eta^2}{16}\varphi^{IV} - GA\kappa w' + GA\kappa\varphi + \frac{17}{9}GA\kappa\frac{\eta^2}{16}\varphi'' - \frac{13}{9}GA\kappa\frac{\eta^2}{16}w''' = 0 \quad (4.317b)$$

Denklem (4.304), Denklemler (4.317a,4.317b)'de yerine yazılırsa, aşağıdaki boyutsuz denklem sistemi elde edilebilir:

$$\begin{bmatrix} n^2\pi^2 - \frac{1}{16}\beta^2 n^4\pi^4 - \bar{P}\alpha_1 n^2\pi^2 & -n\pi + \frac{13}{9}\frac{1}{16}\beta^2 n^3\pi^3 \\ -n\pi + \frac{13}{9}\frac{1}{16}\beta^2 n^3\pi^3 & \alpha_1 n^2\pi^2 - \alpha_1\frac{1}{16}\beta^2 n^4\pi^4 + 1 - \frac{17}{9}\frac{1}{16}\beta^2 n^2\pi^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{W} \\ \bar{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.318)$$

Denklem (4.318)'de katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşitlenerek koltuk mikrokiriş modeline ait boyutsuz kritik burkulma yükleri kolayca bulunabilir. Denklemler (4.316) ve (4.318)'de uzunluk ölçeği parametresi η = 0 alındığında klasik TBT'ye ait sonuçlar elde edilir. Klasik TBT, hem zigzag hem de koltuk kiriş modelleri için mevcut EM teorisinden daha yüksek kritik burkulma yükü değerleri vermektedir.

Son olarak, zigzag Timoshenko kiriş modelinin titreşim durumunu araştırmak için Denklem (4.297), q ve P yükü değerleri sıfıra eşitlenerek aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$\rho A\ddot{w} + GA\kappa\varphi' - GA\kappa w'' + GA\kappa\frac{\eta^2}{48}\varphi''' - GA\kappa\frac{\eta^2}{48}w^{IV} = 0 \quad (4.319a)$$

$$\rho I\ddot{\varphi} - EI\varphi'' - EI\frac{\eta^2}{12}\varphi^{IV} - GA\kappa w' + GA\kappa\varphi + GA\kappa\frac{\eta^2}{48}\varphi'' - GA\kappa\frac{\eta^2}{48}w''' = 0 \quad (4.319b)$$

w ve φ yer değiştirmeleri, Fourier serisinde aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{i\omega_n t}, \qquad \varphi(x) = \varphi_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{i\omega_n t}. \tag{4.320}$$

Buna göre Denklem (4.320), Denklemler (4.319a,4.319b)'de yerine yazılırsa, aşağıdaki boyutsuz denklem sistemi elde edilebilir:

$$\begin{bmatrix} -\Omega^2\alpha_1 + n^2\pi^2 - \frac{1}{48}\beta^2 n^4\pi^4 & -n\pi + \frac{1}{48}\beta^2 n^3\pi^3 \\ -n\pi + \frac{1}{48}\beta^2 n^3\pi^3 & -\Omega^2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1 n^2\pi^2 + 1 - \frac{1}{48}\beta^2 n^2\pi^2 - \frac{1}{12}\alpha_1\beta^2 n^4\pi^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{w} \\ \bar{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.321}$$

Yukarıda, boyutsuz frekans parametresi Ω ve α_2 aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\Omega = \sqrt{\frac{\rho A\omega^2 L^4}{EI}}, \quad \alpha_2 = \frac{I}{AL^2}. \tag{4.322}$$

Daha sonra, Denklem (4.322)'de katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşitlenerek zigzag mikrokiriş modeline ait boyutsuz doğal frekanslar kolayca bulunabilir.

Benzer şekilde, B-B koltuk mikro-nanokiriş modelinin boyutsuz doğal frekanslarını elde etmek için Denklem (4.302), q ve P sıfıra eşitlenerek aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$\rho A\ddot{w} + GA\kappa\varphi' - GA\kappa w'' + \frac{13}{9}GA\kappa\frac{\eta^2}{16}\varphi''' - GA\kappa\frac{\eta^2}{16}w^{IV} = 0 \tag{4.323a}$$

$$\rho I\ddot{\varphi} - EI\varphi'' - EI\frac{\eta^2}{16}\varphi^{IV} - GA\kappa w' + GA\kappa\varphi + \frac{17}{9}GA\kappa\frac{\eta^2}{16}\varphi'' - \frac{13}{9}GA\kappa\frac{\eta^2}{16}w''' = 0 \tag{4.323b}$$

Buna göre Denklem (4.320), Denklemler (4.323a,4.323b)'de yerine yazılırsa, aşağıdaki boyutsuz denklem sistemi elde edilebilir:

$$\begin{bmatrix} -\Omega^2\alpha_1 + n^2\pi^2 - \frac{1}{16}\beta^2 n^4\pi^4 & -n\pi + \frac{13}{9}\frac{1}{16}\beta^2 n^3\pi^3 \\ -n\pi + \frac{13}{9}\frac{1}{16}\beta^2 n^3\pi^3 & -\Omega^2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1 n^2\pi^2 + 1 - \frac{17}{9}\frac{1}{48}\beta^2 n^2\pi^2 - \frac{1}{16}\alpha_1\beta^2 n^4\pi^4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \overline{w} \\ \bar{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.324}$$

Denklemler (4.321) ve (4.324)'te iç uzunluk ölçeği parametresi sıfıra eşitlendiğinde klasik TBT'ye ait doğal frekans değerleri bulunabilir. Klasik TBT, hem zigzag hem de koltuk kiriş modelleri için mevcut EM teorisinden daha yüksek doğal frekans değerleri vermektedir. Denklemler (4.321) ve (4.324)'ün çözümü TBT için birinci mertebe (birinci

spektrum) ve ikinci mertebe (ikinci spektrum) titreşim frekansı olarak tanımlanan iki kök vermektedir (Abbas & Thomas, 1977). Bu çalışmada, bu frekans parametrelerinin her ikisi de incelenmiştir.

BÖLÜM 5

SAYISAL SONUÇLAR

5.1. Giriş

Bu bölümde, bir önceki bölümde EM teorisi çerçevesinde analitik çözümleri verilen nano yapıların (nanoçubuk, nanokiriş) statik ve dinamik davranışlarına ait sayısal sonuçları gösterilmektedir. EM teorisinin geçerliliğini araştırmak için, literatürde bulunan bazı ölçek etkisini dikkate alan sürekli ortam teorileri ve deneysel çalışmalar, EM teorisinden elde edilen sonuçlarla kıyaslanmıştır. Bu bölümde elde edilen sonuçlara bakılarak, EM teorisinin nano/mikro ölçekli yapıların mekanik modellenmesinde kullanılabileceği gösterilmiştir.

5.2. Nanoçubuk ve Nanokirişlerin Statik ve Dinamik Sonuçları

Bu bölümde, nanoçubuk ve nanokirişlerin statik ve dinamik analizleri neticesinde elde edilen sayısal sonuçlar sunulmaktadır. Burada nanotüplere ait malzeme özellikleri, E=1.03 TPa ve ρ=2300 kg/m^3 olarak kabul edilmiştir (Thostenson, Ren, & Chou, 2001). Geometrik özellikler ise şu şekilde kabul edilmiştir: Nanotüpün iç yarıçapı $R1$ =0.5 nm ve nanotüp kalınlığı t_k = 0.34 nm'dir (Dresselhaus, Dresselhaus, & Saito, 1995). Buna göre nanotüp kesitinin alanı ve atalet momenti şu şekilde yazılabilir:

$$A = \pi(R_2^2 - R_1^2), \quad I = \frac{\pi(R_2^4 - R_1^4)}{4}. \tag{5.1}$$

Bu tez çalışmasında kullanılan EM teorisinin geçerliliğini araştırmak amacıyla, farklı teoriler ve deneysel çalışmalardan elde edilen eksenel frekans değerleri Çizelge 5.l'de grafit atomu için dalga yayınımı analizi gerçekleştirilerek karşılaştırılmıştır. Grafitin malzeme özellikleri E=345 GPa, ρ=2266 kg/m^3, η=0.246 nm ve grafit iç yarıçapı R_1=0.5 nm olarak alınmıştır (Aizawa vd., 1990). LE ve SG teorileri ile karşılaştırıldığında, EM

ile deneysel sonuçların çok daha yakın tahmin edildiği görülmektedir. EM'nin deneysel sonuçlarla uyumu ilk Brillouin bölgesinin yakınında daha belirgindir ($k/k_{\max}$ =0.5).

Farklı teoriler kullanılarak öngörülen boyutsuz yer değiştirmeler ise Çizelgeler 5.2-5.4'te gösterilmektedir. EM teorisinin yumuşatma etkisi nedeniyle LE sonuçlarından daha yüksek sonuçlar verdiği, SG teorisi için ise tersinin geçerli olduğu görülmektedir. Hem EM hem de SG sonuçları artan çubuk veya kiriş uzunluğuyla LE sonuçlarına yakınlaşır. Yerel olmayan etkiler nanotüp uzunluğunun artmasıyla ortadan kalkmaktadır.

Çizelge 5.5'te farklı teoriler için, farklı uzunluklarda kritik burkulma yükleri verilmiştir. EM teorisi, özellikle düşük L değerleri için daha düşük kritik burkulma yükü vermektedir. SG teorisinde, L uzunluğunun artmasıyla kritik burkulma yükü azalmaktadır. Belirli bir kiriş uzunluğundan (L = 25 nm) sonra, tüm teoriler aynı değere yakınsamaktadır.

Çizelge 5.6'da, ilk üç moddaki boyutsuz titreşim frekansı parametreleri gösterilmektedir. Burkulma durumuna benzer şekilde, EM tarafından öngörülen titreşim frekansı değerleri, LE sonuçlarından daha düşüktür, oysa SG teorisi için LE teorisinden daha yüksek sonuçlar elde edilmektedir. Bu teoriler ile LE teorisi arasındaki fark, mod sayısının artmasıyla ve kiriş uzunluğunun azalmasıyla artmaktadır. Dalga boyunun azalması ile yerel olmayan etkiler artar ve LE ile yerel olmayan modeller arasındaki fark önem kazanır.

Çizelge 5.1. LE, DM, SG ve Deneysel (Aizawa vd., 1990) çalışmalar için farklı indirgenmiş dalga sayılarında (k/k_{max}) grafitin eksenel dalga frekansı (THz).

İndirgenmiş dalga sayısı ($k/k_{\max}$)	LE	EM	Deneysel	SG
0.2	10.0317	9.3483	7.2500	16.1106
0.4	20.0634	13.8076	12.6940	54.2697

Çizelge 5.2. A-A nanoçubuklarda boyutsuz yer değiştirme ($\bar{x}$=0.5).

cd	LE	EM	SG (Tsepoura, Papargyri-Beskou, Polyzos, & Beskos, 2002)
0.05	0.1250	0.1254	0.1237
0.2	0.1250	0.1329	0.1082

(*$cd=\eta/L$)

Çizelge 5.3. B-B nanokirişlerde boyutsuz yer değiştirme ($\bar{x}$=0.5).

cd	LE	EM	SG (Papargyri-Beskou, Polyzos, & Beskos, 2003)
0.005	0.0130	0.0130	0.0130
0.01	0.0130	0.0130	0.0130
0.05	0.0130	0.0130	0.0127
0.1	0.0130	0.0131	0.0118
0.5	0.0130	0.0165	0.0128

Çizelge 5.4. B-B nanokirişlerde farklı uzunluklarda boyutsuz yer değiştirme ($\bar{x}$=0.5).

Uzunluk, *L* (nm)	LE	EM	SG
1	0.0130	0.0132	0.0108
1.5	0.0130	0.0131	0.0119
2	0.0130	0.0131	0.0124
5	0.0130	0.0130	0.0130

Çizelge 5.5. B-B nanokirişlerde farklı uzunluklarda kritik burkulma yükü değerleri.

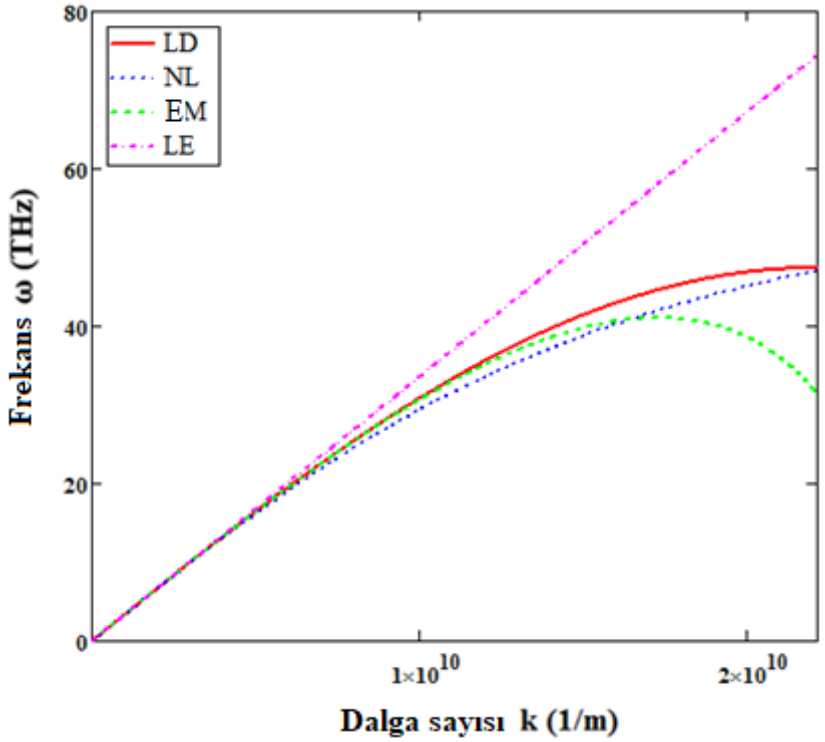
Mod sayısı	*L* (nm)	LE	EM	SG
	1	9.8696	9.7057	11.8365
	1.5	9.8696	9.7967	10.7438
n=1	2	9.8696	9.8286	10.3613
	5	9.8696	9.8630	9.9482
	10	9.8696	9.8670	9.8710
	25	9.8696	9.8670	9.8670

Çizelge 5.6. B-B nanokirişlerde farklı uzunluklarda boyutsuz frekans parametreleri.

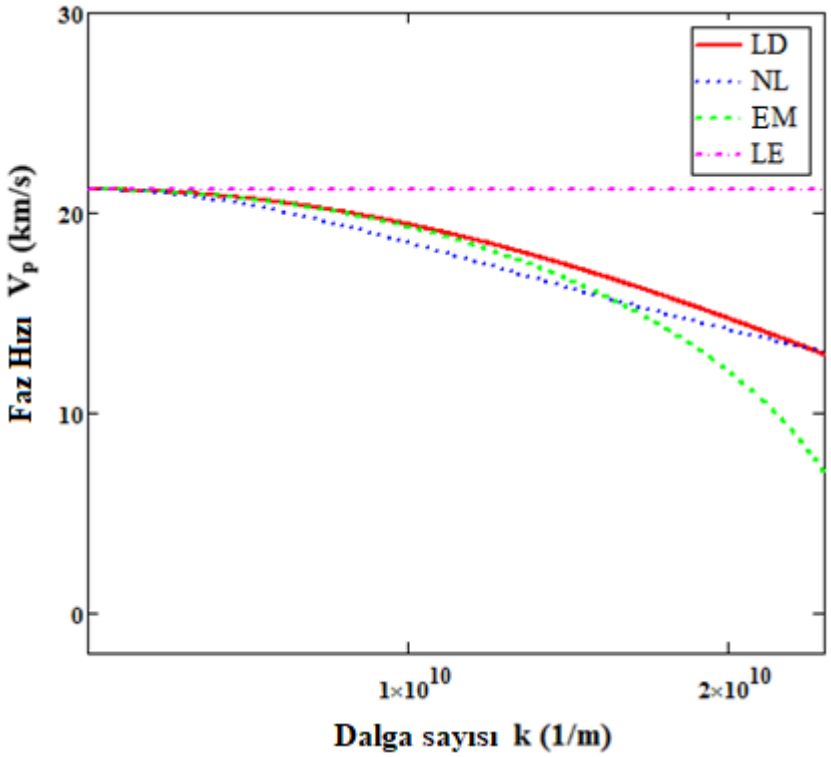
Mod sayısı	L (nm)	LE	EM	SG
	1	9.8696	9.7873	10.8084
	1.5	9.8696	9.8331	10.2974
n=1	2	9.8696	9.8491	10.1124
	5	9.8696	9.8663	9.9088
	25	9.8696	9.8670	9.8710
	1	39.4784	38.1446	52.9241
	1.5	39.4784	38.8912	45.9427
n=2	2	39.4784	39.1492	43.2336
	5	39.4784	39.4259	40.1029
	25	39.4784	39.4763	39.5035
	1	88.8264	81.9195	106.9023
	1.5	88.8264	85.8253	119.0792
n=3	2	88.8264	87.1510	106.9023
	5	88.8264	88.5605	91.9576
	25	88.8264	88.8158	88.9538

Nanoçubukta eksenel dalga yayınımı; EM, Kafes Dinamiği (LD), NL ve klasik elastisite (LE) teorileri için Şekiller (5.1-5.3)'te gösterilmektedir. LE teorisinde dalga sayısı ile birlikte dalga frekansı doğrusal olarak artmaktadır. EM modeli, k dalga sayısı $1.5\text{x}10^{10}$ dan az olduğunda LE teorisi ile uyumludur. LE ve EM modelleri arasındaki fark k dalga sayısı arttıkça artmaktadır. Şekiller (5.1-5.3)'te yatay eksen (dalga sayısı) birinci Brillouin bölgesinin sonuyla sınırlıdır ve bu sınır π/η olarak tanımlanır. Dalga boyunun 0.4 nm'den yüksek olduğu durumda, EM ile LD yaklaşık olarak aynı sonuçları verir. Dalga sayısı $1.8\text{x}10^{10}$ dan az olduğunda, EM teorisinin doğruluğu NL teorisinden daha iyidir. Şekiller (5.2,5.3)'te dalga sayısı ile faz ve grup hızlarının değişimi gösterilmektedir. LE teorisi için her iki hızın k dalga sayısı ile değişmediği görülmektedir. Buna karşılık, EM teorisinde her iki hız da sıfıra gider ve böylece dalganın durağan

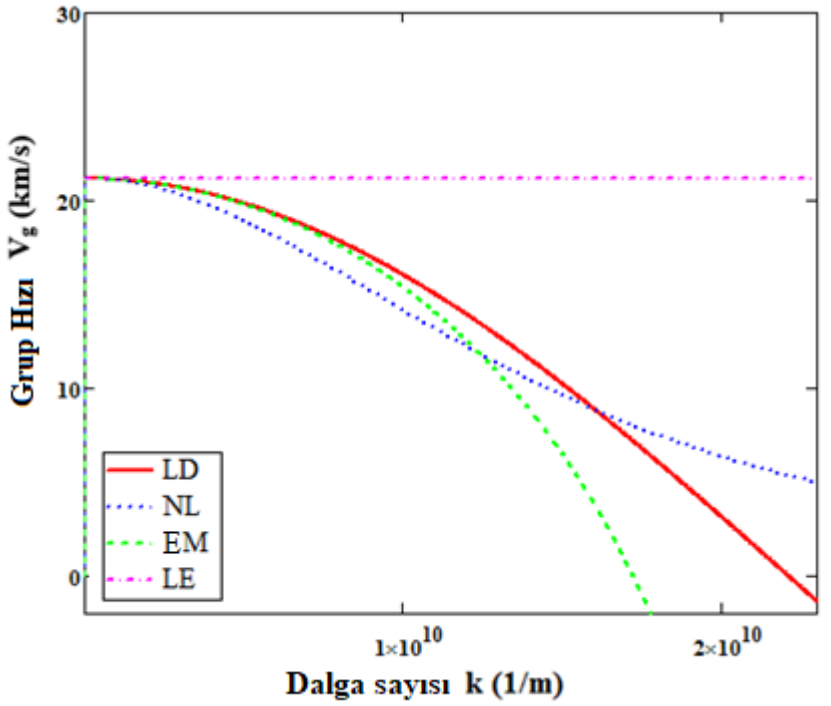
durumu gösterilebilir. Dalga frekansı dalga boyu ilişkisine benzer şekilde, dalga boyunun 0.4 nm'den yüksek olduğu durumda, EM ile LD yaklaşık olarak aynı faz hızı ve grup hızı değerlerini vermektedir. NL modeli, Brillouin bölgesinin sonunda LD ile aynı sonucu vermesine rağmen, tüm bölge için farklı sonuçlar vermektedir. EM sonuçları Van Hove tekilliğine (grup hızı sıfırdır) sahiptir (Şekil 5.3). EM teorisinin grup hızı için doğruluğu, faz hızı için elde edilen doğruluktan daha kötüdür.



Şekil 5.1. Nanoçubukların farklı teorilerdeki dalga yayınım eğrileri (LE:Klasik Elastisite, LD: Kafes Dinamiği, NL: Yerel olmayan elastisite, EM: Eşil Mekanik ($\eta = 0.1421$ nm)).



Şekil 5.2. Nanoçubukların farklı teorilerdeki faz hızı değerleri ($\eta = 0.1421$ nm).



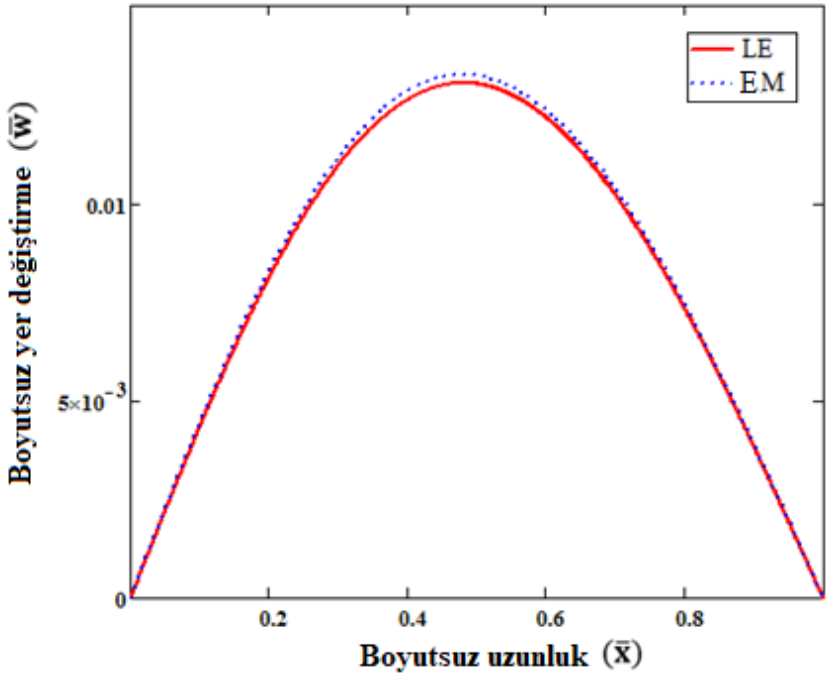
Şekil 5.3. Nanoçubukların farklı teorilerdeki grup hızı değerleri ($\eta = 0.1421$ nm).

Düzgün yayılı yüke sahip bir nanokirişin burkulması, Şekil 5.4'te B-B sınır koşulları için gösterilmektedir. EM teorisinin kiriş uzunluğu boyunca LE teorisinden daha

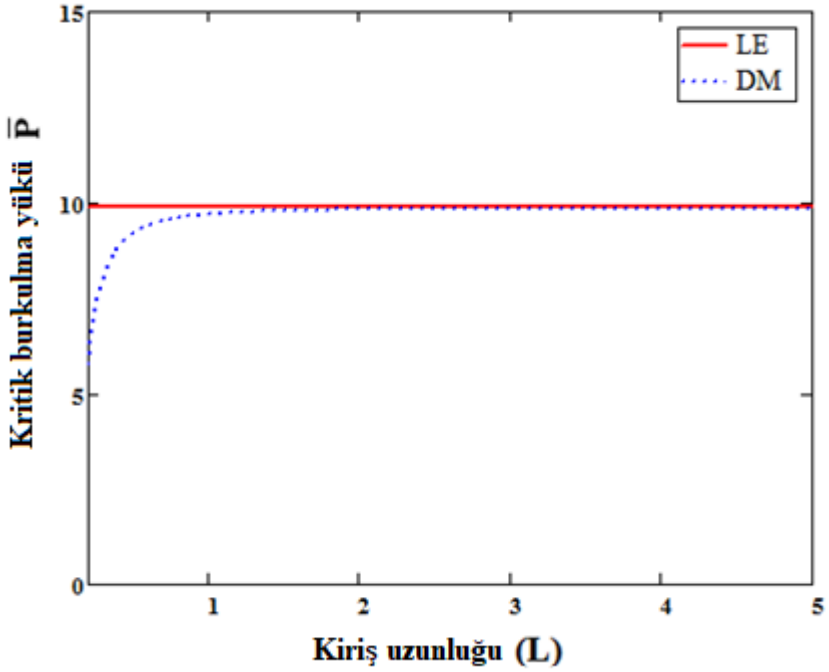
yüksek burkulma değerleri öngördüğü görülmektedir. Bu durum, EM teorisindeki genleme gradyan etkilerinden kaynaklanmaktadır. İki teori arasındaki fark, desteklerden daha uzak bir noktada daha yüksektir.

Şekil 5.5, boyutsuz kritik burkulma yüklerinin nanokiriş uzunluğu ile değişimini göstermektedir. EM tarafından öngörülen boyutsuz kritik burkulma yükü değerleri, özellikle düşük nanokiriş uzunluğu için LE modelinden daha azdır. Belli bir kiriş uzunluğundan sonra ise boyutsuz burkulma yükü değerleri LE çözümüne yakınsamaktadır.

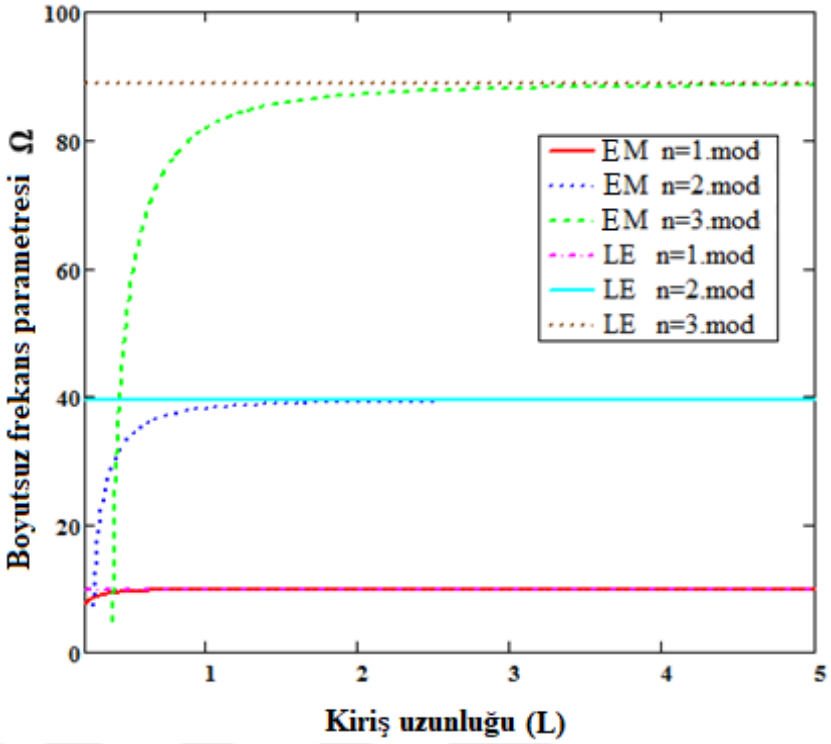
EM ve LE teorileri ile elde edilen ilk üç boyutsuz titreşim frekansı parametresi Şekil 5.6'da gösterilmektedir. Burkulma durumuna benzer şekilde, EM teorisinden elde edilen titreşim frekansı parametreleri, LE sonuçlarından daha küçüktür. İki teori arasındaki fark, yüksek titreşim modlarında daha belirgindir. Bu durum, mod sayısının artmasıyla dalga boyunun azalmasından kaynaklanmaktadır. Ölçek etkileri, nanokirişin iç uzunluğuna kıyasla küçük dalga boylarında daha belirgindir. EM sonuçları, kiriş uzunluğunun artmasıyla LE sonuçlarına yakınsamaktadır. Boyutsuz frekans parametresinin mod sayısı ile değişimi ise Şekil 5.7'de L=1 nm için gösterilmektedir. Burada, EM ile LE arasındaki farkın yüksek titreşim modlarında daha belirgin olduğu görülmektedir. Şekil 5.8'de, ilk üç titreşim frekansının, eşil mesafe (uzunluk ölçek parametresi) ile değişimi verilmiştir. Eşil mesafenin artmasıyla tüm frekans değerlerinin azaldığı görülmektedir. Bu azalma, mod sayısının artmasıyla daha açık bir şekilde görülebilir. Bu durumda titreşimin dalga boyu, mod sayısının artmasıyla azalarak eşil mesafeye yaklaşmaktadır.



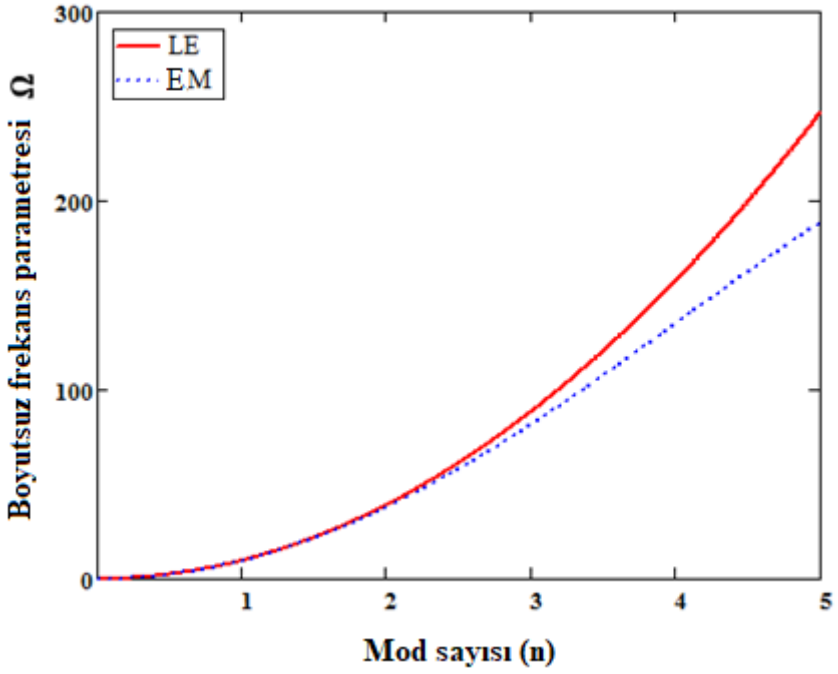
Şekil 5.4. Nanokirişlerin boyutsuz yer değiştirmesi (L=1 nm, $\eta = 0.1421$ nm).



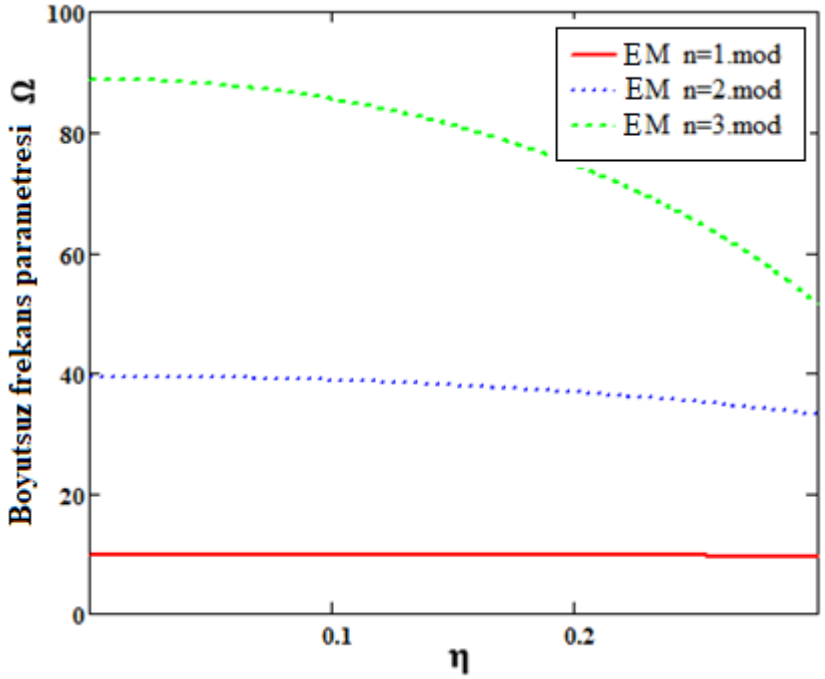
Şekil 5.5. Nanokirişlerin kritik burkulma yüklerinin kiriş uzunluğu ile değişimi ($\eta = 0.1421$ nm).



Şekil 5.6. Nanokirişlerin ilk üç moddaki boyutsuz frekans parametrelerinin kiriş uzunluğu ile değişimi ($\eta = 0.1421$ nm).



Şekil 5.7. Nanokirişlerin boyutsuz frekans parametrelerinin mod sayısı ile değişimi (L=1 nm, $\eta = 0.1421$ nm).

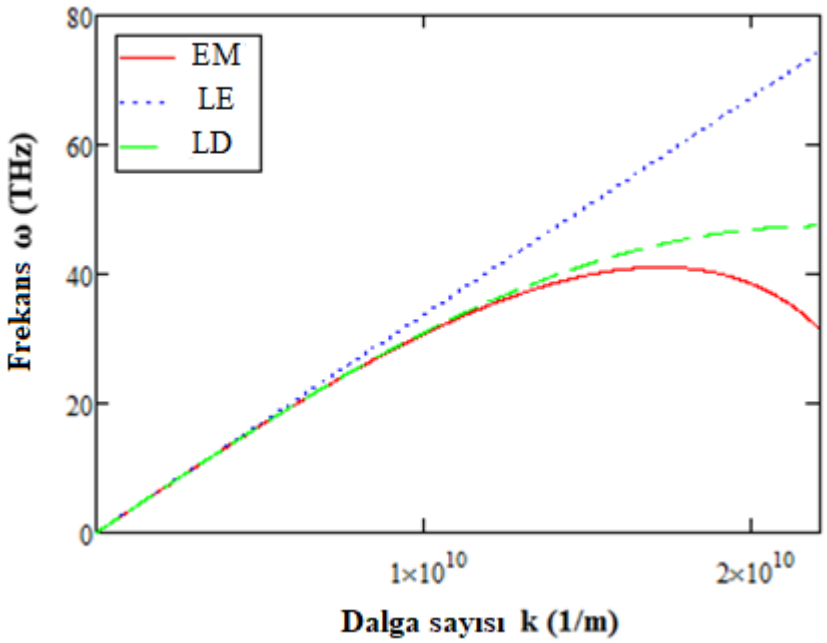


Şekil 5.8. Nanokirişlerin boyutsuz frekans parametrelerinin eşil mesafe (η) ile değişimi (L=1 nm).

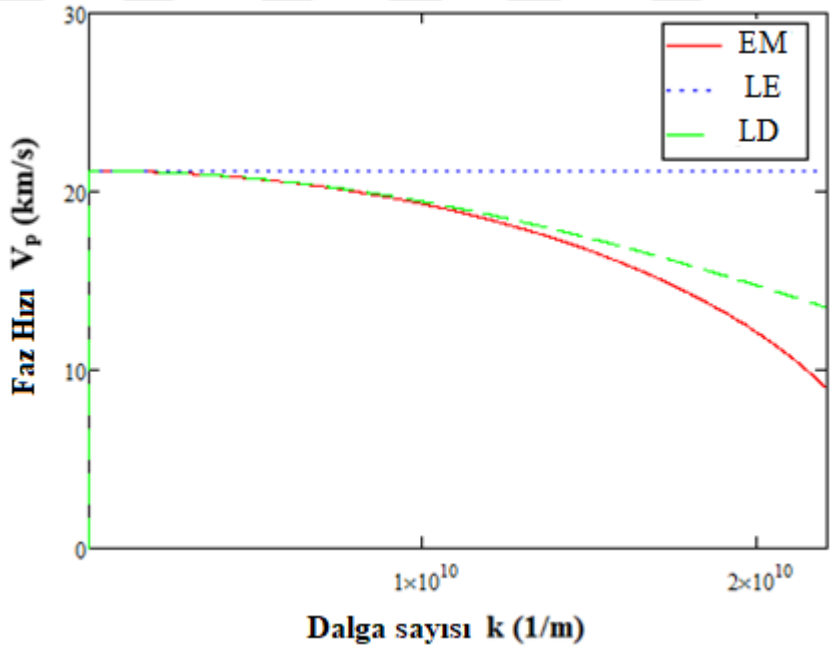
5.3. Elastik Ortama Gömülü Nanoçubukların Eksenel Titreşim Sonuçları

Bu bölümde, nanoçubukta eksenel dalga yayınımı ve eksenel titreşim analizi sonuçları EM, LD ve LE teorileri için sunulmuştur. Şekiller (5.9-5.11)'de yatay eksen dalga sayısını göstermekte ve yatay eksen ilk Brillouin bölgesinin sonuyla sınırlandırılmaktadır. Nanoçubuğa ait malzeme özellikleri ise $\rho = 2300\ kg/m^3, E = 1\ TPa, k_e = 10^9$ N/m, $a = \eta = 0.1421$ nm olarak tanımlanmıştır. Şekil 5.9'da, dalga sayısının artmasıyla LE teorisine ait dalga frekansının da doğrusal olarak arttığı açıkça görülmektedir. EM modeli, k<1.2x10^9 olduğunda LD modeli ile uyumlu sonuçlar vermektedir. Özellikle dalga boyu 0,4 nm'den büyük olduğunda, LE modelinin aksine, EM sonuçları LD modeliyle daha uyumludur. Böylece, EM teorisinin doğruluğunun LE teorisinden daha iyi olduğu sonucuna varılabilir. Şekiller (5.10,5.11)'de, dalga sayısı k ile faz ve grup hızlarının değişimleri gösterilmektedir. LE modeli için her iki hız değerinin dalga sayısı ile değişmediği gözlenmektedir. Buna karşılık, EM ve LD teorileri için dalga sayısının artmasıyla her iki hız değerinin azaldığı açık bir şekilde görülebilir. Dalga frekansı ilişkisine benzer şekilde, dalga boyu 0.4 nm olduğu durumda, EM tarafından elde

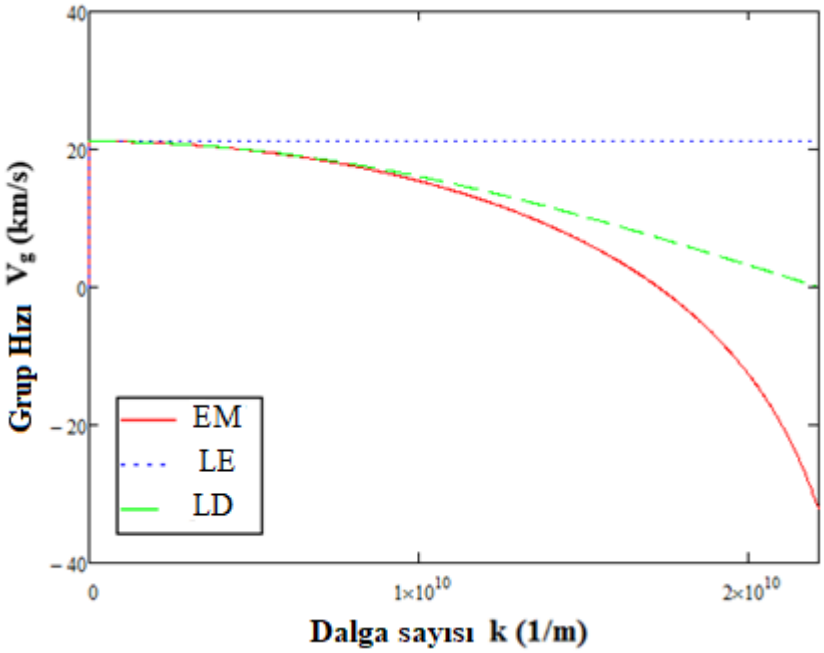
edilen faz hızı sonuçları ile LD teorisinden elde edilen faz hızı sonuçları hemen hemen aynıdır.



Şekil 5.9. Nanoçubukta eksenel dalga frekansı ile dalga sayısının değişimi.

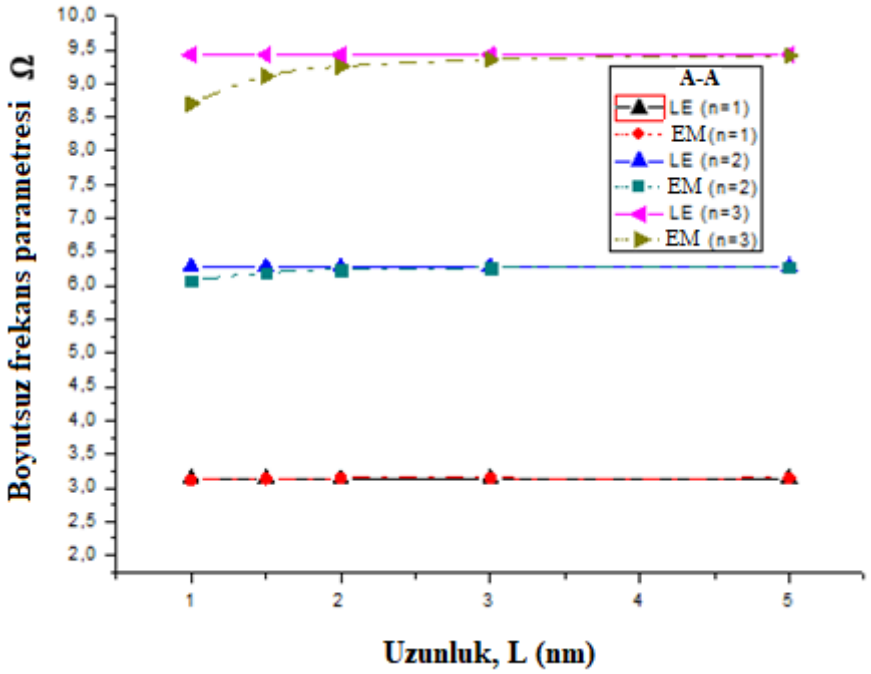


Şekil 5.10. Nanoçubukta faz hızı ile dalga sayısının değişimi.

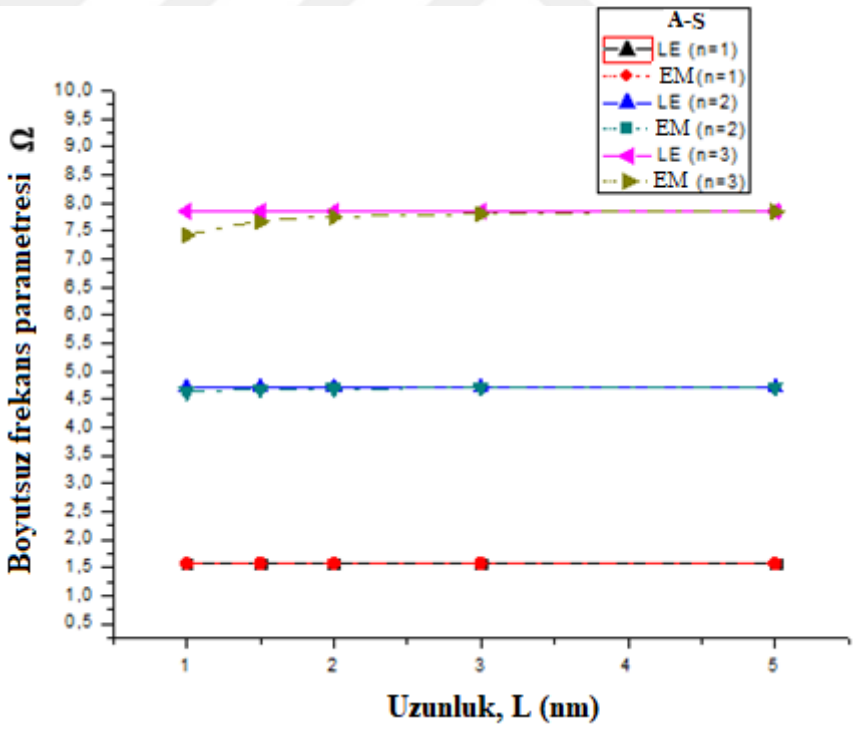


Şekil 5.11. Nanoçubukta grup hızı ile dalga sayısının değişimi.

Şekiller (5.12,5.13)'te, boyutsuz titreşim frekansı parametresinin nanoçubuk uzunluğuyla değişimi, farklı elastik ortam sertliği ve ilk üç mod için sunulmuştur. Boyutsuz frekans parametresi elastik ortam sertliğinin artmasıyla, A-A ve A-S sınır koşullarındaki tüm modlar için artmaktadır. EM tarafından öngörülen boyutsuz frekanslar, LE modelinden daha küçüktür ve bu iki teori arasındaki fark, yüksek titreşim modlarında ve kısa nanoçubuklarda daha belirgindir. Nanoçubuk uzunluğunun artmasıyla ölçek etkileri önemsiz hale gelmekte ve EM sonuçları klasik elastisite sonuçlarına yakınsamaktadır.

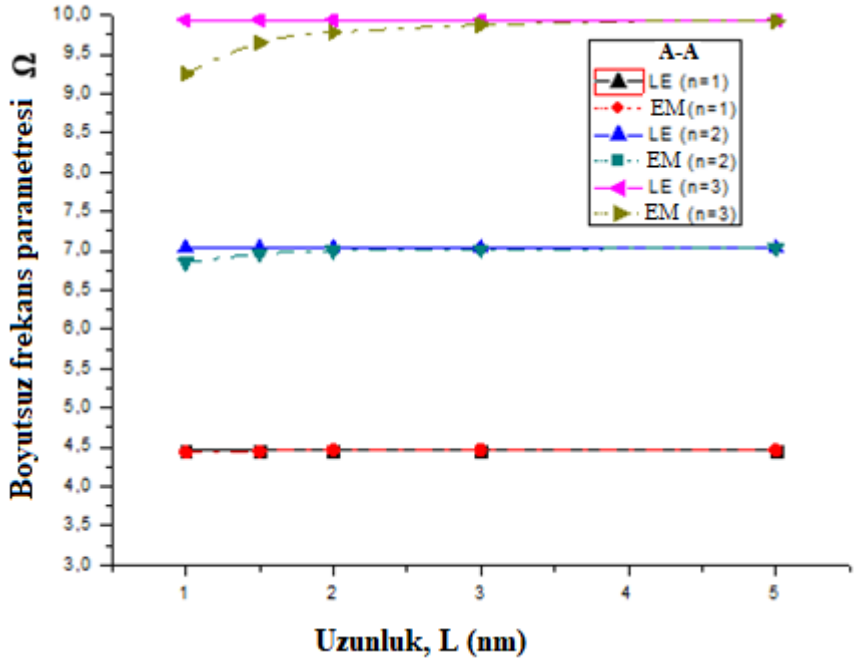


a)

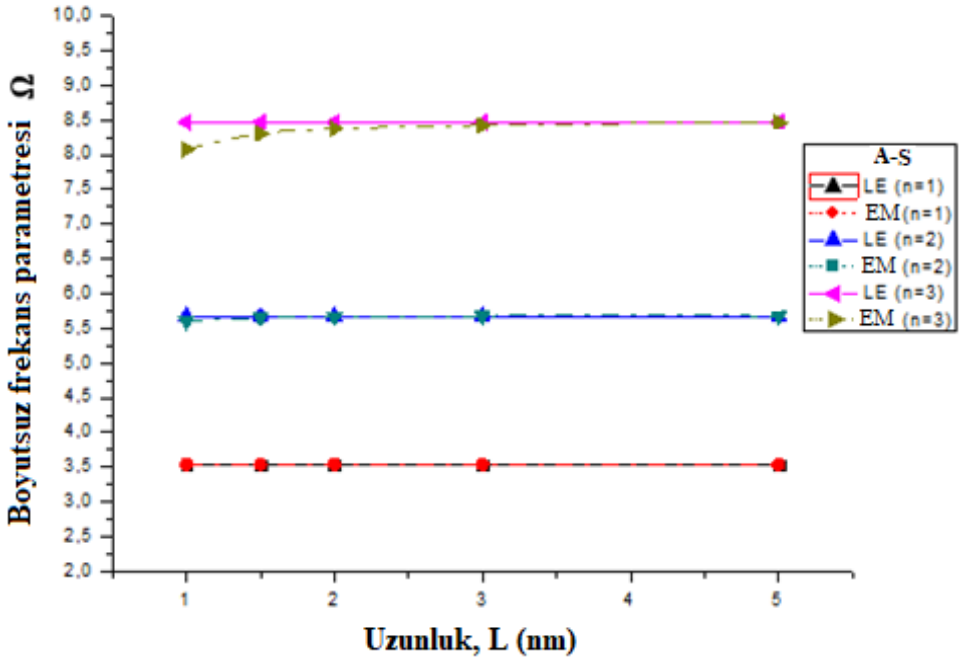


b)

Şekil 5.12. Nanoçubukta boyutsuz titreşim frekansı parametresi ile uzunluğun değişimi (*K*=0).



a)

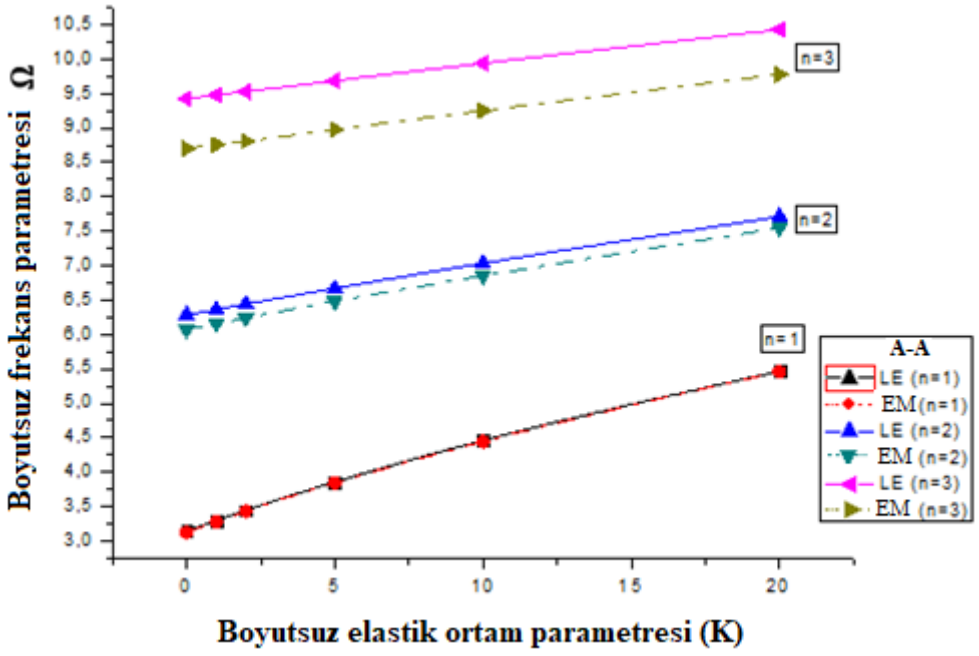


b)

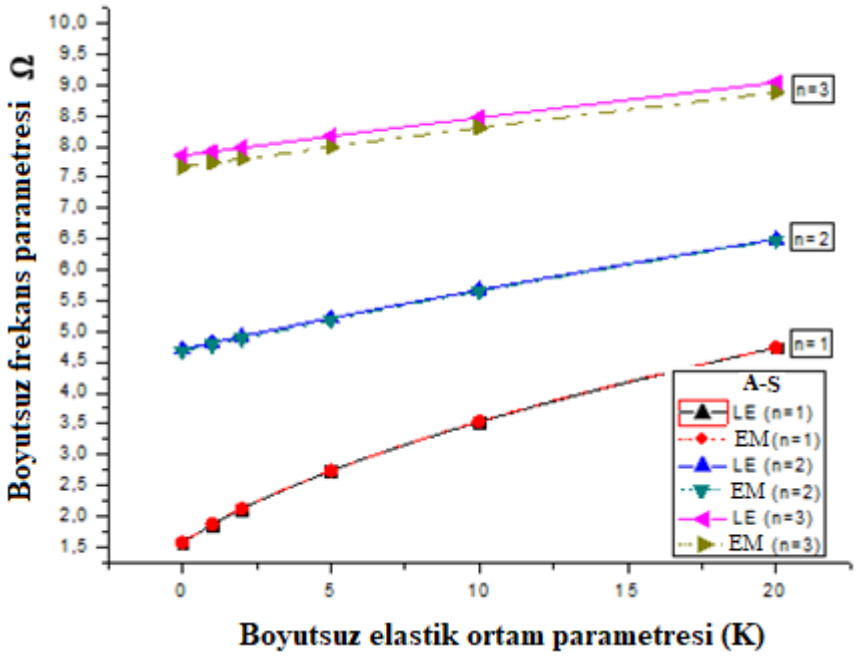
Şekil 5.13. Nanoçubukta boyutsuz titreşim frekansı parametresi ile uzunluğun değişimi (K=10).

Boyutsuz titreşim frekansının elastik ortam sertliği ile değişimi, farklı nanoçubuk uzunlukları için (L=1 nm, L=2 nm) Şekiller (5.14,5.15)'te gösterilmiştir. Yine, LE sonuçları özellikle yüksek modlar (n=3) için EM sonuçlarından daha yüksektir ve EM sonuçları, elastik ortam sertliğinin artmasıyla LE teorisine yakınsamaktadır. İki teori

arasındaki fark, A-S sınır koşuluna göre A-A sınır koşulunda daha belirgindir. Elastik ortamın frekans parametresi üzerindeki etkisi, özellikle titreşimin düşük modları için doğrusal değildir. Frekans değerleri, elastik ortamın sertlik parametresinin artmasıyla birbirine yaklaşmaktadır. Nanotüpler; nitrür nanotüpleri, fosfit nanotüpleri, oksit nanotüpleri, sülfür nanotüpleri gibi farklı malzemelerden yapılarak, bazı nano ölçekli yapılarda kullanılmaktadır (Rezouali & Belkhir, 2008; Seif, Aghaie, & Majlesi, 2007). Bu nedenle, farklı atomik mesafelere sahip nanotüplerde yapılan mekanik analiz, NEMS tasarımına yardımcı olabilir. Buna göre, boyutsuz frekans parametresinin eşil mesafe (atomik mesafe) η ile değişimi Şekil 5.16'da A-A ve A-S sınır koşulları için verilmiştir. Hesaplamalarda, K=5 alınmıştır. Eşil mesafenin artmasıyla, yüksek mod frekanslarının her iki sınır koşulu için de azaldığı açıkça görülmektedir. Ancak, ilk titreşim modu, eşil mesafe ile değişmemektedir.

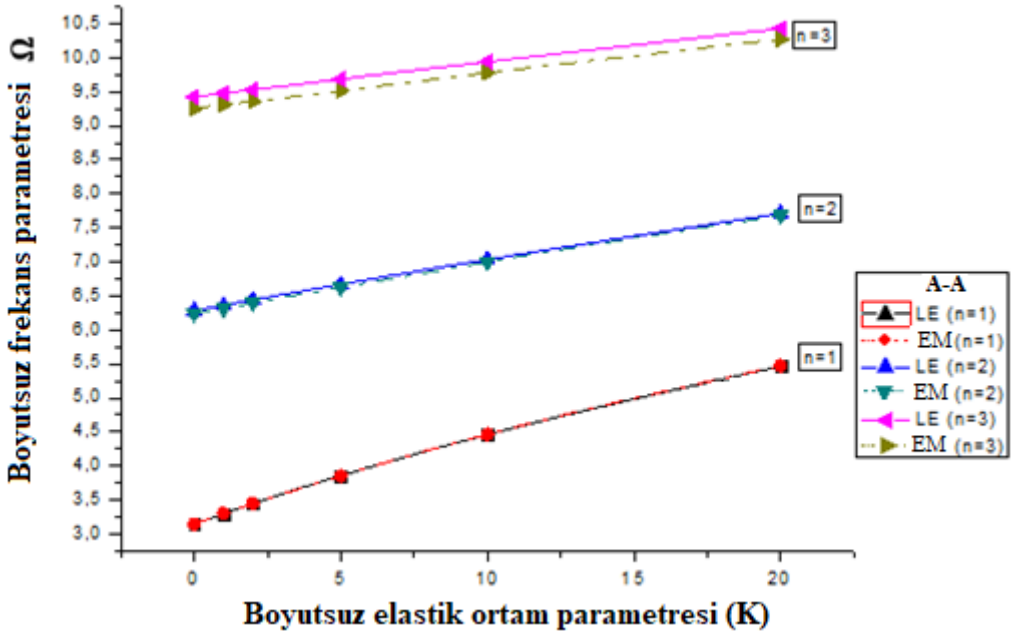


a)

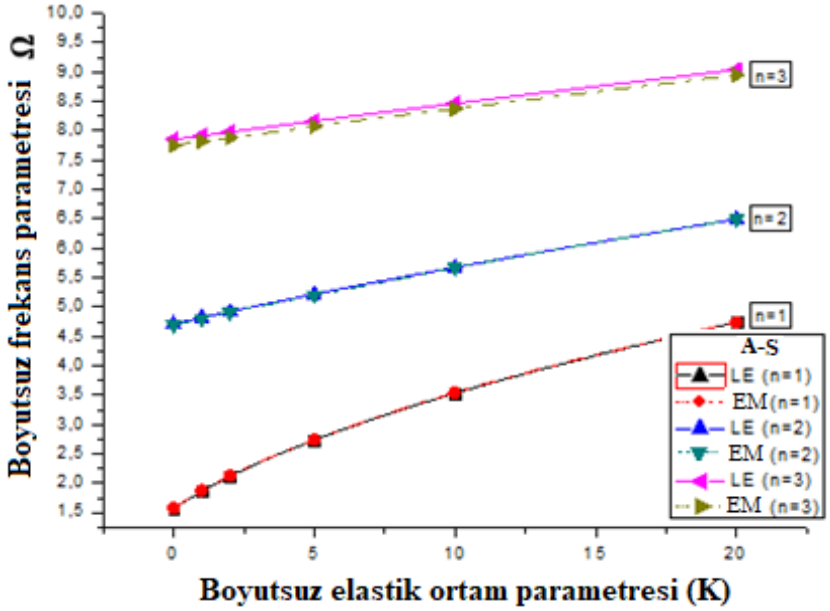


b)

Şekil 5.14. Nanoçubukta boyutsuz titreşim frekansı parametresi ile boyutsuz elastik ortam parametresinin ilk üç moddaki değişimi (L=1 nm).

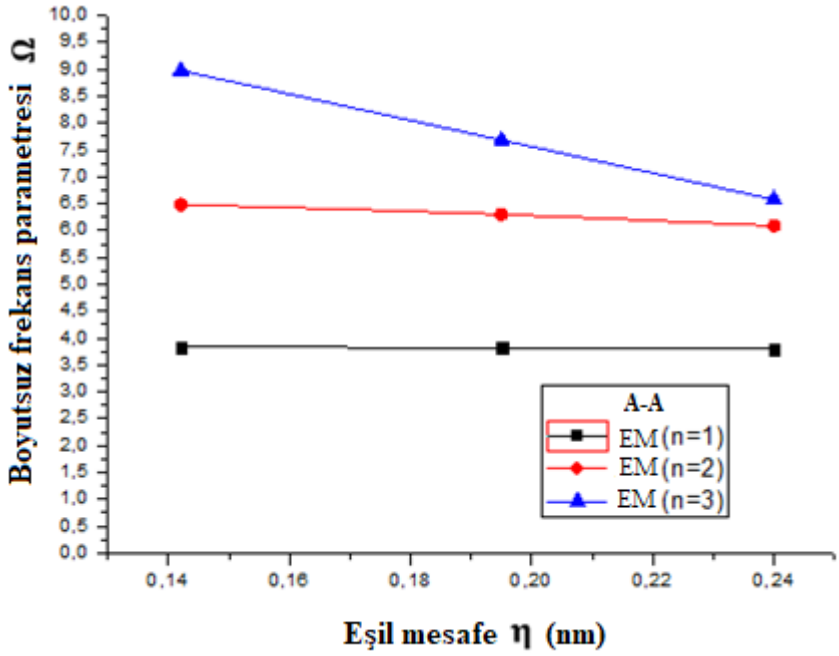


a)

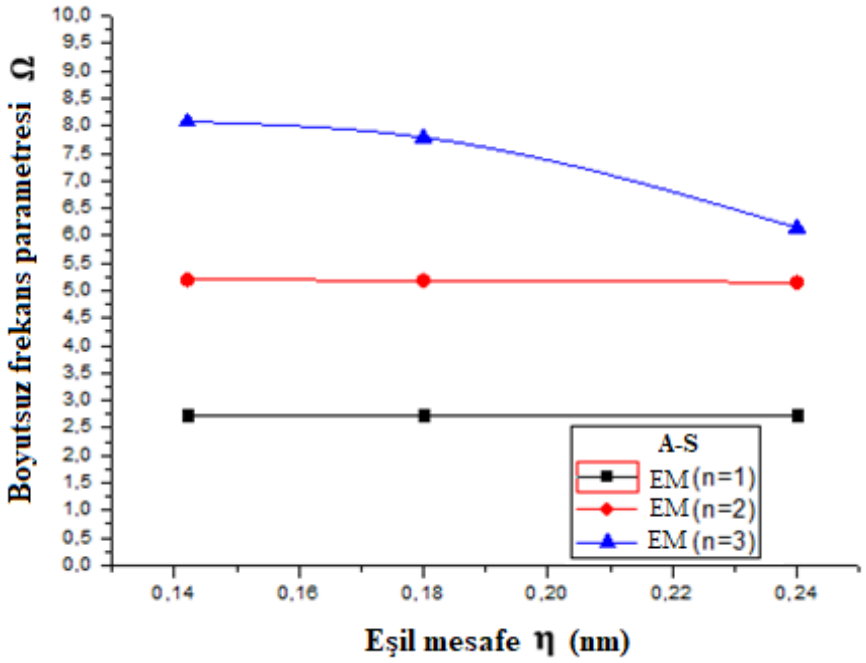


b)

Şekil 5.15. Nanoçubukta boyutsuz titreşim frekansı parametresi ile boyutsuz elastik ortam parametresinin ilk üç moddaki değişimi (L=2 nm).



a)



b)

Şekil 5.16. Nanoçubukta boyutsuz titreşim frekansı parametresi ile eşil mesafenin değişimi (L=1 nm, K=5).

5.4. Love Nanoçubuk Modellerinin Eksenel Titreşim Sonuçları

Bu bölümde, EM teorisine göre nanoçubukların yanal atalet etkisi göz önüne alınarak, nanoçubukların eksenel titreşimi için sayısal sonuçlar sunulmaktadır. EM teorisi kullanılarak elde edilen doğal frekansların, LE teorisi ve NL teorisi ile karşılaştırılması verilmiştir ve doğrulama için moleküler dinamik (MD) çözümü ile de EM sonuçları kıyaslanmıştır. S-S sınır koşuluna sahip bir tek duvarlı zigzag (5,0) ve koltuk (5,5) karbon nanotüplerinin doğal frekansları, Love varsayımı altında EM teorisi için bulunmuştur ve sonuçlar LE teorisi ve MD çözümü (G. Cao vd., 2006) ile Çizelge 5.7'de karşılaştırılmaktadır. Çizelge 5.7'de, karbon nanotüpün uzunluğu ve kalınlığı sırasıyla, L = 24.4 nm, t_t = 0.08 nm olarak alınmıştır ve bu nanotüpün malzeme özellikleri de E = 6.85 TPa, ν = 0.3 ve ρ = 9517 kg/m^3 olacak şekilde tanımlanmıştır (G. Cao vd., 2006). Burada, EM sonuçları ile MD sonuçları mükemmel bir uyum içindedir. Birinci ve üçüncü doğal frekanslar, EM ve MD çözümü için tamamen aynıdır. Ayrıca, klasik elastisite sonuçları çubuk uzunluğu L=24.4 nm olduğunda MD çözümü ile iyi uyum sağlamaktadır. Kiriş uzunluğu 5 nm olduğunda ise, EM ile klasik elastisite sonuçları arasındaki fark artar ve üçüncü titreşim modunda bu fark daha belirgindir. Bir başka dikkat çekici gözlem ise,

EM teorisinde, L =5 nm olduğunda, ikinci ve üçüncü titreşim modlarında koltuk modeli (5,5) için frekans sonuçları, zigzag nanotüp modelinden (5,0) daha yüksek olmaktadır.

Benzer şekilde, EM teorisinin doğrulanması, A-S sınır koşullarına sahip tek duvarlı zigzag (5,0) ve koltuk (5,5) karbon nanotüp modelleri için Çizelge 5.8'de gösterilmiştir. EM ve MD çözümü arasındaki uyumun en iyi olduğu Çizelge 5.8'de gözlemlenebilir.

Çizelge 5.9, A-S sınır koşullarına sahip zigzag (5,0) ve koltuk (5,5) karbon nanotüp modelleri için elde edilen doğal frekansları göstermektedir. EM teorisinin hem zigzag (5,0) hem de koltuk (5,5) nanotüp modelleri için klasik Love varsayımından daha düşük frekanslar verdiği, yerel olmayan elastisite modellerinden ise dikkate alınan r_g jirasyon yarıçapı değerleri için daha yüksek frekanslar verdiği görülmektedir. Burada, EM teorisi ile yerel olmayan elastisite teorisi arasındaki farkın, yerel olmayan modellerde kullanılan ölçek parametrelerinin belirsiz doğasından kaynaklandığı düşünülebilir.

Çizelge (5.10a,5.10b)'de ise A-A ve A-S sınır şartlarındaki klasik EM teorisi, Love varsayımını dikkate alan EM teorisi, klasik Love teorisi ve klasik elastisite teorisine ait ilk dört titreşim frekansı parametreleri verilmiştir. Bu çizelgelerde sonuçlar, farklı jirasyon yarıçapı (r_g) ve farklı çubuk uzunlukları için verilmiştir. EM teorisi ile tahmin edilen doğal frekansların her iki sınır koşulu için de klasik elastisite çözümünden daha küçük olduğu görülmektedir. Bunun nedeni, EM teorisinin genleme gradyan etkisi ve Love teorisinin formülasyonuna yanal atalet etkilerinin dahil edilmesi sonucunda çubuktaki kinetik enerjinin artmasıdır. Boyutsuz frekanstaki azalma, düşük nanoçubuk uzunlukları için daha belirgindir. Ölçek etkileri kısa nanoçubuklar için daha önemli hale gelmektedir. Bu etki, yüksek titreşim modlarında daha açık olarak görülmektedir. Jirasyon yarıçapının artmasıyla, çubuk daha ince hale gelir ve bu durumda doğal frekanslar da azalmaktadır. Mod sayısının artmasıyla, EM teorisi ile klasik elastisite modeli arasındaki fark artmaktadır. Daha yüksek titreşim modları için dalga boyları azalmakta ve dalga boyları giderek nanoçubuğun iç uzunluk ölçeğine yaklaşmaktadır. EM ve klasik teori arasındaki fark L = 1 nm olduğunda, A-S ve A-A sınır koşulunun dördüncü modlarında sırasıyla %15.17 ve %16.7'dir. EM sonuçları ile klasik elastisite sonuçları arasındaki farklar çubuk uzunluğu L=5 nm olduğunda ise, A-S ve A-A sınır koşulunun dördüncü modlarında sırasıyla %0.4 ve %0.53'tür.

Nanoçubuktaki ölçek etkileri çubuk uzunluğunun artmasıyla kaybolur. Buna karşılık, iç uzunluk ölçeği nanoçubuk uzunluğu ile karşılaştırılabilir olduğunda, ölçek etkileri daha etkili olmaktadır. Formülasyonda nanoçubuğun dönme ataletinin dikkate alınması, boyutsuz frekansların azalmasına neden olmaktadır. Dördüncü titreşim modunda ve L =5 nm için, klasik elastisite sonuçlarıyla EM sonuçları arasındaki fark, A-S ve A-A sınır koşullarında sırasıyla %6.93 ve %5.36'dır. EM teorisinin etkisi kısa nanoçubuklarda yanal atalet etkilerinden daha yüksektir, oysa daha uzun nanoçubuklarda tersi geçerlidir.

Çizelge 5.7. S-S (5,5) ve (5,0) karbon nanotüplerinin ilk üç moddaki doğal frekansları (THz).

Uzunluk (nm)	Mod sayısı	Klasik teori	Love varsayımı altında EM teorisi (zigzag)	Love varsayımı altında EM teorisi (koltuk)	MD (G. Cao vd., 2006)
	1	0.549	0.550	0.550	0.550
L=24.4	2	1.099	1.098	1.098	1.100
	3	1.649	1.650	1.650	1.650
	1	2.683	2.678	2.678	-
L=5	2	5.365	5.345	5.361	-
	3	8.048	7.955	7.971	-

($\nu = 1/3$ ve $\eta = 0.246$ nm).

Çizelge 5.8. A-S (5,5) ve (5,0) karbon nanotüplerinin ilk moddaki doğal frekansları (THz).

Uzunluk (nm)	Mod sayısı	Klasik teori	Love varsayımı altında EM teorisi (zigzag)	Love varsayımı altında EM teorisi (koltuk)	MD (G. Cao vd., 2006)
L=12.2	1	0.5498	0.5490	0.5490	0.5440

($\nu = 1/3$ ve $\eta = 0.246$ nm).

Çizelge 5.9. A-S (5,5) ve (5,0) karbon nanotüplerinin ilk moddaki doğal frekansları (THz).

r_g	Love varsayımı altında klasik teori (X.-F. Li vd., 2017)	Love varsayımı altında NL teorisi (X.-F. Li vd., 2017)		Love varsayımı altında EM teorisi (zigzag)		Love varsayımı altında EM teorisi (koltuk)	
		e_0a/L=0.1	e_0a/L=0.2	L=5nm	L=24.4nm	L=5nm	L=24.4nm
0.01	1.5708	1.5518	1.4986	1.5696	1.5705	1.5696	1.5705
0.1	1.5691	1.5501	1.4971	1.5680	1.5689	1.5680	1.5689
0.2	1.5639	1.5451	1.4926	1.5632	1.5642	1.5632	1.5642

($\nu = 1/3$ ve $\eta = 0.246$ nm).

Çizelge 5.10a. A-A nanoçubuklarında boyutsuz doğal frekanslar (zigzag model) ($\nu = 1/3, \eta = 0.1421$ nm).

L (nm)	Mod sayısı	Klasik teori	EM teorisi					
			Love			Klasik Love		
			r_g=0	r_g=0.01	r_g=0.05	r_g=0.1	r_g=0.01	r_g=0.05	r_g=0.1
1	1	3.1420	3.1153	3.1152	3.1119	3.1016	3.1414	3.1381	3.1277
	2	6.2830	6.0709	6.0698	6.0441	5.9658	6.2820	6.2554	6.1744
	3	9.4250	8.6919	8.6884	8.6063	8.3640	9.4210	9.3319	9.0692
	4	12.566	10.768	10.760	10.581	10.075	12.557	12.348	11.758
2	1	3.1420	3.1350	3.1349	3.1315	3.1212	3.1414	3.1381	3.1277
	2	6.2830	6.2307	6.2296	6.2033	6.1229	6.2820	6.2554	6.1744
	3	9.4250	9.2470	9.2433	9.1559	8.8981	9.4210	9.3319	9.0692
	4	12.566	12.141	12.133	11.931	11.361	12.557	12.348	11.758
3	1	3.1420	3.1386	3.1385	3.1352	3.1248	3.1414	3.1381	3.1277
	2	6.2830	6.2599	6.2588	6.2323	6.1516	6.2820	6.2554	6.1744
	3	9.4250	9.3461	9.3424	9.2541	8.9936	9.4210	9.3319	9.0692
	4	12.566	12.379	12.370	12.165	11.583	12.557	12.348	11.758
5	1	3.1420	3.1405	3.1404	3.1370	3.1266	3.1414	3.1381	3.1277
	2	6.2830	6.2748	6.2737	6.2471	6.1662	6.2820	6.2554	6.1744
	3	9.4250	9.3965	9.3928	9.3040	9.0420	9.4210	9.3319	9.0692
	4	12.566	12.499	12.490	12.283	11.695	12.557	12.348	11.758

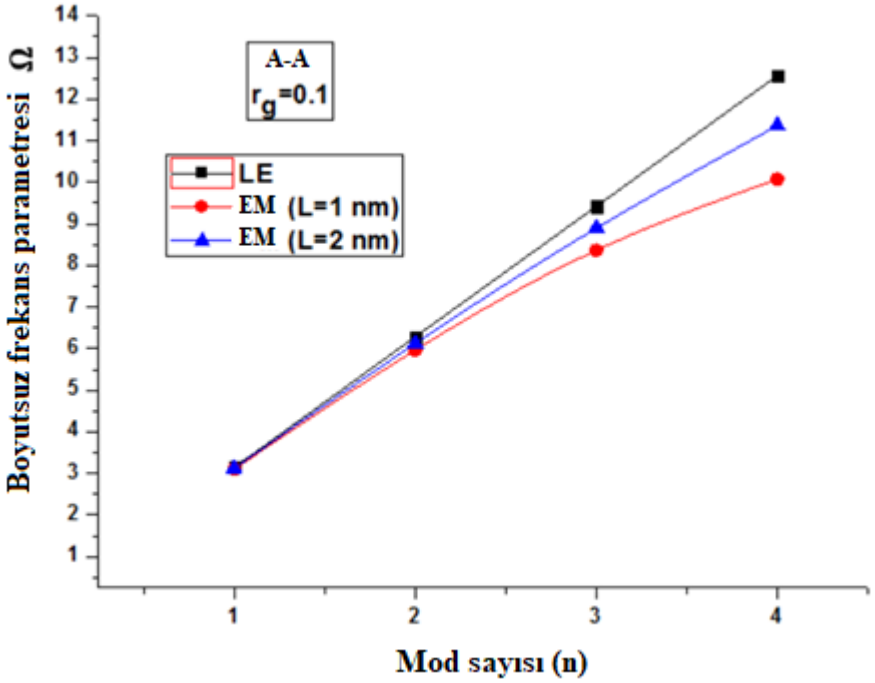
($\Omega = n\pi$, A-A nanoçubukları klasik teori için).

Çizelge 5.10b. A-S nanoçubuklarında boyutsuz doğal frekanslar (zigzag model) ($\nu = 1/3, \eta = 0.1421$ nm).

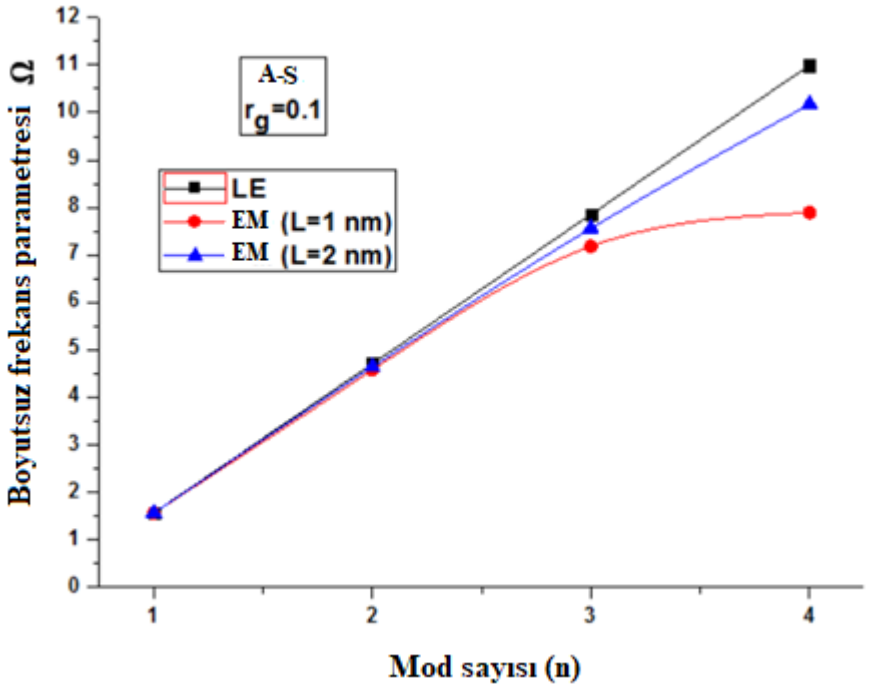
L(nm)	Mod sayısı	Klasik teori	EM teorisi						
				Love			Klasik Love		
			r_g=0	r_g=0.01	r_g=0.05	r_g=0.1	r_g=0.01	r_g=0.05	r_g=0.1
1	1	1.5710	1.5684	1.5684	1.5674	1.5669	1.5705	1.5689	1.5673
	2	4.7120	4.6295	4.6295	4.6154	4.5823	4.7106	4.6917	4.6619
	3	7.8540	7.4220	7.4175	7.3630	7.1832	7.8464	7.7793	7.1639
	4	10.996	9.3280	9.3100	8.9466	7.8903	10.988	10.782	10.379
2	1	1.5710	1.5710	1.5700	1.5700	1.5684	1.5705	1.5689	1.5673
	2	4.7120	4.6906	4.6906	4.6806	4.6436	4.7106	4.6917	4.6619
	3	7.8540	7.7532	7.7532	7.6958	7.5593	7.8464	7.7793	7.1639
	4	10.996	10.692	10.679	10.616	10.176	10.988	10.782	10.379
3	1	1.5710	1.5710	1.5705	1.5700	1.5689	1.5705	1.5689	1.5673
	2	4.7120	4.7053	4.7040	4.6906	4.6436	4.7106	4.6917	4.6619
	3	7.8540	7.8122	7.8065	7.7840	7.6050	7.8464	7.7793	7.1639
	4	10.996	10.813	10.744	10.729	10.339	10.988	10.782	10.379
5	1	1.5710	1.5710	1.5705	1.5705	1.5689	1.5705	1.5689	1.5673
	2	4.7120	4.7120	4.7088	4.6992	4.6671	4.7106	4.6917	4.6619
	3	7.8540	7.8322	7.8086	7.7867	7.6362	7.8464	7.7793	7.1639
	4	10.996	10.952	10.945	10.813	10.407	10.998	10.782	
							10.379		

($\Omega = (2n-1)\pi/2$, A-S nanoçubukları klasik teori için).

Şekil 5.17'de, doğal frekanslar ilk dört mod için verilmiştir. Hesaplamalarda L=1 nm ve L=2 nm dikkate alınmıştır. Her iki teori arasındaki fark, yüksek titreşim modlarında ve kısa nanoçubuklarda daha belirgindir. Düşük mod sayıları için EM ve klasik elastisite teorisi arasında küçük bir fark vardır.



a)



b)

Şekil 5.17. Boyutsuz titreşim frekansı parametresinin mod sayısı ile değişimi.

5.5. Çiftli Nanoçubuk Sistemlerinin Eksenel Titreşim Sonuçları

Bu bölümde, A-A ve A-S sınır koşulları için çiftli nanoçubuk sistemlerinin serbest ve zorlanmış titreşim analizlerinin sayısal sonuçları verilmektedir. Çizelge 5.11'de, çiftli nanoçubuk sistemleri (ÇNÇS) için bir karşılaştırma sunulmuştur. Hesaplamalarda, $\bar{e} = 1$ nN olarak alınmıştır (Murmu & Adhikari, 2010a). Çizelge 5.11'den görüldüğü gibi, EM teorisi kullanılarak elde edilen ÇNÇS'nin ilk dört doğal frekansı, A-S sınır koşulu için klasik elastisite (Erol & Gürgöze, 2004) ve yerel olmayan elastisite (Murmu & Adhikari, 2010a) teorileri ile karşılaştırılmaktadır. EM sonuçları klasik elastisite teorisinden daha düşük değerler verir ve yerel olmayan elastisite parametresinin (e_0a) azalmasıyla, EM ile yerel olmayan elastisite modelleri arasındaki fark azalmaktadır.

EM teorisi sonuçlarının ikinci doğrulanması ise Çizelge 5.12'de verilmektedir. Bu çizelgede, EM teorisi ile elde edilen ÇNÇS'nin ilk titreşim frekansı, A-S sınır koşuluna sahip tek duvarlı zigzag (5,5) nanotüp modeli için MD simülasyonu (G. Cao vd., 2006), klasik elastisite teorisi ve yerel olmayan elastisite modelleri (Karličić vd., 2015) ile karşılaştırılmıştır. Doğal frekanslar THz ($f = \omega/2\pi$) cinsinden bulunmuş ve malzeme özellikleri ile geometrik özellikler ise ρ= 9517 kg/m^3, E=6.85 TPa, L = 12.2 nm olarak dikkate alınmıştır (G. Cao vd., 2006). EM sonuçlarının MD ve diğer verilen modellerle iyi bir uyum içinde olduğu açıkça görülmektedir. Karbon nanotüplerde karbon-karbon atomlarının sabit η bağ uzunluğuna karşın, uzunluk ölçeği parametresi e_0'ın değeri, sabit değildir. Çizelge 5.12'de daha iyi sonuçlar elde etmek için e_0 optimize edilmelidir. Buna karşılık, dikkate alınan malzemede uzunluk ölçeği parametresinde herhangi bir değişiklik yapılması gerekmeyen EM teorisi kullanılarak tatmin edici sonuçlar elde edilebilir. EM teorisinde, atomların bağ uzunluğu doğrudan uzunluk ölçeği parametresi olarak kullanılmaktadır.

Çizelge 5.11. ÇNÇS'nin A-S sınır koşullarında ilk dört doğal frekans değerleri (GHz) (k_e=8 N/nm, $\bar{e} = 1$ nN, L=1 nm, m=10^{-9} kg/m).

n	NL (e_0a=0.5 nm)	NL (e_0a=1 nm)	NL (e_0a=1.5 nm)	NL (e_0a=2 nm)	Klasik teori	EM
1	1.2353	0.8436	0.6137	0.4764	1.5708	1.5680
2	4.1864	4.0880	4.0468	4.0283	4.2974	4.2970
3	1.8411	0.9782	0.6601	0.4972	4.7124	4.6268
4	4.4033	4.1179	4.0541	4.0308	6.1812	6.1194

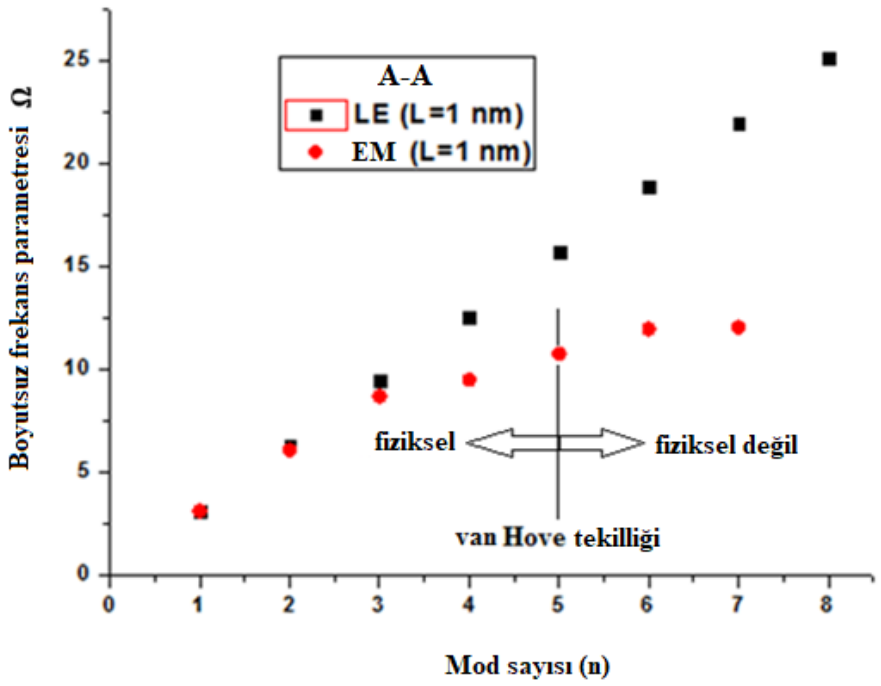
*(NL teori (Murmu & Adhikari, 2010a), Klasik teori (Erol & Gürgöze, 2004)).

Çizelge 5.12. A-S sınır koşuluna sahip ÇNÇS'nin ilk dört doğal frekans değerlerinin (THz) yerel olmayan elastisite (Karličić vd., 2015) ve MD (G. Cao vd., 2006) simülasyonu ile karşılaştırılması.

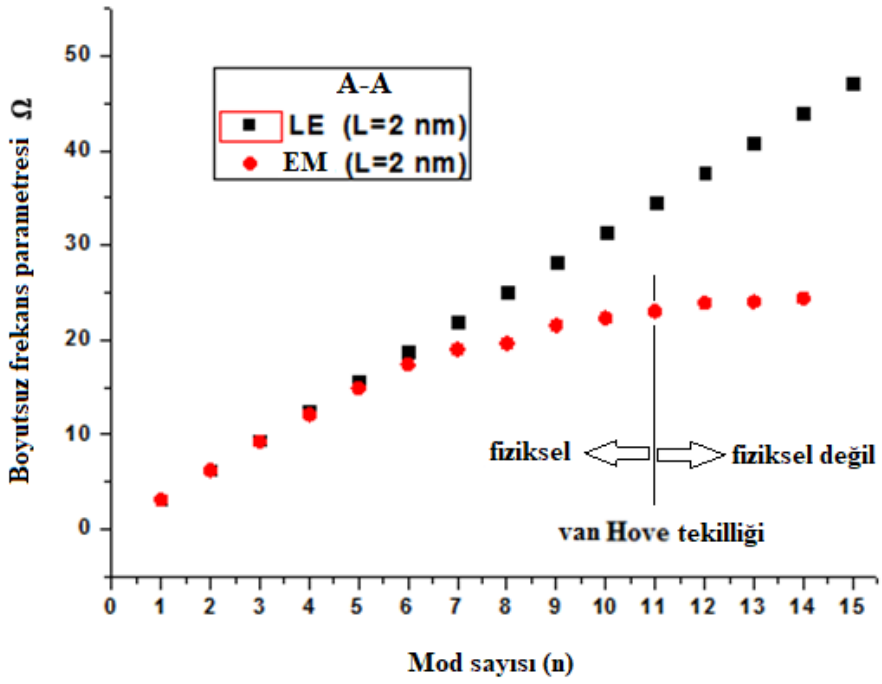
n	(e_0a=0 nm)	(e_0a=1 nm)	(e_0a=1.5 nm)	(e_0a=2 nm)	MD	EM
1	1.2353	0.8436	0.6137	0.4764	1.5708	1.5680

Mevcut EM teorisinin doğrulanmasından sonra, ÇNÇS'nin eksenel serbest ve zorlanmış titreşimleri, Şekiller (5.18-5.25)'te gösterilmiştir. Şekiller (5.18-5.21)'de, farklı mod sayıları için boyutsuz frekans parametresi sonuçları sunulmuştur. Sonuçlar, L =1 nm ve L=2 nm için verilmiştir. LE teorisi ile elde edilen boyutsuz frekans değerleri, mod sayısı ile herhangi bir sınırlama olmaksızın doğrusal olarak artmaktadır. Ancak dω/dk=0 olduğunda EM teorisinin Van Hove tekilliği vardır (grup hızı sıfırdır) (Van Hove, 1953). Bu nedenle, negatif grup hızı için öngörülen frekanslar fiziksel değildir, ve bu frekanslar dikkate alınmamalıdır. Nanotüplerde dalga yayınımı EM teorisi kullanılarak Gul vd. (2017) ve Gul ve Aydogdu (2017) tarafından incelenmiştir. Bu makalelerden, Van Hove tekilliğinin k=1.73/η'de (Brillouin bölgesinin sınırı) olduğu görülebilir. Dalga boyu λ>2.55η ile sınırlandırılmıştır. L=1 nm için n>5 olduğunda, EM teorisi ile elde edilen grup hızı sıfırdır ve n>5 olduğunda sonuçlar fiziksel olarak anlamlı değildir. EM modelinde, mod sayısının maksimum anlamlı değeri L =1 nm için 5 iken, L=2 nm için anlamlı mod sayısı 11'e eşit olmaktadır. Bu kısıtlama klasik elastisite modellerinde gözlenmemektedir.

EM sonuçları ile LE modeli arasındaki fark, mod sayısının artmasıyla artmaktadır. Nanoçubuk uzunluğunun artmasıyla ise bu iki teori arasındaki fark azalmaktadır. A-A sınır koşuluna sahip ÇNÇS'de yüksek titreşim modlarındaki frekans sonuçları, A-A sınır koşuluna sahip ÇNÇS'ye göre birbirine daha yakındır (Şekiller 5.18-5.21).

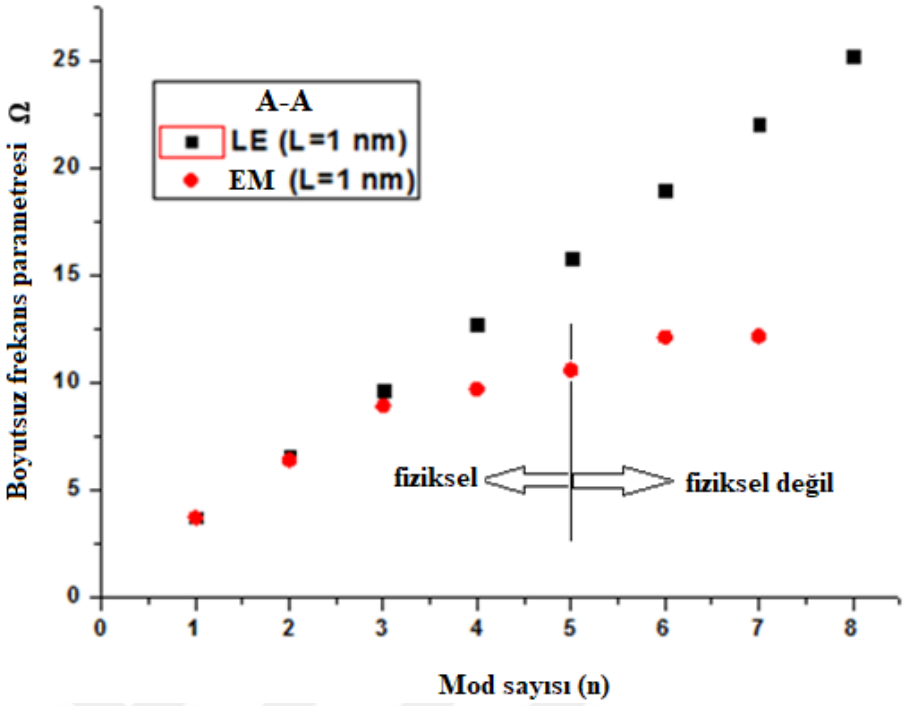


a)

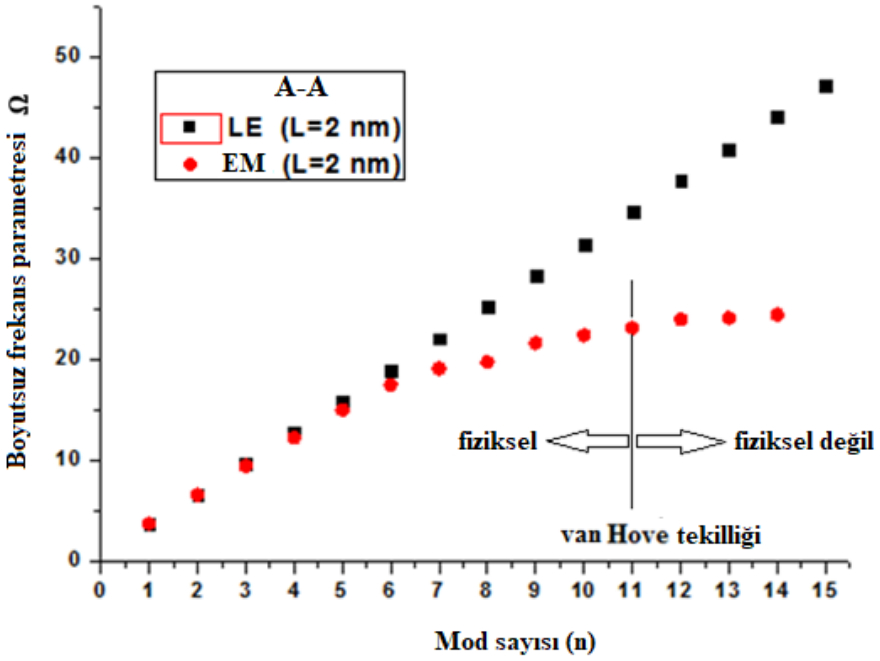


b)

Şekil 5.18. A-A ÇNÇS'de boyutsuz frekansın mod sayısı ile değişimi (K=0).

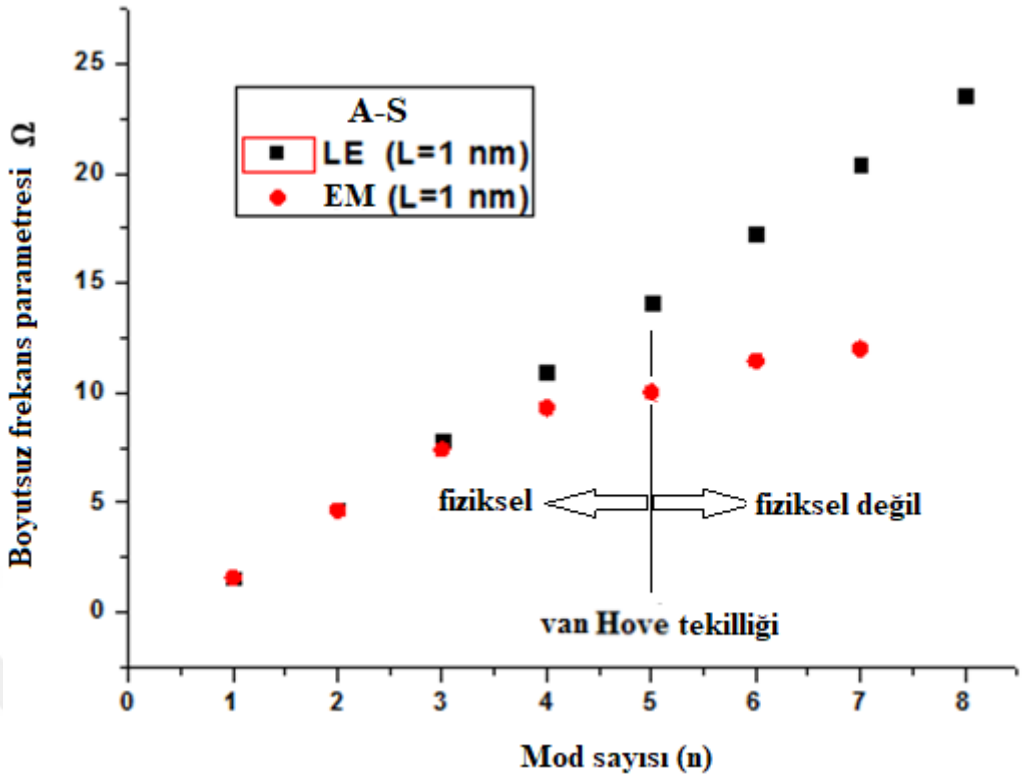


a)

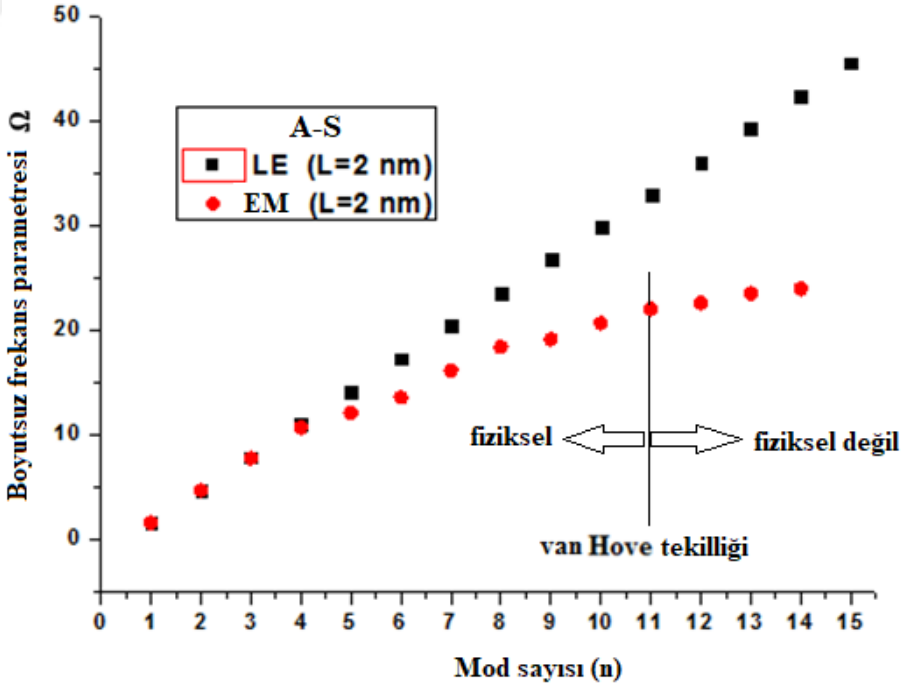


b)

Şekil 5.19. A-A ÇNÇS'de boyutsuz frekansın mod sayısı ile değişimi (*K*=2).

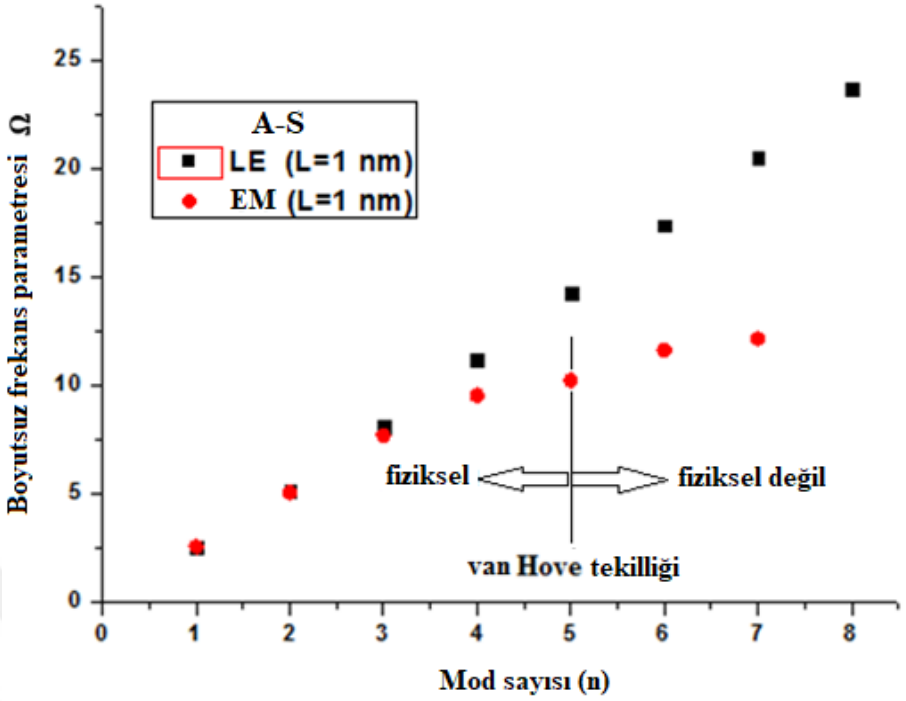


a)

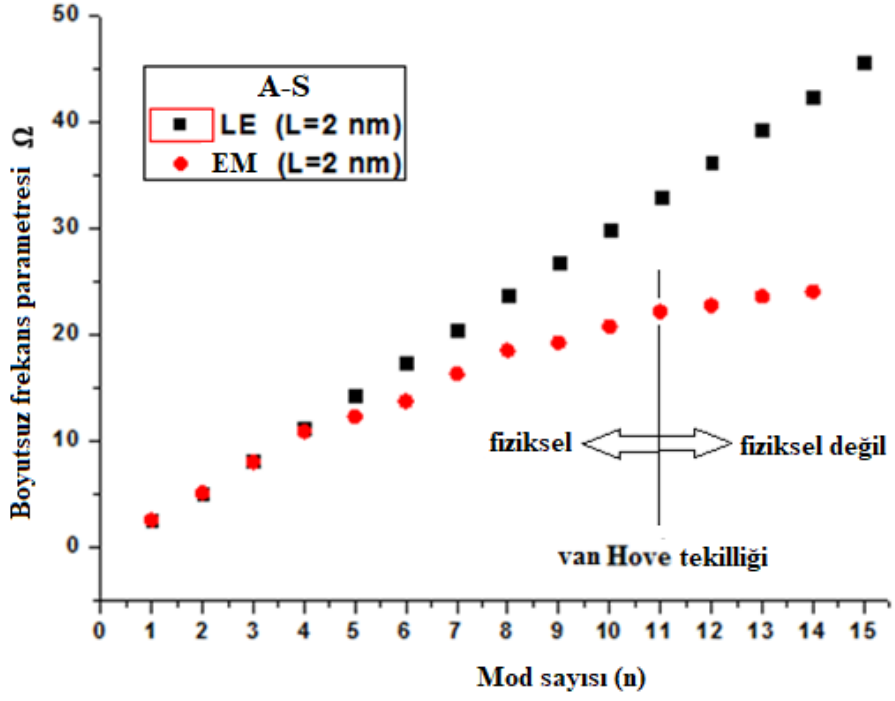


b)

Şekil 5.20. A-S ÇNÇS'de boyutsuz frekansın mod sayısı ile değişimi (K=0).



a)

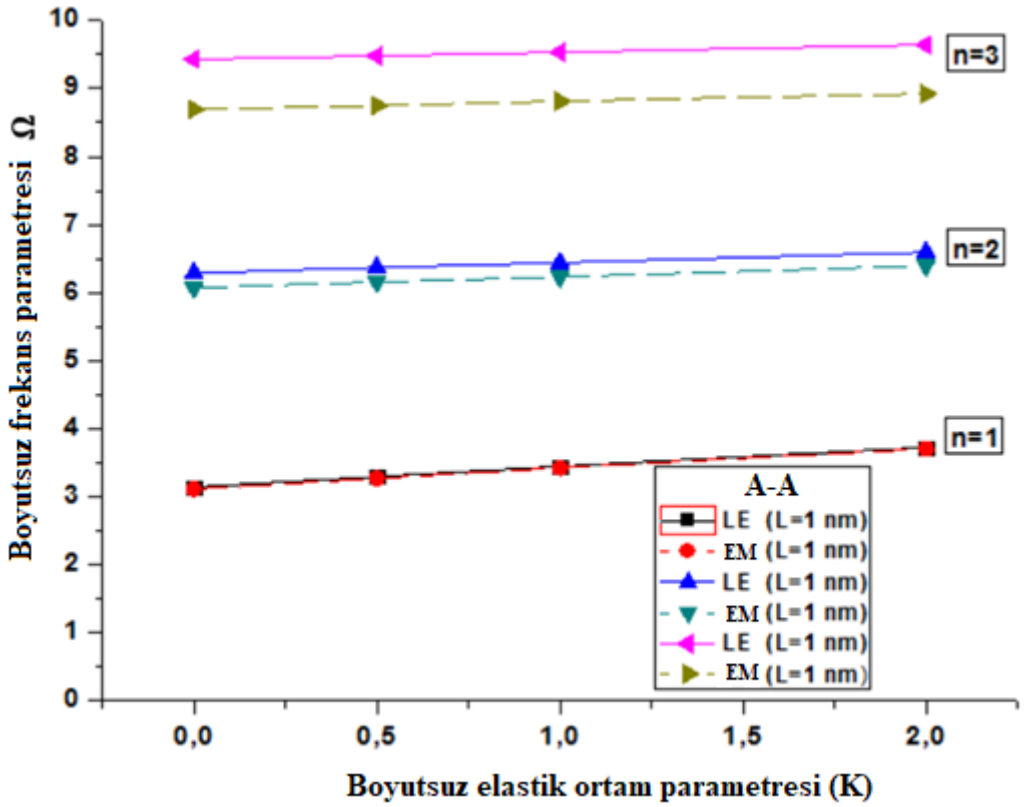


b)

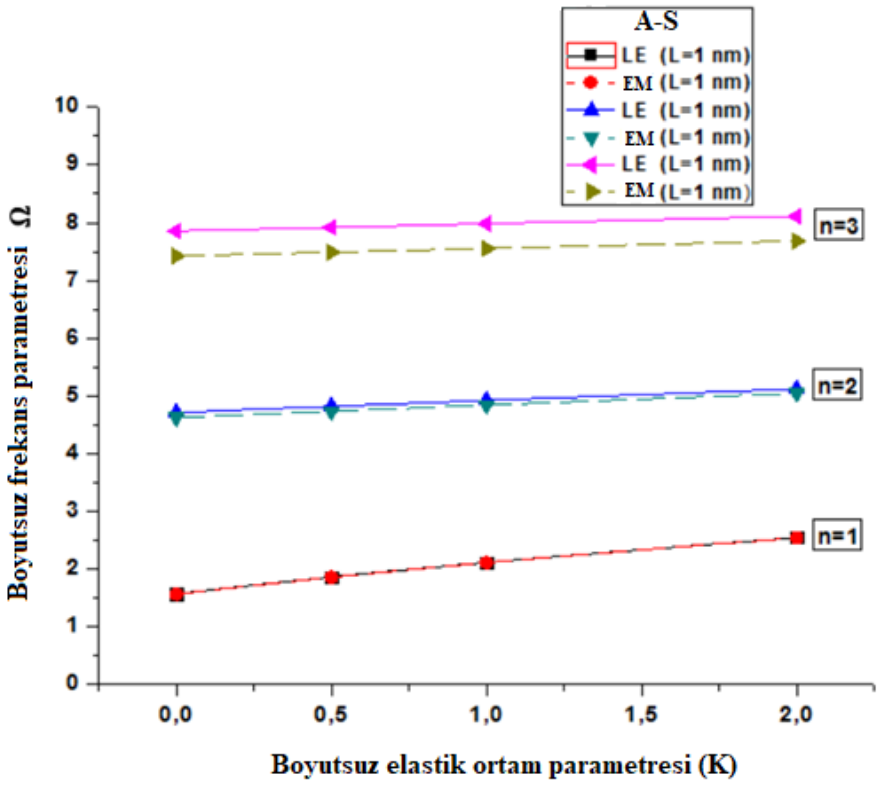
Şekil 5.21. A-S ÇNÇS'de boyutsuz frekansın mod sayısı ile değişimi (*K*=2).

Boyutsuz frekans parametresinin, boyutsuz sertlik parametresi ile değişimi Şekiller (5.22,5.23)'te gösterilmektedir. Boyutsuz sertlik parametresinin her iki teori için de boyutsuz frekans parametresini arttırdığı açıkça görülmektedir. EM sonuçları,

özellikle yüksek titreşim modları için klasik elastisite sonuçlarından daha düşüktür. Frekans sertlik parametre eğrisinin eğimi, düşük modlar için daha yüksektir, yani düşük modlar sertlik parametresinden yüksek modlara göre daha fazla etkilenir.

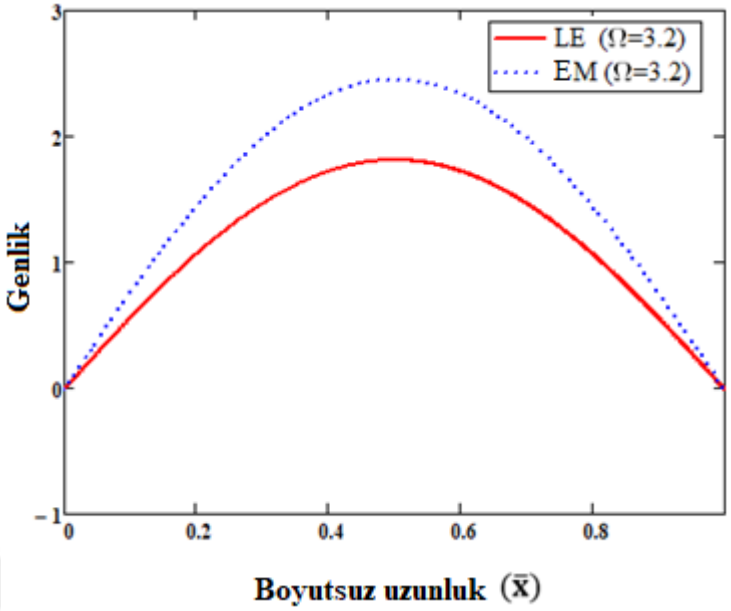


Şekil 5.22. İlk üç moddaki A-A ÇNÇS'de boyutsuz frekansın boyutsuz elastik ortam parametresi ile değişimi.

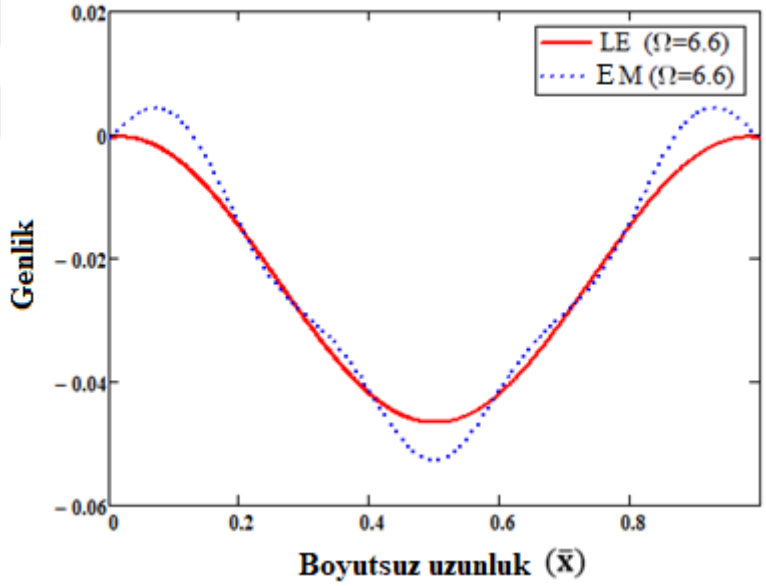


Şekil 5.23. İlk üç moddaki A-S ÇNÇS'de boyutsuz frekansın boyutsuz elastik ortam parametresi ile değişimi.

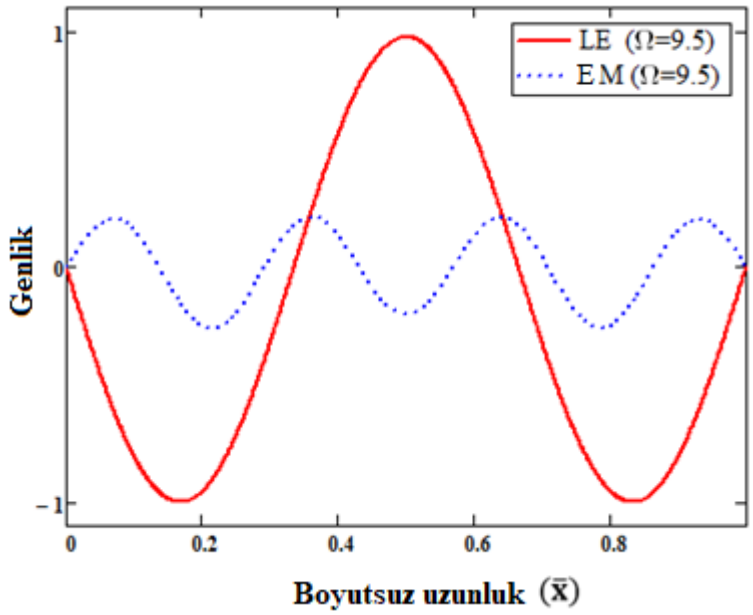
Bağıl (izafi) mod şekilleri Şekiller (5.24,5.25)'te, A-A sınır koşuluna sahip ÇNÇS'de farklı boyutsuz frekans parametreleri için gösterilmiştir. Bu şekillerde, dış yüklerin frekansları Ω=3.2, Ω=6.6 ve Ω=9.5 olarak seçilmiştir. Bu frekanslar, LE ve EM teorilerindeki serbest titreşim frekanslarına yakın olarak seçilmiştir. LE ve EM modelleri ile yapılan analizlerde ÇNÇS'de farklı bağıl mod şekilleri elde edilmiştir. Özellikle düzgün eksenel yük için, Ω=6.6 ve Ω=9.5 olduğunda, iki teori için de bağıl mod şekilleri birbirinden farklıdır. Çubuk uzunluğu L=1 nm olduğunda bu fark daha belirgindir (burada sonuçlar sadece kısa nanotüpler için sunulmaktadır). Bu durum, EM teorisinin gradyan etkilerinin mod şekillerini değiştirebileceğini göstermektedir. Bununla birlikte, doğrusal yük durumu altındaki bağıl mod şekilleri, düzgün eksenel yük durumundaki ile benzerdir. Burada elde edilen sonuca göre, mod şekillerindeki düğüm sayısının farklı teoriler için farklı olduğu ve nano ölçekli cihazlar tasarlanırken bu noktanın çok önemli olacağı söylenebilir.


LE (Ω=3.2)
EM (Ω=3.2)
Genlik
Boyutsuz uzunluk (x̄)

a)

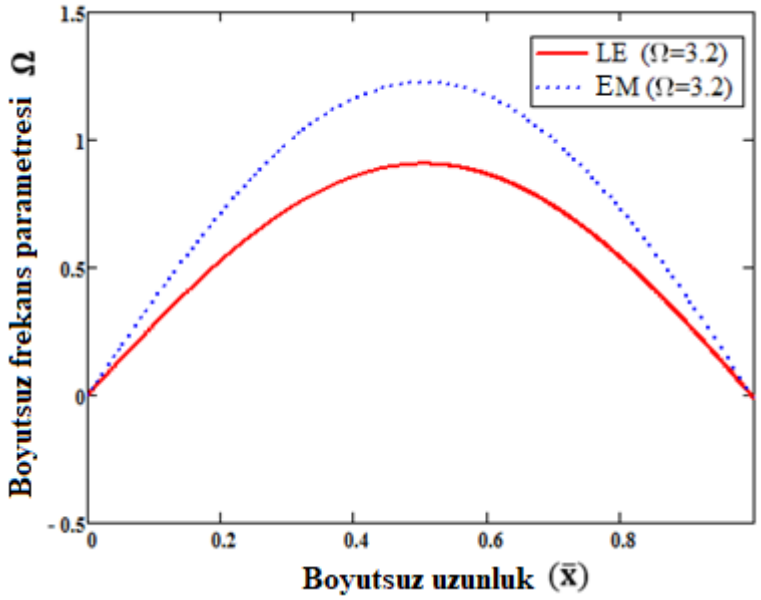

LE (Ω=6.6)
EM (Ω=6.6)
Genlik
Boyutsuz uzunluk (x̄)

b)

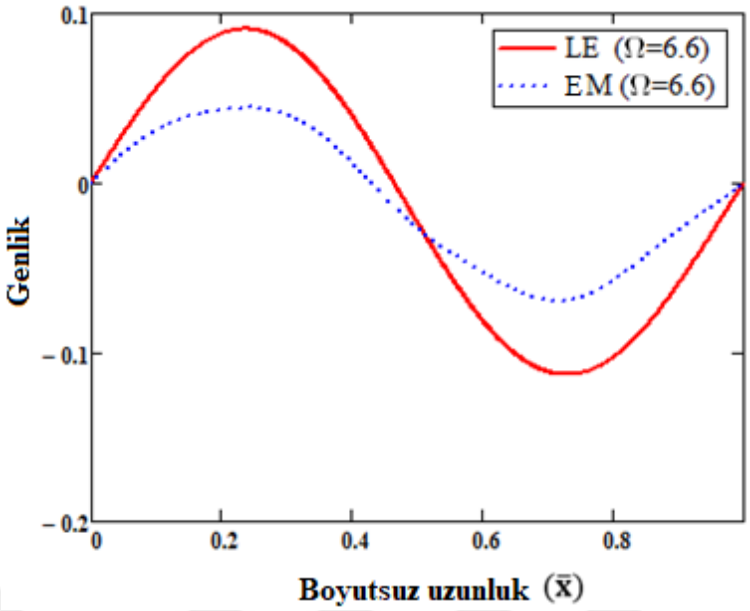


c)

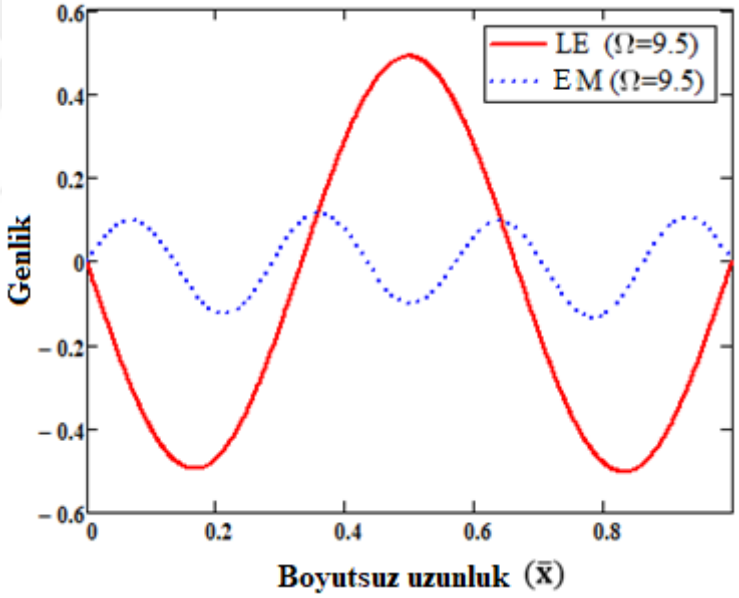
Şekil 5.24. Düzgün eksenel yük etkisindeki A-A ÇNÇS'de relatif mod şekilleri (L=1 nm, K=0.5).



a)



b)



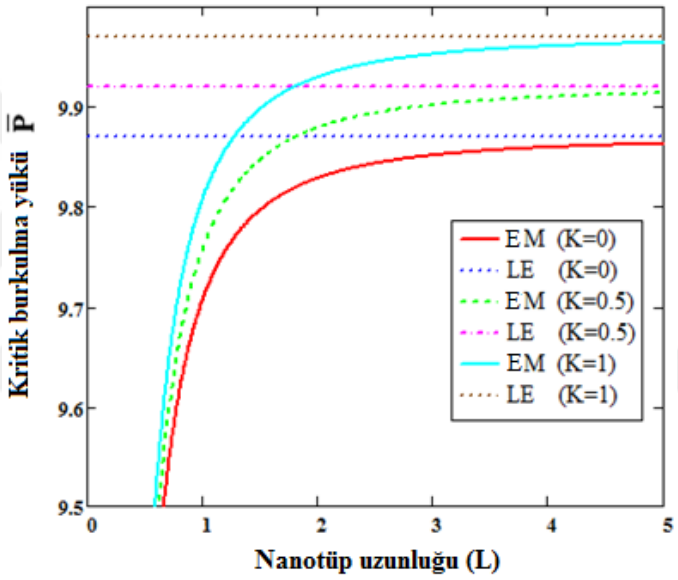
c)

Şekil 5.25. Doğrusal eksenel yük etkisindeki A-A ÇNÇS'de relatif mod şekilleri (L=1 nm, K=0.5).

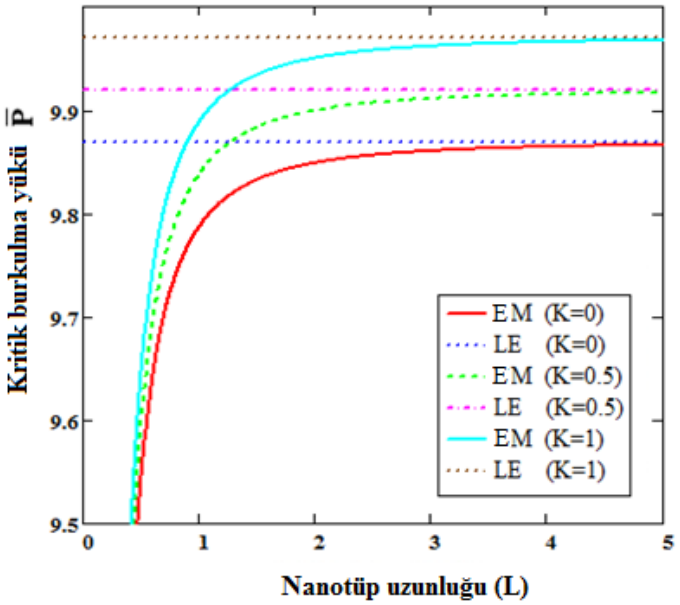
5.6. Elastik Ortama Gömülü Nanotüplerin Burkulma ve Titreşim Analizi Sonuçları

Bu bölümde, elastik ortama gömülü nanotüplerin titreşim ve burkulma karakteristikleri farklı elastik ortam parametreleri, nanotüp uzunluğu ve şiral açıları için LE ve DM teorileri kullanılarak Şekiller (5.26-5.32)'de gösterilmektedir. Boyutsuz

burkulma yükü parametresinin nanotüp uzunluğu ile değişimi Şekil 5.26'da verilmiştir. EM teorisi, kısa nanotüpler için LE sonuçlarıyla karşılaştırıldığında daha düşük kritik burkulma yükü değerleri vermektedir. Bu durum, ölçek etkilerinin nanotüpü daha yumuşak hale getirdiğini ispatlar. Denklem (3.19)'da görüldüğü gibi, nanotüpün genleme enerjisi, η/L oranının bir fonksiyonudur. Mikro mekaniğin şekil değiştirme enerjisi üzerindeki katkısı, nanotüp uzunluğunun azalmasıyla daha belirgin olmaktadır. Artan nanotüp uzunluğu ile bu katkı sıfıra yaklaşır. Nanotüp uzunluğunun artmasıyla, EM sonuçları LE değerlerine yakınsamaktadır. Mevcut problem için her iki teori de L> 5 nm için çok yakın değerler vermektedir. Her iki teori için de, kritik burkulma yükü değerleri elastik ortam sertliğinin artmasıyla artar.



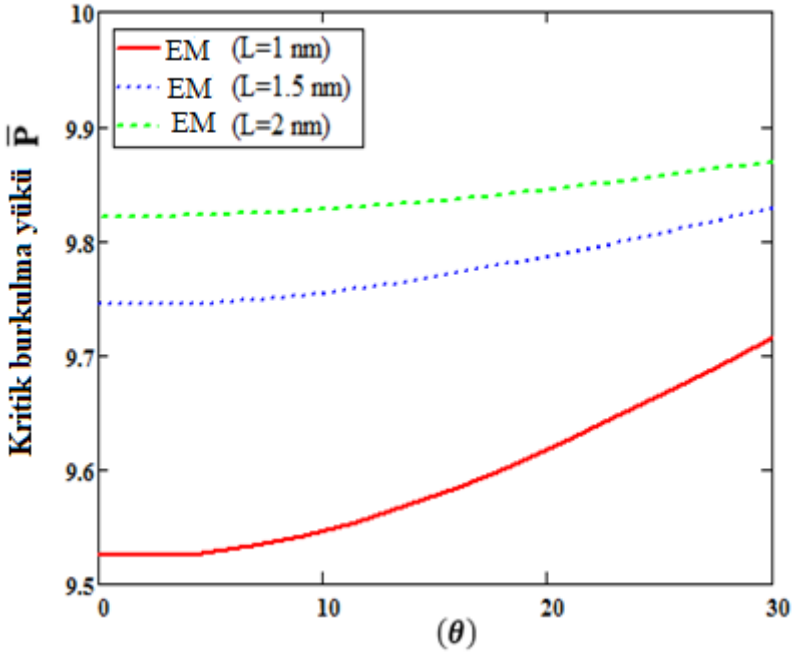
$a)\ \theta = 0^{\circ}$



b) $\theta = 30^{\circ}$

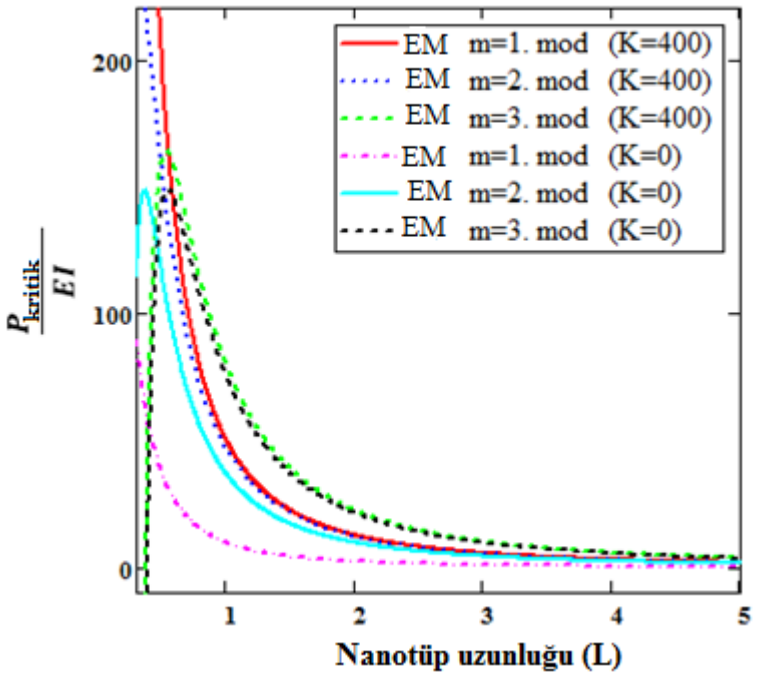
Şekil 5.26. Kritik burkulma yükünün nanotüp uzunluğu ile değişimi (n=1)

Kritik burkulma yükü değerleri, şiral açısının artmasıyla artar. Koltuk nanotüp modeli için kritik burkulma yükü değeri en yüksektir (θ= 30°). Kritik burkulma yükünün θ ile değişimi, kısa nanotüp uzunluğunda daha belirgindir (Şekil 5.27). Şiral açının etkisi nanotüp uzunluğunun artması ile kaybolur.

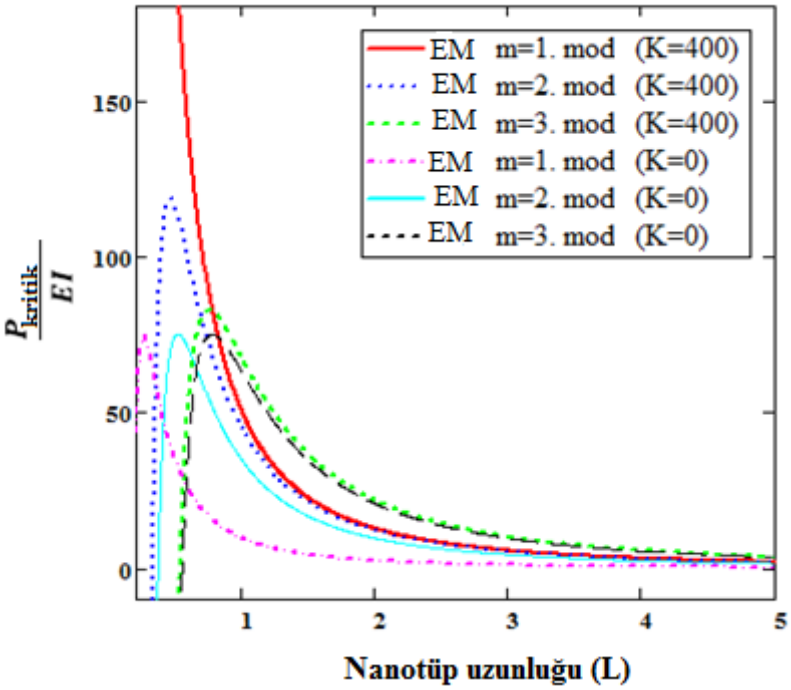


Şekil 5.27. Kritik burkulma yükünün şiral açısı ile değişimi (K=0.5,n=1).

Şekil 5.28'de, zigzag ve koltuk nanotüp modelleri için kritik burkulma yükünün nanotüp uzunluğu ile değişimi gösterilmektedir. K=400 için, n=2'de en düşük kritik burkulma yükü elde edilmektedir. Burkulma modu şekli, elastik ortam sertliğine ve nanotüp uzunluğuna bağlıdır. n=2 için, bazı elyaf uzunluklarında en düşük kritik burkulma yükleri elde edilmektedir. θ=0° için, maksimum burkulma yükü L =0.32 nm'de elde edilirken, θ=30° için ise maksimum burkulma yükü L=0.23 nm'de elde edilmektedir.



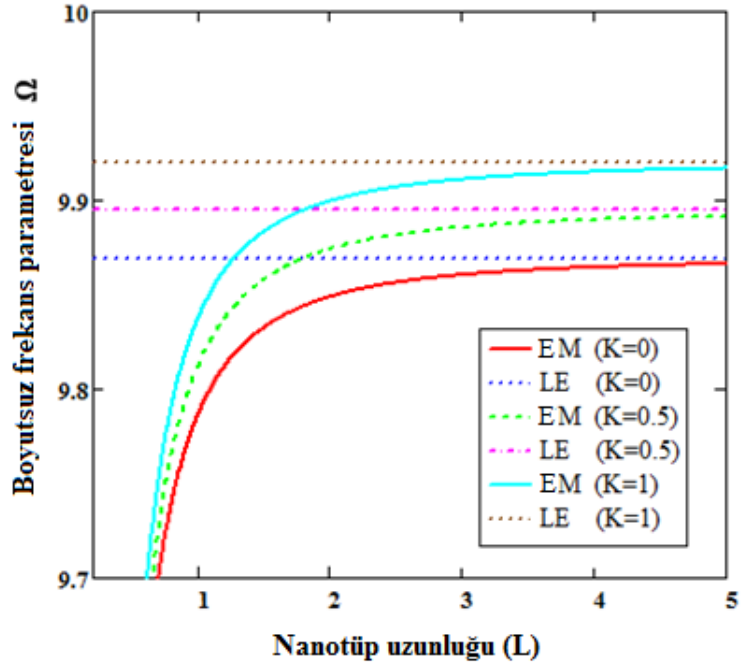
a) $\theta = 0^{\circ}$



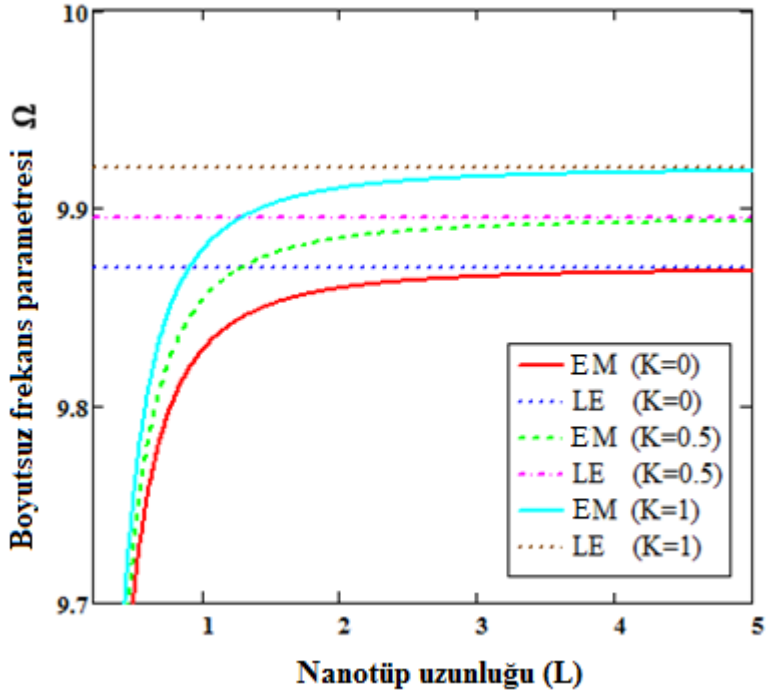
b) $\theta = 30^{\circ}$

Şekil 5.28. $\frac{P_{kritik}}{EI}$ ile nanotüp uzunluğunun ilk üç moddaki değişimi.

Şekil 5.29'da görüldüğü gibi, burkulma durumuna benzer şekilde, EM teorisi ile elde edilen boyutsuz titreşim frekansı parametresi, LE sonuçlarından daha düşüktür. EM sonuçları, nanotüp uzunluğunun artmasıyla LE sonuçlarına yakınsamaktadır. Böylece ölçek etkileri, nanotüp uzunluğunun artmasıyla önemsiz hale gelmektedir. Daha yüksek titreşim modları şiral açısından θ daha fazla etkilenmektedir (Şekil 5.30).

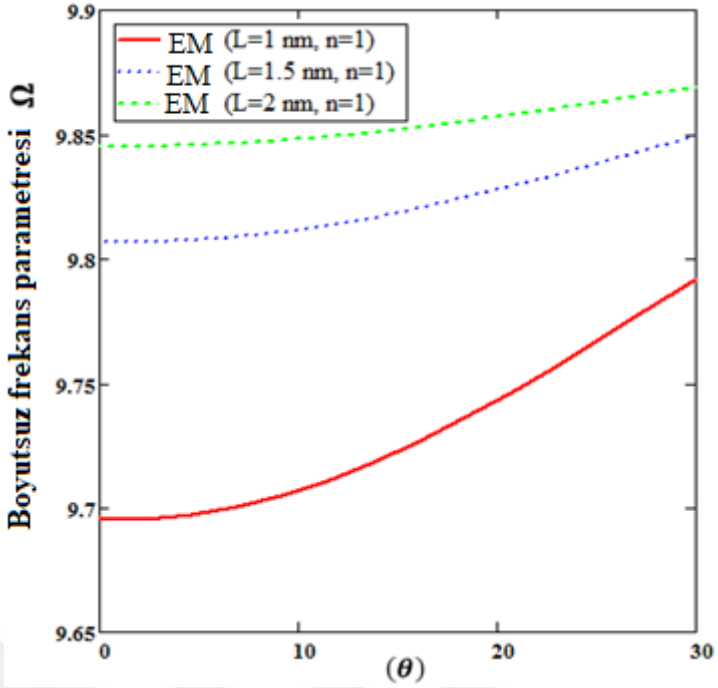


a) $\theta = 0^{\circ}$

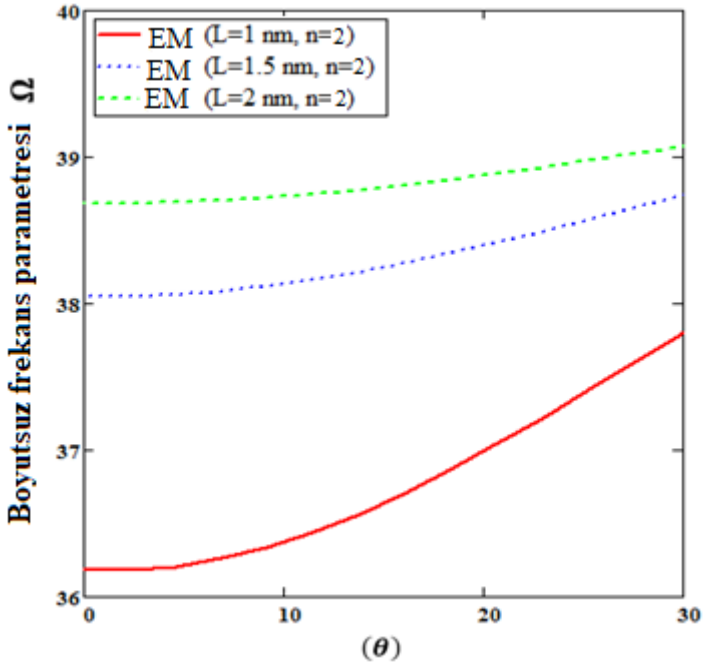


b) $\theta = 30^{\circ}$

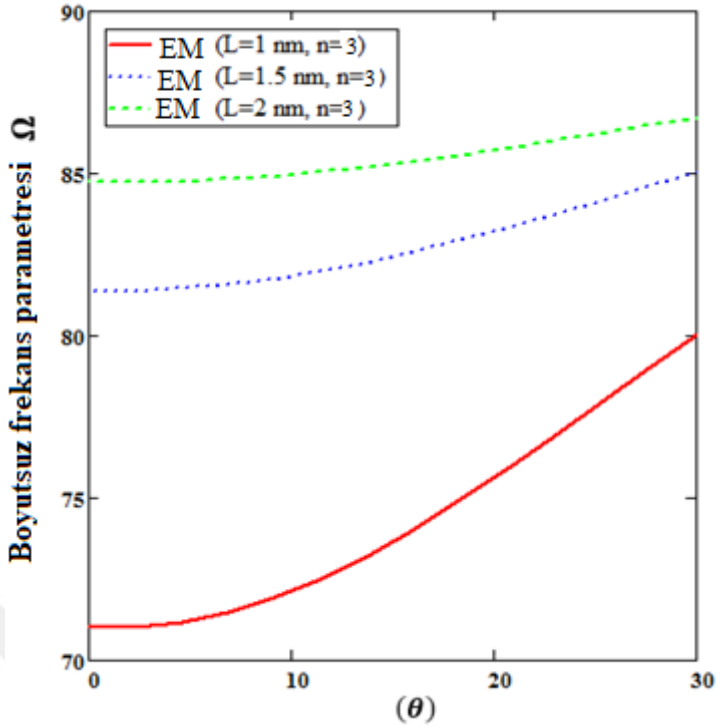
Şekil 5.29. Nanotüpün ilk moddaki titreşimi (*n*=1).


EM (L=1 nm, n=1)
EM (L=1.5 nm, n=1)
EM (L=2 nm, n=1)
Boyutsuz frekans parametresi Ω
9.9
9.85
9.8
9.75
9.7
9.65
0
10
20
30
(θ)

a)


EM (L=1 nm, n=2)
EM (L=1.5 nm, n=2)
EM (L=2 nm, n=2)
Boyutsuz frekans parametresi Ω
40
39
38
37
36
0
10
20
30
(θ)

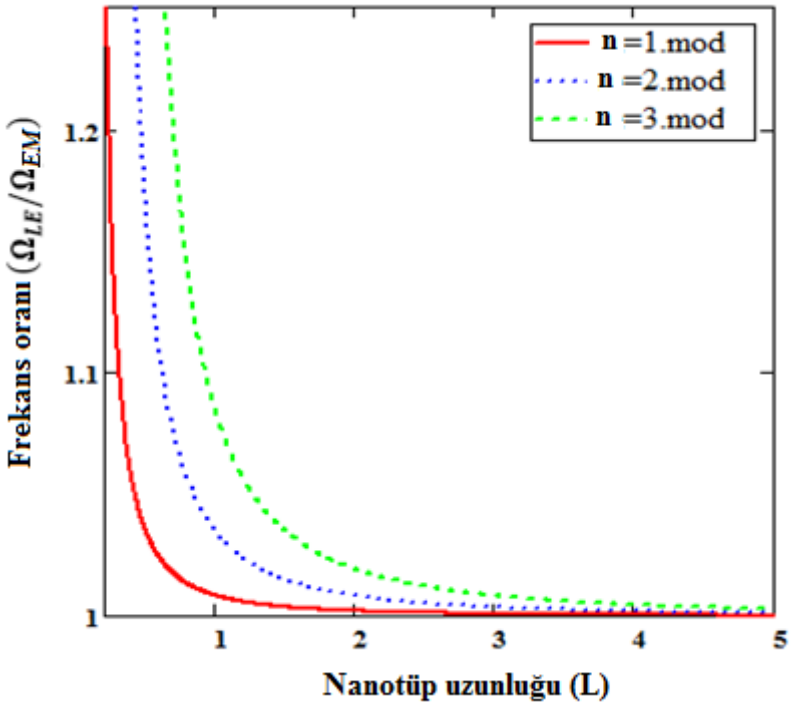
b)



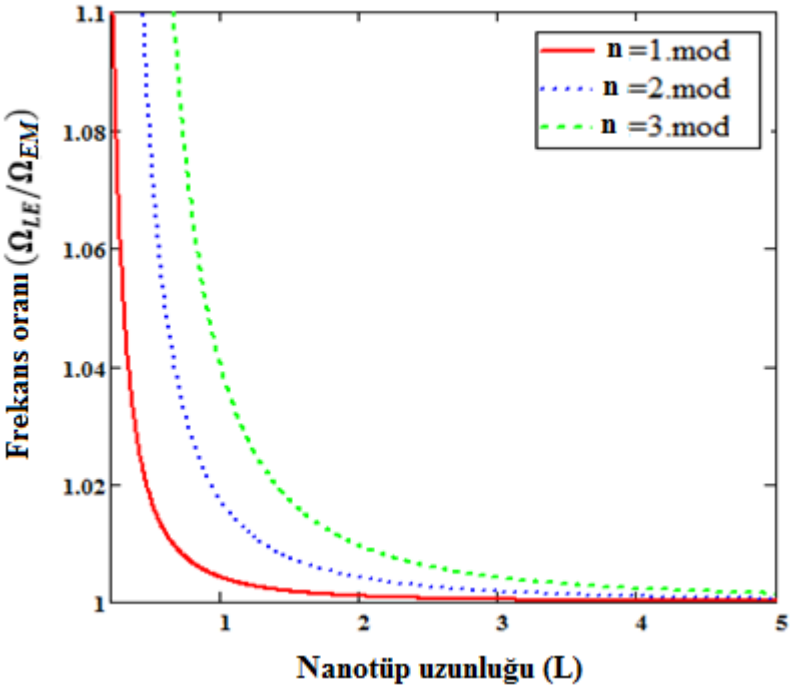
c)

Şekil 5.30. Boyutsuz frekans parametresinin şiral açısı ile ilk üç moddaki değişimi (K=0.5).

LE frekansının EM frekansına oranı Şekil 5.31'de gösterilmektedir. Mikro yapının kısa nanotüpler ve daha yüksek frekanslar için daha önemli olduğu görülebilir. Ayrıca, ilk üç mod için, şiral açısının artmasıyla, iki teorinin titreşim çözümü oranının azaldığı açıkça görülmektedir (Şekil 5.32). İki teori arasındaki fark, daha yüksek titreşim modları için daha belirgindir.

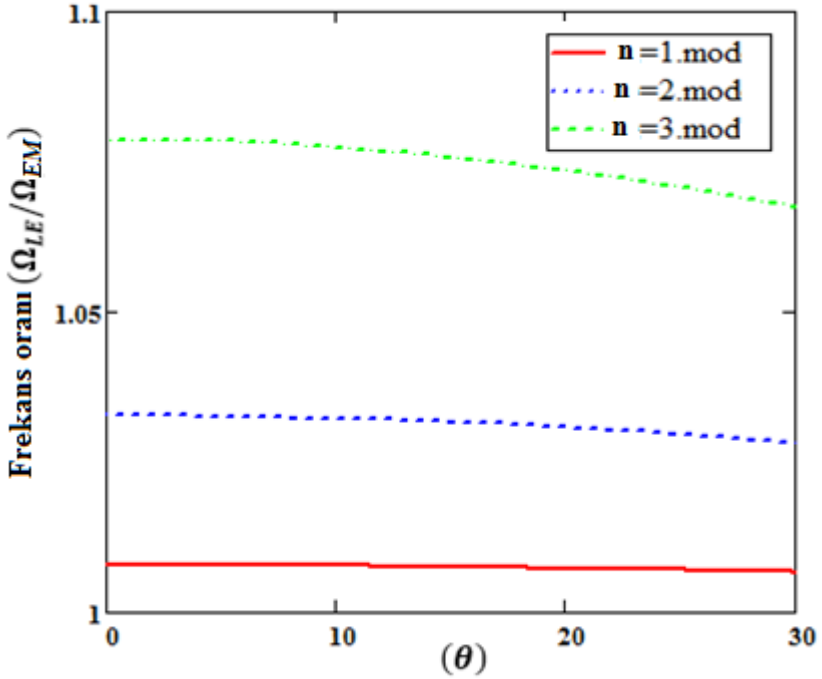


a) $\theta = 0^{\circ}$



b) $\theta = 30^{\circ}$

Şekil 5.31. Titreşim frekansı oranının nanotüp uzunluğu ile değişimi (K=0.5).



Şekil 5.32. Titreşim frekansı oranının şiral açısı ile değişimi (L=1 nm, K=0.5).

Elastik ortama gömülü nanotüplerde ilk üç boyutsuz frekans parametreleri B-B, A-A ve A-B sınır koşulları için Çizelgeler (5.13-5.15)'te verilmiştir. EM teorisi kullanılarak bulunan frekans parametrelerinin, tüm sınır koşulları için LE sonuçlarından daha düşük olduğu açıkça görülmektedir. Nanotüp uzunluğunun artmasıyla, EM sonuçları tüm modlar için LE sonuçlarına yakınsamaktadır. Nanotüp uzunluğu L=5 nm olduğunda, frekanslar her iki teori için de hemen hemen aynı değerleri vermektedir. Ayrıca, beklendiği gibi, elastik ortam sertliğinin artmasıyla frekanslar da artmaktadır. Bu artış, düşük titreşim modları için daha belirgindir. Farklı sınır koşulları için boyutsuz frekans parametresi A-A>A-B>B-B düzenindedir. Mikro yapısal etkiler, A-A sınır koşulları için daha yüksektir. Frekans parametresi ve kritik burkulma yükü için EM ile LE teorileri arasındaki yüzde fark (%Er) şu şekilde elde edilebilir:

$$\%Er = \frac{(LE) - (EM)}{(LE)} x100 \tag{5.2}$$

Çizelgelerde (5.13-5.15) %Er'nin genel olarak mod sayısının artması ile arttığı ve uzunluğun artmasıyla birlikte ise azaldığı görülmektedir. %Er'deki artış, artan mod sayısı ile dalga uzunluğunun azalmasından kaynaklanmaktadır. Nanotüp uzunluğu arttıkça, her iki teoriye ait sonuçların birbirine yaklaştığı ve belirli bir nanotüp uzunluğundan sonra aynı sonuçları verdikleri görülmektedir. Titreşim probleminde sırasıyla A-A, A-B ve B-

B sınır koşullarına sahip nanotüplerde en yüksek %*Er* üçüncü titreşim modunda ve %22,35, %12,2 ve %7.78'e eşit olacak şekilde elde edilmektedir.

Çizelge 5.16'da, EM teorisine ait kritik burkulma yükleri, farklı elastik ortam sertliği için LE teorisi ile karşılaştırılmıştır. EM tarafından elde edilen kritik burkulma yükleri, nanotüp uzunluğunun ve elastik ortam sertliğinin artmasıyla LE sonuçlarına yakınsamaktadır. L=5 nm olduğunda, dikkate alınan sınır koşullarında, kritik burkulma yükleri her iki teori için de birbirine çok yakın değerler vermektedir. Burkulma problemlerinde L =1 nm olduğunda, sırasıyla A-A, A-B ve B-B sınır koşullarına sahip nanotüplerde en yüksek %*Er*; %18.4, %11 ve %1.63 olarak elde edilmektedir.

Çizelge 5.13. Elastik ortama gömülü nanotüplerin farklı sınır koşullarındaki titreşim frekansları (n=1).

Teori	L (nm)	K	B-B	A-A	A-B
EM	1	0	9.787	18.44	14.95
		5	10.04	18.62	15.08
		20	10.76	19.17	15.56
		100	13.99	21.63	17.96
	1.5	0	9.833	19.47	15.09
		5	10.08	19.63	15.22
		20	10.80	19.98	15.73
		100	14.02	21.93	18.08
	2	0	9.849	20.92	15.38
		5	10.09	21.05	15.58
		20	10.81	21.40	16.02
		100	14.03	23.22	18.40
	5	0	9.866	22.30	15.40
		5	10.11	22.42	15.59
		20	10.83	22.74	16.11
		100	14.04	24.42	18.42
LE	Herhangi bir L	0	9.869	22.37	15.41
		5	10.12	22.48	15.60
		20	10.84	22.82	16.12
		100	14.05	24.52	18.42

Çizelge 5.14. Elastik ortama gömülü nanotüplerin farklı sınır koşullarındaki titreşim frekansları (n=2).

Teori	L (nm)	K	B-B	A-A	A-B
	1	0	38.16	47.46	47.05
		5	38.25	47.52	47.10
		20	38.42	47.69	47.20
		100	39.44	48.53	48.10
	1.5	0	38.86	54.16	48.24
		5	38.93	54.21	48.38
EM		20	39.15	54.43	48.47
		100	40.21	55.14	49.37
	2	0	39.23	56.65	49.79
		5	39.24	57.44	49.91
		20	39.42	57.62	50.00
		100	40.40	58.31	50.83
	5	0	39.42	60.92	49.88
		5	39.49	60.92	49.95
		20	39.67	61.10	50.10
		100	40.67	61.76	50.88
LE	Herhangi bir L	0	39.48	61.67	49.96
		5	39.54	61.75	50.05
		20	39.73	61.88	50.16
		100	40.72	62.47	50.93

Çizelge 5.15. Elastik ortama gömülü nanotüplerin farklı sınır koşullarındaki titreşim frekansları (n=3).

Teori	L (nm)	K	B-B	A-A	A-B
	1	0	81.92	93.88	91.55
		5	81.95	94.01	91.56
		20	82.04	94.18	91.65
		100	82.54	94.56	92.12
	1.5	0	85.82	104.0	98.19
		5	85.85	104.0	98.20
EM		20	85.94	104.1	98.31
		100	86.40	104.4	98.73
	2	0	87.15	112.5	103.1
		5	87. 18	112.5	103.2
		20	87.26	112.6	103.3
		100	87.72	112.8	103.6
	5	0	88.56	120.8	104.3
		5	88.58	120.8	104.3
		20	88.67	120.9	104.4
		100	89.12	121.1	104.6
LE	Herhangi bir L	0	88.83	120.9	104.3
		5	88.85	120.9	104.3
		20	88.94	121.0	104.4
		100	89.38	121.2	104.7

Çizelge 5.16. Elastik ortama gömülü nanotüplerin farklı sınır koşullarındaki kritik burkulma yükleri (n=1).

Teori	L (nm)	K	B-B	A-A	A-B
EM	1	0	9.711	32.21	17.96
		5	10.21	32.57	18.54
		20	11.73	33.65	19.71
	1.5	0	9.796	34.37	18.86
		5	10.30	34.76	19.23
		20	11.82	35.85	20.22
	2	0	9.828	34.89	19.92
		5	10.33	35.32	20.20
		20	11.85	36.47	20.43
	5	0	9.863	38.23	20.01
		5	10.37	38.68	20.31
		20	11.88	39.75	20.59
LE	Herhangi bir L	0	9.870	39.50	20.20
		5	10.38	39.59	20.31
		20	11.89	39.86	20.61

5.7. Çiftli Nanotüplerin Burkulma Analizi Sonuçları

Bu bölümde, ölçek uzunluğu, geometrik ve malzeme özelliklerinin çiftli nanokiriş sistemlerin (ÇNKS) kritik burkulma yükü üzerindeki etkileri paylaşılmaktadır. Doğrulama için EM teorisi kullanılarak elde edilen ÇNKS'nin kritik burkulma yükü değerleri B-B sınır koşulu için NL ve LE teorileri ile Çizelge 5.17'de karşılaştırılmıştır. ÇNKS'nin NL sonuçları Murmu ve Adhikari (2011) tarafından B-B sınır koşulu için bulunmuştur. Bu makalede araştırmacılar, eş fazlı ve zıt burkulma durumu olmak üzere iki grupta ÇNKS'ye ait burkulma modu şekillerini göstermişlerdir. Buna göre, eş fazlı ve

zıt fazlı burkulma durumları için kritik burkulma yükü değerleri NL teorisi kullanılarak aşağıdaki biçimde elde edilebilir (Murmu & Adhikari, 2011):

$$\bar{P}^{(NL)} = \frac{(n\pi)^4}{(n\pi)^2[1+\xi^2(n\pi)^2]}, \qquad n = 1,2,3 \ldots. \qquad \text{(Eş fazlı burkulma)} \qquad (5.3a)$$

$$\bar{P}^{(NL)} = \frac{(n\pi)^4 + 2K[1+\xi^2(n\pi)^2]}{(n\pi)^2[1+\xi^2(n\pi)^2]}, n = 1,2,3 \ldots \text{(Zıt fazlı burkulma)} \qquad (5.3b)$$

Burada ξ,

$$\xi = \frac{\sqrt{(e_0 a)^2}}{L} \qquad (5.4)$$

eşit olmaktadır. Çizelge 5.17'deki sonuçlar bulunurken, karbon atomlarının bağ uzunluğu, yerel olmayan parametre ve yayların boyutsuz sertliği sırasıyla a=0.142 nm, e_0=0.39 ve K=10 olarak kabul edilmiştir. Çizelge 5.17'den görülebileceği gibi, EM sonuçları NL1 ve LE1 (eş fazlı burkulma durumu) sonuçlarına daha yakındır. EM sonuçları LE teorisinden ise daha düşük kritik burkulma yükü değerleri vermektedir. EM ve NL2 (zıt fazlı burkulma durumu) sonuçları arasındaki fark n=1 için %0.007 ile %20.49 arasındadır. Bu farkın nedeni, Ref. (Murmu & Adhikari, 2011)'de NL çözümü için yapılan mod şekli varsayımlarından kaynaklanıyor olabilir. İki kiriş özdeş ve uygulanan yükler eşit olduğunda, dikkate alınan ÇNKS'de zıt fazlı burkulma durumu gerçekleşmediğine dikkat edilmelidir.

Çizelge 5.17. ÇNKS'de kritik burkulma yükü değerlerinin karşılaştırılması (K=10).

Mod sayısı	Uzunluk (nm)	LE1	LE2	EM	NL1 (Murmu & Adhikari, 2011)	NL2 (Murmu & Adhikari, 2011)
	1	9.8690	11.896	9.7056	9.5792	11.606
n=1	2	9.8690	11.896	9.8286	9.7953	11.821
	5	9.8690	11.896	9.8630	9.8576	11.884
	1	39.476	39.985	36.855	35.209	35.721
n=2	2	39.476	39.985	38.822	38.316	38.825
	5	39.476	39.985	39.373	39.287	39.794
	1	88.821	89.052	75.549	69.787	70.033
n=3	2	88.821	89.052	85.507	83.155	83.387
	5	88.821	89.052	88.295	87.867	88.094

$(\boldsymbol{\eta_1 = \eta_2 = 0.1421\ nm, c = 1, E_r = 1, I_r = 1})$

(LE1: eş fazlı burkulma, LE2: zıt fazlı burkulma, NL1: eş fazlı burkulma, NL2: zıt fazlı burkulma).

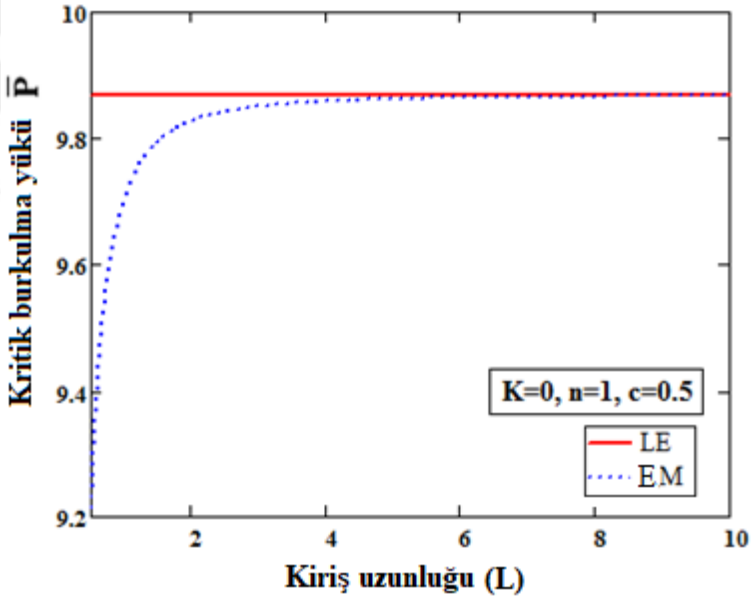
Kritik burkulma yükünün kiriş uzunluğu ile değişimi Şekil 5.33'te ilk burkulma modu için gösterilmektedir. EM teorisinin LE modeline kıyasla daha düşük kritik burkulma yükü değerleri verdiği görülmektedir. İki teori arasındaki fark kısa kirişler için daha belirgindir. Bu durum ÇNKS'de, ölçek etkilerinin kısa kiriş uzunluğu için önemli hale geldiği anlamına gelmektedir. Beklendiği gibi, boyutsuz elastik ortam sertliği kritik burkulma yükü değerlerini arttırmaktadır.

Şekil 5.34'te, kritik burkulma yükü değerlerinin boyutsuz elastik ortam sertliği ile değişimi gösterilmektedir. Boyutsuz sertlik LE ve EM modelleri için kritik burkulma yükü değerlerini artırmaktadır. İki teori arasındaki fark, kiriş uzunluğunun azalmasıyla artar. L=5 nm olduğunda EM modeli, LE teorisi ile hemen hemen aynı değerleri vermektedir.

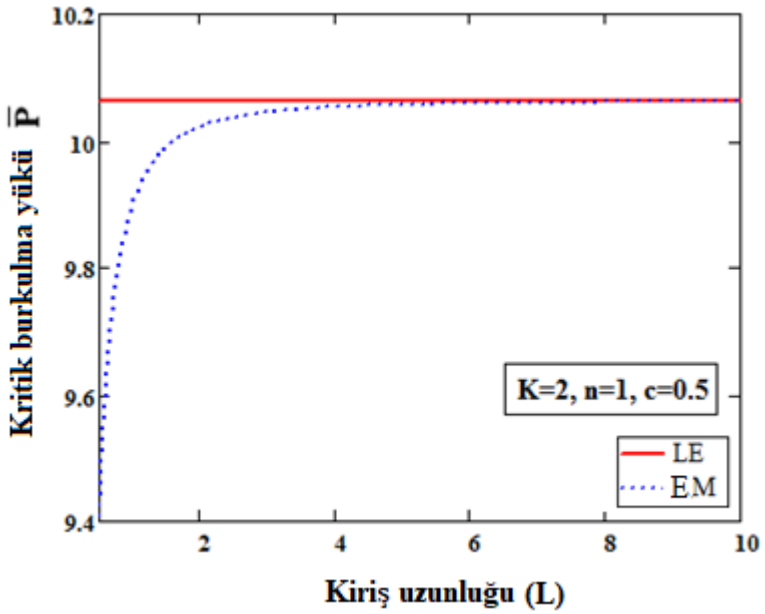
Şekil 5.35'te, farklı mod sayılarında kritik burkulma yükü değerleri, L=1 nm, L=2 nm ve L =5 nm için verilmiştir. LE teorisi ile elde edilen kritik burkulma yükleri mod sayısının artmasıyla herhangi bir sınırlama olmaksızın artmaktadır. Ancak, bu artış

fiziksel değildir. Buna karşılık, EM teorisinin ilk Brillouin bölgesinin sınırında bir Van Hove tekilliği vardır. K=5 ve c=0.5 olduğunda, maksimum anlamlı mod sayısı L=1 nm için 7, L=2 nm için 15 ve L=5 nm için 39'dur. Bu kısıtlama LE teorisinde gözlenmez. Ayrıca, EM sonuçlarının özellikle yüksek burkulma modları için LE teorisinden farklı olduğu da görülmektedir.

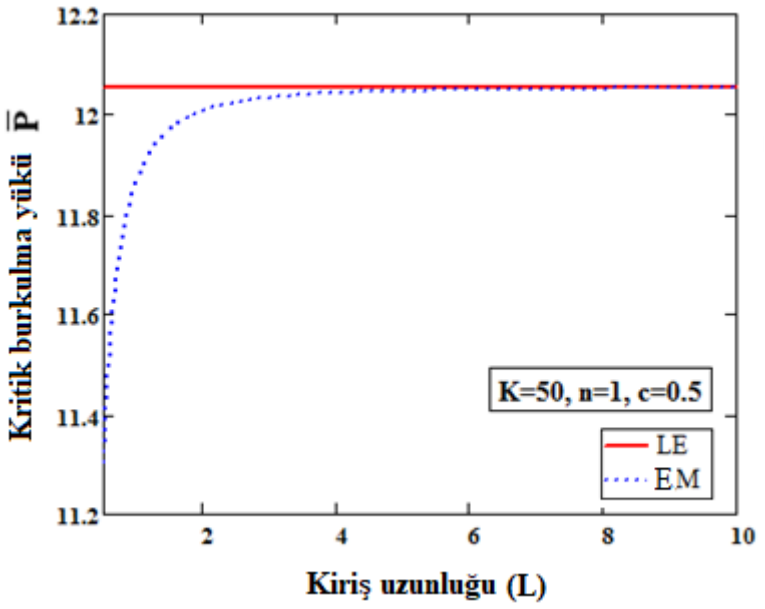
EM modelindeki farklı kiriş uzunlukları ve c değerleri için birinci ve ikinci nanokirişlere ait mod şekilleri Şekil 5.36'da verilmiştir. Her iki nanokirişin mod şekillerinin c değerlerine bağlı olarak değiştiği görülmektedir. Verilen mod şekillerinden üç ayrı durum gözlemlenebilir. $\bar{P}1 > \bar{P}2$ durumunda, birinci nanokirişin birinci genliği beklendiği gibi ikinci kirişinkinden daha büyüktür. $\bar{P}1=\bar{P}2$ (c =1) olduğunda, iki nanokiriş aynı mod şekline sahiptir. Bu durumda, Ref. (Murmu & Adhikari, 2011)'de elde edilen zıt fazlı burkulma durumunu elde etmek mümkün değildir. Son olarak, eğer $\bar{P}2 > \bar{P}1$ veya c=2 ise, ikinci nanokirişin genliği birinci nanokirişin genliğinden daha büyük olmaktadır.



a)

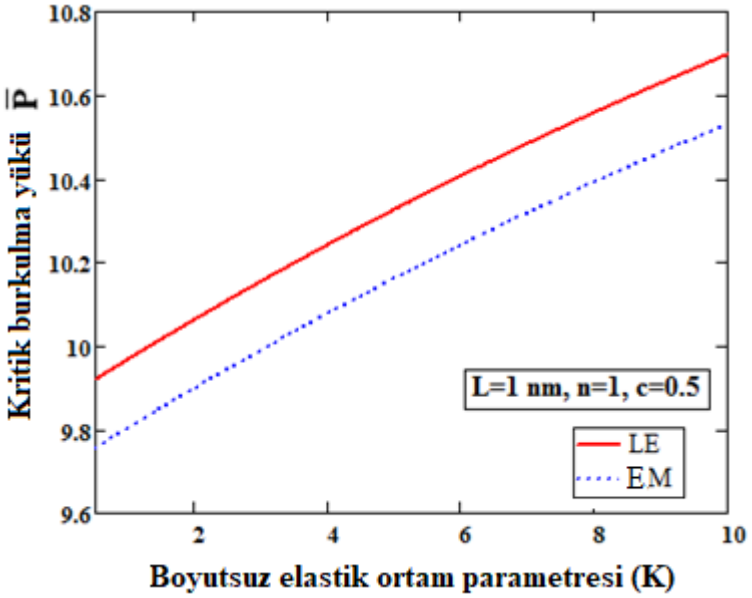


b)

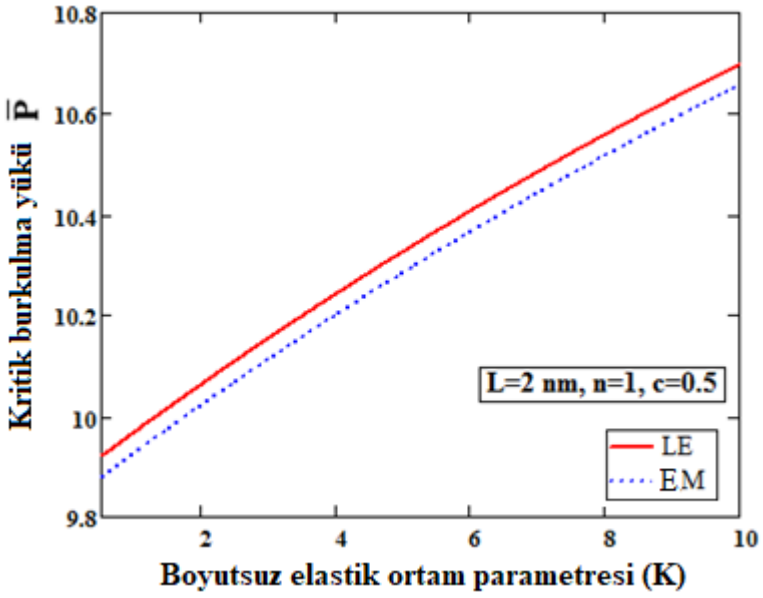


c)

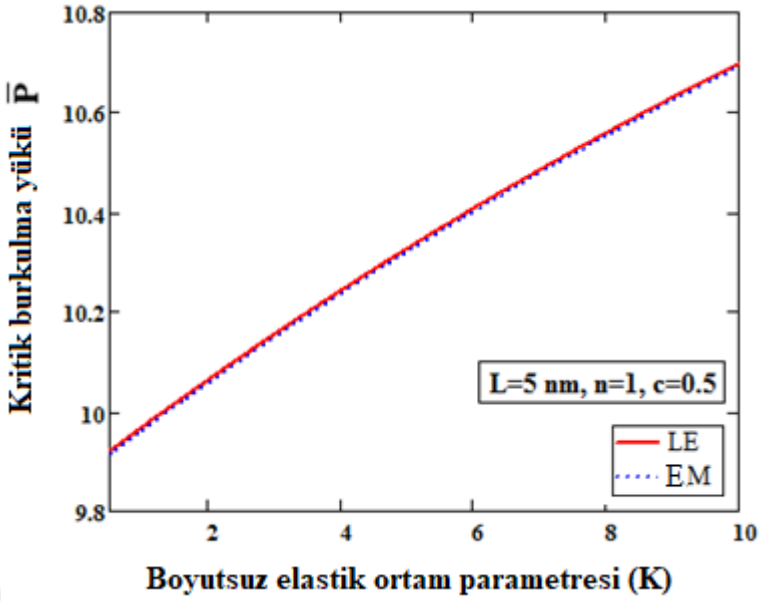
Şekil 5.33. Kritik burkulma yükünün kiriş uzunluğu ile değişimi (E_r=1, I_r=1, η_1=0.1421 nm, η_2=0.1421 nm).


Kritik burkulma yükü $\bar{P}$
10.8
10.6
10.4
10.2
10
9.8
9.6
2
4
6
8
10
Boyutsuz elastik ortam parametresi (K)
L=1 nm, n=1, c=0.5
LE
EM

a)

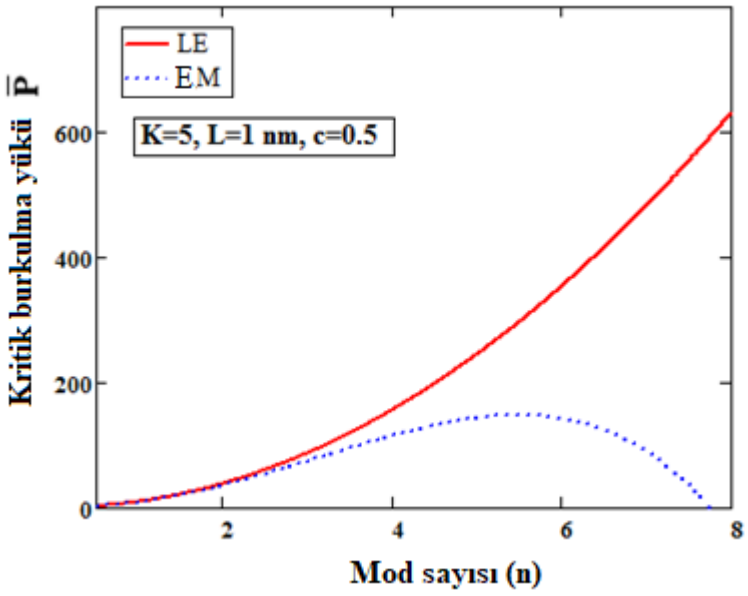

Kritik burkulma yükü $\bar{P}$
10.8
10.6
10.4
10.2
10
9.8
2
4
6
8
10
Boyutsuz elastik ortam parametresi (K)
L=2 nm, n=1, c=0.5
LE
EM

b)

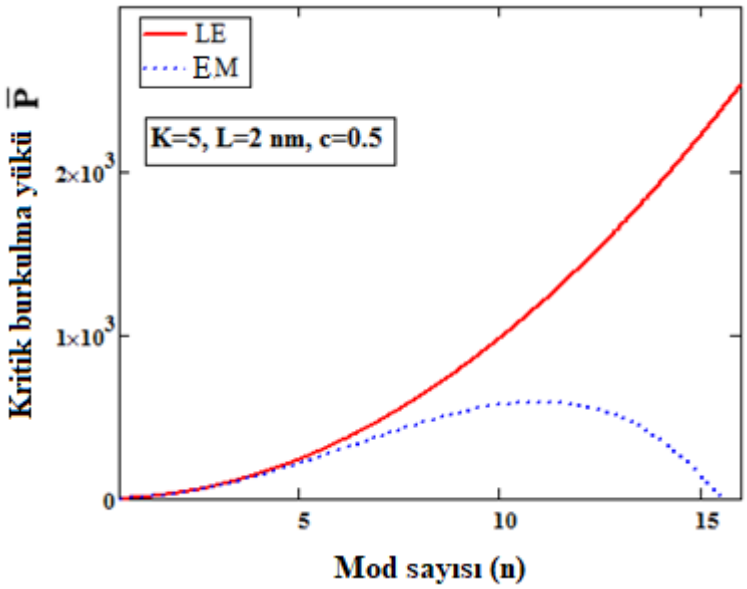


c)

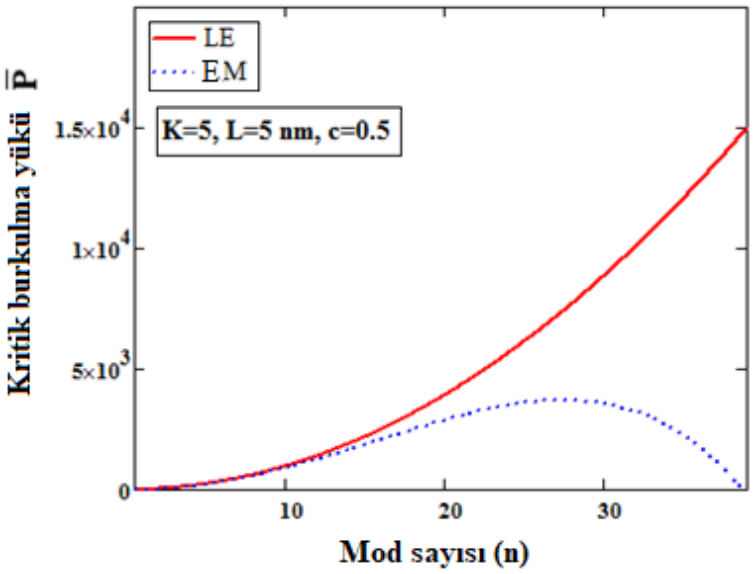
Şekil 5.34. Kritik burkulma yükünün boyutsuz yay katılığı ile değişimi (E_r=1, I_r=1, η_1=0.1421 nm, η_2=0.1421 nm).



a)

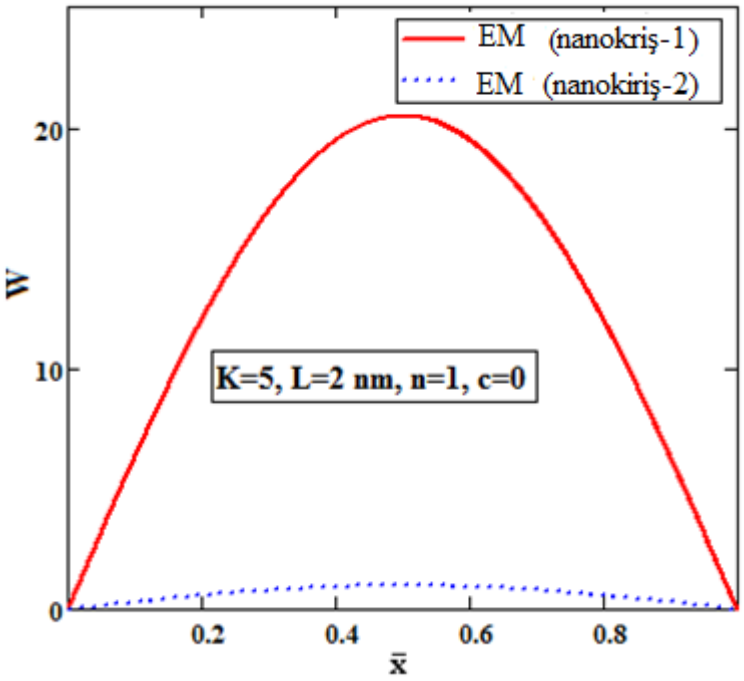


b)

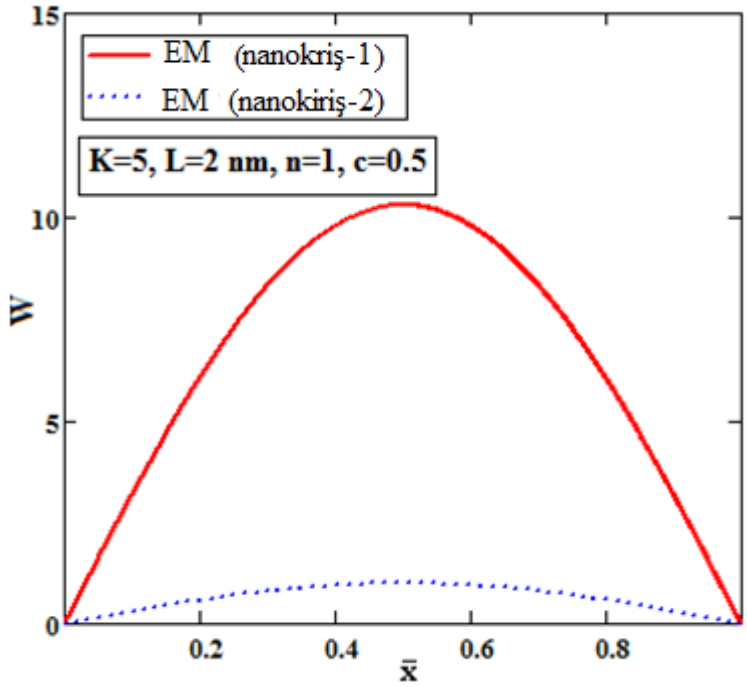


c)

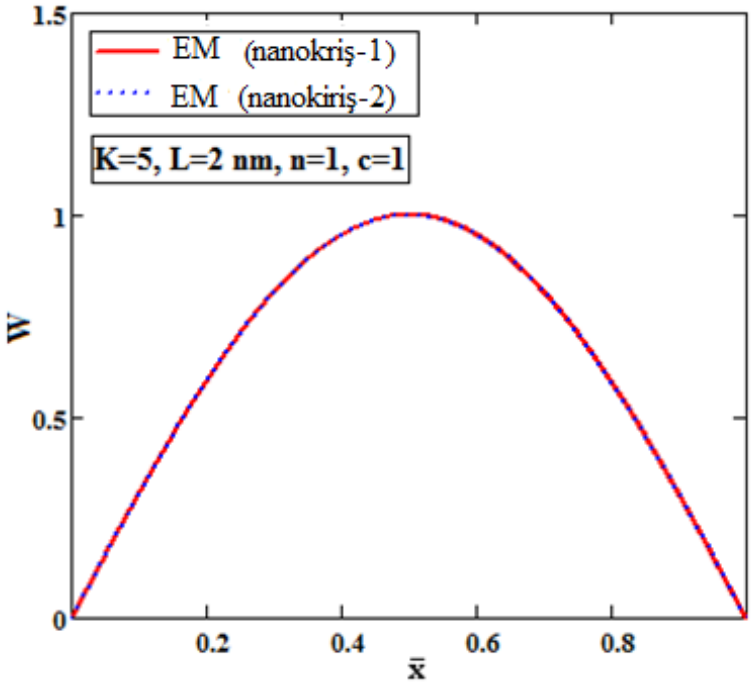
Şekil 5.35. Kritik burkulma yükünün mod sayısı ile değişimi (E_r=1, I_r=1, η_1=0.1421 nm, η_2=0.1421 nm).


EM (nanokriş-1)
EM (nanokiriş-2)
K=5, L=2 nm, n=1, c=0
W
x̄
0
10
20
0.2
0.4
0.6
0.8

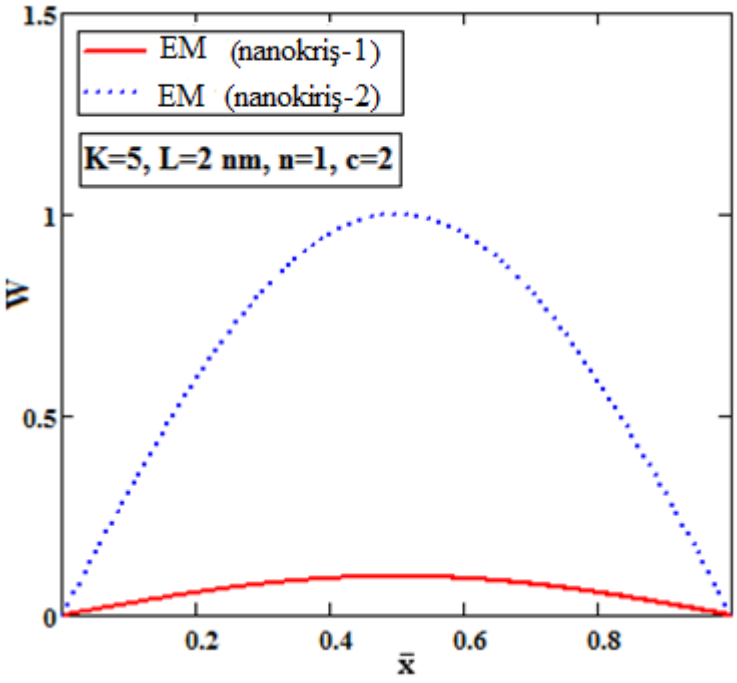
a)


EM (nanokriş-1)
EM (nanokiriş-2)
K=5, L=2 nm, n=1, c=0.5
W
x̄
0
5
10
15
0.2
0.4
0.6
0.8

b)



c)



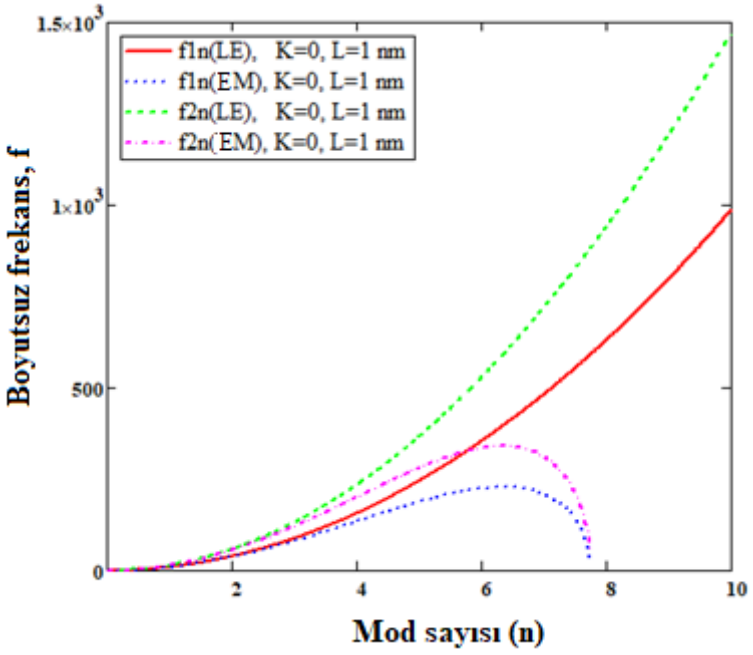
d)

Şekil 5.36. ÇNKS'de mod şekilleri (E_r=1, I_r=1, η_1=0.1421 nm, η_2=0.1421 nm).

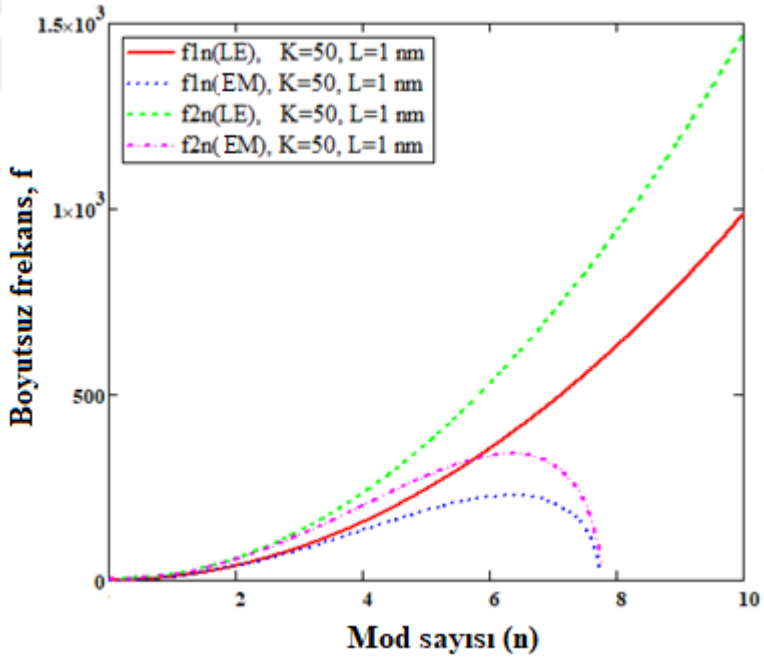
5.8. Elastik Ortama Gömülü Çift Duvarlı Karbon Nanotüplerin Eş Eksenli Olmayan Titreşim ve Burkulma Analizi Sonuçları

Bu bölümde, elastik ortama gömülü çift duvarlı karbon nanotüplerin titreşimi ve burkulması ile ilgili sayısal sonuçlar EM ve LE teorileri kullanılarak gösterilmiştir. Çift duvarlı karbon nanotüplerin farklı mod sayıları, elastik ortam parametreleri, nanotüp uzunluğu ve mod şekilleri için titreşim ve burkulma sonuçları Şekiller (5.37-5.43)'te verilmektedir. Yapılan analizlerde, karbon nanotüpün kalınlığı, elastisite modülü ve yoğunluğu sırasıyla t_t=0.35 nm, E=1 TPa ve ρ=2300 kg/m^3 olarak kabul edilmiştir.

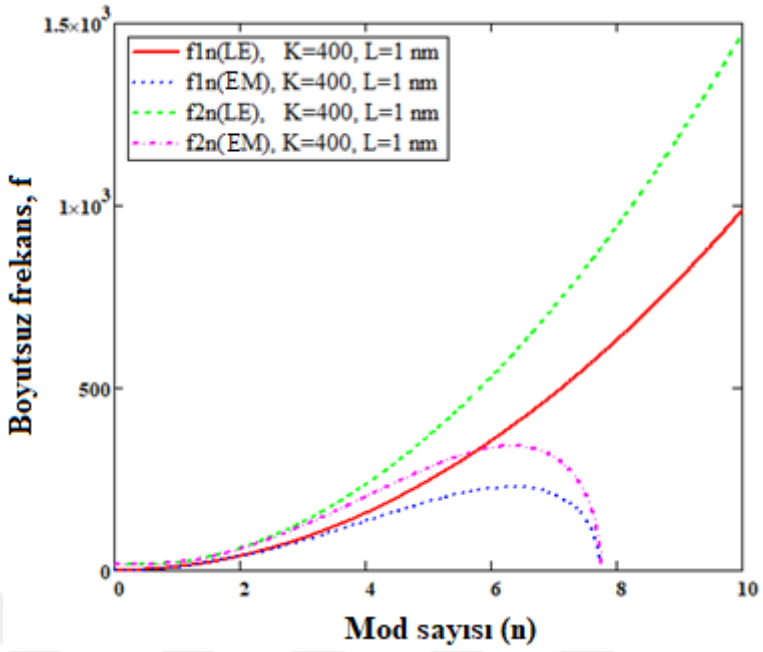
L=1 nm ve L=5 nm ve farklı elastik ortam sertliği parametreleri için, boyutsuz frekans parametresinin mod sayısı ile değişimi Şekiller (5.37,5.38)'de gösterilmektedir. EM teorisinin LE modelinden daha küçük boyutsuz frekans parametresi değerleri verdiği görülmektedir. İki teori arasındaki fark, yüksek mod sayıları için daha belirgindir. EM teorisi ile elde edilen boyutsuz frekans parametresinin L=1 nm için maksimum n =7'de olduğu ve daha sonra bu uzunluk için mevcut en yüksek dalga sayısı olan n=7'den sonra frekansın azalmaya başladığı görülebilir. Buna göre, n>7 olduğunda titreşim olmaz. Benzer davranış, L=5 nm uzunluğuna sahip nanotüpte, n=35 için gözlenir. EM teorisi çerçevesinde, belirli bir nanotüp uzunluğu için maksimum mod sayısı L/η'dan elde edilebilir. Yani, L=1 nm olan nanotüp için maksimum mod sayısı L/η =1/0.1421 =7.03 olacak şekilde bulunur. Buna göre, LE teorisinin öngördüğü mod sayısının sınırı yoktur ve frekanslar sürekli mod sayısı ile artmaktadır. Birinci ve ikinci küme boyutsuz frekans parametreleri arasındaki fark, her iki teoride de mod sayısının artmasıyla artmaktadır (Şekil 5.37). Nanotüp uzunluğunun artmasıyla, LE ve EM sonuçları ilk on frekans için çok yakın değerler vermektedir (Şekil 5.38). Belirli bir yarı dalga sayısında, iki frekans kümesinin mod şekillerinin benzer, ancak frekans değerlerinin farklı olduğu ayrıca belirtilebilir.


f1n(LE), K=0, L=1 nm
f1n(EM), K=0, L=1 nm
f2n(LE), K=0, L=1 nm
f2n(EM), K=0, L=1 nm
Boyutsuz frekans, f
Mod sayısı (n)
1.5×10^3
1×10^3
500
0
2
4
6
8
10

a)

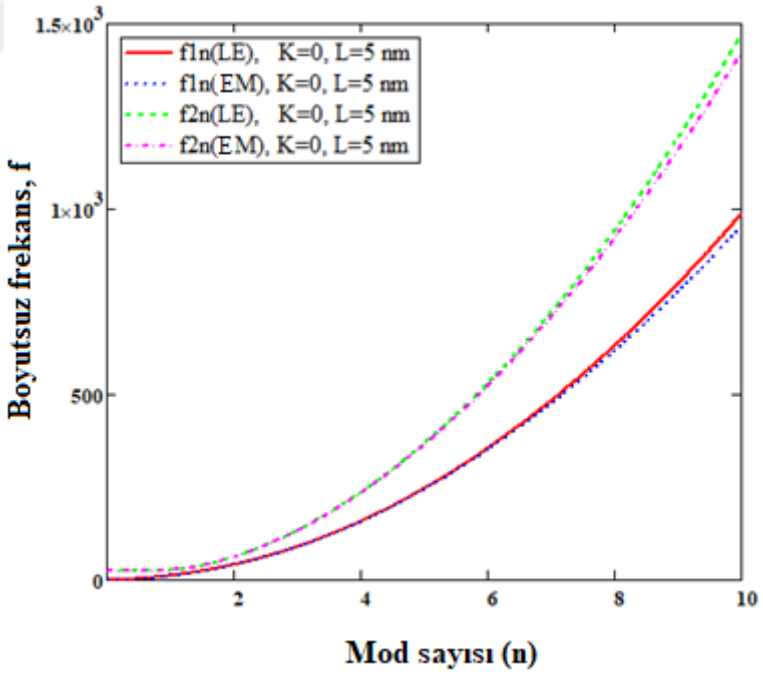

f1n(LE), K=50, L=1 nm
f1n(EM), K=50, L=1 nm
f2n(LE), K=50, L=1 nm
f2n(EM), K=50, L=1 nm
Boyutsuz frekans, f
Mod sayısı (n)
1.5×10^3
1×10^3
500
0
2
4
6
8
10

b)

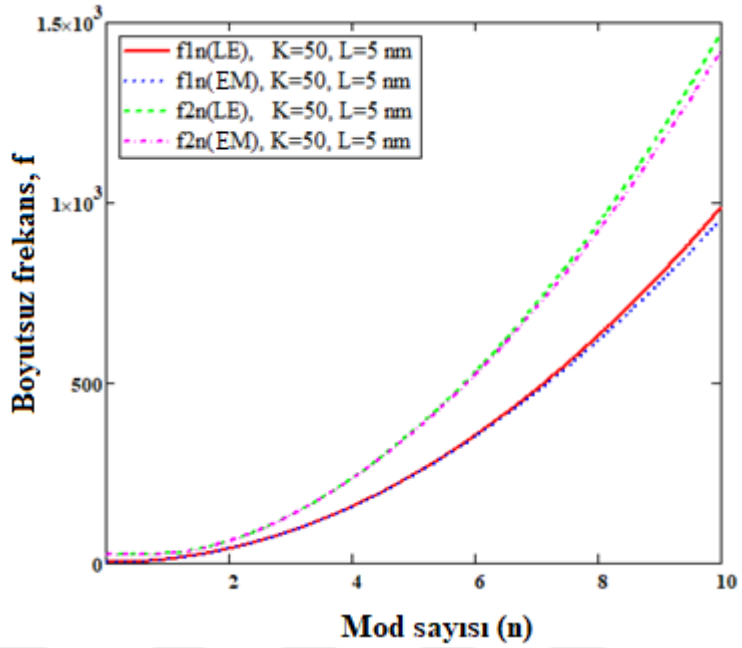


c)

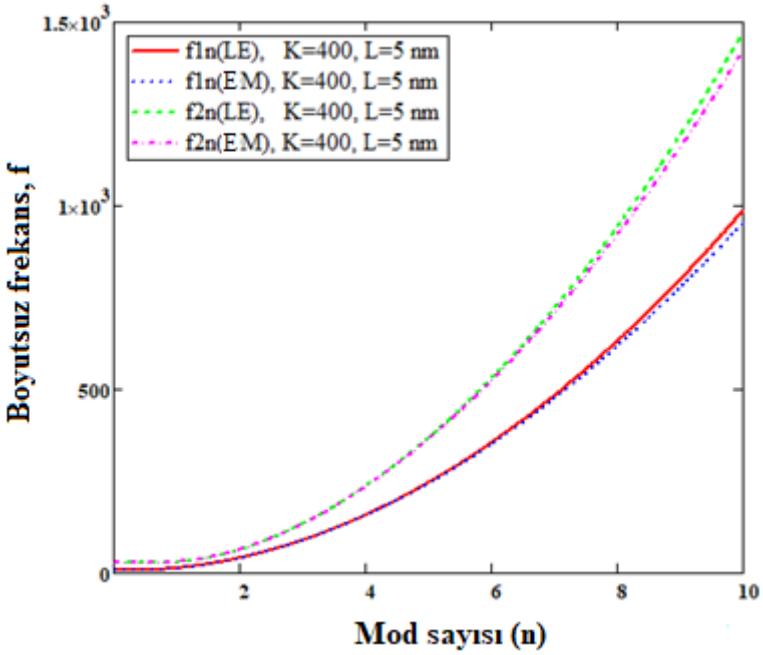
Şekil 5.37. Boyutsuz frekans parametresinin mod sayısı ile değişimi (R_1=0.5 nm, L=1 nm).



a)



b)

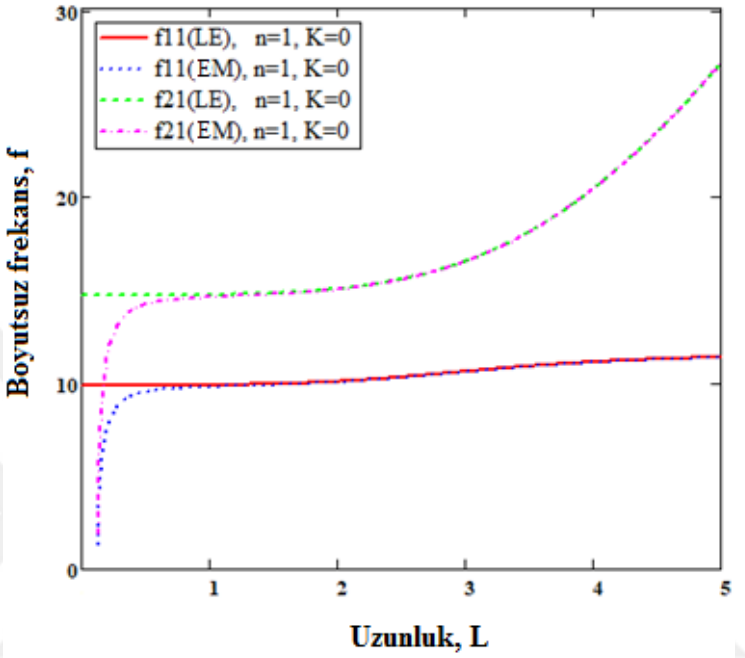


c)

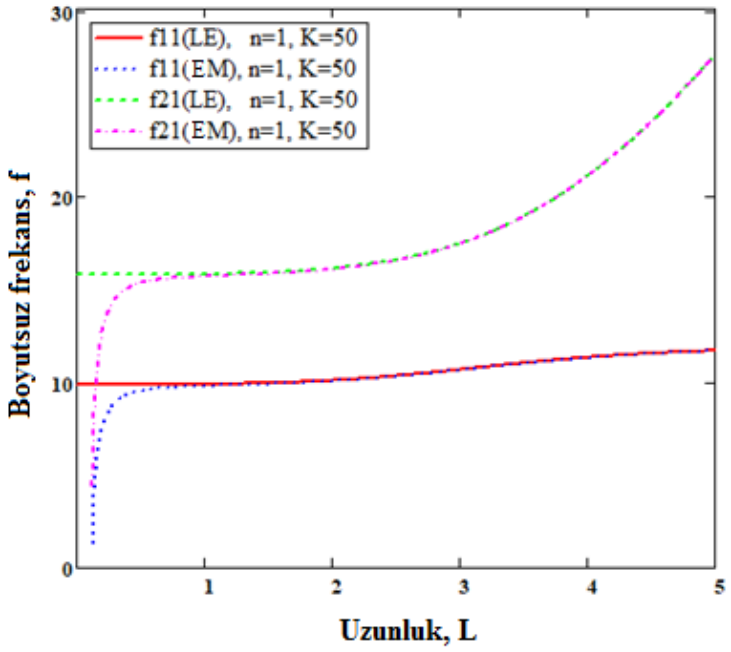
Şekil 5.38. Boyutsuz frekans parametresinin mod sayısı ile değişimi (R_1=0.5 nm, L=5 nm).

Şekiller (5.39,5.40)'ta, ilk üç moddaki boyutsuz frekans parametresinin nanotüp uzunluğu ile değişimi gösterilmiştir. EM ve LE sonuçları farklı elastik ortam sertliği için karşılaştırılmıştır. EM teorisi ile elde edilen boyutsuz frekans parametresi, LE sonuçlarından daha düşüktür ve nanotüp uzunluğunun artmasıyla EM sonuçları LE

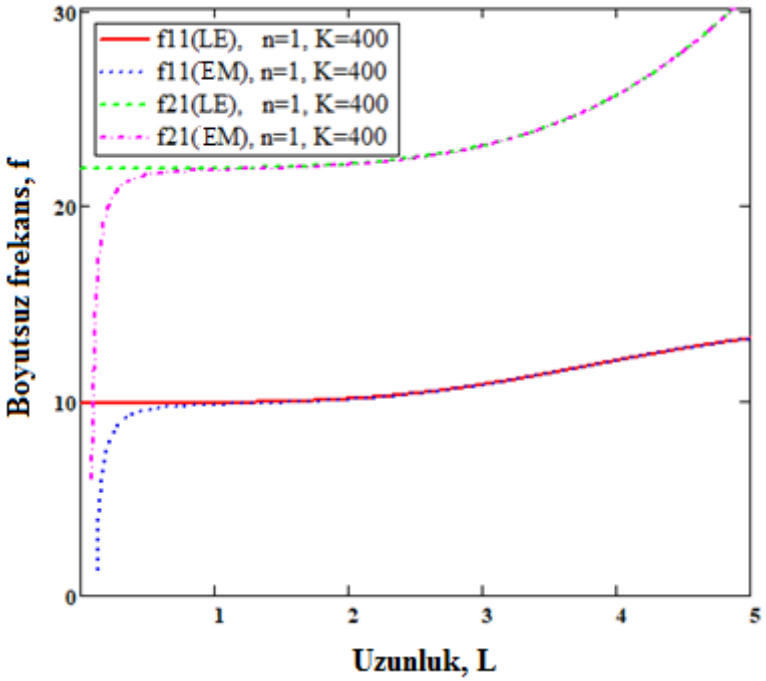
sonuçlarına yakınsamaktadır. Nanotüpün mikro yapısı, yüksek titreşim modlarında daha önemli olmaktadır. L>3 nm olduğunda, her iki teoride birinci ve ikinci küme frekanslar hemen hemen aynı değerleri vermektedir (Şekil 5.39). Ölçek etkileri, yüksek mod sayıları ve düşük nanotüp uzunluklarında daha önemli hale gelmektedir. Beklenildiği gibi, elastik ortam sertliği her iki teori için de boyutsuz frekans parametresini arttırmaktadır.



a)

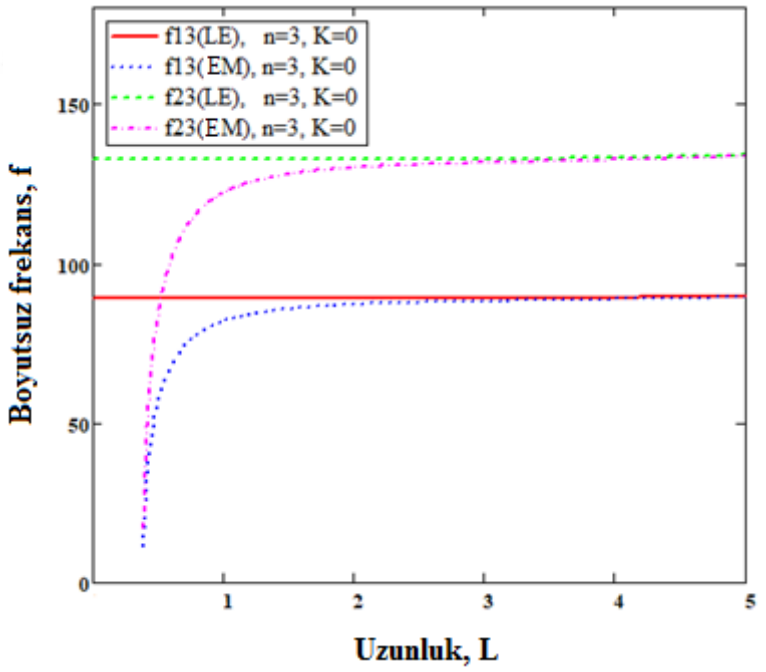


b)

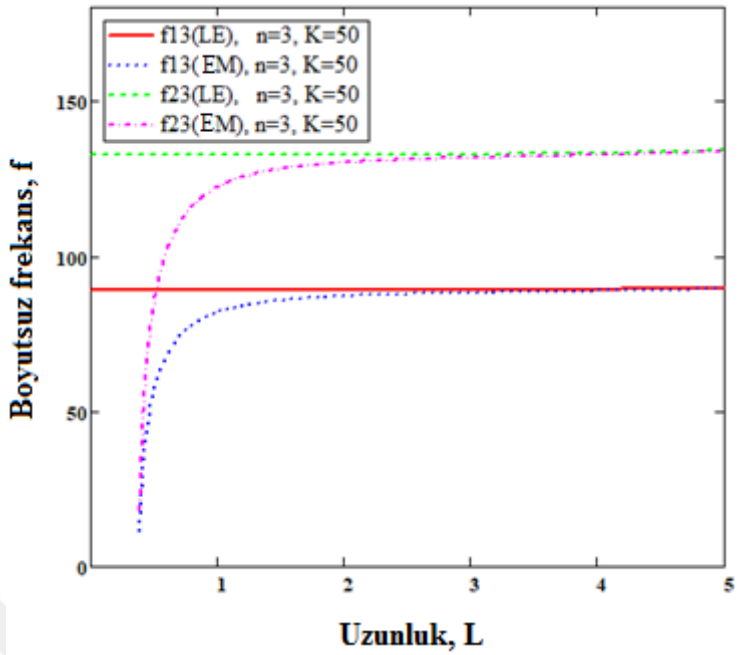


c)

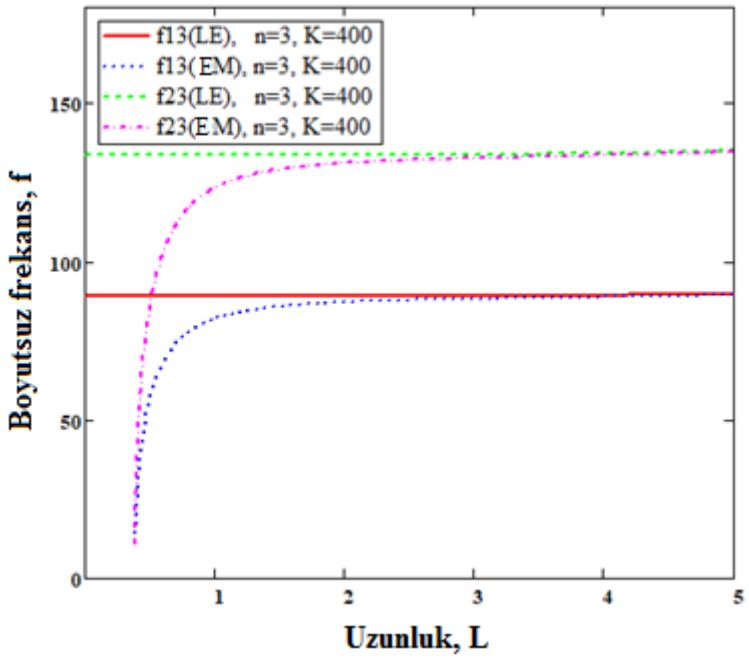
Şekil 5.39. Birinci moddaki boyutsuz frekans parametresinin nanotüp uzunluğu ile değişimi (R_1=0.5 nm).



a)



b)

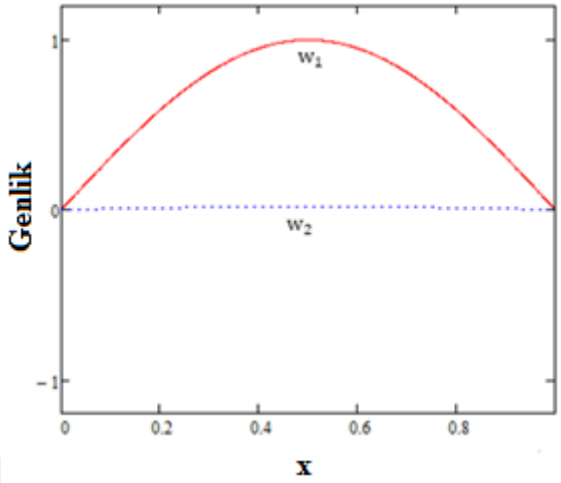


c)

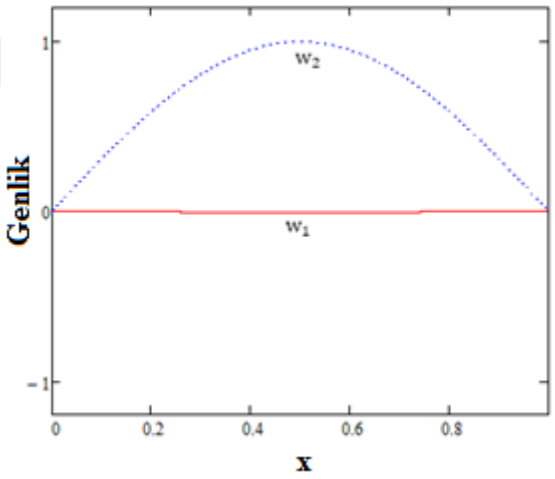
Şekil 5.40. Üçüncü moddaki boyutsuz frekans parametresinin nanotüp uzunluğu ile değişimi (R_1=0.5 nm).

Şekil 5.41'de çift duvarlı karbon nanotüplerin mod şekilleri gösterilmektedir. Nanotüplere ait ilk küme frekanslarının (f_{11}, f_{12} ve f_{13}) eş fazlı hareketi sağladığı görülmektedir. Bu, iki nanotüpün aynı yönde titreştiği ve çift duvarlı karbon nanotüplerin tek katmanlı bir tüp gibi titreştiği anlamına gelir. Buna karşılık, ikinci küme frekansları

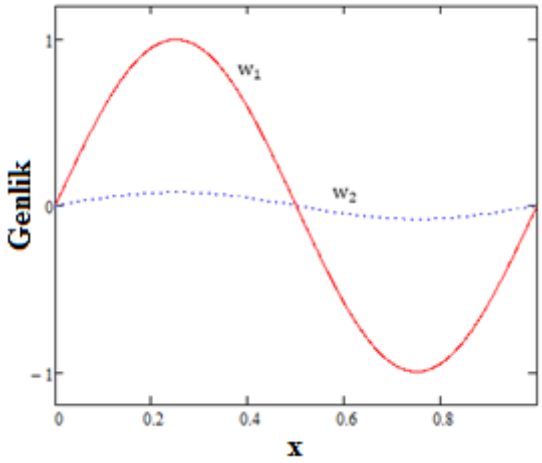
(f_{21}, f_{22} ve f_{23}) zıt fazlı hareketi göstermektedir. Eş eksenli (eş fazlı) olmayan titreşim hareketi çok duvarlı karbon nanotüplerin eş merkezli geometrisini bozar ve literatürde bu davranışın karbon nanotüplerin elektronik ve optik özelliklerini değiştirebileceği belirtilmektedir (Yoon vd., 2003).



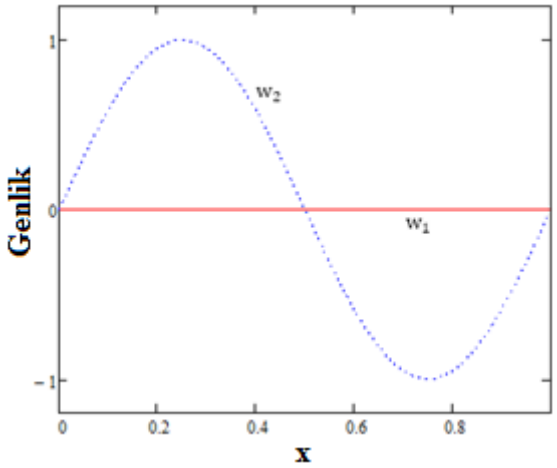
a) f_{11}



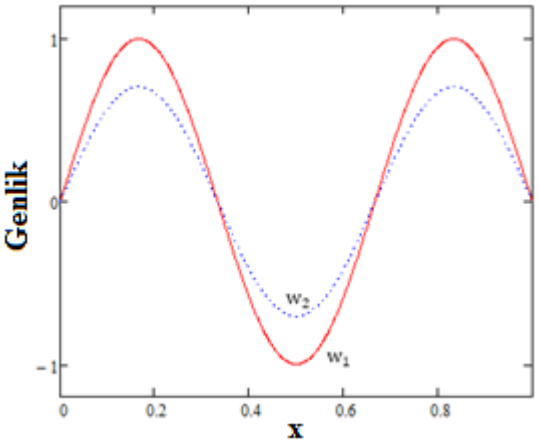
b) f_{21}



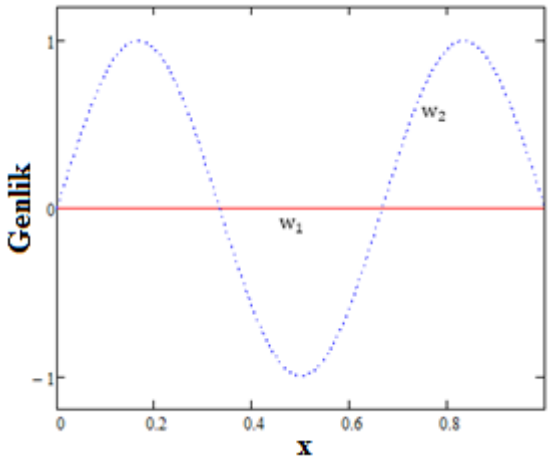
c) f_{12}



d) f_{22}



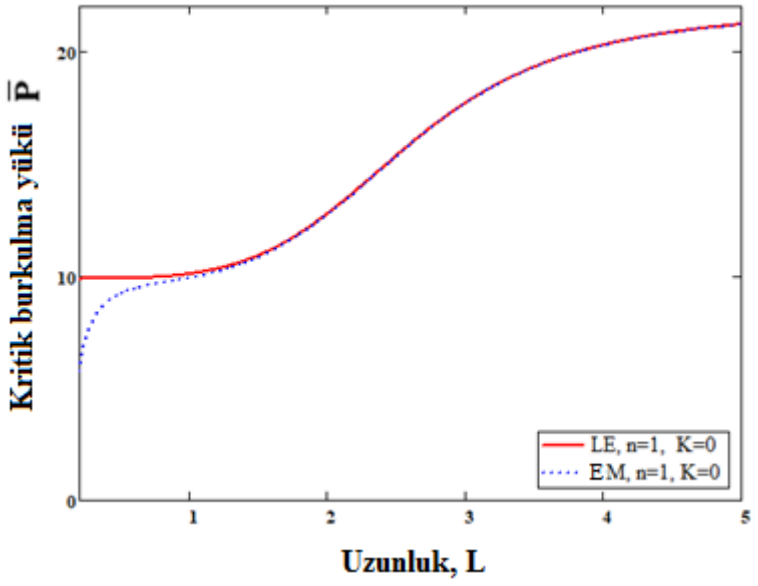
e) f_{13}



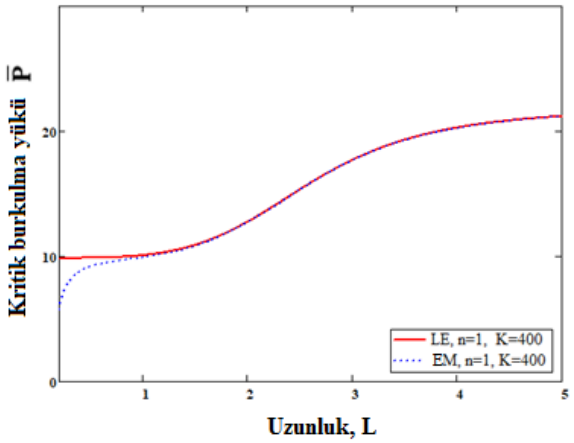
f) f_{23}

Şekil 5.41. Birinci ve ikinci küme frekanslar için çift duvarlı karbon nanotüplerin mod şekilleri (R_1 =0.5 nm, K=400, L=1 nm).

Kritik burkulma yükünün LE ve EM teorileri için nanotüp uzunluğu ile değişimi Şekil 5.42'de gösterilmiştir. EM sonuçları, LE sonuçlarından daha küçük kritik burkulma yükü değerleri vermektedir ve nanotüp uzunluğunun artmasıyla EM sonuçları, LE sonuçlarına yakınsamaktadır. Kritik burkulma yükü değerleri, L=1-3 nm arasında keskin bir artış göstermektedir. Bu artış, nanotüpler arasındaki Van der Waals kuvvetinin etkisinden kaynaklanıyor olabilir. Çift duvarlı karbon nanotüplerin burkulma modu şekilleri Şekil 5.43'te verilmektedir. Mod şekilleri ilk kritik burkulma kümesi için eş fazlıdır. İlk tüpün genliği, ikinci tüpün genliğinden daha azdır.

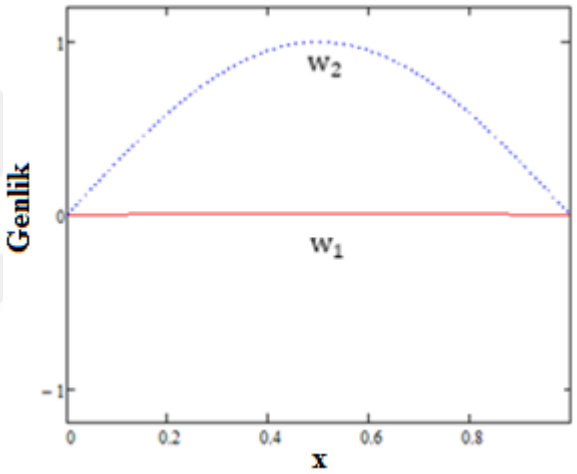


a)

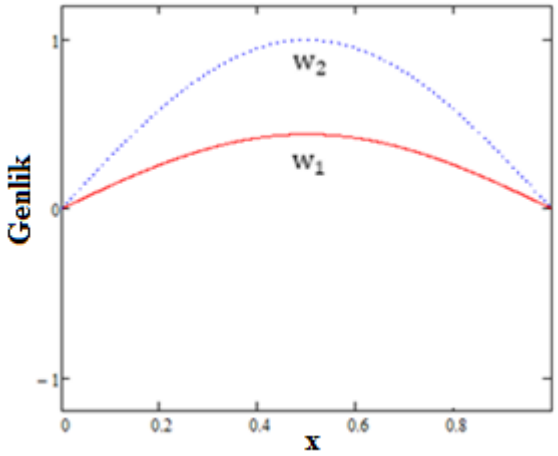


b)

Şekil 5.42. Çift duvarlı karbon nanotüplerin kritik burkulma yüklerinin uzunluk ile değişimi (R_1=0.5 nm).



a)



b)

Şekil 5.43. Çift duvarlı karbon nanotüplerin burkulma mod şekilleri (R_1=0.5 nm, K=400, L=1 nm, n=1).

Çift duvarlı karbon nanotüplerin titreşimi Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş modelleri kullanılarak C. Wang, Tan, ve Zhang (2006) tarafından analiz edilmiştir (Çizelge 5.18). Çizelge 5.18'den, çift duvarlı Timoshenko kiriş (DTB) modelinin, çift duvarlı Euler-Bernoulli kiriş (DEB) modelinden daha düşük frekanslar verdiği görülmektedir. Mevcut EM teorisinin geçerliliğini göstermek için, çift duvarlı karbon nanotüplerin boyutsuz frekans sonuçları Çizelge 5.18'de DEB ve DTB ile karşılaştırılmaktadır. EM sonuçlarının verilen tüm teorilerle iyi bir uyum içinde olduğu görülmektedir. EM modeli, birinci ve ikinci küme frekansları için nano-uzunluk ölçeğinde yumuşama davranışı göstermektedir. L/d =5 olduğunda, EM ve DEB sonuçları arasındaki fark artmaktadır. Nanokiriş uzunluğunun azalmasıyla ölçek etkilerinin önemli hale geldiği de ayrıca görülebilir.

Çizelge 5.19'da, farklı nanotüp uzunluğu için ilk moddaki kritik burkulma yükü sunulmaktadır. EM modeli, nanotüp uzunluğunun artmasıyla LE'den daha küçük kritik burkulma yükü değerleri vermektedir İki teori arasındaki fark, titreşim durumuna kıyasla burkulma durumu için daha belirgindir.

Çizelge 5.18a. B-B çift duvarlı karbon nanotüplerin birinci küme frekansı parametrelerinin karşılaştırılması.

n	*L*/*d*=10			*L*/*d*=5	
	EM	DTB (C. Wang vd., 2006)	DEB (C. Wang vd., 2006)	EM	DEB (C. Wang vd., 2006)
1	3.1410	3.0662	3.1410	3.1320	3.1320
2	6.2640	6.0378	6.2560	5.9380	5.9397
3	9.2740	8.5758	9.2756	7.9660	7.9703
4	11.876	10.850	11.880	10.147	10.159
5	13.940	13.115	13.946	12.484	12.509

Çizelge 5.18b. B-B çift duvarlı karbon nanotüplerin ikinci küme frekansı parametrelerinin karşılaştırılması.

n	*L*/*d*=10			*L*/*d*=5	
	EM	DTB (C. Wang vd., 2006)	DEB (C. Wang vd., 2006)	EM	DEB (C. Wang vd., 2006)
1	12.720	12.700	12.720	6.4220	6.4220
2	12.843	12.714	12.843	7.4150	7.4159
3	13.381	12.805	13.381	10.222	10.229
4	14.829	13.846	14.832	13.478	13.496
5	17.375	15.016	17.383	16.791	16.826

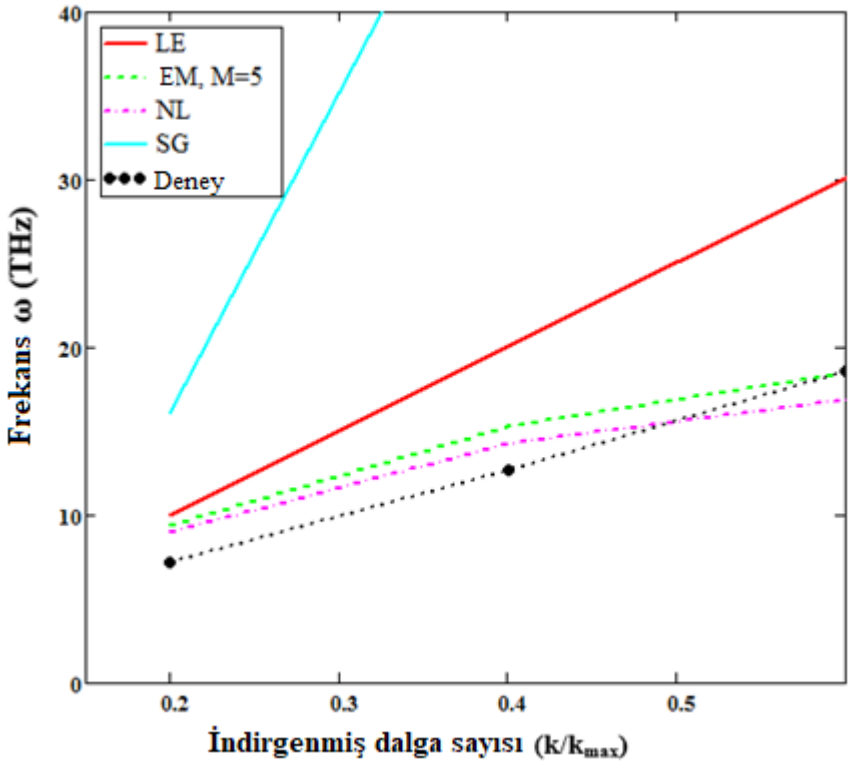
Çizelge 5.19. B-B çift duvarlı karbon nanotüplerin birinci küme kritik burkulma yükü parametrelerinin karşılaştırılması (R_1=0.5 nm, η =0.1421 nm).

	f_{11}		
	L (nm)	LE	EM
K=0	1	10.0828	9.9188
	2	11.8645	11.8195
	3	13.1218	13.0984
	5	13.5463	13.5373
	10	13.6108	13.6085
K=50	1	10.0847	9.9207
	2	12.0958	12.0514
	3	13.8658	13.8428
	5	14.5383	14.5294
	10	14.6430	14.6408
K=400	1	10.0889	9.9250
	2	12.7882	12.7465
	3	17.7218	17.7008
	5	21.2022	21.1935
	10	21.8502	21.8479

5.9. Elastik Ortama Gömülü Çift Duvarlı Karbon Nanotüplerin Dalga Yayınım Analizi Sonuçları

Bu bölümde, EM, SG, NL ve LE teorileri kullanılarak elastik ortama gömülü çift duvarlı karbon nanotüplerin dalga yayınım analizi sonuçları paylaşılmaktadır. Duvar kalınlığı, elastisite modülü, nanotüplerin iç yarıçapı ve nanotüplerin yoğunluğu sırasıyla t_t=0.34 nm, E=1 TPa, R_1 =0.5 nm veya 3.5 nm ve ρ=2300 kg/m^3 olarak alınmaktadır. Ayrıca EM, SG, NL, LD, LE teorileri çerçevesinde grafitte eksenel dalga yayınımı analizi sonuçları da sunulmaktadır. Grafit için elde edilen bu sonuçlar, dalga frekansının indirgenmiş dalga sayısıyla (k/k_{max}) değişimi dikkate alınarak literatürdeki deney sonuçlarıyla (Aizawa vd., 1990) karşılaştırılmaktadır. Grafitin yoğunluğu, elastisite modülü ve bağ uzunluğu sırasıyla ρ=2266 kg/m^3, E=345 GPa ve η=0.246 nm olarak kabul edilmiştir (Aizawa vd., 1990). Şekil 5.44'te LE, EM (M =5), NL, SG ve deneysel sonuçlar için grafitte eksenel dalga frekans değerleri sunulmaktadır. EM sonuçları deney sonuçları ile daha uyumludur. EM sonuçları ve deney sonuçları, ilk Brillouin bölgesinin sonunda aynı değeri vermektedir. İndirgenmiş dalga sayısı (k/k_{max}) 0,5'ten az olduğunda NL teorisinin deneysel sonuçlarla iyi bir uyum içinde olduğu görülmektedir. Bununla birlikte EM'ye kıyasla, LE ve SG teorileri, deneysel sonuçlardan çok farklı sonuçlar vermektedir. Literatürdeki farklı problemlerde farklı e_0 parametrelerinin kullanıldığı bilinmektedir

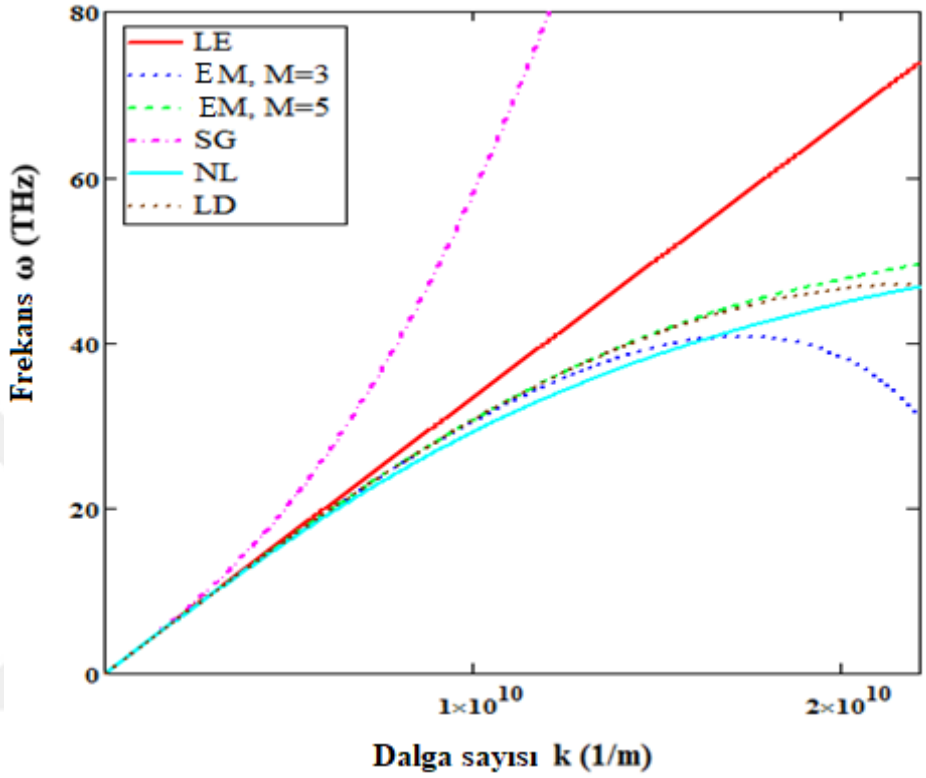
(Eringen, 1983). Yerel olmayan modeller kullanılırken bu parametrenin belirlenmesi çok önemli bir adımdır. Bu çalışmada, e_0=0.39, g=η=0.1421 nm alınmıştır.



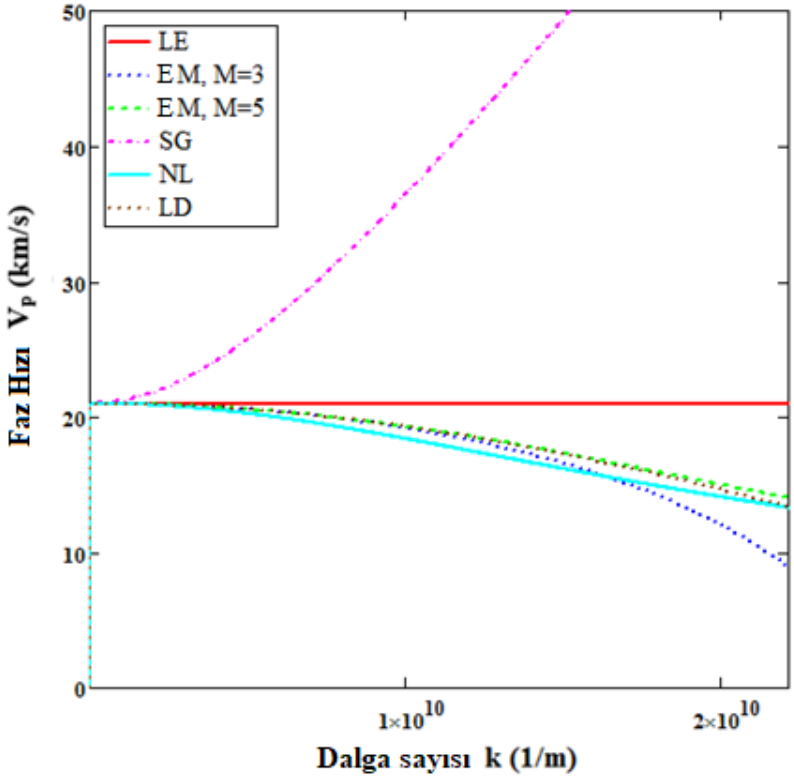
Şekil 5.44. Grafit için indirgenmiş dalga sayısı ile dalga frekansının değişimi ($E = 345$ GPa, $\rho = 2266$ kg/m^3, $\eta = 0.246$ nm, $e_0a = 0.39x0.1421$ nm, $R_1 = 0.5$ nm).

Mevcut EM modelinin deneysel sonuçlar ile doğrulanmasından sonra, karbon nanotüplerde eksenel dalga yayınımı EM, NL, LD, SG ve LE teorileri için Şekiller (5.45-5.47)'de gösterilmektedir. LE frekanslarının dalga sayısının artmasıyla doğrusal olarak arttığı açıkça görülmektedir. EM sonuçları, Taylor serisi açılımında ilk üç (M=3) ve ilk beş (M=5) terimleri dikkate alınarak diğer teorilerle karşılaştırılmıştır. Taylor serisi açılımında ilk beş terim dikkate alınarak elde edilen EM sonuçları, LD sonuçları ile uyumludur. Dalga sayısı k<2x10^{10} olduğunda bu iki teori neredeyse aynı sonuçları vermektedir. M=3 alınarak elde edilen EM teorisinde bulunan frekanslar, k<1.3x10^{10} olduğunda LD ile aynı değerleri vermektedir. Dalga sayısı k<1.8x10^{10} olduğunda, NL teorisi ile LD teorisi daha uyumludur. Bununla birlikte, dalga sayısı k>0,5x10^{10} olduğunda SG tarafından öngörülen dalga frekansı LD'den farklıdır (Şekil 5.45). Şekil 5.46 ve Şekil 5.47'de, dalga sayısı ile faz ve grup hızlarının değişimi gösterilmektedir. LE modeli için her iki hız değerinin dalga sayısı ile değişmediği görülmektedir. Bununla birlikte EM, NL ve LD teorileri için ise her iki hız sıfıra gitmektedir. LD ile en uyumlu

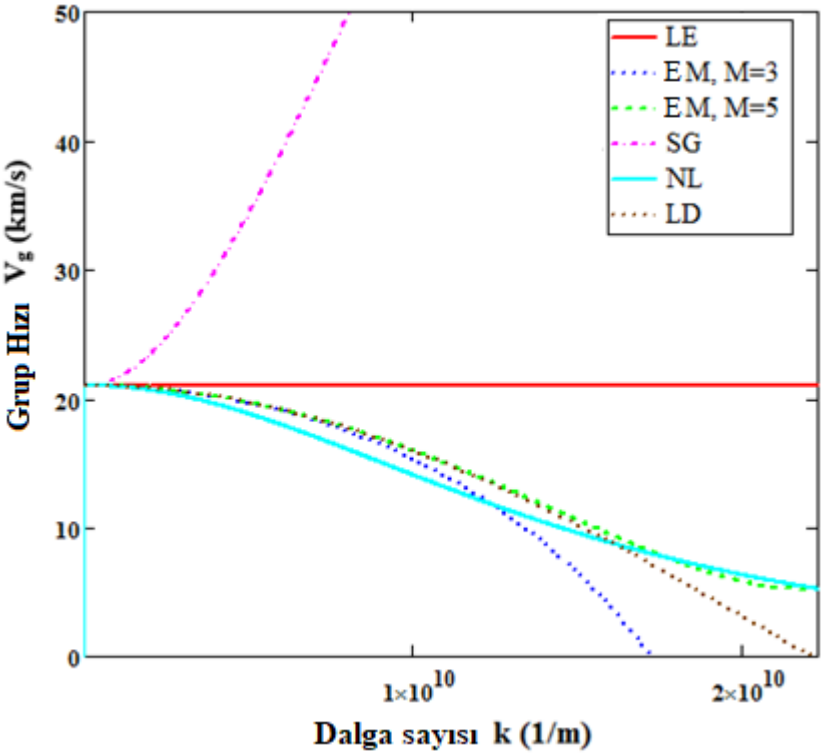
faz hızı ve grup hızı değerlerinin, Taylor serisi açılımında ilk beş terimin dikkate alındığı EM teorisi olduğuna dikkat edilmelidir. Bununla birlikte, SG teorisinin faz ve grup hızı sonuçları dalga sayısı arttıkça sınırsız bir şekilde artmaktadır. EM teorisinin grup hızı için doğruluğu, faz hızı tahminlerinden daha kötüdür.



Şekil 5.45. Dalga frekansının farklı dalga sayıları ile değişimi ($\eta = 0.1421$ nm, $e_0 a = 0.39x0.1421$ nm, $R_1 = 0.5$ nm).



Şekil 5.46. Faz hızının farklı dalga sayıları ile değişimi ($\eta = 0.1421$ nm, $e_0 a = 0.39x0.1421$ nm, $R_1 = 0.5$ nm).



Şekil 5.47. Grup hızının farklı dalga sayıları ile değişimi ($\eta = 0.1421$ nm, $e_0 a = 0.39x0.1421$ nm, $R_1 = 0.5$ nm).

Çizelge 5.20'de, faz hızları literatürde mevcut olan sonuçlarla karşılaştırılmıştır. LE ve NL teorileri için yapılan karşılaştırmalarda özdeş sonuçlar elde edilmektedir. LE, NL ve EM sonuçları arasındaki farkın özellikle yüksek dalga sayıları ve ikinci küme faz hızları için anlamlı olduğu görülmektedir.

Çizelge 5.20a. Faz hızının farklı dalga sayıları ile kıyaslanması (Birinci küme).

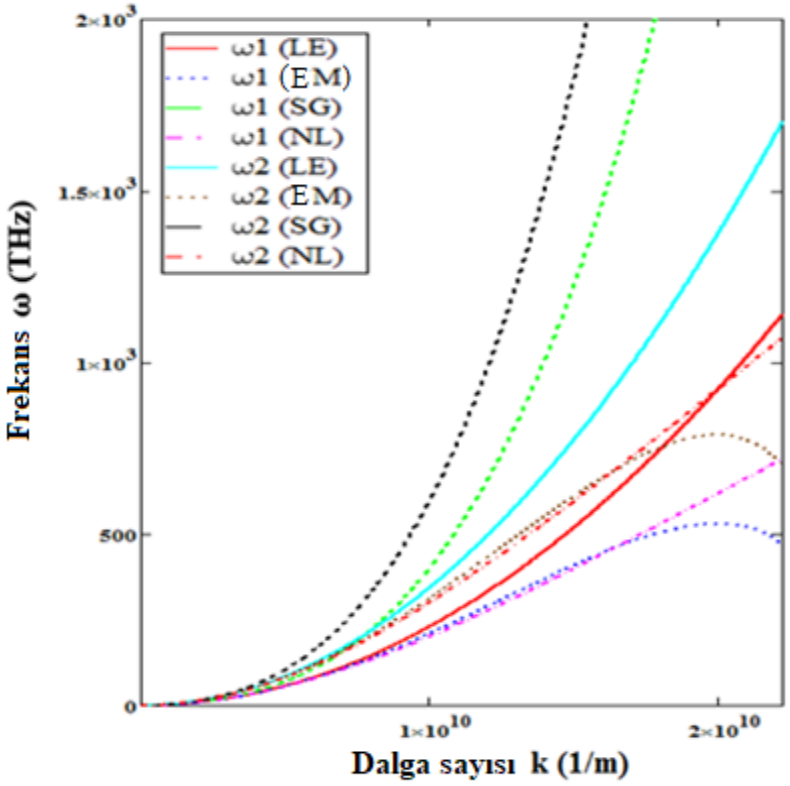
	Birinci küme faz hızı V_p (m/s)x10^4				
k (1/m)x10^8	EM	LE (Q. Wang vd., 2006)	NL (Q. Wang vd., 2006) (e_0a=1 nm)	NL (Q. Wang vd., 2006) (e_0a =2 nm)	NL (Z. Zhang, Wang, Challamel, & Elishakoff, 2014) (e_0a =0.408 nm)
5	1.77	1.77	1.58	1.25	1.73
10	3.54	3.54	2.50	1.58	3.28
15	5.30	5.31	2.94	1.68	4.53
20	7.06	7.08	3.17	1.71	5.49
25	8.81	8.86	3.29	1.73	6.20
100	32.32	35.44	3.52	1.76	8.43
200	40.53	70.88	3.53	1.77	8.62

Çizelge 5.20b. Faz hızının farklı dalga sayıları ile kıyaslanması (İkinci küme).

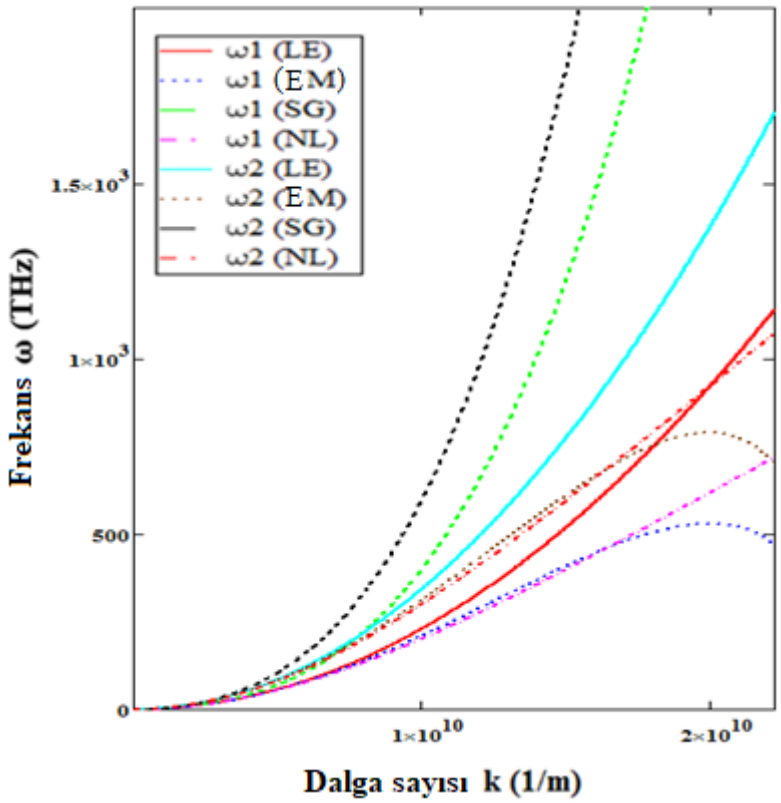
	İkinci küme faz hızı V_p (m/s)x10^4				
k (1/m)x10^8	EM	LE (Q. Wang vd., 2006)	NL (Q. Wang vd., 2006) (e_0a =1 nm)	NL (Q. Wang vd., 2006) (e_0a =2 nm)	NL (Z. Zhang vd., 2014) (e_0a =0.408 nm)
5	2.02	2.02	1.81	1.43	1.98
10	4.05	4.05	2.87	1.81	3.75
15	6.07	6.08	3.37	1.92	5.19
20	8.09	8.11	3.63	1.96	6.28
25	10.09	10.14	3.76	1.99	7.10
100	37.01	40.59	4.03	2.02	9.66
200	46.41	81.18	4.05	2.02	9.87

Çift duvarlı karbon nanotüplerin enine dalga frekansının dalga sayısı ile değişimi k_e=0 ve k_e=10^9 N/m^2 için Şekil 5.48'de gösterilmiştir. Verilen tüm teoriler için iki farklı frekans kümesinin elde edildiği açıkça görülmektedir. EM ve NL teorileri arasında genel olarak iyi bir uyum vardır ve ilk Brillouin bölgesinin sonunda bu iki teori arasında küçük bir fark görülmektedir ($\pi/\eta = 2.212x10^{10}$). Bununla birlikte, dalga sayısının artmasıyla LE ve SG sonuçları, birinci ve ikinci küme frekansları için EM ve NL sonuçlarından farklıdır. EM teorisi ile elde edilen ikinci küme frekansları k=1.9x1010'da maksimum

noktaya ulaşır, daha sonra azalmaya başlar. Burada, dikkate alınan elastik ortam sertliği, (k_e=10^9 N/m^2) frekans sonuçlarını değiştirmemektedir. Daha yüksek elastik ortam sertliği değerleri dikkate alındığında frekanslar artabilir. Bunun nedeni, elastik ortamın sertliği ile karşılaştırıldığında karbon nanotüplerin daha yüksek elastisite modülüne sahip olmasıdır.



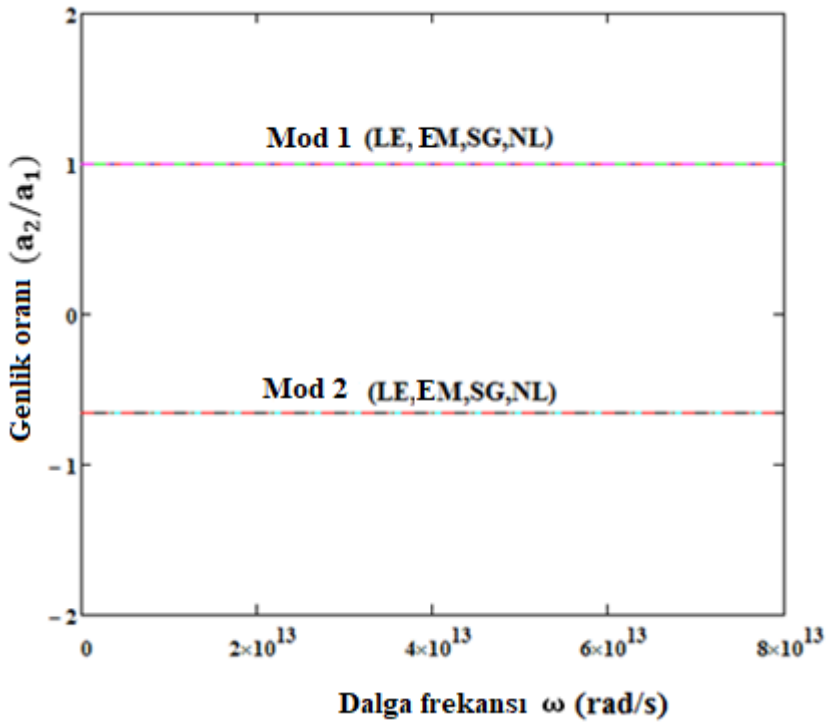
a) $(K = 0,\ \eta = 0.1421\ \text{nm},\ e_0 a = 0.39x0.1421\ \text{nm})$



a) ($K = 10^9\,\mathrm{N/m^2}$, $\eta = 0.1421$ nm, $e_0a = 0.39x0.1421$ nm)

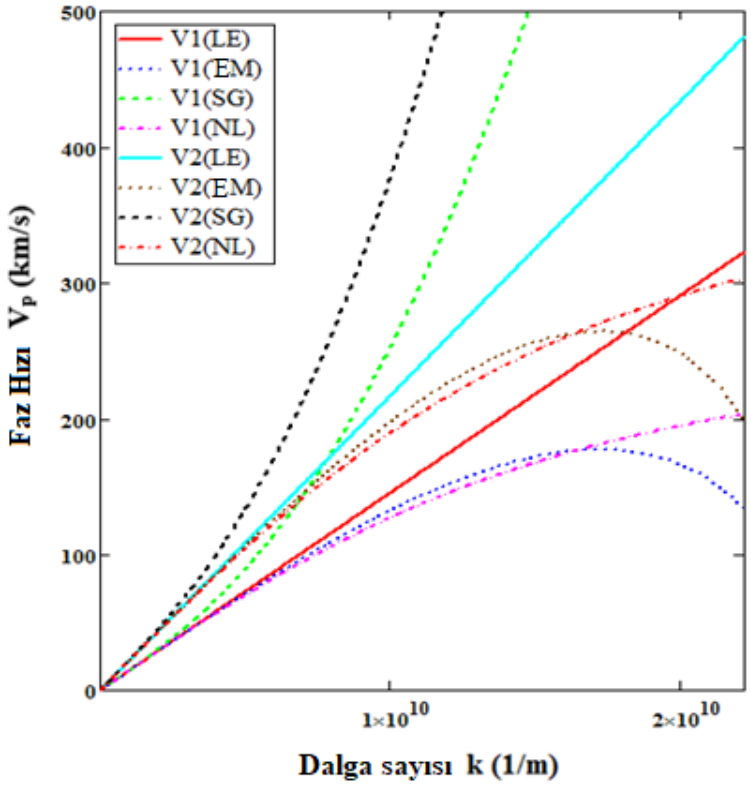
Şekil 5.48. Enine dalga yayınımında dalga frekanslarının farklı dalga sayıları ile değişimi ($R_1 = 0.5$ nm).

Genlik oranının dalga frekansı ile değişimi ise Şekil 5.49'da gösterilmektedir. Genlik oranının işareti tüplerin faz ilişkilerini vermektedir. Pozitif genlik oranı, her iki nanotüpün de aynı yönde hareket ettiği anlamına gelir. Bu durumda dalga modu eş fazlıdır. Öte yandan, genlik oranının negatif değeri, her iki tüpün zıt yönlerde hareket ettiğini ve dalga modunun zıt fazlı olduğunu göstermektedir. Tüm teorilerin genlik oranları, birinci moddaki dalga frekanslarının verilen limiti için eş fazlıdır (tüpler aynı yönde hareket eder) (Şekil 5.49). Tüplerin genlik oranlarının ikinci mod frekansları için ise negatif olduğu görülmektedir. İkinci moddaki genlik oranları zıt fazlıdır. Bu zıt fazlı davranış, karbon nanotüplerin elektronik özelliklerini değiştirdiği için önemlidir (Yoon vd., 2003).

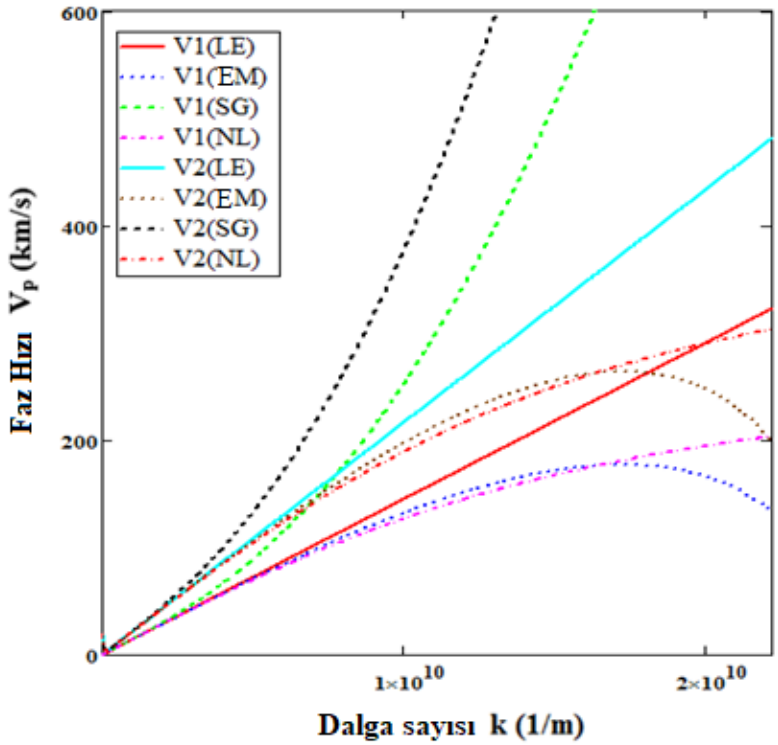


Şekil 5.49. Enine dalga yayınımında genlik oranının dalga frekansları ile değişimi ($R_1 = 0.5$ nm).

Faz hızının dalga sayısı ile değişimi Şekil 5.50'de gösterilmektedir. LE teorisinin birinci ve ikinci küme faz hızları dalga sayısının artmasıyla doğrusal olarak artmaktadır. Dalga frekansına benzer olduğu gibi, EM ve NL hızları SG sonuçlarına göre daha uyumludur. Dalga boyu k<1.8x10^{10} olduğunda EM ve NL hızları birbirine çok yakındır. Şekil 5.51'de, farklı dalga boyuna sahip grup hızlarının değişimi gösterilmektedir. Dalga boyu 0.4 nm olduğu durumda EM ve NL modelleri yaklaşık olarak aynı sonuçları vermektedir. LE ve SG tarafından öngörülen grup hızlarının, dalga sayısının artmasıyla limitsiz bir şekilde arttığı görülmektedir. Bu artış fiziksel değildir. EM teorisi ile elde edilen grup hızları sıfıra inmektedir. Böylece, EM sonuçlarının Van Hove tekilliğine sahip olduğu gözlenmiştir.

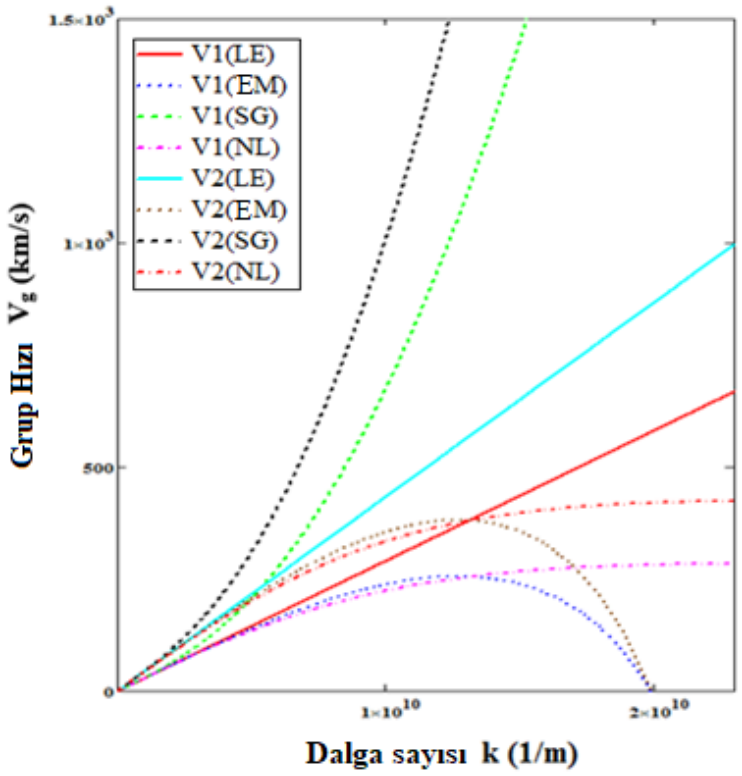


a) $(K = 0,\ \eta = 0.1421\ \text{nm},\ e_0a = 0.39x0.1421\ \text{nm})$

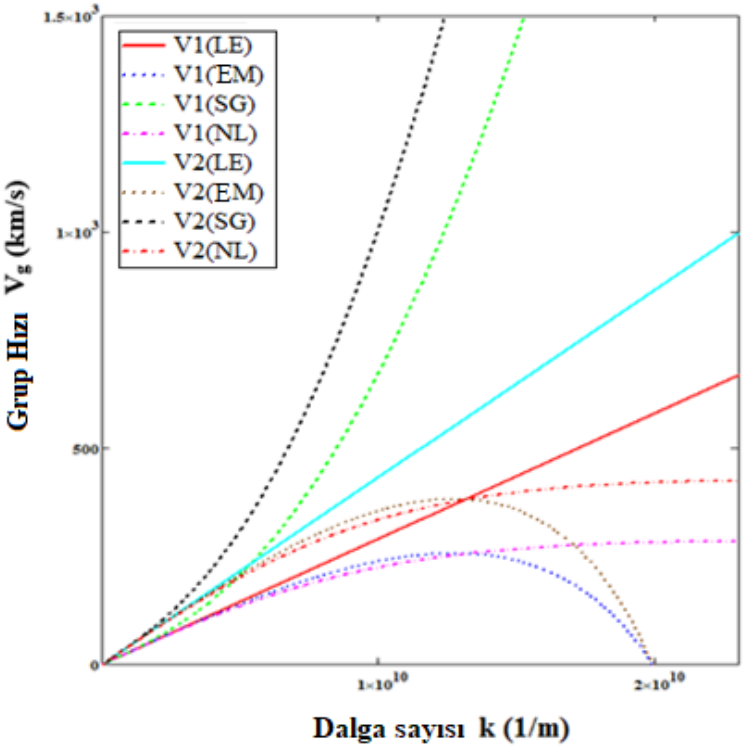


b) $(K = 10^9\ \text{N/m}^2,\ \eta = 0.1421\ \text{nm},\ e_0a = 0.39x0.1421\ \text{nm})$

Şekil 5.50. Enine dalga yayınımında faz hızlarının farklı dalga sayıları ile değişimi $(R_1 = 0.5\ \text{nm})$.



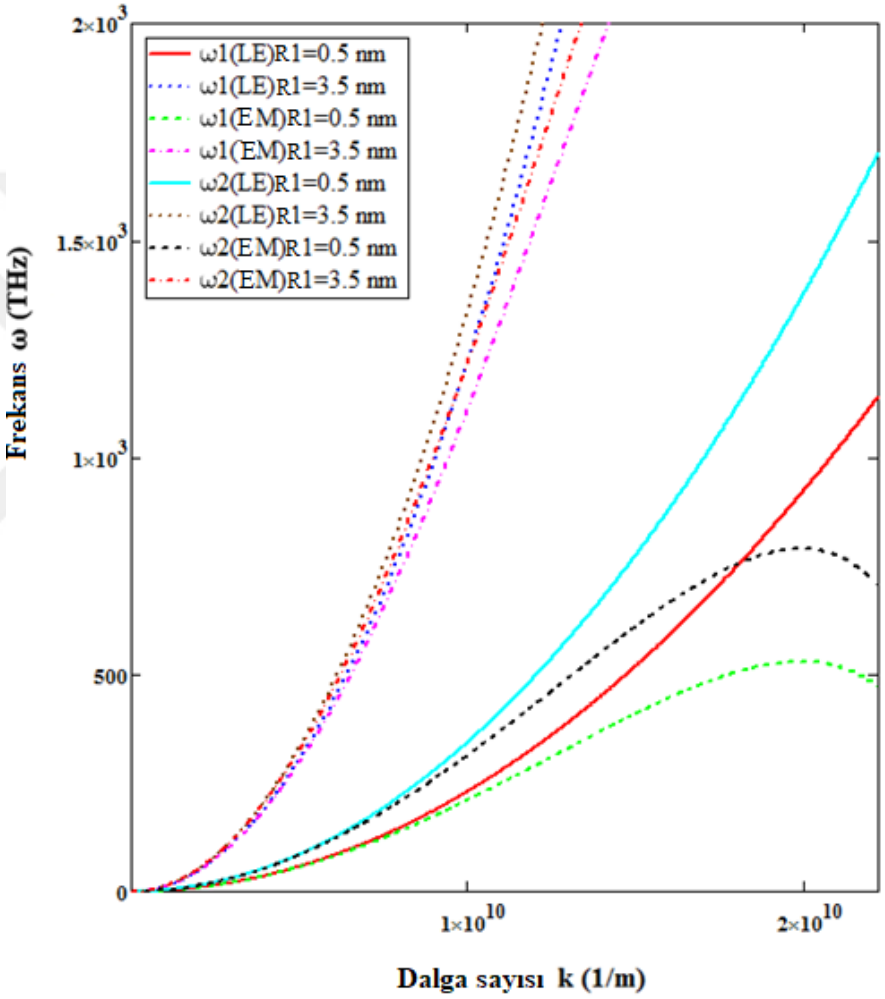
a) $(K = 0,\ \eta = 0.1421\ \text{nm},\ e_0a = 0.39x0.1421\ \text{nm})$



b) $(K = 10^9\ \text{N/m}^2,\ \eta = 0.1421\ \text{nm},\ e_0a = 0.39x0.1421\ \text{nm})$

Şekil 5.51. Enine dalga yayınımında grup hızlarının farklı dalga sayıları ile değişimi $(R_1 = 0.5\ \text{nm})$.

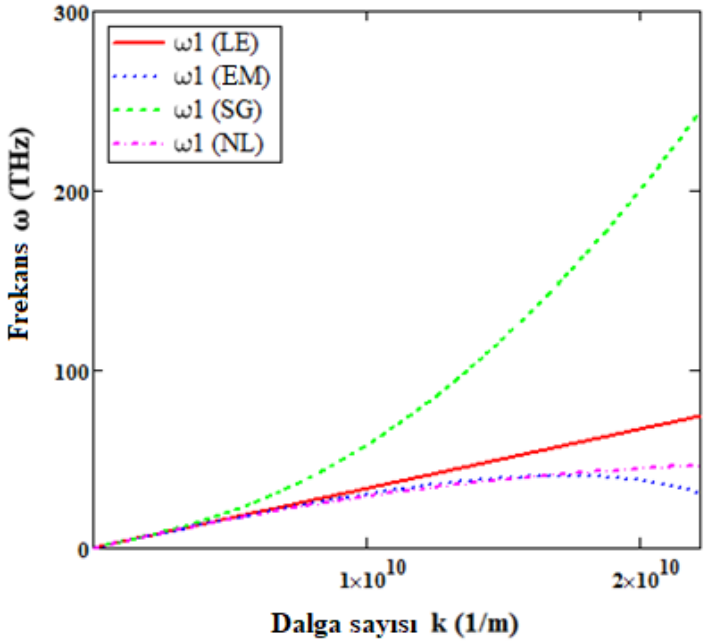
İç yarıçapı 0.5 nm veya 3.5 nm olan çift duvarlı karbon nanotüplerin enine dalga frekansı Şekil 5.52'de gösterilmiştir. EM ve LE teorileri için iç yarıçapı 3.5 nm olan çift duvarlı karbon nanotüplerin frekansının iç yarıçapı 0.5 nm olan çift duvarlı karbon nanotüplerin frekansından daha yüksek olduğu görülmektedir. Tüplerin iç yarıçapının artmasıyla dalga frekansları artmaktadır. İkinci modda, EM ve LE teorilerinin dalga yayınım eğrileri birbirine çok yakındır ve dalga sayısının artmasıyla iki model arasındaki fark artmaktadır.



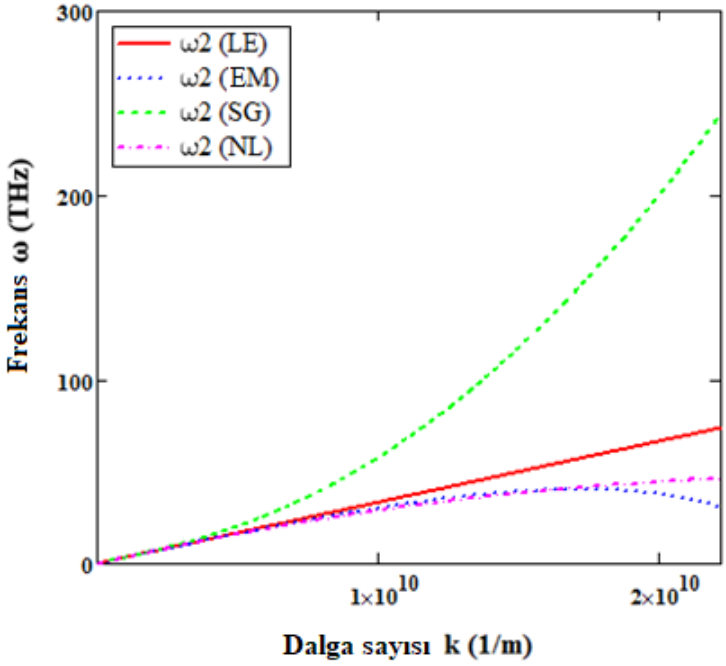
Şekil 5.52. Farklı yarıçaplardaki çift duvarlı karbon nanotüplerin dalga frekansının dalga sayısı ile değişimi.

Çift duvarlı karbon naotüplerde eksenel dalga frekansı k_e=10^9 N/m^2 için Şekil 5.53'te gösterilmektedir. Enine dalga yayınımı ile karşılaştırıldığında çift duvarlı karbon nanotüplerin eksenel yöndeki birinci ve ikinci küme frekans değerleri arasında küçük bir fark olduğu görülmektedir. Her iki frekans arasındaki fark, verilen tüm teorilerde dalga sayısının alt limiti (k =10^7 1/m) için artabilir. Enine dalga yayınımına benzer şekilde, EM

modelinin birinci ve ikinci küme frekansları, NL modeliyle uyum içindedir. Dalga sayısının artmasıyla, SG ve LE sonuçları EM ve NL teorilerinden elde edilen sonuçlardan farklı olmaktadır.



a)

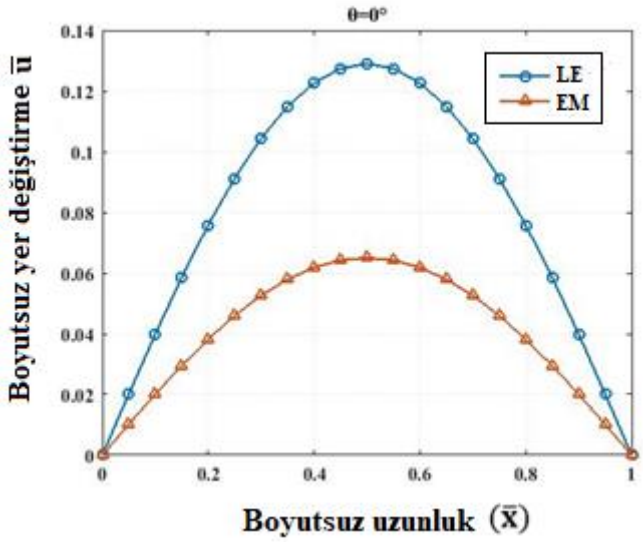


b)

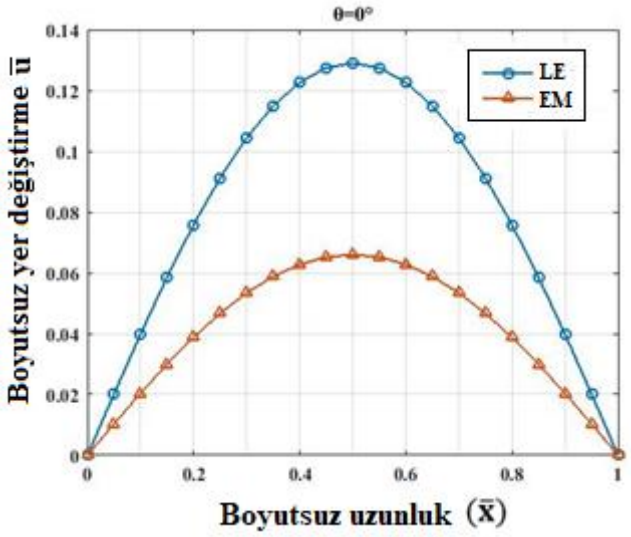
Şekil 5.53. Eksenel dalga yayınımında dalga frekanslarının farklı dalga sayıları ile değişimi ($K = 10^9\ \mathrm{N/m^2}$, $\eta = 0.1421$ nm, $e_0 a = 0.39x0.1421$ nm, $R_1 = 0.5$ nm).

5.10. Periyodik Yapılı Nanoçubukların ve Nanokirişlerin Statik ve Dinamik Analiz Sonuçları

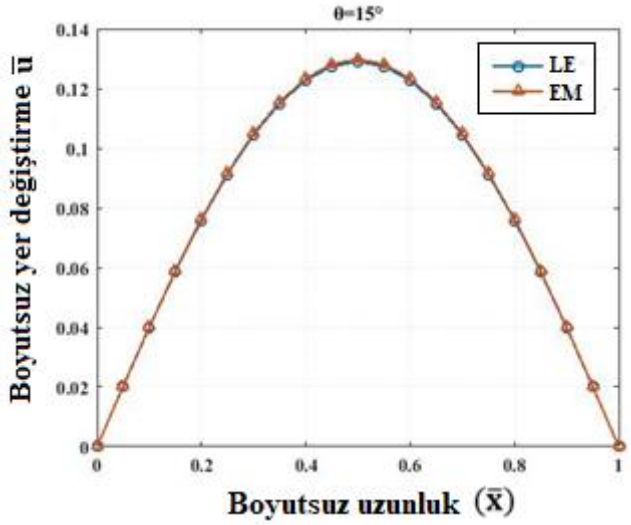
Bu bölümde periyodik nano yapılara ait tüm sayısal sonuçlar, şiral açıları θ =0°, 15° ve 30°'ye eşit olacak şekilde EM teorisi çerçevesinde incelenmektedir. Farklı şiral açı değerleri dikkate alınarak periyodik nano yapıların mekanik davranışı değişmektedir. Bu bağlamda, nanoçubukların farklı şiral açıları (θ) ve eşil mesafesi (η) için eksenel boyutsuz yer değiştirmeleri Şekil 5.54'te gösterilmektedir. EM sonuçları, L=1.5 nm için klasik elastisite çözümü ile karşılaştırılmaktadır. EM teorisinin sertleştirici ve yumuşatıcı etkileri, dikkate alınan basit kare kristal kafesin şiral açısına bağlıdır. θ =0 ° ve θ=15° için EM teorisi, LE teorisine göre daha düşük yer değiştirme değeri vermektedir. Bununla birlikte θ=30° olduğunda, EM teorisi tarafından daha yüksek yer değiştirmeler elde edilmektedir. Bu durum EM teorisinde, malzemenin atomik yapısının malzemenin mekanik davranışını doğrudan etkilediğini açıklar. Her iki teori arasındaki fark, tüm şiral açılar için nanoçubuğun ortasında maksimum olmaktadır. Ayrıca θ=30° için, her iki teori arasındaki farkın uzunluk ölçek parametresinin artmasıyla arttığı, θ =0° ve θ=15° için ise tersi durumun gerçekleştiği görülmektedir.



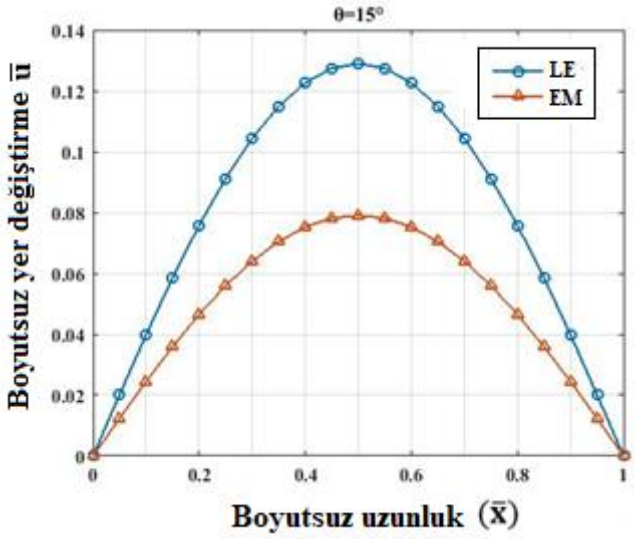
a) η=0.15 nm, L=1.5 nm



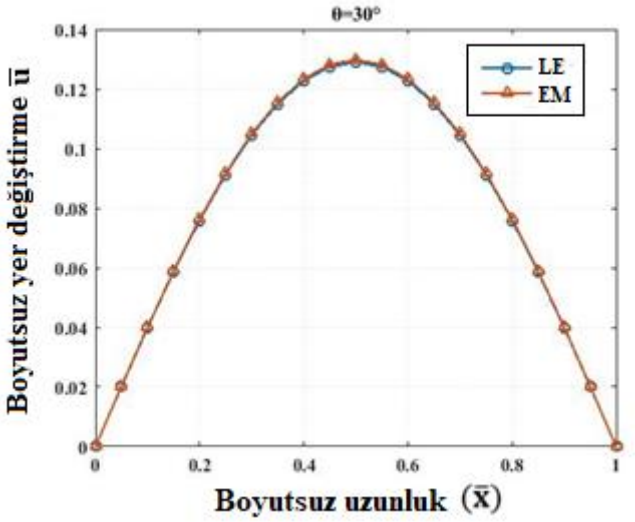
b) η=0.25 nm, L=1.5 nm



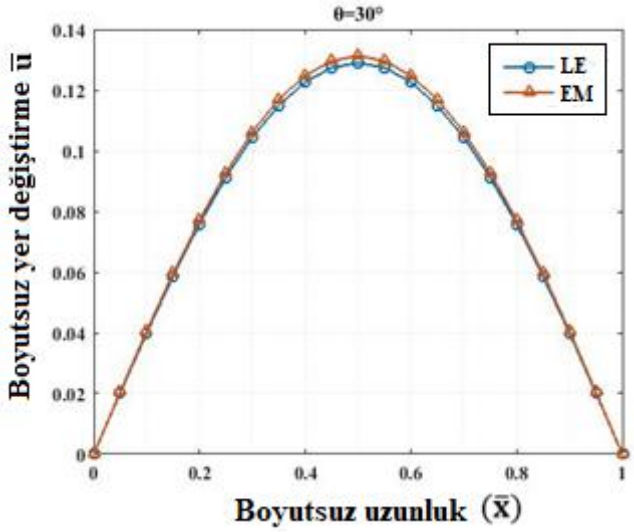
c) η=0.15 nm, L=1.5 nm



d) η=0.25 nm, L=1.5 nm



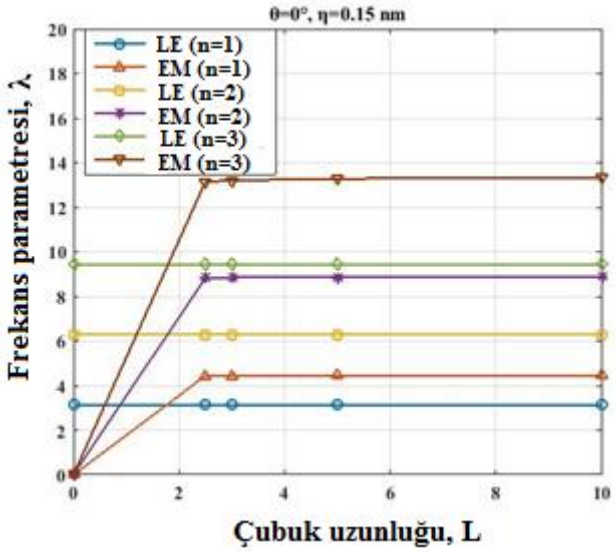
e) η=0.15 nm, L=1.5 nm



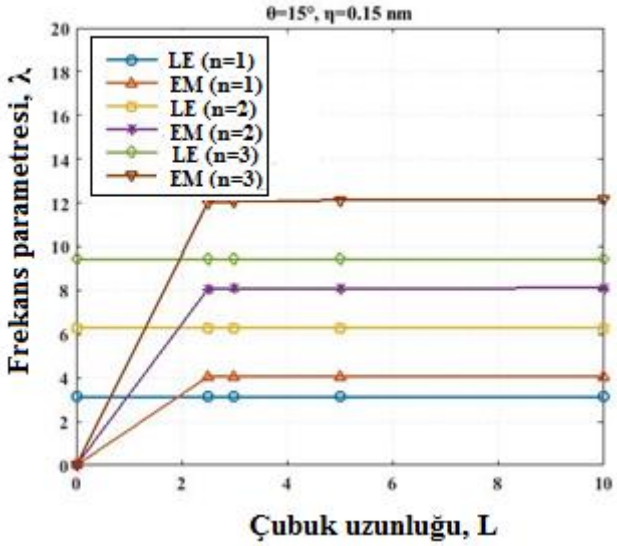
f) η=0.25 nm, L=1.5 nm

Şekil 5.54. Nanoçubukların boyutsuz yer değiştirmesinin boyutsuz uzunluk ile değişimi.

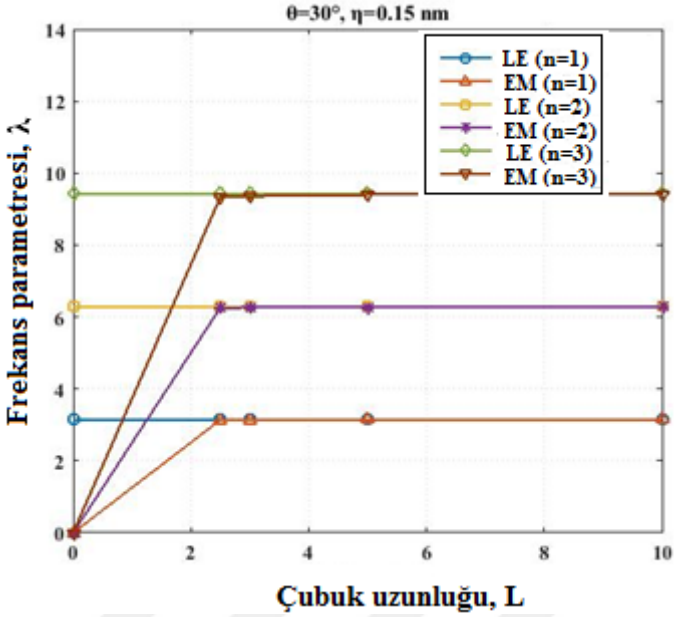
Şekil 5.55'te, ilk üç mod için farklı çubuk uzunluğuna sahip boyutsuz eksenel frekans parametresinin değişimi gösterilmektedir. Nanoçubuklar θ =0° ve θ=15° için klasik teoriye göre daha sertleştirici özellik gösterir ve EM ile klasik teori arasındaki fark, yüksek mod sayılarında daha belirgindir. Bunun nedeni, dalga boyunun ($2\pi/k$) azalmasıyla mod sayısının artması ve ölçek etkilerinin daha küçük dalga boyları için daha belirgin olmasıdır. Diğer taraftan θ=30° için, EM teorisinde yumuşatıcı malzeme davranışı elde edilmektedir. Bu durumda, her iki teorinin yakınsaması, şiral açıların diğer değerlerine (θ=0°,15°) kıyasla daha iyidir. İki teori de çubuk uzunluğunun artmasıyla birlikte birbirine yakınsamaktadır. Çünkü, çubuk uzunluğunun artmasıyla gradyan etkileri ortadan kalkmaktadır. Şekil 5.56'da, titreşim frekansları L=3 nm ve farklı mod sayıları için sunulmaktadır. Mod sayısının artmasıyla, iki teori arasındaki fark artar ve çubuğun sertleşmesi durumunda, her iki teori de çok farklı frekans sonuçları vermektedir.


θ=0°, η=0.15 nm
LE (n=1)
EM (n=1)
LE (n=2)
EM (n=2)
LE (n=3)
EM (n=3)
Frekans parametresi, λ
Çubuk uzunluğu, L

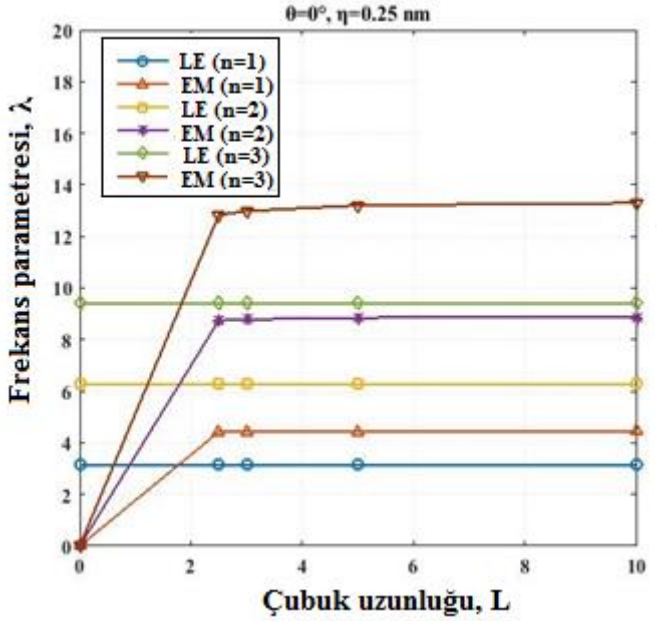
a)


θ=15°, η=0.15 nm
LE (n=1)
EM (n=1)
LE (n=2)
EM (n=2)
LE (n=3)
EM (n=3)
Frekans parametresi, λ
Çubuk uzunluğu, L

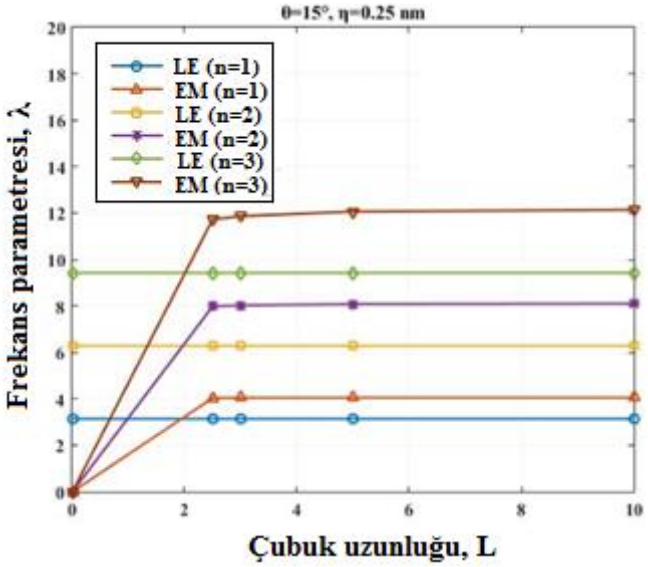
b)


θ=30°, η=0.15 nm
LE (n=1)
EM (n=1)
LE (n=2)
EM (n=2)
LE (n=3)
EM (n=3)
Frekans parametresi, λ
Çubuk uzunluğu, L

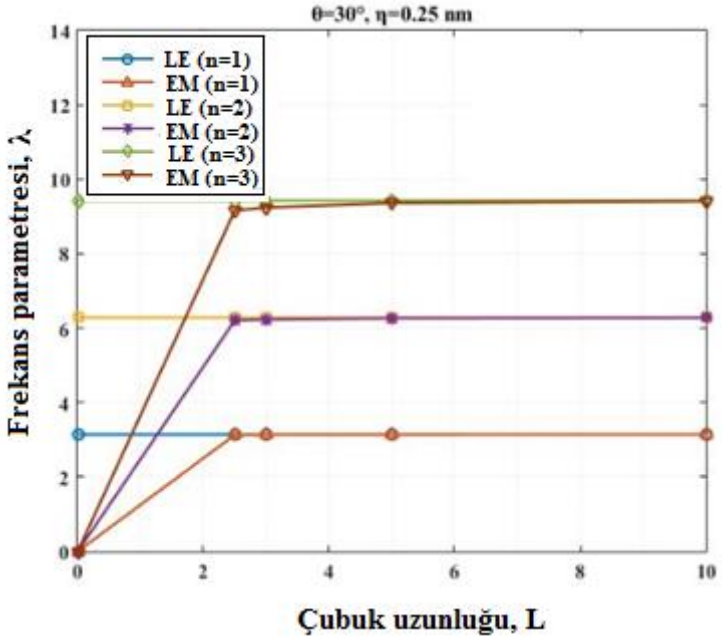
c)


θ=0°, η=0.25 nm
LE (n=1)
EM (n=1)
LE (n=2)
EM (n=2)
LE (n=3)
EM (n=3)
Frekans parametresi, λ
Çubuk uzunluğu, L

d)

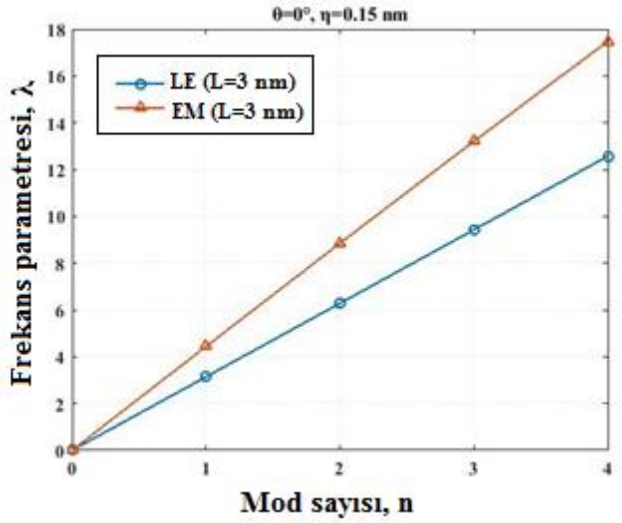


e)

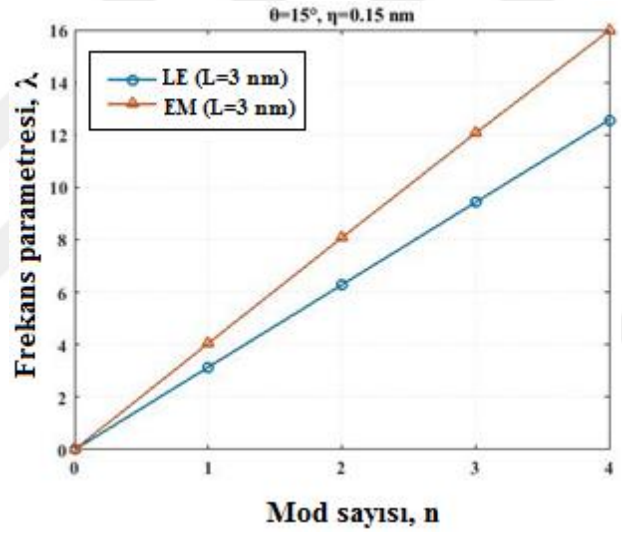


f)

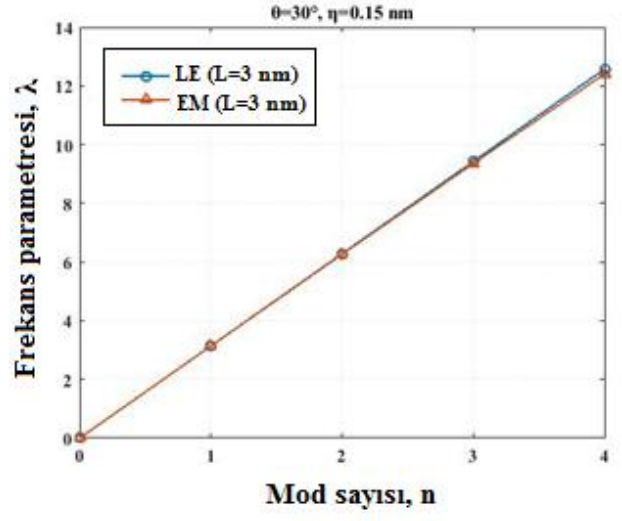
Şekil 5.55. Nanoçubukların ilk üç moddaki frekans parametresinin çubuk uzunluğu ile değişimi.


θ=0°, η=0.15 nm
LE (L=3 nm)
EM (L=3 nm)
Frekans parametresi, λ
Mod sayısı, n

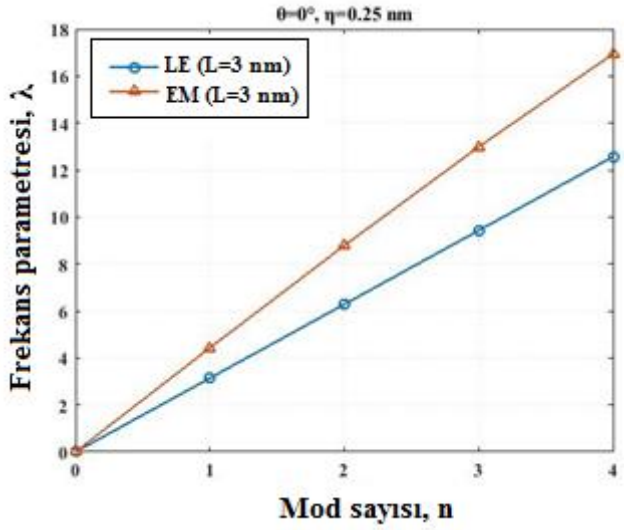
a)


θ=15°, η=0.15 nm
LE (L=3 nm)
EM (L=3 nm)
Frekans parametresi, λ
Mod sayısı, n

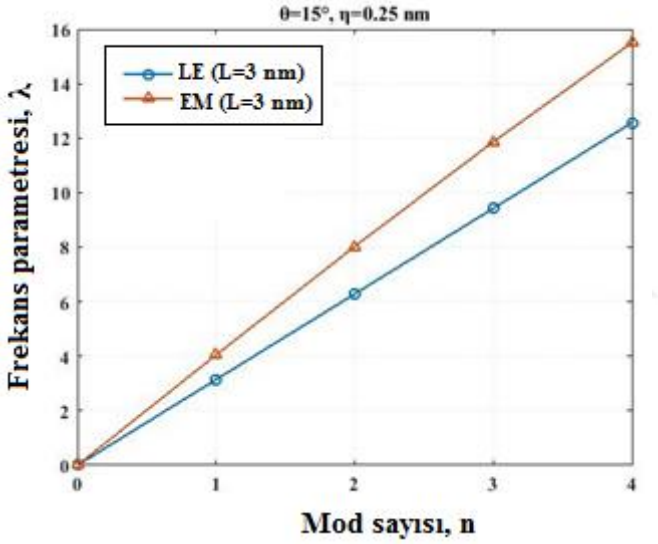
b)


θ=30°, η=0.15 nm
LE (L=3 nm)
EM (L=3 nm)
Frekans parametresi, λ
Mod sayısı, n

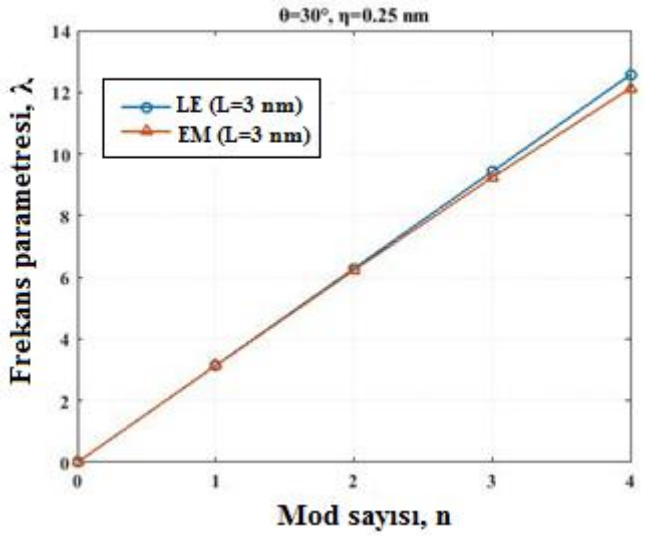
c)


θ=0°, η=0.25 nm
LE (L=3 nm)
EM (L=3 nm)
Frekans parametresi, λ
Mod sayısı, n

d)


θ=15°, η=0.25 nm
LE (L=3 nm)
EM (L=3 nm)
Frekans parametresi, λ
Mod sayısı, n

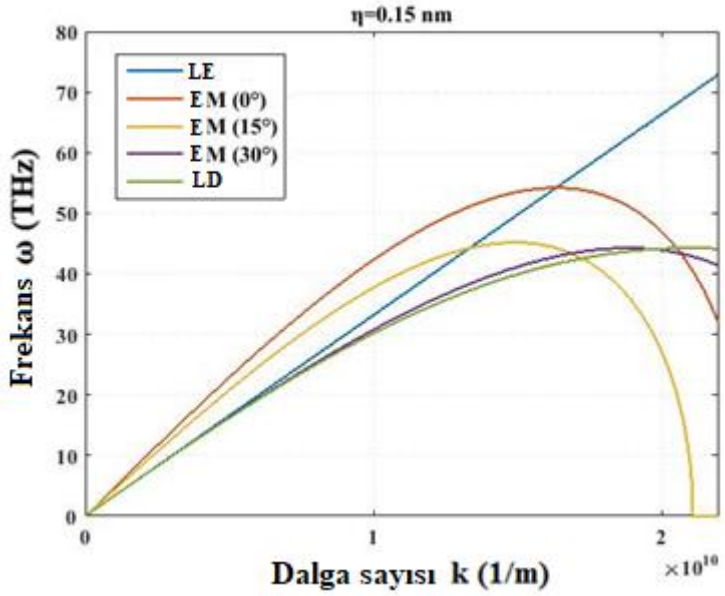
e)



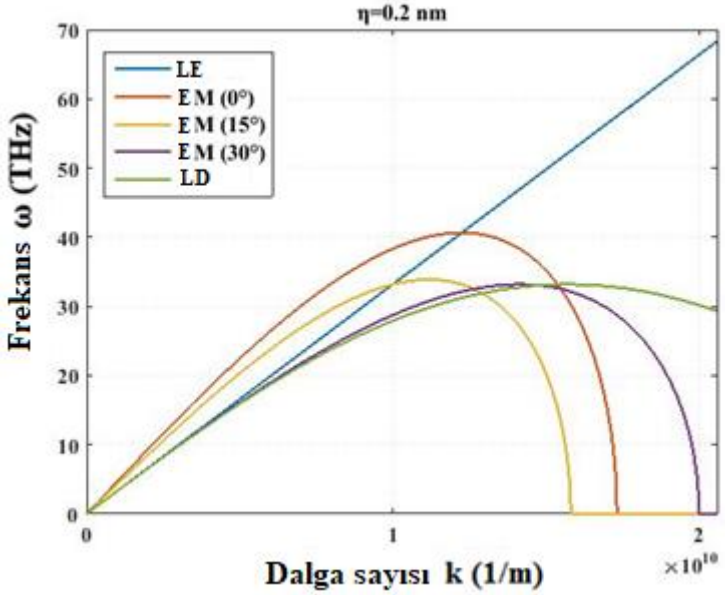
f)

Şekil 5.56. Nanoçubukların frekans parametresinin mod sayısı ile değişimi.

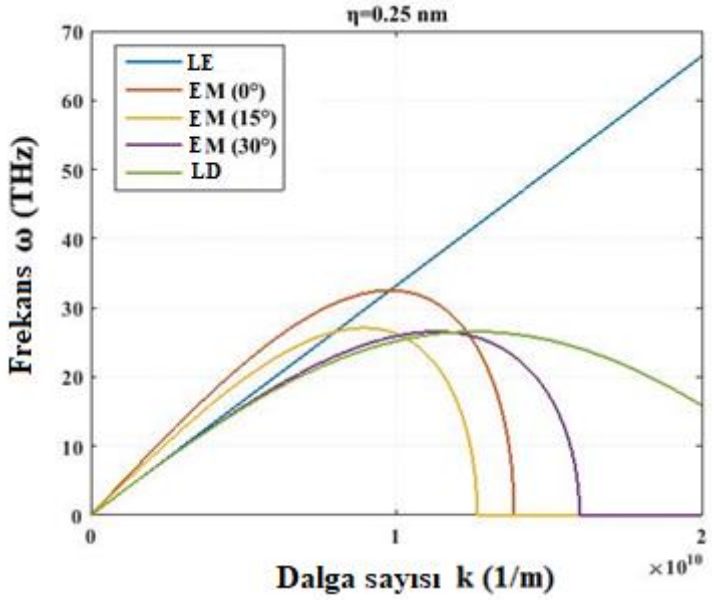
Periyodik bir nano yapıya sahip nanoçubukların dalga yayınım ilişkileri Şekiller (5.57-5.59)'da gösterilmektedir. Bu şekillerde, çubuğun yoğunluğu ρ=2300 kg/m^3 ve elastisite modülü E=1 TPa olarak alınmıştır. Şekil 5.57'de görüldüğü gibi, klasik teoriye ait dalga frekansları, dalga sayısının artmasıyla doğrusal olarak artmaktadır. Bununla birlikte, EM teorisi kullanılarak elde edilen dalga frekansları sınırlı dalga sayısı ile artmaktadır. Daha sonra, EM ve LD teorilerinde ilk Brillouin bölgesine (π/η) yakın bir yerde belirli bir dalga sayısından sonra dalgalar yayılmaz. EM teorisinin yumuşama davranışı gösterdiği durumda (θ=30°), dalga frekansları LD ile mükemmel bir uyum içindedir ve k=2x10^{10} 1/m olduğunda, EM ve LD aynı sayısal sonuçları vermektedir. EM teorisinin sertleşme davranışı gösterdiği durumlarda (θ=0°, 15°), LD ile EM modelleri özellikle kısa dalga boyları için iyi bir uyum gösterirler. Ayrıca, uzunluk ölçeği parametresinin (η) artmasıyla, kısa dalga boyları için EM ve LD arasındaki farkın arttığı da görülmektedir. Şekil 5.58 ve Şekil 5.59'da, faz ve grup hızlarının EM ve LD teorileri için sıfıra gittikleri gösterilmektedir. Dalga frekanslarına benzer şekilde, η=0.15 nm için EM teorisinin yumuşama davranışı gösterdiği durumlarda (θ=30°) LD ile EM arasında en iyi uyum elde edilmektedir. θ=15° olduğunda faz hızı için EM teorisinin LD ile uyumu, θ=0° durumuna göre daha iyidir.


η=0.15 nm
LE
EM (0°)
EM (15°)
EM (30°)
LD
Frekans ω (THz)
Dalga sayısı k (1/m)
×10^10

a)

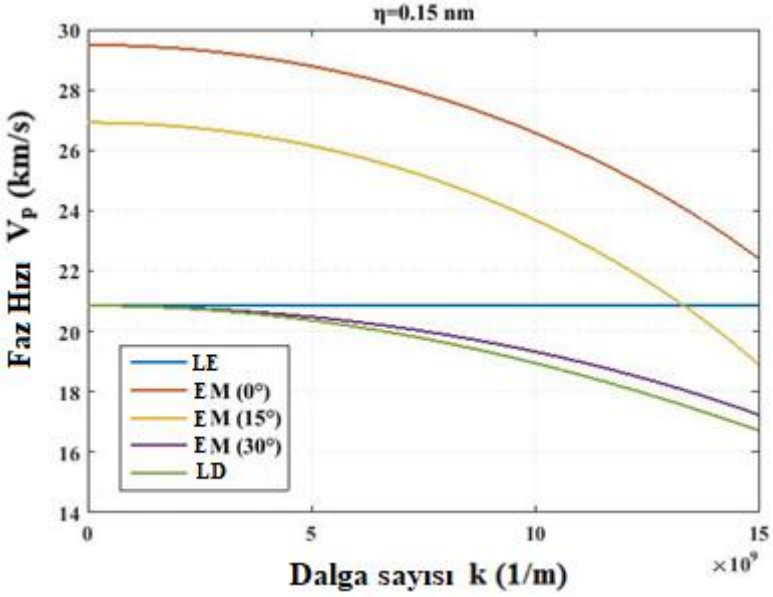

η=0.2 nm
LE
EM (0°)
EM (15°)
EM (30°)
LD
Frekans ω (THz)
Dalga sayısı k (1/m)
×10^10

b)

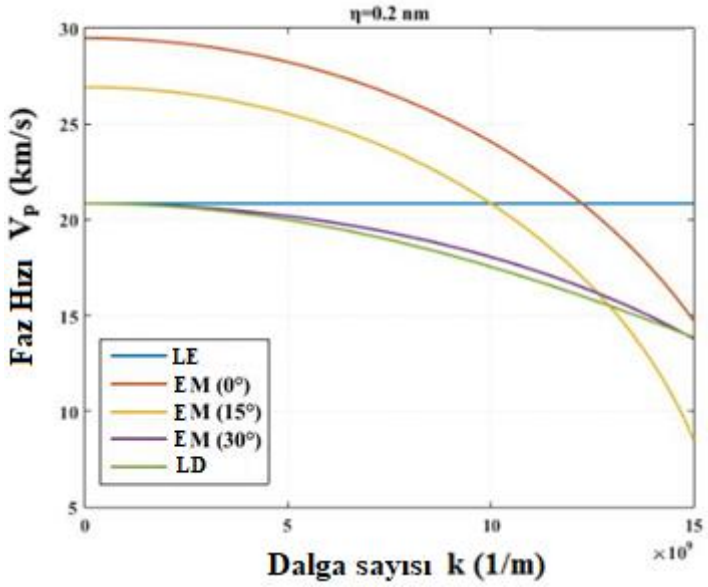


c)

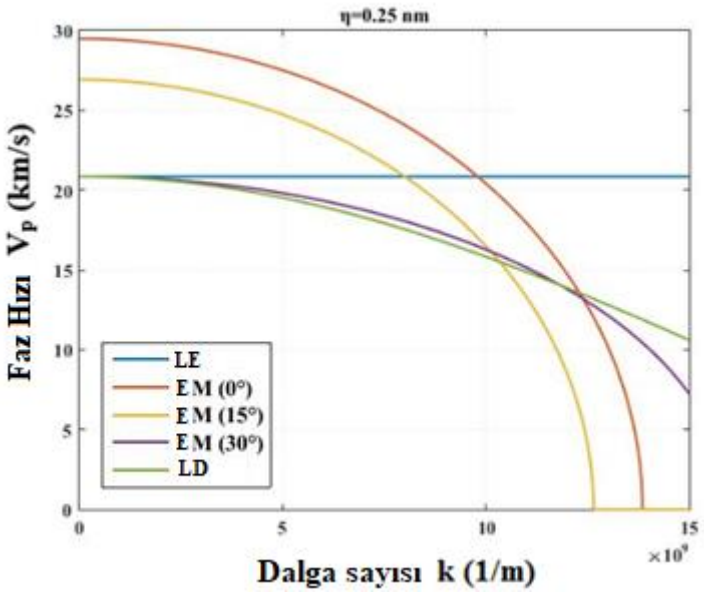
Şekil 5.57. Nanoçubukların dalga frekanslarının dalga sayısı ile değişimi.



a)

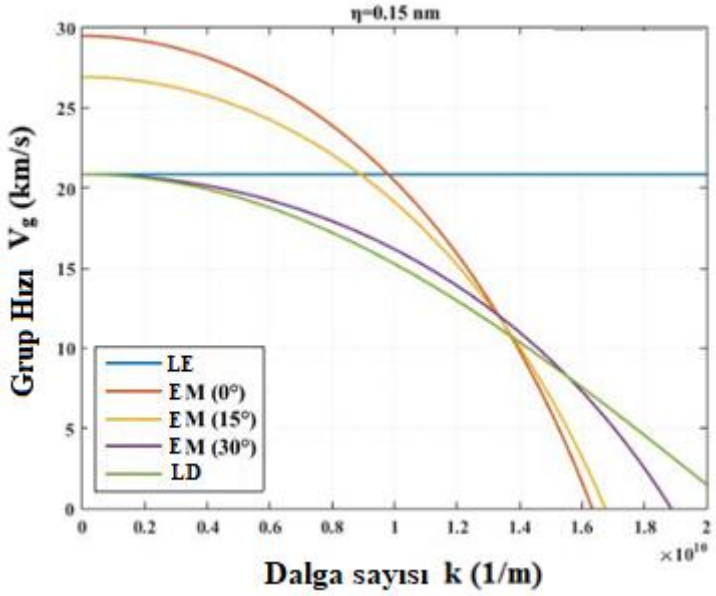


b)

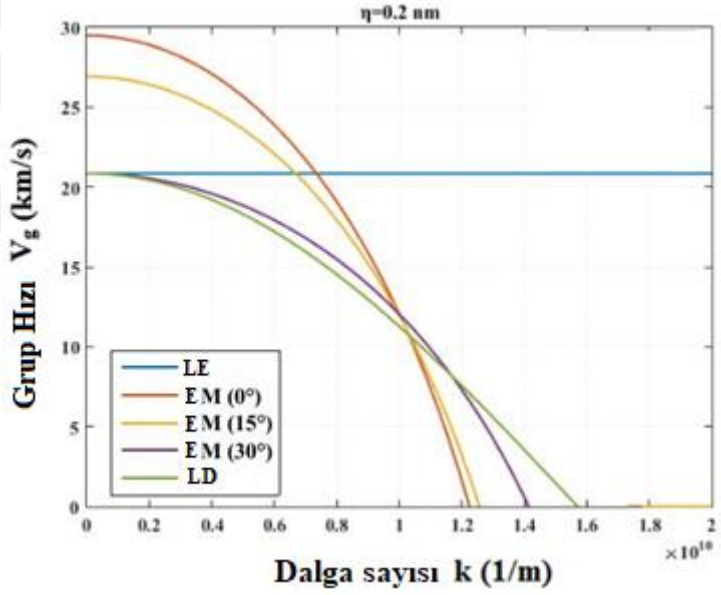


c)

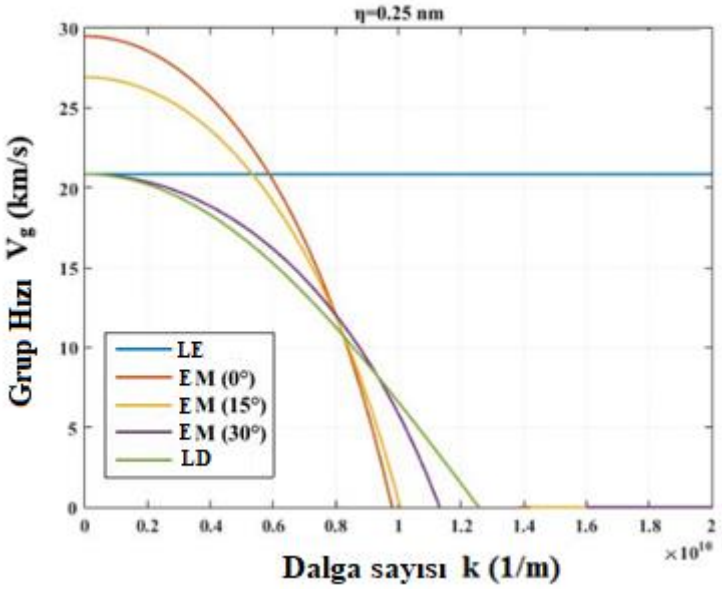
Şekil 5.58. Nanoçubukların faz hızlarının dalga sayısı ile değişimi.


η=0.15 nm
Grup Hızı Vg (km/s)
Dalga sayısı k (1/m)
×10^10
LE
EM (0°)
EM (15°)
EM (30°)
LD

a)


η=0.2 nm
Grup Hızı Vg (km/s)
Dalga sayısı k (1/m)
×10^10
LE
EM (0°)
EM (15°)
EM (30°)
LD

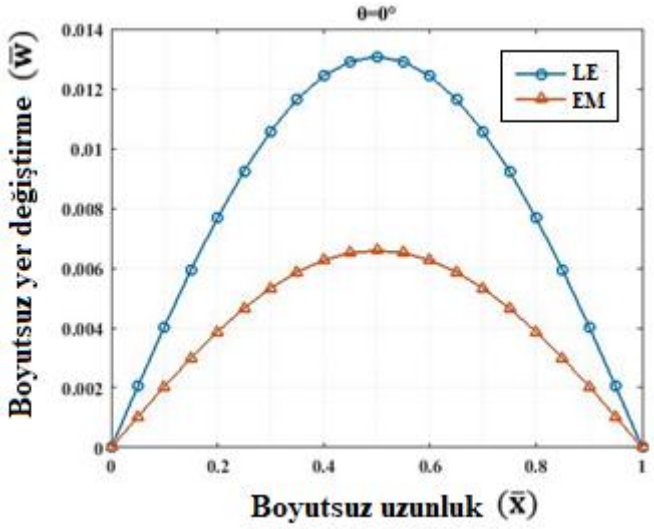
b)



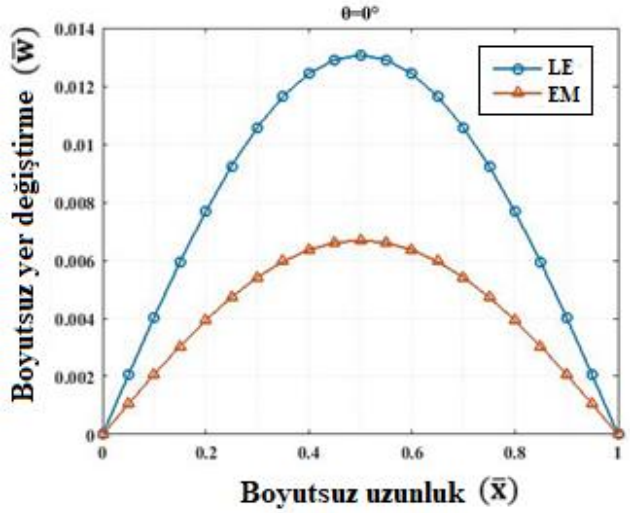
c)

Şekil 5.59. Nanoçubukların grup hızlarının dalga sayısı ile değişimi.

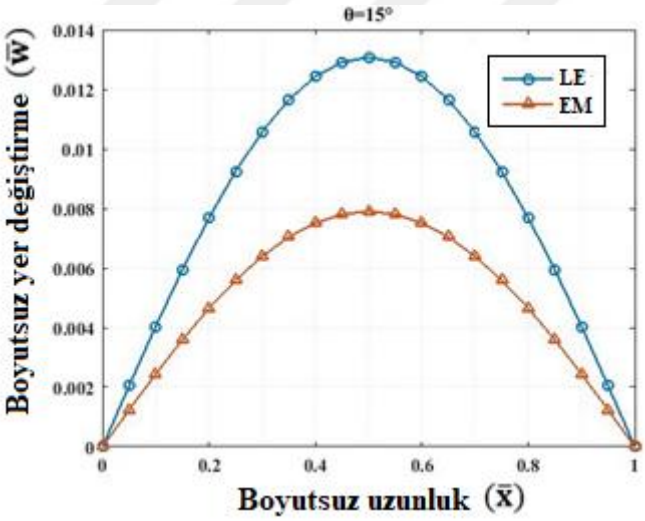
Şekil 5.60'ta nanokirişler için de nanoçubuklara benzer şekilde statik davranışlar elde edilmiştir. Burada, EM teorisi ile elde edilen eğilme yer değiştirmesinin büyüklüğünün θ=0° ve θ=15° için LE modelinden daha düşük olduğu görülmektedir. Bu durum, nanokirişin klasik teoriye göre sertleşme davranışı gösterdiğini göstermektedir. Diğer taraftan, θ=30° için EM teorisinde nanokirişin yumuşama davranışı gözlenmektedir.



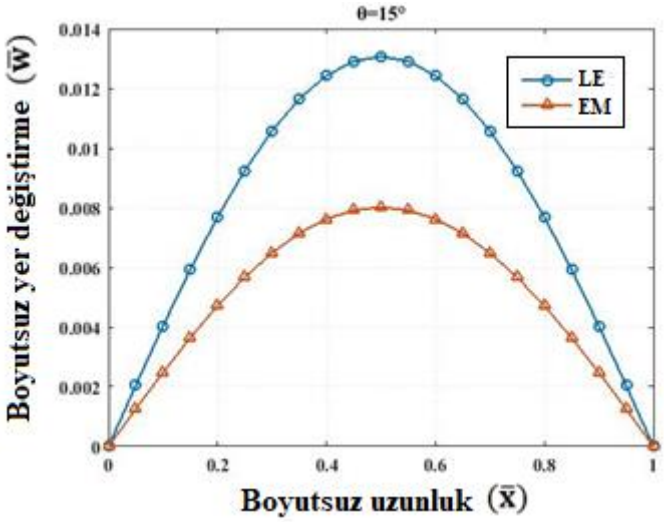
a) η=0.15 nm, L=1.5 nm



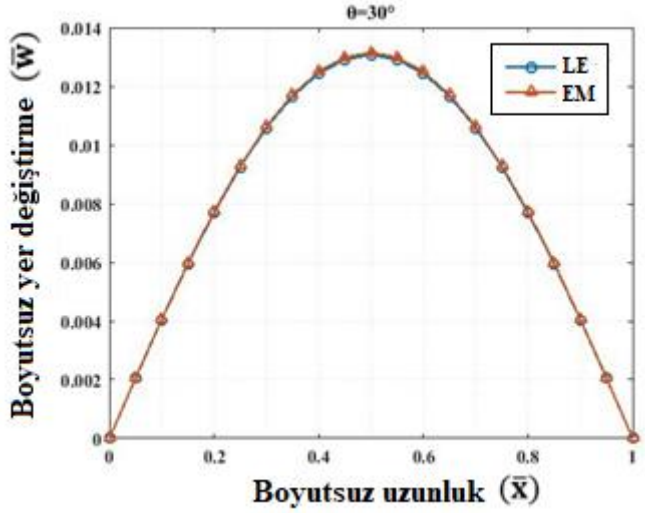
b) η=0.25 nm, L=1.5 nm



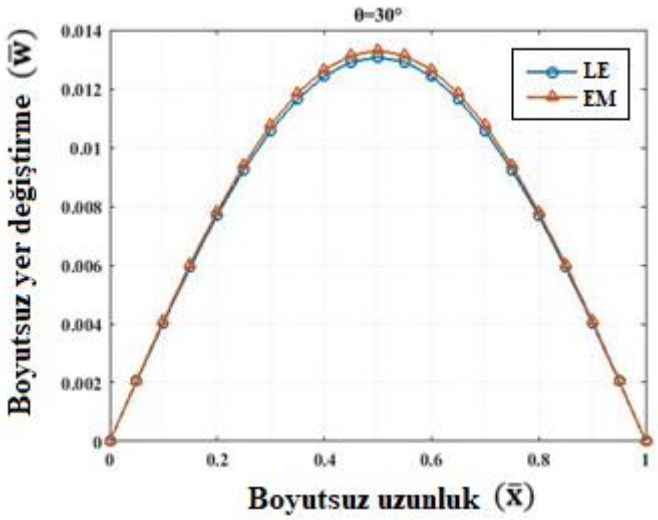
c) η=0.15 nm, L=1.5 nm



d) η=0.25 nm, L=1.5 nm



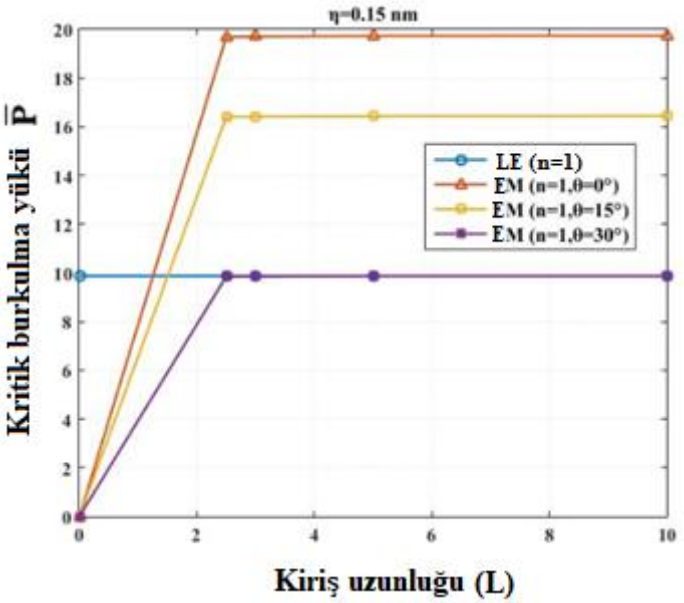
e) η=0.15 nm, L=1.5 nm



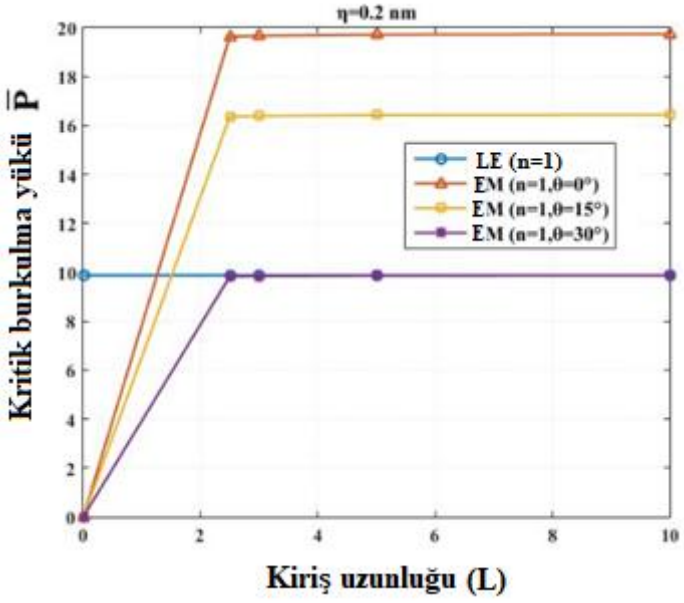
f)

Şekil 5.60. Nanokirişlerin boyutsuz yer değiştirmesinin boyutsuz uzunluk ile değişimi.

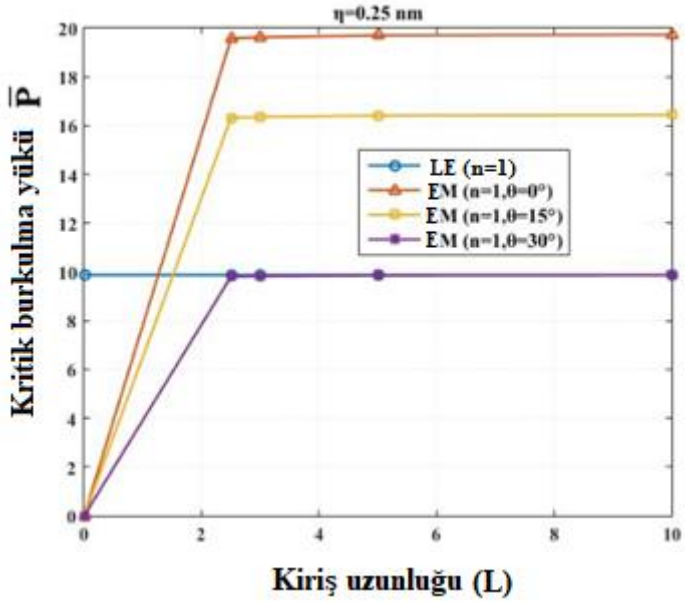
Kritik burkulma yükünün kiriş uzunluğu ile değişimi, farklı uzunluk ölçeği parametreleri için Şekil 5.61'de gösterilmiştir. Nanokirişin yumuşama davranışı gösterdiği durumda (θ=30°), EM sonuçları kiriş uzunluğunun artmasıyla LE modeline yakınsamaktadır. Bununla birlikte, EM teorisi θ=0° ve θ=15° için LE teorisinden daha yüksek kritik burkulma yükü değerleri verir ve bu durumda, kiriş uzunluğunun artmasıyla her iki teori arasındaki fark artar.


η=0.15 nm
Kritik burkulma yükü $\bar{P}$
Kiriş uzunluğu (L)
LE (n=1)
EM (n=1,θ=0°)
EM (n=1,θ=15°)
EM (n=1,θ=30°)

a)


η=0.2 nm
Kritik burkulma yükü $\bar{P}$
Kiriş uzunluğu (L)
LE (n=1)
EM (n=1,θ=0°)
EM (n=1,θ=15°)
EM (n=1,θ=30°)

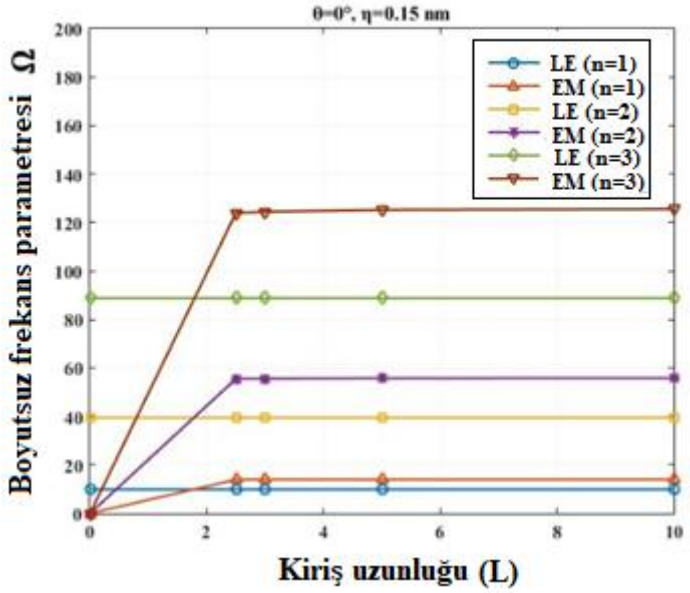
b)



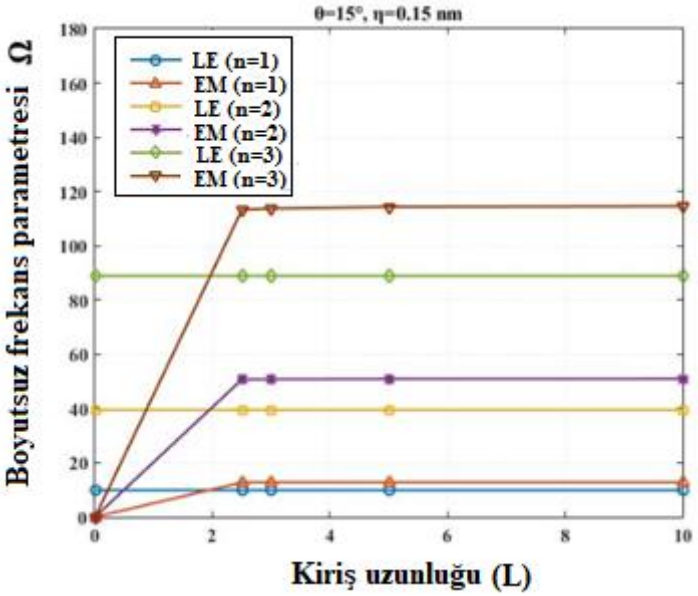
c)

Şekil 5.61. Nanokirişlerin kritik burkulma yükü değerlerinin uzunluk ile değişimi.

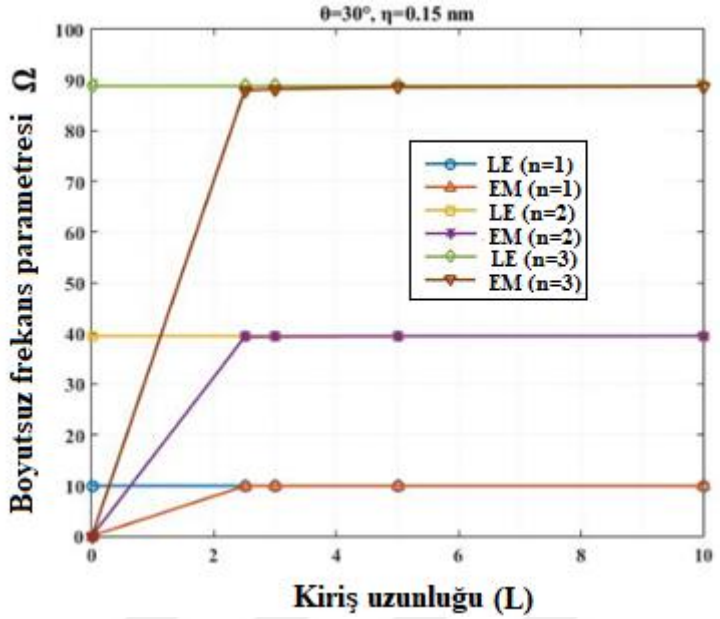
EM teorisine ait ilk üç moddaki enine titreşim frekansları, LE teorisi ile Şekil 5.62'de karşılaştırılmaktadır. Nanoçubuk titreşimine benzer şekilde, θ=0° ve θ=15° için nanokirişin sertleşme davranışı gözlenirken, θ=30° için nanokirişin LE teorisine göre yumuşama davranışı gözlenmektedir. Her iki teori arasındaki fark, nanokirişin sertleşme durumunda ve yüksek titreşim modlarında daha belirgindir. Bununla birlikte, nanokirişin yumuşaması durumunda (θ=30°), iki teori arasındaki bu fark küçülür ve EM sonuçları kiriş uzunluğunun artmasıyla LE teorisine yakınsar. θ=0° ve θ=15° olduğunda EM teorisinde uzunluk ölçeği parametresinin θ=30° olduğu duruma göre daha önemli bir rol oynadığı gözlenebilir. Enine titreşim frekansının mod sayısı ile değişimi ise Şekil 5.63'te gösterilmektedir. Burada L=3 nm alınmış ve hesaplamalarda ilk dört titreşim moduna ait değerler verilmiştir. Mod sayısının artmasıyla, EM ve klasik teori arasındaki fark artmaktadır ve bu fark, nanokirişin sertleşmesi durumunda (θ=0 °, θ=15°) nanokirişin yumuşama durumuna (θ =30°) kıyasla daha belirgin bir şekilde görülebilmektedir. Ayrıca her iki teori arasındaki farkın şiral açısının azalmasıyla arttığı da gözlenebilir.


θ=0°, η=0.15 nm
Boyutsuz frekans parametresi Ω
Kiriş uzunluğu (L)
LE (n=1)
EM (n=1)
LE (n=2)
EM (n=2)
LE (n=3)
EM (n=3)

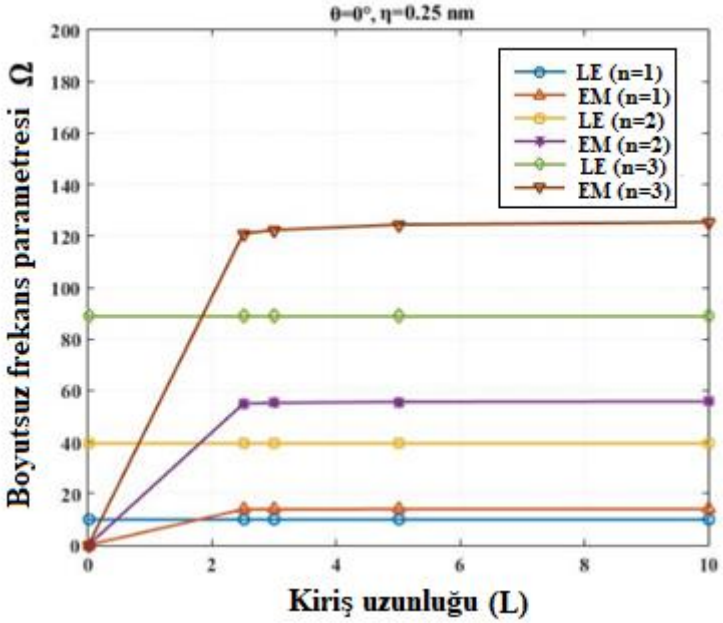
a)


θ=15°, η=0.15 nm
Boyutsuz frekans parametresi Ω
Kiriş uzunluğu (L)
LE (n=1)
EM (n=1)
LE (n=2)
EM (n=2)
LE (n=3)
EM (n=3)

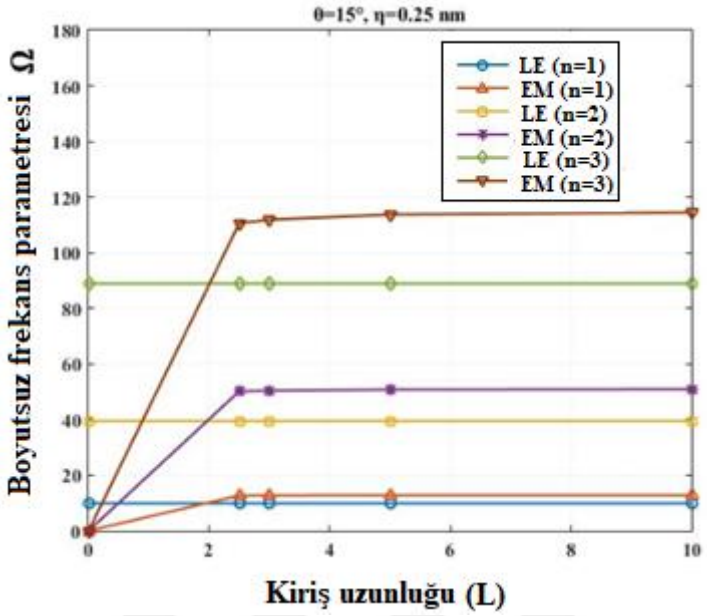
b)


θ=30°, η=0.15 nm
Boyutsuz frekans parametresi Ω
Kiriş uzunluğu (L)
LE (n=1)
EM (n=1)
LE (n=2)
EM (n=2)
LE (n=3)
EM (n=3)

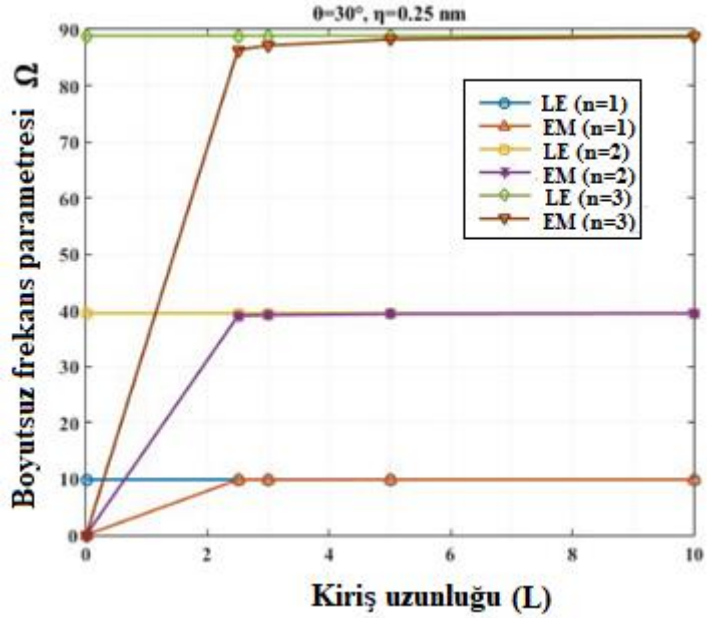
c)


θ=0°, η=0.25 nm
Boyutsuz frekans parametresi Ω
Kiriş uzunluğu (L)
LE (n=1)
EM (n=1)
LE (n=2)
EM (n=2)
LE (n=3)
EM (n=3)

d)

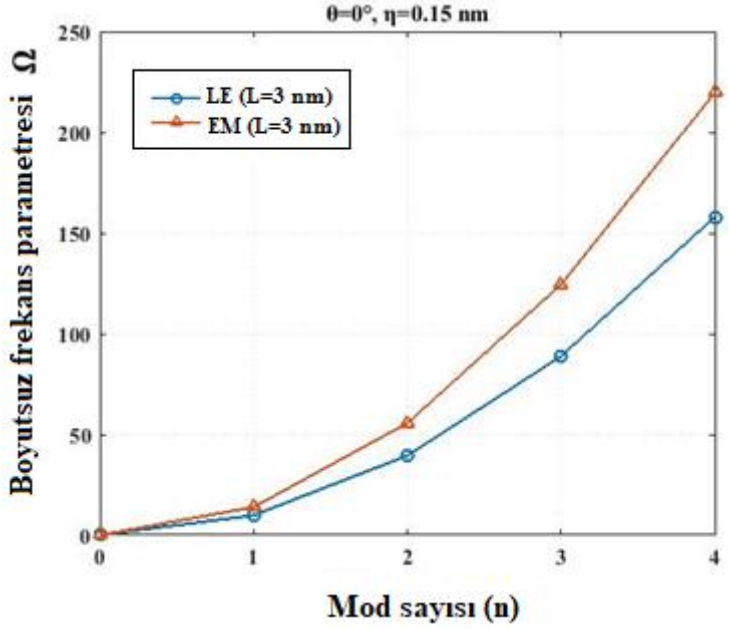


e)

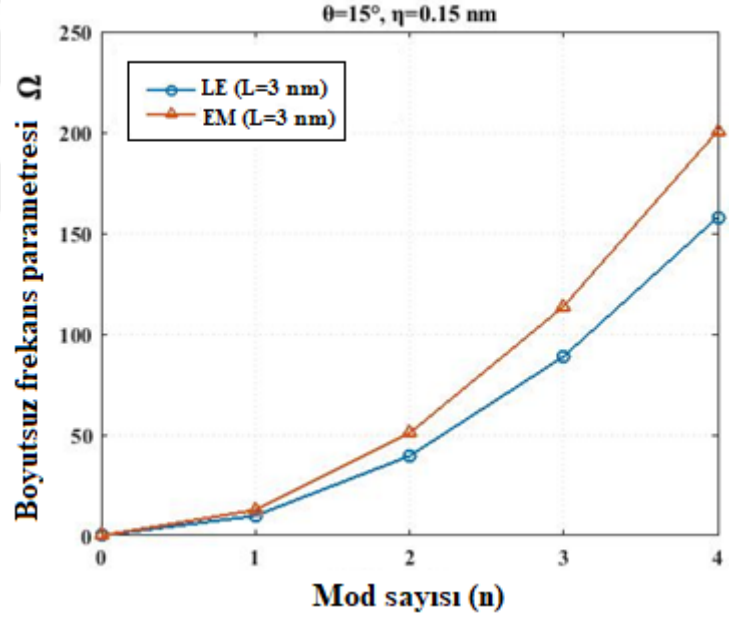


f)

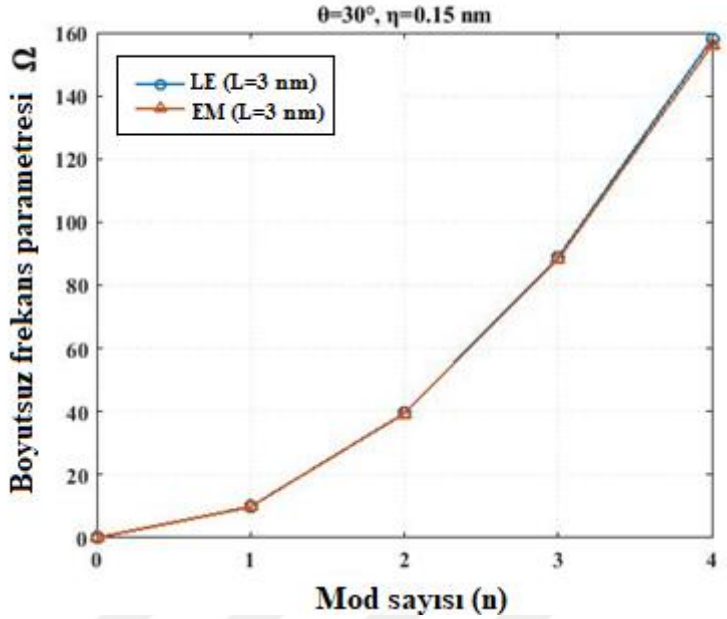
Şekil 5.62. Nanokirişlerin ilk üç moddaki frekans parametresinin kiriş uzunluğu ile değişimi.


θ=0°, η=0.15 nm
LE (L=3 nm)
EM (L=3 nm)
Boyutsuz frekans parametresi Ω
Mod sayısı (n)
0
50
100
150
200
250
0
1
2
3
4

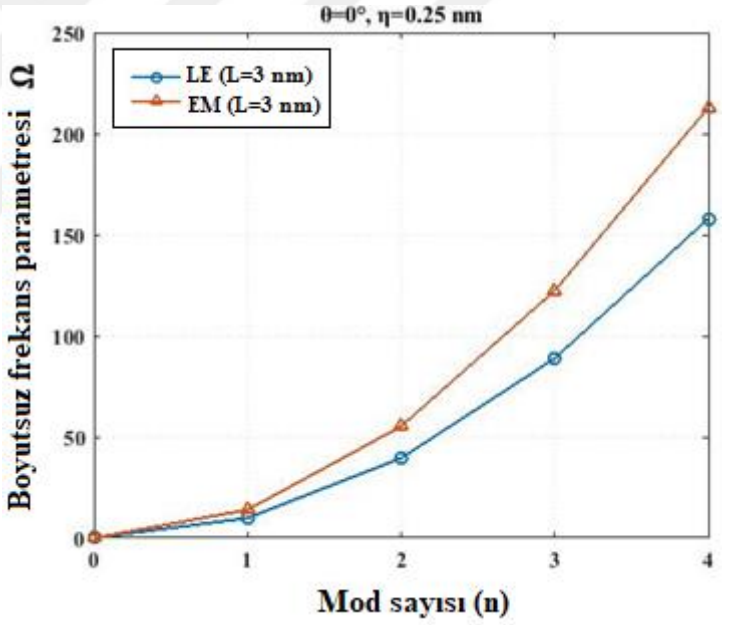
a)


θ=15°, η=0.15 nm
LE (L=3 nm)
EM (L=3 nm)
Boyutsuz frekans parametresi Ω
Mod sayısı (n)
0
50
100
150
200
250
0
1
2
3
4

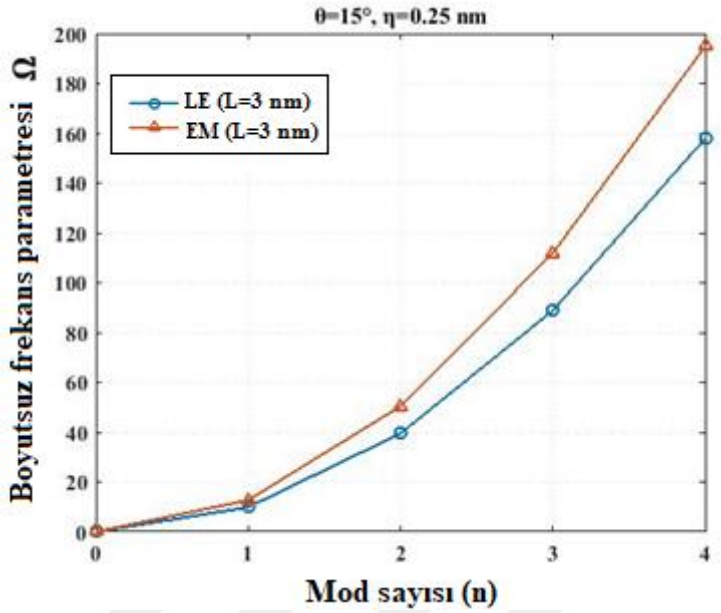
b)


θ=30°, η=0.15 nm
LE (L=3 nm)
EM (L=3 nm)
Boyutsuz frekans parametresi Ω
Mod sayısı (n)
0
20
40
60
80
100
120
140
160
0
1
2
3
4

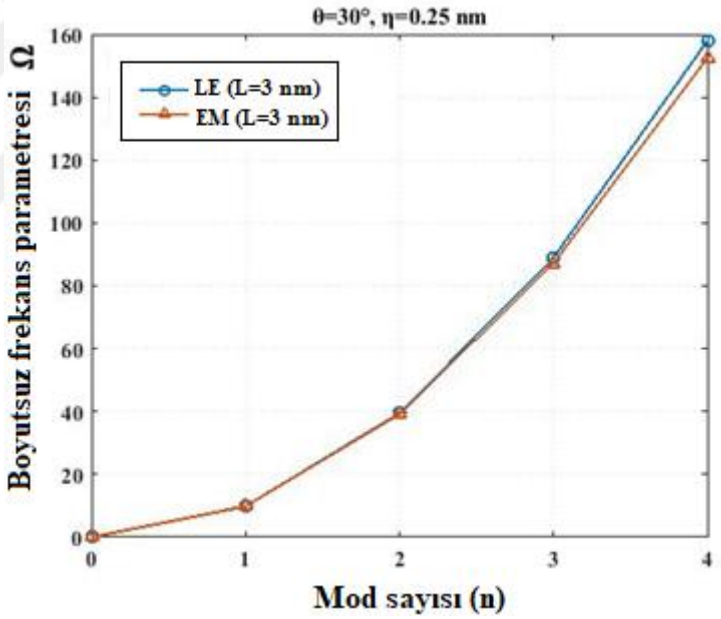
c)


θ=0°, η=0.25 nm
LE (L=3 nm)
EM (L=3 nm)
Boyutsuz frekans parametresi Ω
Mod sayısı (n)
0
50
100
150
200
250
0
1
2
3
4

d)



e)

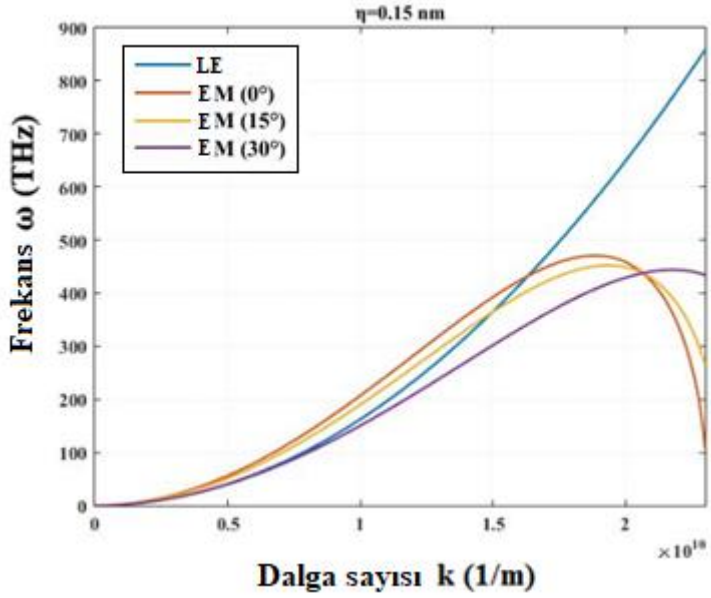


f)

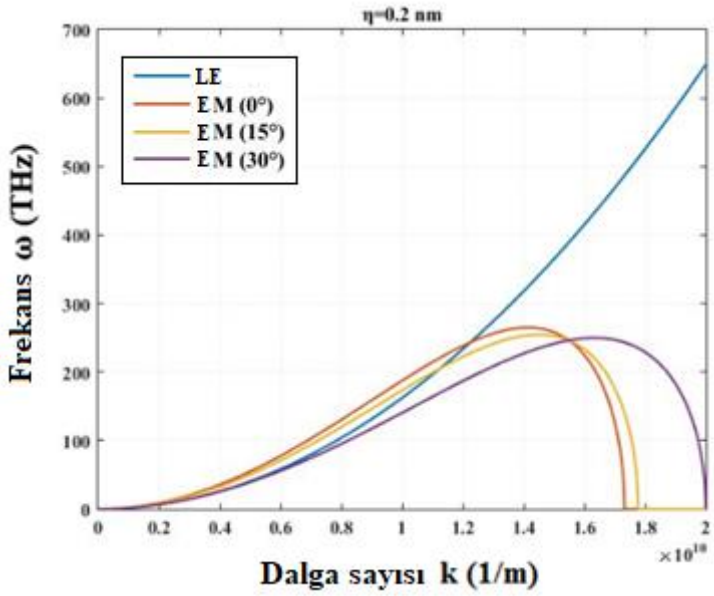
Şekil 5.63. Nanokirişlerin frekans parametresinin mod sayısı ile değişimi.

Son olarak, nanokirişlerin enine dalga yayınım ilişkileri Şekiller (5.64-5.66)'da gösterilmiştir. Burada, malzeme özellikleri ve geometrik özellikler, ρ=2300 kg/m^3, E=1 TPa, t_t=0.34 nm, R_1=0.5 nm olarak alınmıştır. Buna göre, EM teorisi ile elde edilen dalga frekanslarının birinci Brillouin bölgesinin yakınında sıfırlanacağı görülmektedir (Şekil 5.64). Buna karşılık, LE modelinin enine dalga frekanslarının, dalga sayısının artmasıyla sınırsız olarak arttığı görülmektedir. Faz ve grup hızları, tüm şiral açılar için EM

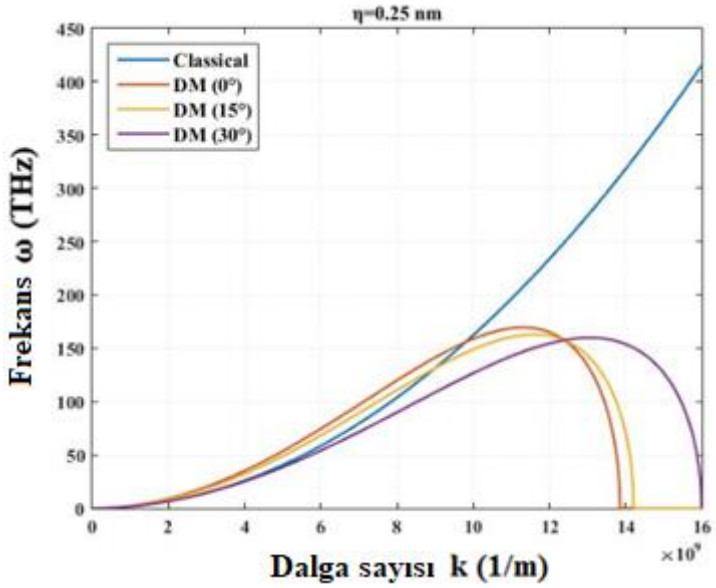
teorisinde belirli bir maksimum dalga sayısından sonra sıfıra yakınsar. Bununla birlikte, bu hızlar klasik elastisite teorisinde dalga sayısının artmasıyla artar. Bu davranış, EM teorisinin Van Hove tekilliğine sahip daha fiziksel bir teori olduğunu kanıtlamaktadır.



a)

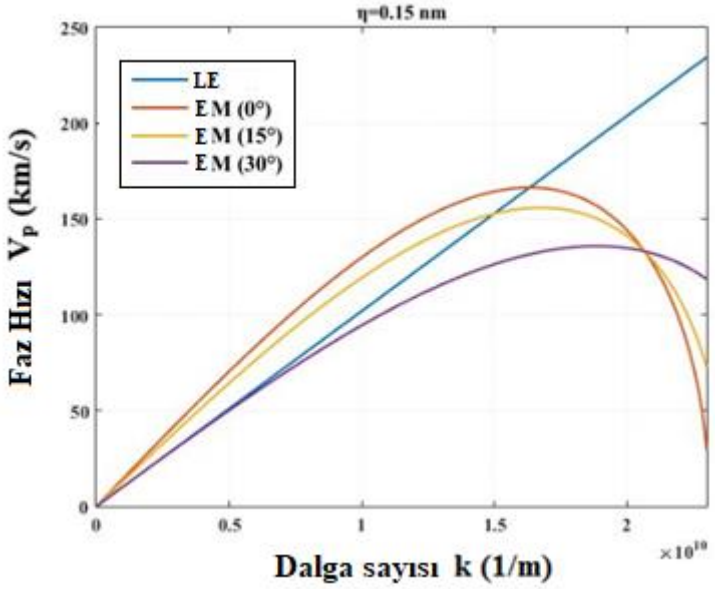


b)

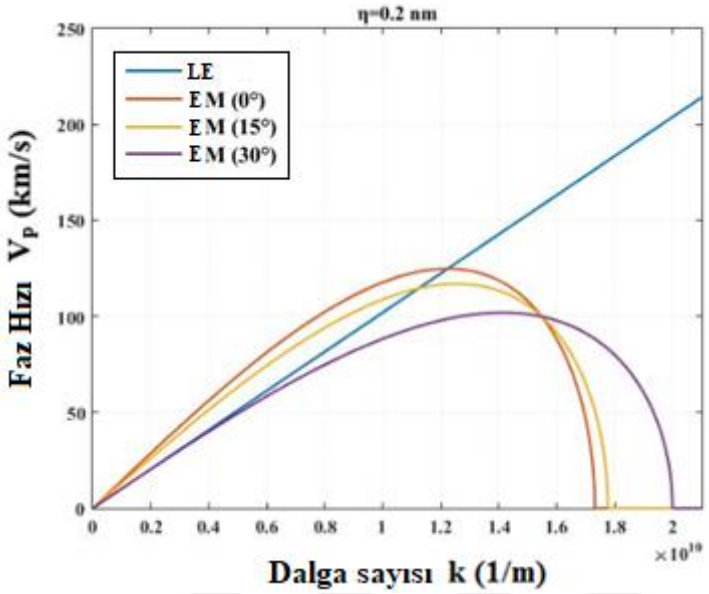


c)

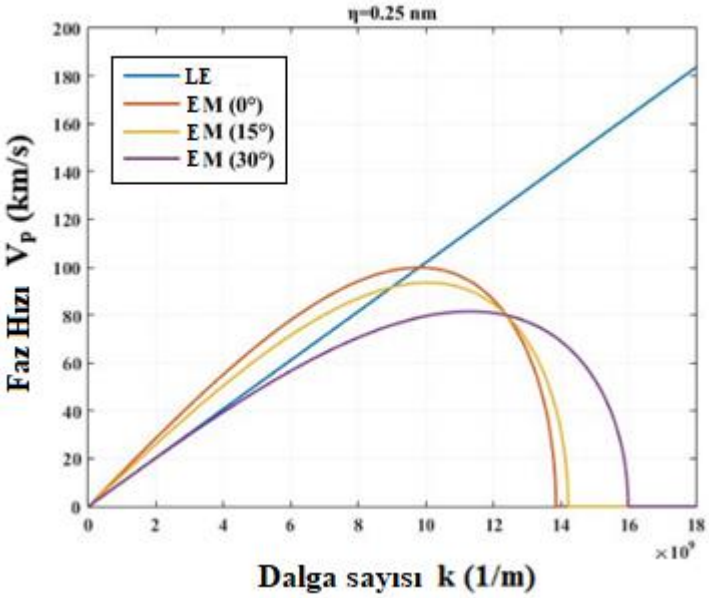
Şekil 5.64. Nanokirişlerin dalga frekanslarının dalga sayısı ile değişimi.



a)

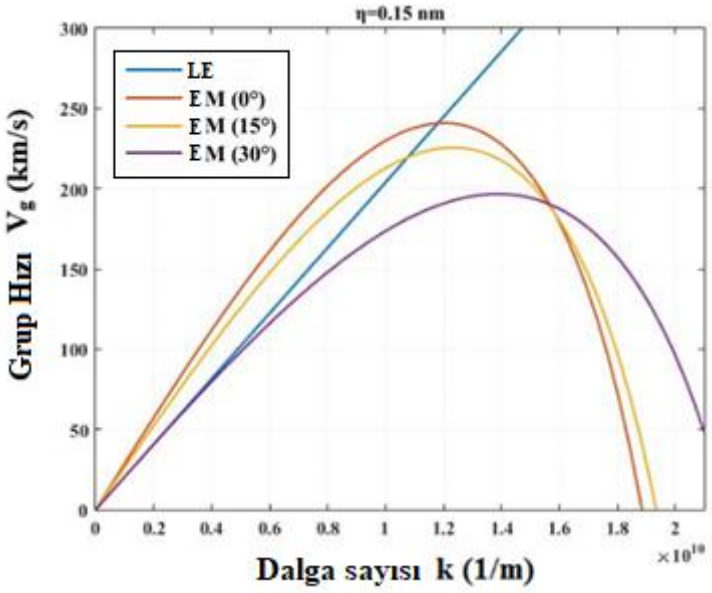


b)

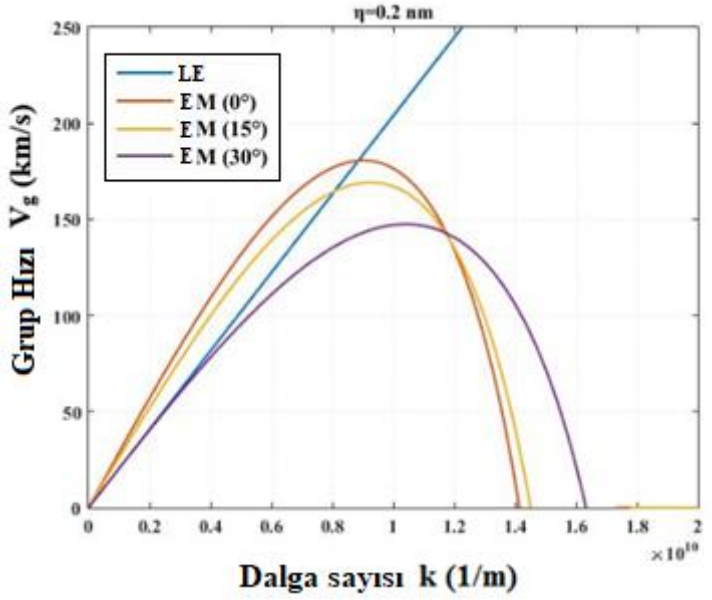


c)

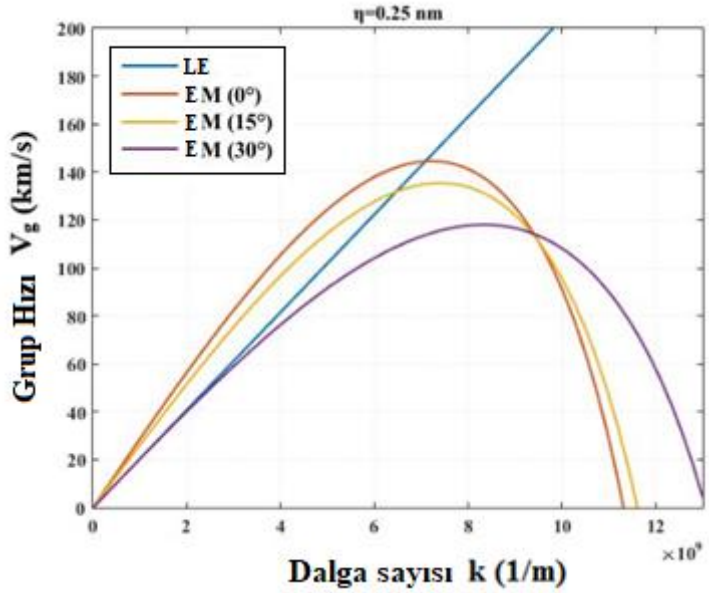
Şekil 5.65. Nanokirişlerin faz hızlarının dalga sayısı ile değişimi.


η=0.15 nm
LE
EM (0°)
EM (15°)
EM (30°)
Grup Hızı V_g (km/s)
Dalga sayısı k (1/m)
×10^10

a)


η=0.2 nm
LE
EM (0°)
EM (15°)
EM (30°)
Grup Hızı V_g (km/s)
Dalga sayısı k (1/m)
×10^10

b)



c)

Şekil 5.66. Nanokirişlerin grup hızlarının dalga sayısı ile değişimi.

5.11. Periyodik Yapılı Katmanlı Nanokirişlerin Titreşim Analizi Sonuçları

Bu bölümde periyodik yapılı katmanlı nanokirişlere ait tüm sayısal sonuçlar, EM teorisi çerçevesinde farklı şiral açıları için (θ=0°, 15°, 30°) verilmektedir. Periyodik nano yapıların mekanik davranışı, şiral açısının (θ) farklı değeriyle değişmektedir. EM teorisi kullanılarak yapılan analizler sonucunda, periyodik yapılı katmanlı nanokirişlerin, farklı şiral açılarında yumuşama veya sertleşme davranışları gösterdiği sonucuna varılmıştır. Elde edilen bu sonuca göre, EM teorisinde, nano yapıların mekanik davranışının dikkate alınan malzemenin atomik yapısına doğrudan bağlı olduğu görülmektedir. Böylece, EM teorisi, nano yapıların tasarımında, yumuşatıcı ve sertleştirici malzeme davranışının ayarlanmasında önemli bir avantaj sağlayabilir.

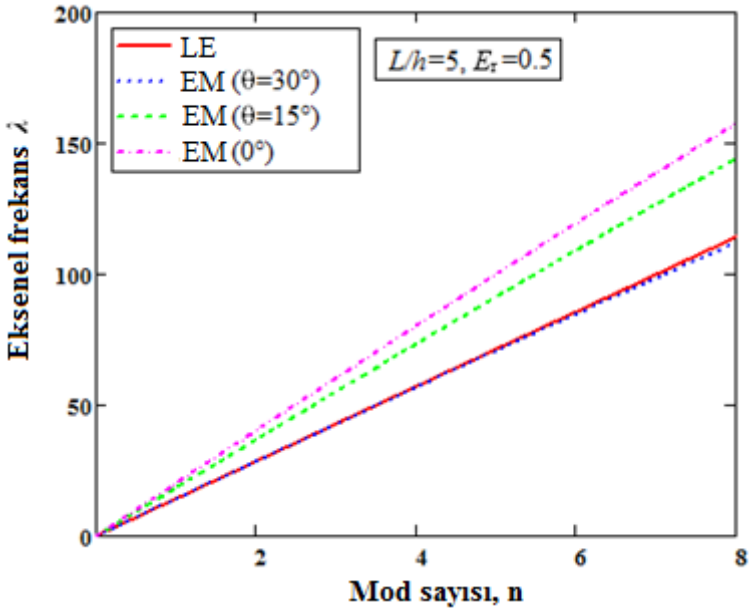
İlk olarak, simetrik katmanlı nanokirişler için sayısal sonuçlar verilmiştir. Bu durumda birleşim yoktur ve eksenel ve enine titreşim frekansları ayrı ayrı elde edilebilir. Bu bağlamda, dört katmanlı simetrik nanokirişlerin titreşim frekanslarının mod sayısı ile değişimi farklı boy-en oranı (L/h) ve farklı elastisite modülü oranları ($E_r = E_A/E_B$) için Şekil 5.67'de gösterilmektedir. θ=0° ve θ=15° olduğunda, EM teorisinin klasik elastisite teorisine kıyasla daha yüksek titreşim frekansları verdiği görülmektedir. Bununla birlikte, θ=30° olduğunda EM teorisinde LE teorisine göre yumuşatıcı malzeme davranışı ortaya çıkmaktadır. Bu durum, EM teorisinde malzemenin atomik yapısının malzemenin

mekanik davranışını hassas bir şekilde etkilediğini kanıtlar. En yüksek frekanslar EM modelinde eksenel ve eğilme hareketi için θ=0° olduğunda elde edilmektedir. Buna karşılık, en düşük titreşim frekansı θ=30° için elde edilmektedir. Ayrıca, mod sayısının artmasıyla, EM ve LE modeli arasındaki farkın enine ve eksenel titreşim modları için arttığı da görülmektedir.

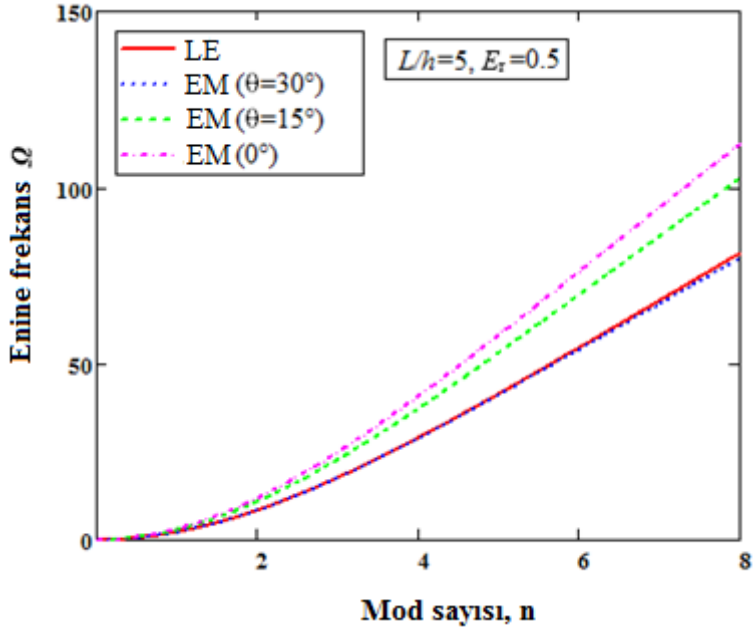
Şekil 5.68, ilk üç mod için eksenel ve enine titreşim frekanslarının kirişlerin elastisite modülü oranı (E_r) ile değişimini göstermektedir. E_r arttıkça, EM ve LE sonuçlarının azaldığı görülmektedir. Bu, eksenel frekans sonuçları için daha belirgindir. Her iki teori arasındaki fark θ=0° ve θ=15° için daha belirgindir. Bununla birlikte, E_r'nin verilen sınırı için θ=30° olduğunda iki teori neredeyse aynı frekans sonuçlarını vermektedir.

Şekil 5.69, simetrik dört katmanlı nanokirişlerin titreşim frekanslarının boy-en oranı (L/h) ile değişimini göstermektedir. EM teorisi çerçevesinde incelenen katmanlı nanokirişlerde θ=0° ve θ=15° için sertleşme davranışı gözlenirken, θ=30° için yumuşatıcı malzeme davranışı elde edilmektedir. EM ve klasik teori için eksenel frekansın L/h oranının artmasıyla doğrusal olarak arttığı görülmektedir. Bu artış, katmanlı kirişlerin enine titreşiminde her iki teori için de doğrusal değildir.

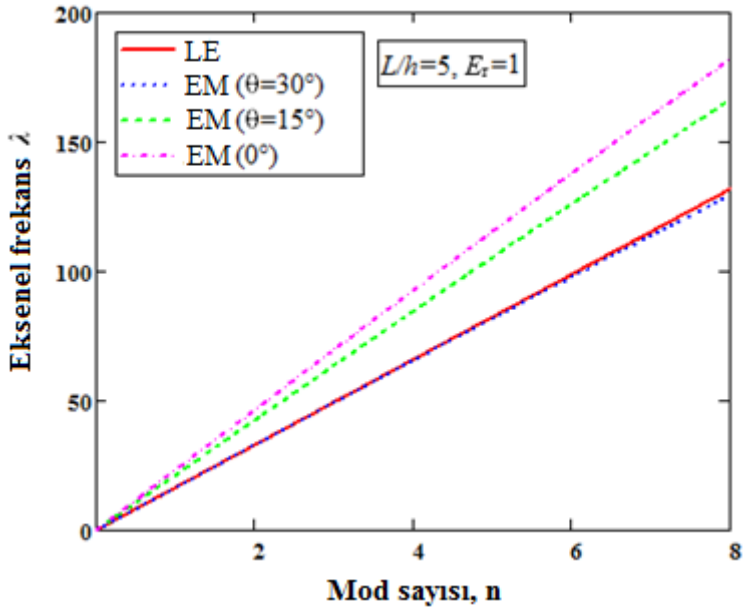
Şekil 5.70'te, titreşim frekanslarının boyutsuz iç uzunluk ölçeği parametre oranı ile değişimi ($\beta_A/\beta_B = \sqrt{\frac{\eta_A^2}{12L^2}/\frac{\eta_B^2}{12L^2}}$) EM modeli için gösterilmiştir. Burada, B katmanının uzunluk ölçeği parametresi (eşil mesafe) η_B=0.15 nm olarak alınmıştır. β_A/β_B oranının artmasıyla, eksenel ve enine titreşim frekansları azalır ve bu azalma enine titreşimin üçüncü modu için daha belirgindir. β_A/β_B arttırılması nanokirişteki homojenliği azaltmaktadır. Bu da, dikkate alınan katmanlı kirişlerdeki titreşim frekanslarının azalmasını sağlar. Titreşim frekanslarındaki azalmanın L/h=5 için L/h=10'a kıyasla daha belirgin olduğu belirtilmelidir. Bunun nedeni, gradyan etkilerinin kısa nanokirişler için daha belirgin olmasıdır. Kiriş uzunluğunun arttırılmasıyla EM modelinde gradyan etkileri zayıflar.


LE
EM (θ=30°)
EM (θ=15°)
EM (0°)
L/h=5, E_r=0.5
Eksenel frekans λ
Mod sayısı, n
0
50
100
150
200
2
4
6
8

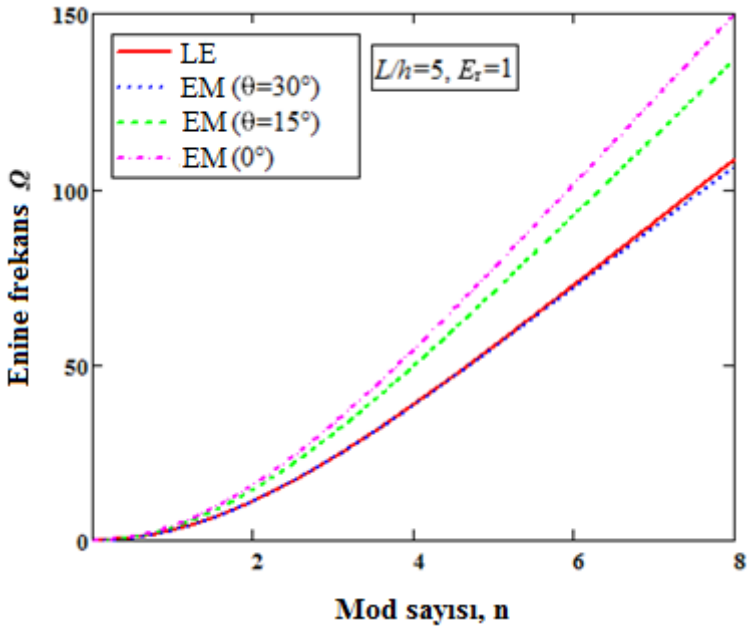
a)


LE
EM (θ=30°)
EM (θ=15°)
EM (0°)
L/h=5, E_r=0.5
Enine frekans Ω
Mod sayısı, n
0
50
100
150
2
4
6
8

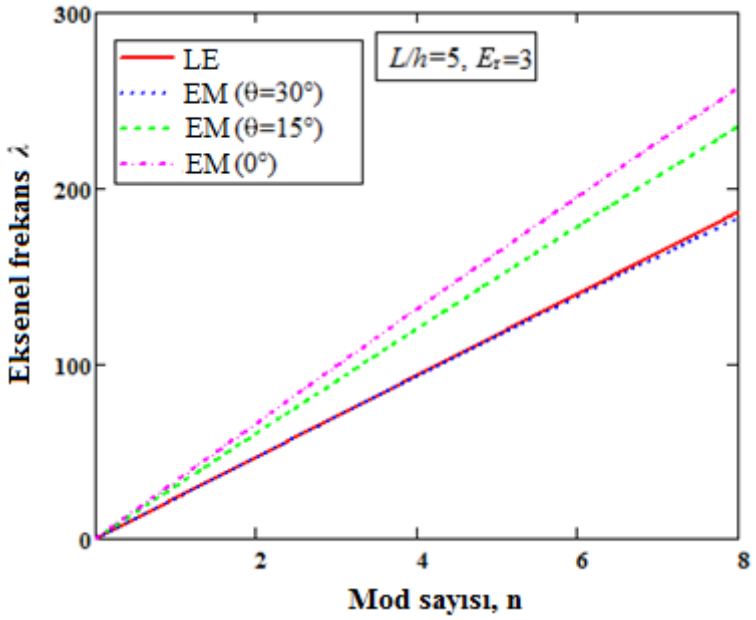
b)


LE
EM (θ=30°)
EM (θ=15°)
EM (0°)
L/h=5, Eτ=1
Eksenel frekans λ
Mod sayısı, n
0
50
100
150
200
2
4
6
8

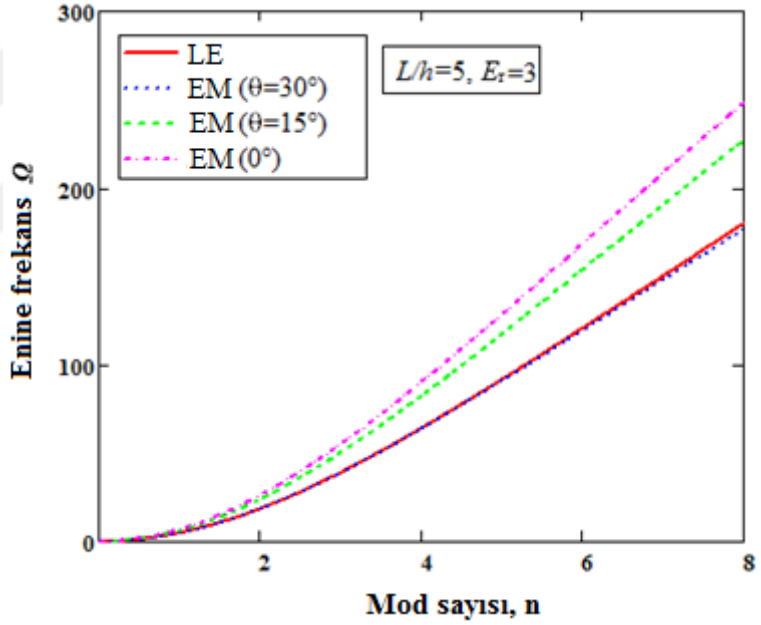
c)


LE
EM (θ=30°)
EM (θ=15°)
EM (0°)
L/h=5, Eτ=1
Enine frekans Ω
Mod sayısı, n
0
50
100
150
2
4
6
8

d)

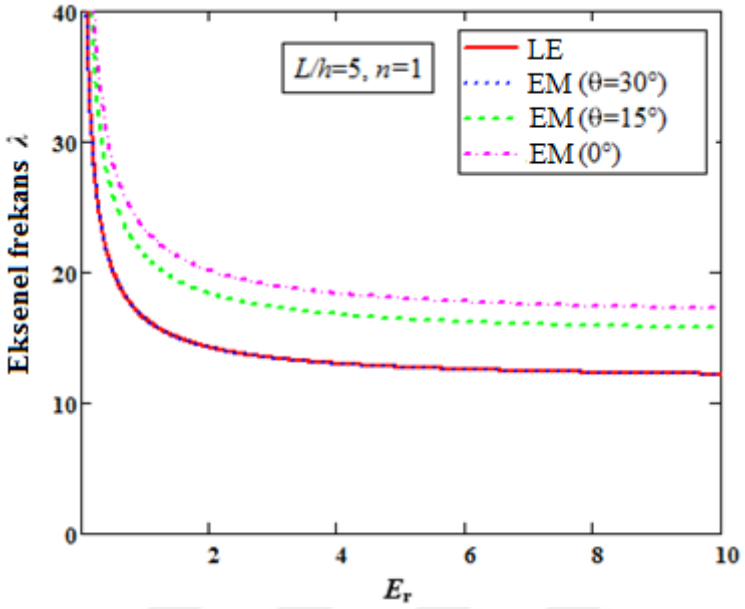


e)

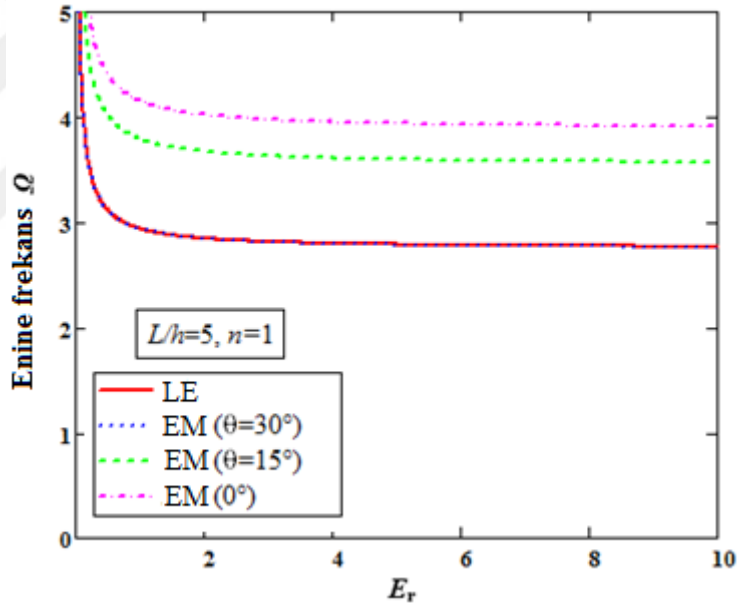


f)

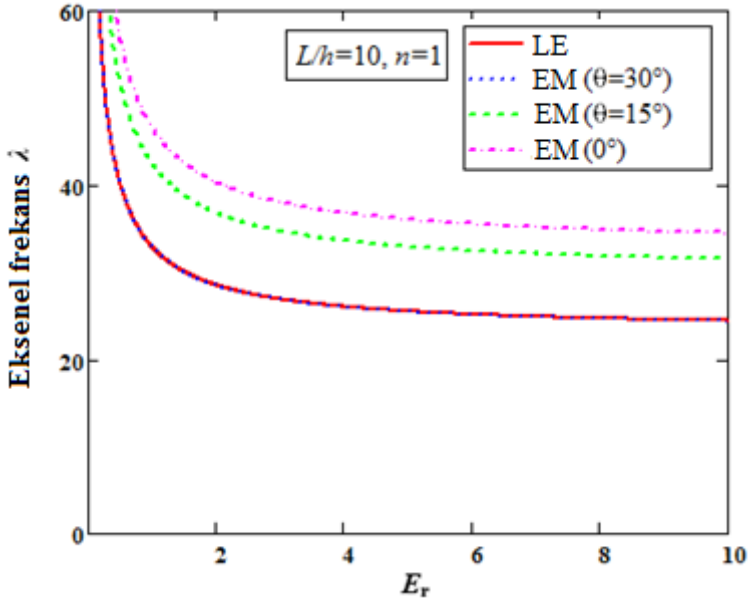
Şekil 5.67. Simetrik durum için frekans parametrelerinin mod sayısı ile değişimi ($\beta_A/\beta_B = 1$).


Eksenel frekans λ
E_r
L/h=5, n=1
LE
EM (θ=30°)
EM (θ=15°)
EM (0°)
0
10
20
30
40
2
4
6
8
10

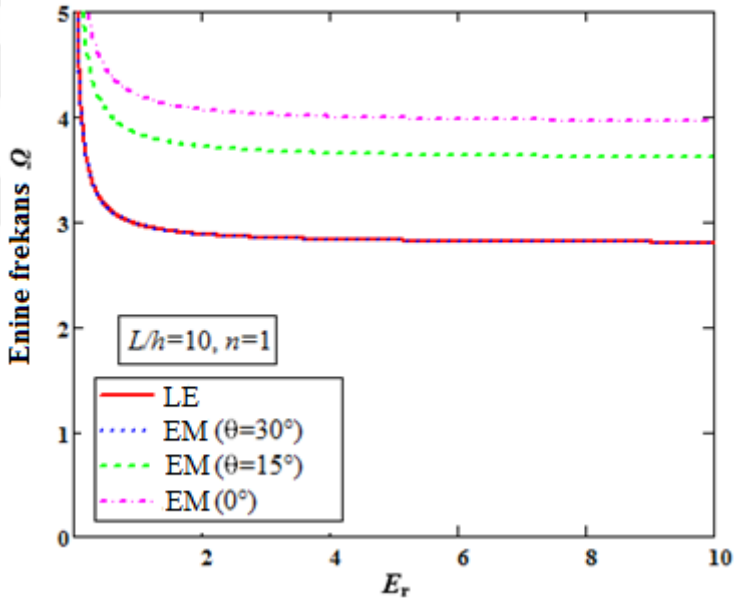
a)


Enine frekans Ω
E_r
L/h=5, n=1
LE
EM (θ=30°)
EM (θ=15°)
EM (0°)
0
1
2
3
4
5
2
4
6
8
10

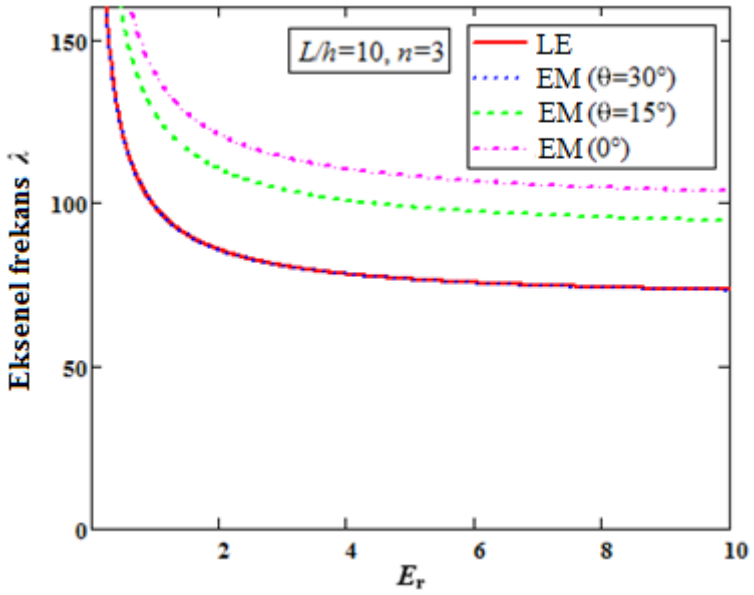
b)


L/h=10, n=1
LE
EM (θ=30°)
EM (θ=15°)
EM (0°)
Eksenel frekans λ
E_r

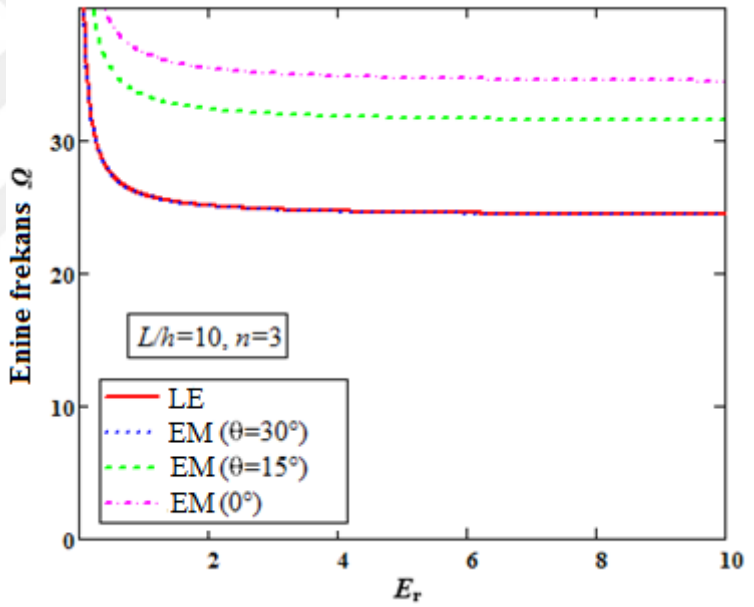
c)


L/h=10, n=1
LE
EM (θ=30°)
EM (θ=15°)
EM (0°)
Enine frekans Ω
E_r

d)

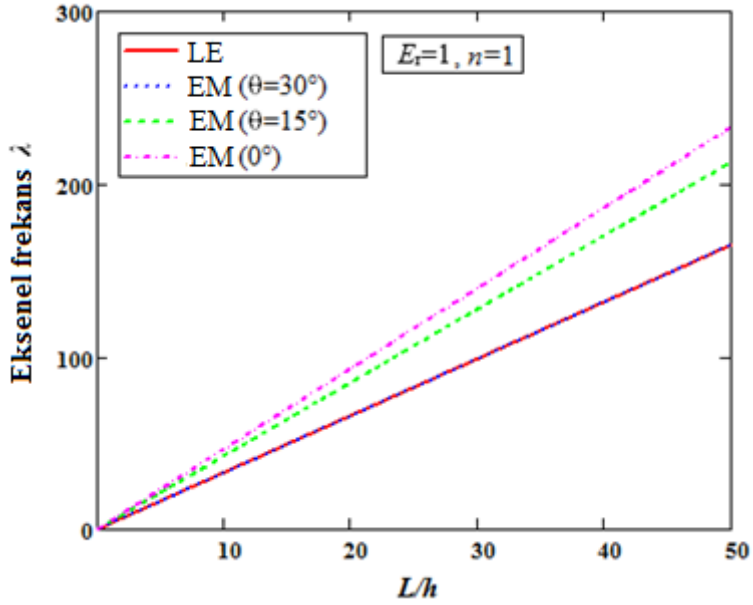


e)

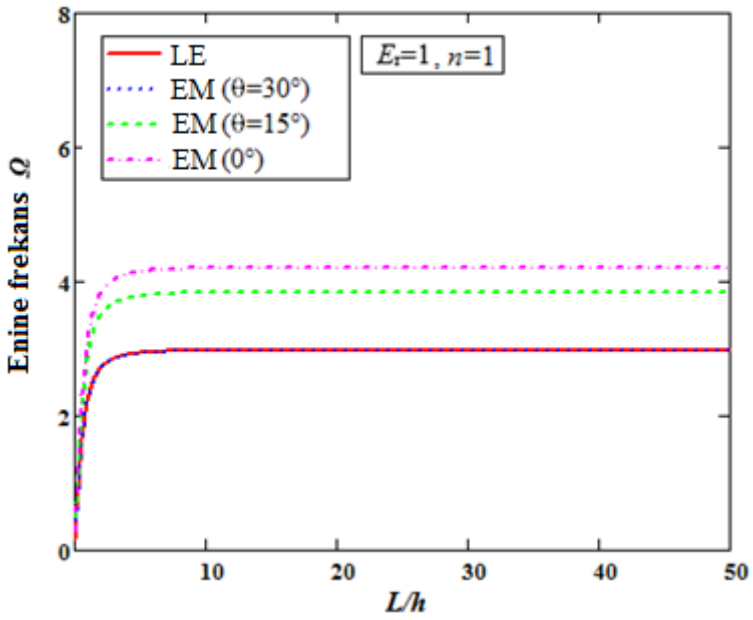


f)

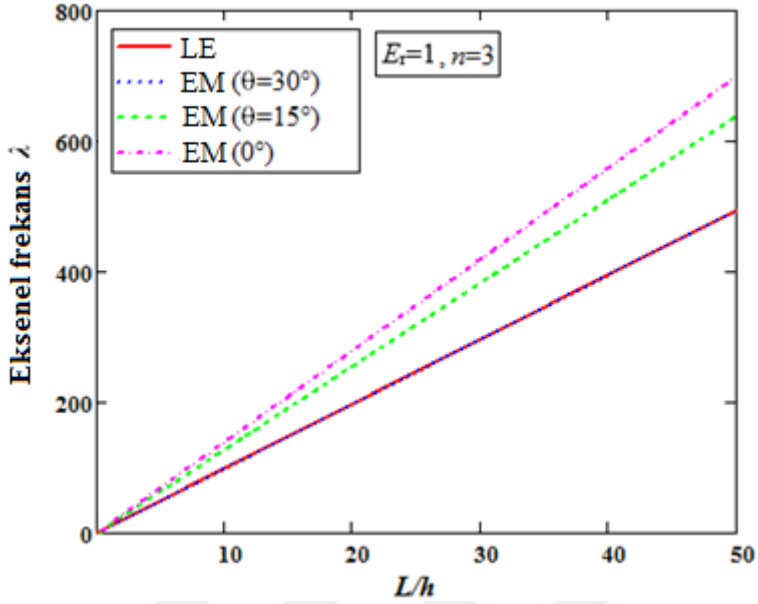
Şekil 5.68. Simetrik durum için frekans parametrelerinin E_A/E_B=E_r ile değişimi ($\beta_A/\beta_B = 1$).


LE
EM (θ=30°)
EM (θ=15°)
EM (0°)
E_r=1, n=1
Eksenel frekans λ
L/h
0
100
200
300
10
20
30
40
50

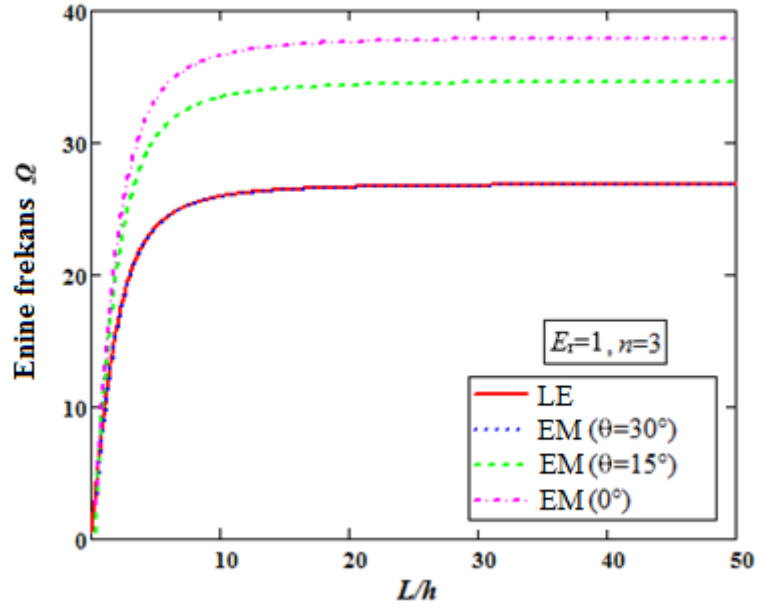
a)


LE
EM (θ=30°)
EM (θ=15°)
EM (0°)
E_r=1, n=1
Enine frekans Ω
L/h
0
2
4
6
8
10
20
30
40
50

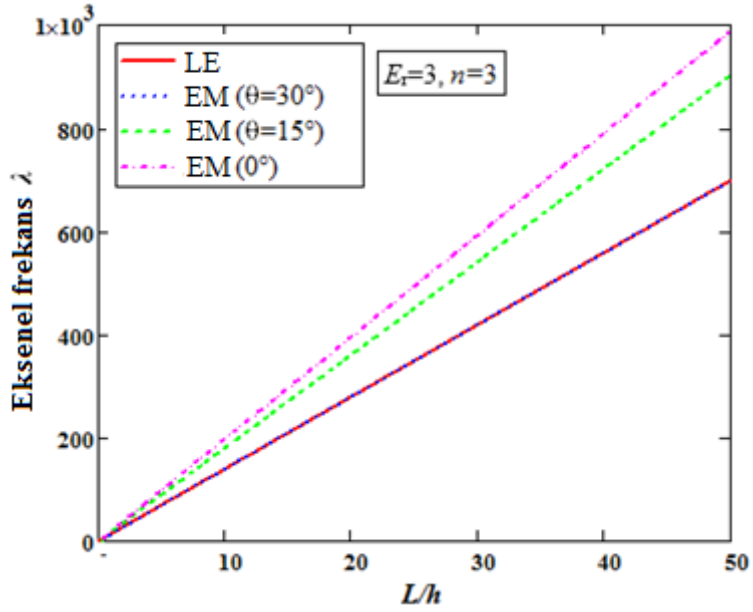
b)


LE
EM (θ=30°)
EM (θ=15°)
EM (0°)
E_r=1, n=3
Eksenel frekans λ
L/h
0
200
400
600
800
10
20
30
40
50

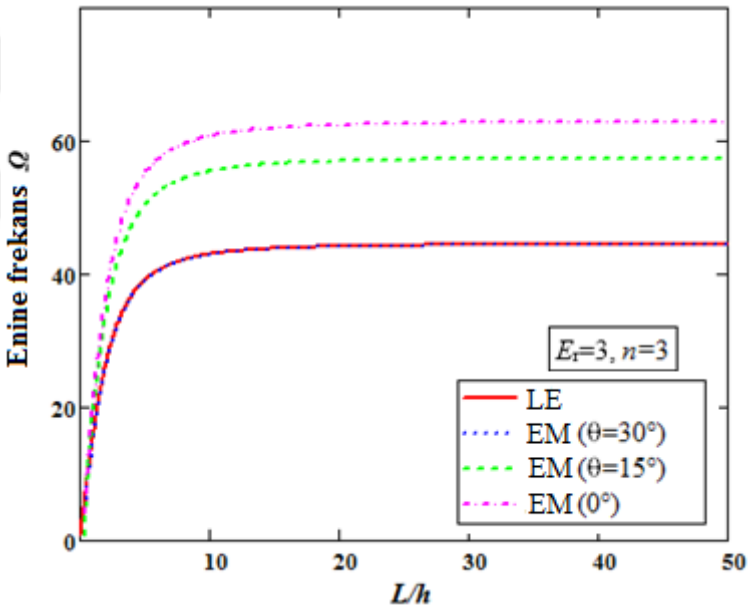
c)


Enine frekans Ω
L/h
E_r=1, n=3
LE
EM (θ=30°)
EM (θ=15°)
EM (0°)
0
10
20
30
40
10
20
30
40
50

d)

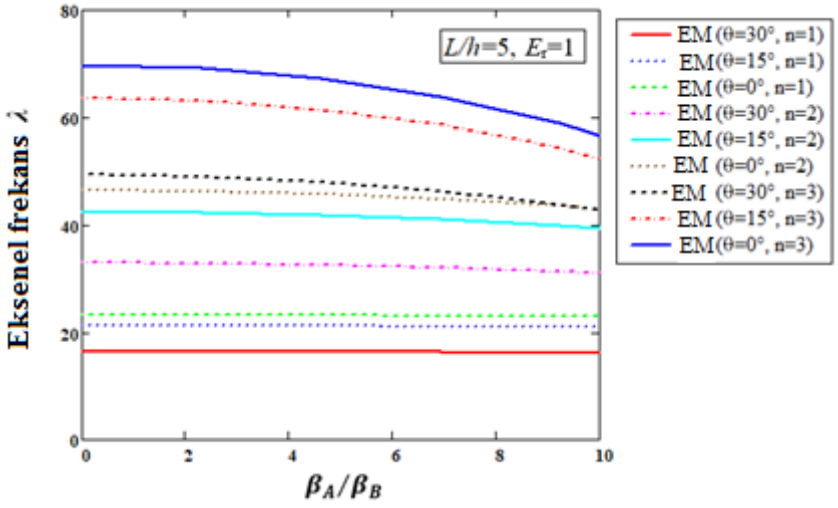


e)

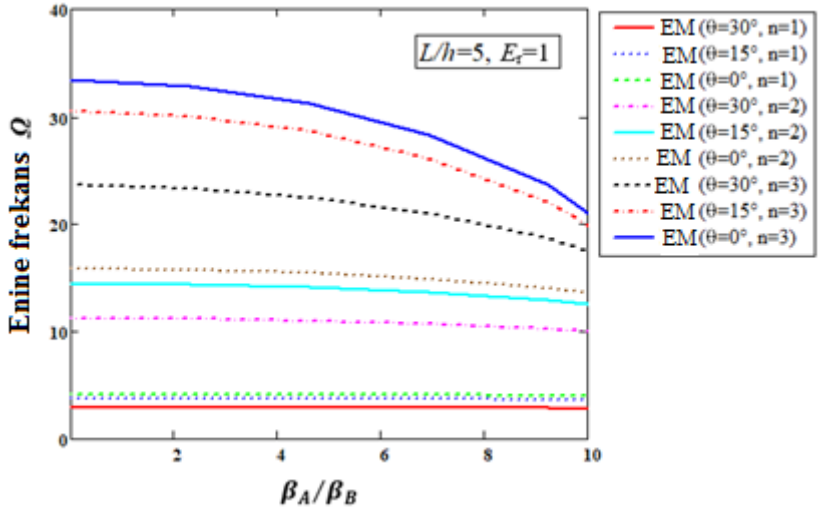


f)

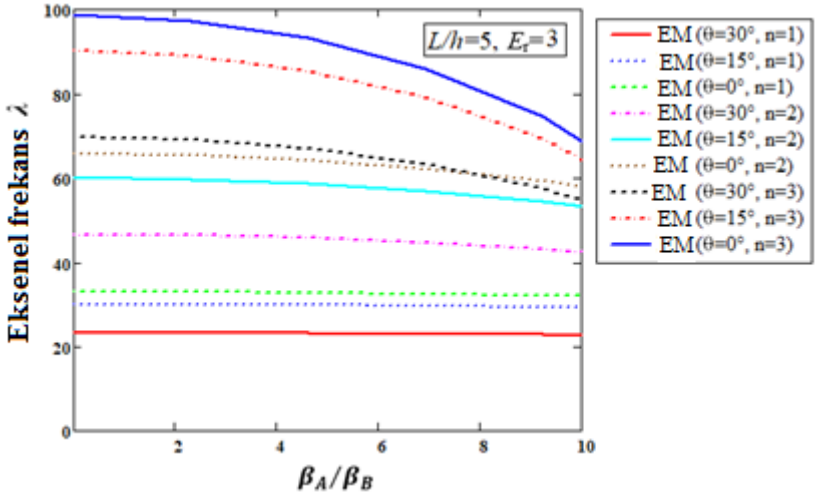
Şekil 5.69. Simetrik durum için frekans parametrelerinin *L/h* ile değişimi ($\beta_A/\beta_B = 1$).


L/h=5, Eτ=1
Eksenel frekans λ
βA/βB
EM (θ=30°, n=1)
EM (θ=15°, n=1)
EM (θ=0°, n=1)
EM (θ=30°, n=2)
EM (θ=15°, n=2)
EM (θ=0°, n=2)
EM (θ=30°, n=3)
EM (θ=15°, n=3)
EM (θ=0°, n=3)

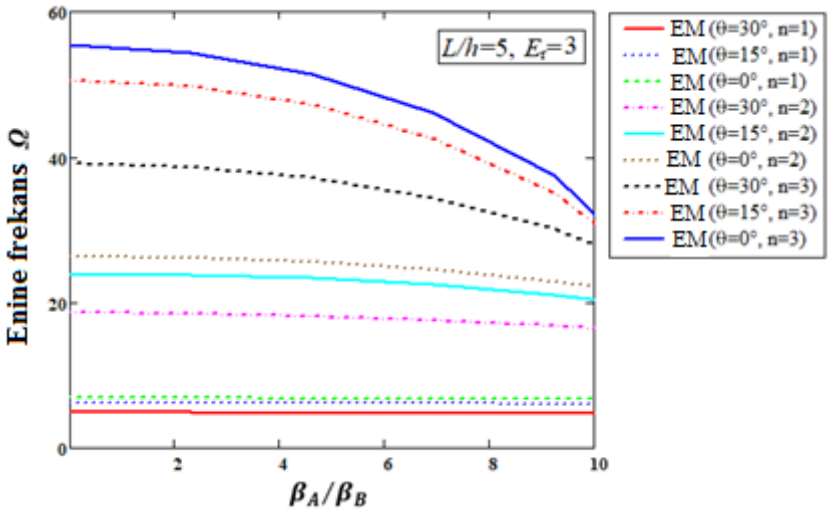
a)


L/h=5, Eτ=1
Enine frekans Ω
βA/βB
EM (θ=30°, n=1)
EM (θ=15°, n=1)
EM (θ=0°, n=1)
EM (θ=30°, n=2)
EM (θ=15°, n=2)
EM (θ=0°, n=2)
EM (θ=30°, n=3)
EM (θ=15°, n=3)
EM (θ=0°, n=3)

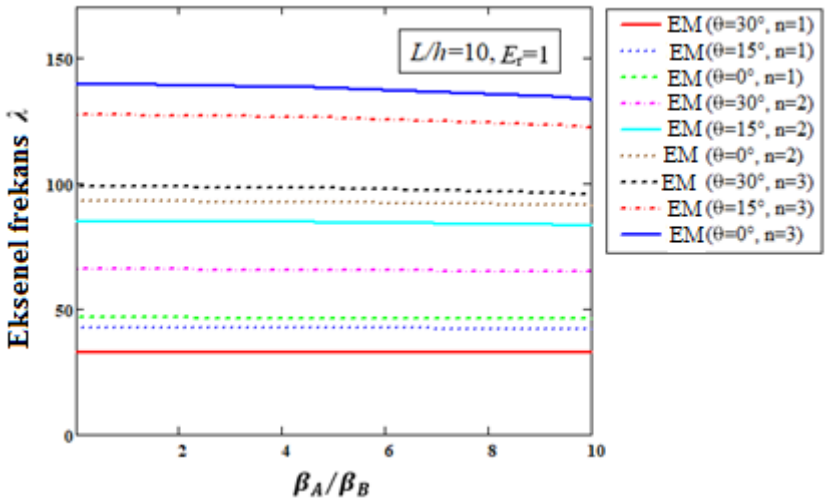
b)


L/h=5, Eτ=3
Eksenel frekans λ
βA/βB
EM (θ=30°, n=1)
EM (θ=15°, n=1)
EM (θ=0°, n=1)
EM (θ=30°, n=2)
EM (θ=15°, n=2)
EM (θ=0°, n=2)
EM (θ=30°, n=3)
EM (θ=15°, n=3)
EM (θ=0°, n=3)

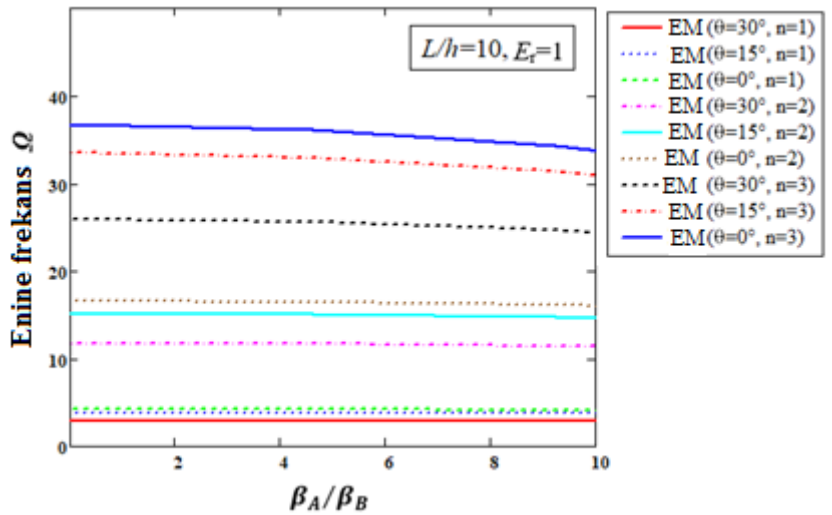
c)


L/h=5, E_r=3
Enine frekans Ω
β_A/β_B
EM (θ=30°, n=1)
EM (θ=15°, n=1)
EM (θ=0°, n=1)
EM (θ=30°, n=2)
EM (θ=15°, n=2)
EM (θ=0°, n=2)
EM (θ=30°, n=3)
EM (θ=15°, n=3)
EM (θ=0°, n=3)

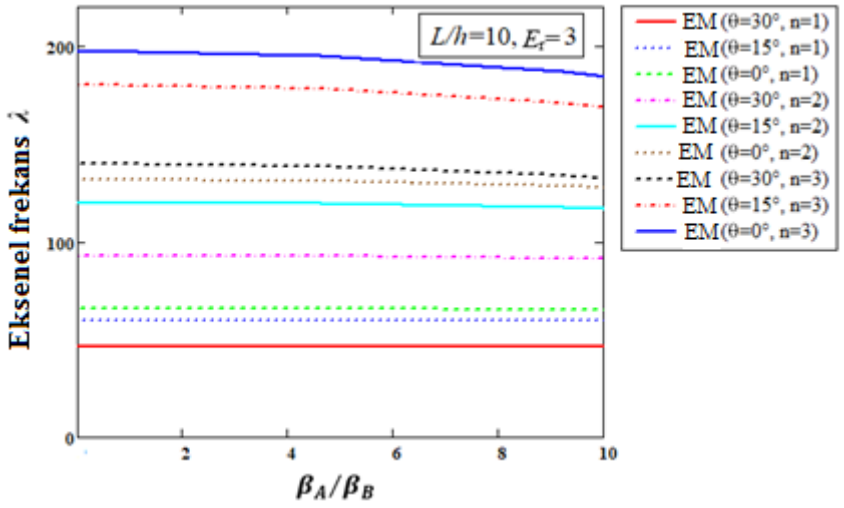
d)


L/h=10, E_r=1
Eksenel frekans λ
β_A/β_B
EM (θ=30°, n=1)
EM (θ=15°, n=1)
EM (θ=0°, n=1)
EM (θ=30°, n=2)
EM (θ=15°, n=2)
EM (θ=0°, n=2)
EM (θ=30°, n=3)
EM (θ=15°, n=3)
EM (θ=0°, n=3)

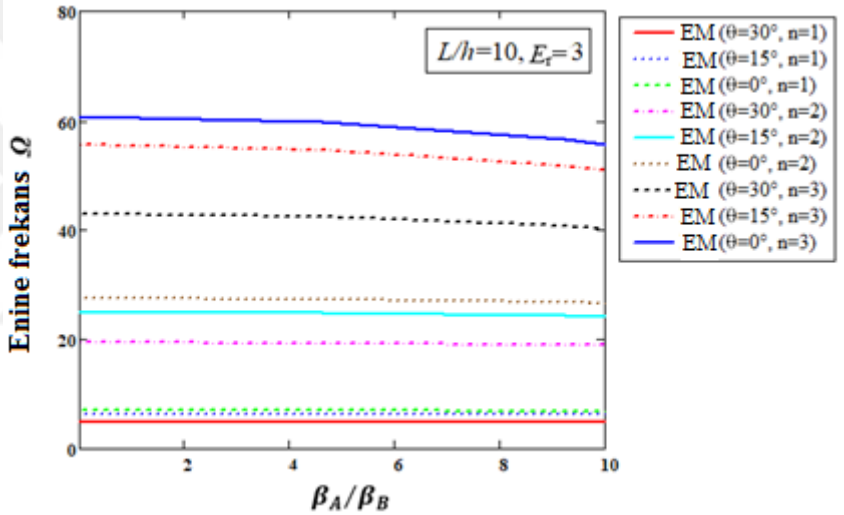
e)


L/h=10, E_r=1
Enine frekans Ω
β_A/β_B
EM (θ=30°, n=1)
EM (θ=15°, n=1)
EM (θ=0°, n=1)
EM (θ=30°, n=2)
EM (θ=15°, n=2)
EM (θ=0°, n=2)
EM (θ=30°, n=3)
EM (θ=15°, n=3)
EM (θ=0°, n=3)

f)



g)



h)

Şekil 5.70. Simetrik durum için frekans parametrelerinin β_A/β_B ile değişimi.

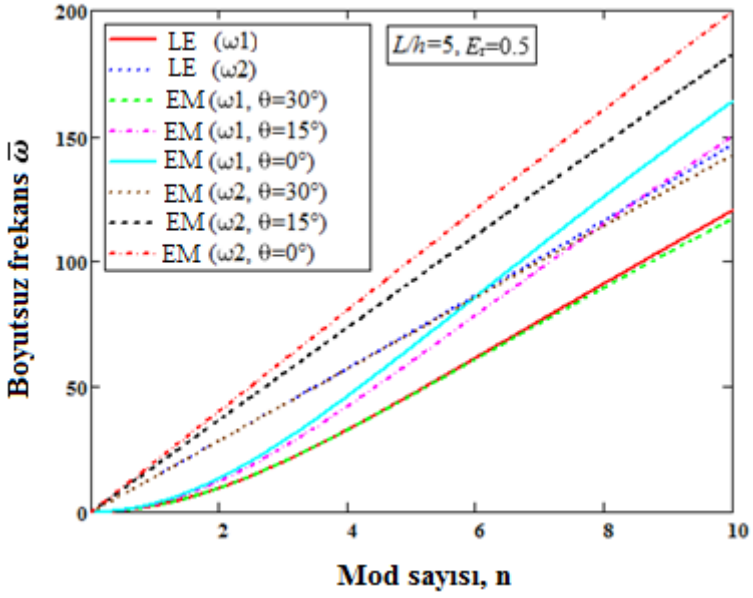
İkinci olarak, benzer titreşim analizleri, Şekiller (5.71-5.74)'te anti-simetrik dört katmanlı nanokirişler için gösterilmiştir. Anti-simetrik durum için birleşim modu nedeniyle eksenel ve enine titreşim frekanslarının ayrılamayacağı görülmektedir (Şekil 5.71). Bu yüzden, frekans sonuçları, EM ve LE çözümleri için birinci küme frekansı (ω_1) ve ikinci küme frekansı (ω_2) olarak gösterilmiştir. Mod sayısı ve E_r değerinin artmasıyla, birinci ve ikinci küme frekansları artmaktadır. Şiral açıları θ=0° ve θ=15° olduğunda, birinci küme EM frekansları, klasik teorinin ikinci küme frekanslarına yakınsamaktadır. Daha sonra, θ=0° ve θ=15° iken EM teorisine ait birinci küme frekansları, n=5 ve n=7 için klasik teorinin ikinci küme frekansları ile hemen hemen aynı değeri verir. Bununla birlikte, artan boy-en oranıyla beraber, klasik teorinin ikinci küme frekansı her zaman EM

modelinin ilk küme frekanslarından daha yüksek değerler vermektedir. EM teorisinde, θ=0° ve θ=15° için katmanlı nanokirişin sertleştiği, θ=30° için ise katmanlı kirişin yumuşadığı görülmektedir.

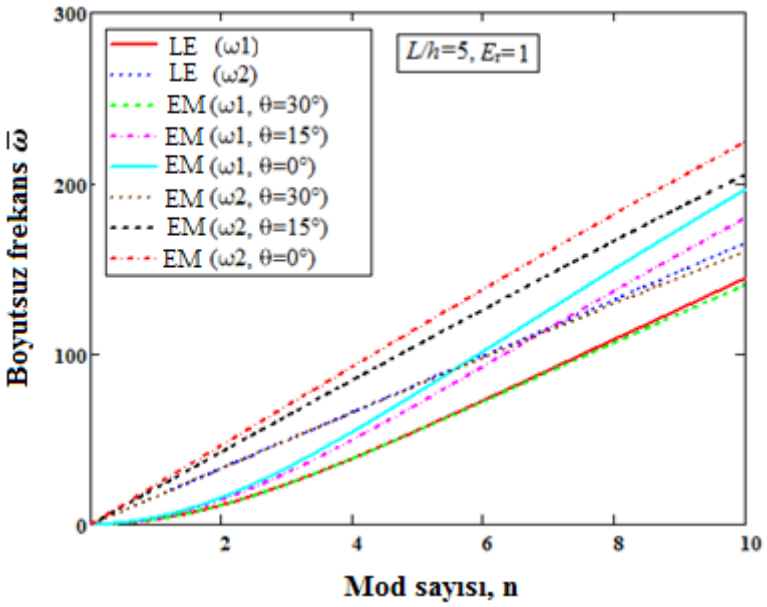
Şekil 5.72'de, anti-simetrik dört katmanlı nanokirişlerde, titreşim frekanslarının E_r ile değişimi ilk üç mod için gösterilmiştir. E_r arttıkça boyutsuz frekans parametresinin arttığı açıkça görülebilir. Bu artış her iki teorinin ikinci küme frekansları için daha belirgindir. Simetrik katmanlı nanokirişlere benzer şekilde, EM teorisinde θ=0° ve θ=15° için sertleşme malzeme davranışı, θ=30° için ise yumuşatıcı malzeme davranışı meydana gelmektedir.

Şekil 5.73'te, ilk üç mod için boyutsuz frekansın boy-en oranıyla (L/h) değişimi gösterilmektedir. Yine EM teorisinde sertleşme etkisi (θ=0°, θ=15°) ve yumuşatma etkisi (θ=30°) ayrı ayrı görülebilir. Mod sayısının artmasıyla, EM ve klasik teori arasındaki fark artmaktadır. Bu durum, EM teorisindeki gradyan etkilerinin daha yüksek titreşim modlarında daha etkili olduğunu gösterir.

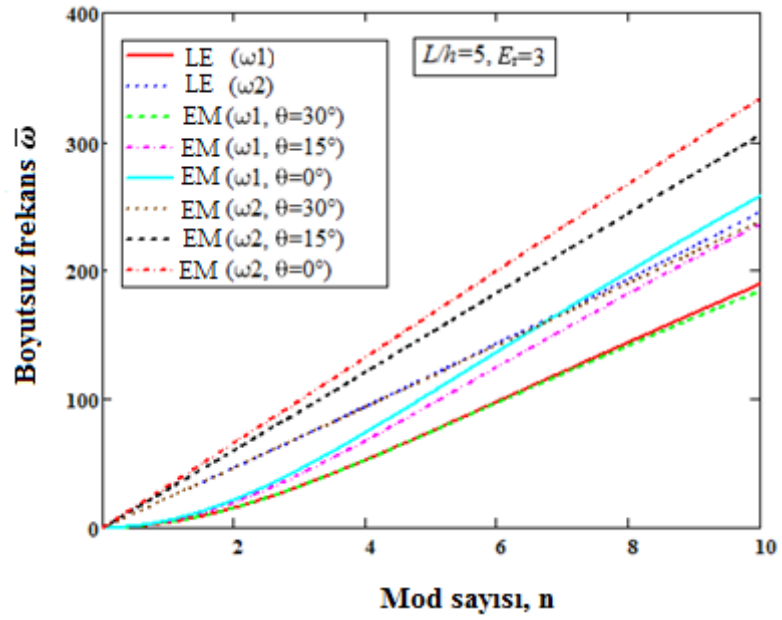
Şekil 5.74'te, periyodik yapılı anti-simetrik dört katmanlı nanokirişlerin enine titreşim frekanslarının, boyutsuz uzunluk ölçeği parametresi oranı (β_A/β_B) ile değişimi gösterilmektedir. Burada, B katmanının uzunluk ölçeği parametresi η_B=0.15 nm olarak alınmıştır. Titreşim frekansları, özellikle n=3 ve L/h=5 için β_A/β_B oranının artmasıyla azalmaktadır. Bu durum, EM teorisindeki gradyan etkilerinin daha kısa uzunluklar ve daha yüksek titreşim modları için daha etkili olduğunu gösterir.



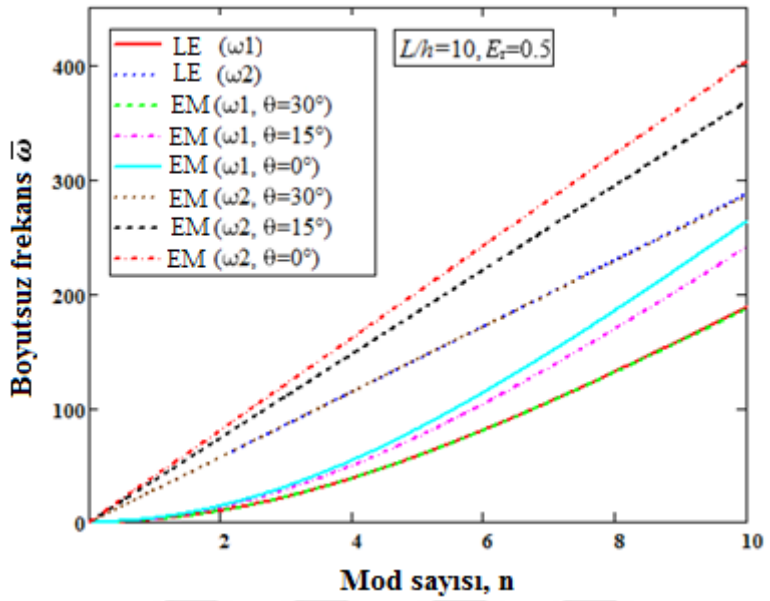
a)


LE (ω1)
LE (ω2)
EM (ω1, θ=30°)
EM (ω1, θ=15°)
EM (ω1, θ=0°)
EM (ω2, θ=30°)
EM (ω2, θ=15°)
EM (ω2, θ=0°)
L/h=5, E1=1
Boyutsuz frekans ω̄
Mod sayısı, n
0
100
200
300
2
4
6
8
10

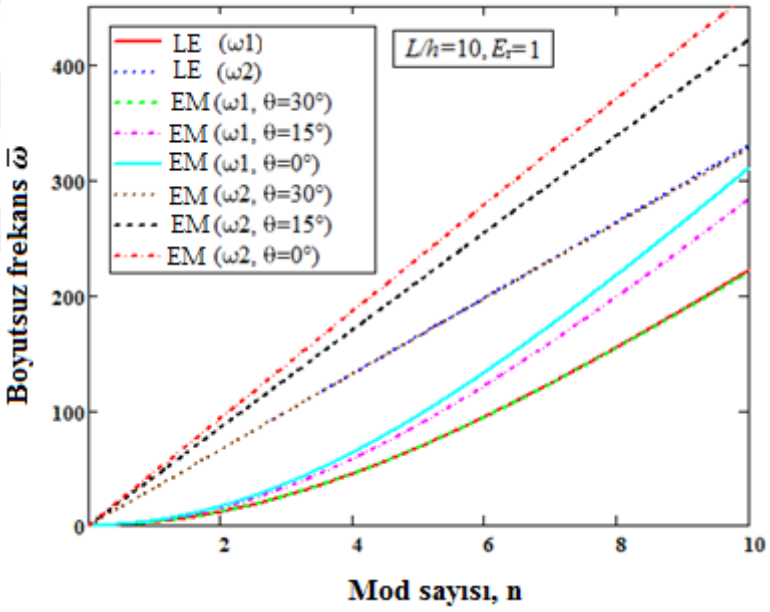
b)


LE (ω1)
LE (ω2)
EM (ω1, θ=30°)
EM (ω1, θ=15°)
EM (ω1, θ=0°)
EM (ω2, θ=30°)
EM (ω2, θ=15°)
EM (ω2, θ=0°)
L/h=5, E1=3
Boyutsuz frekans ω̄
Mod sayısı, n
0
100
200
300
400
2
4
6
8
10

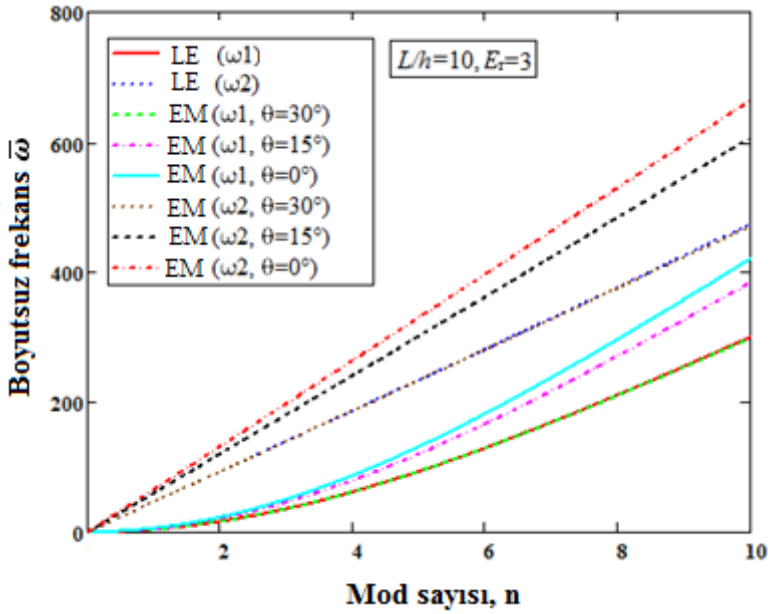
c)


LE (ω1)
LE (ω2)
EM (ω1, θ=30°)
EM (ω1, θ=15°)
EM (ω1, θ=0°)
EM (ω2, θ=30°)
EM (ω2, θ=15°)
EM (ω2, θ=0°)
L/h=10, Er=0.5
Boyutsuz frekans ω̄
Mod sayısı, n
0
100
200
300
400
2
4
6
8
10

d)

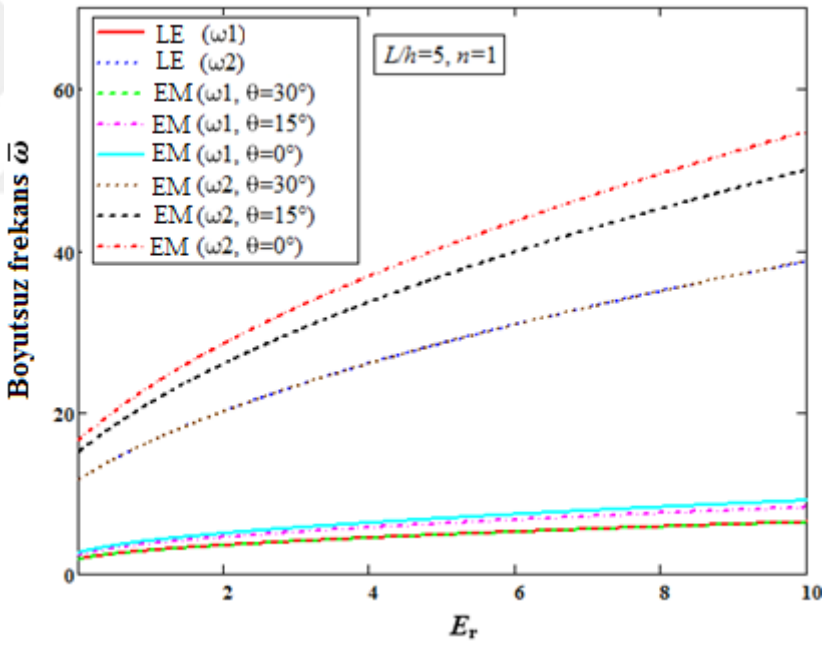

LE (ω1)
LE (ω2)
EM (ω1, θ=30°)
EM (ω1, θ=15°)
EM (ω1, θ=0°)
EM (ω2, θ=30°)
EM (ω2, θ=15°)
EM (ω2, θ=0°)
L/h=10, Er=1
Boyutsuz frekans ω̄
Mod sayısı, n
0
100
200
300
400
2
4
6
8
10

e)

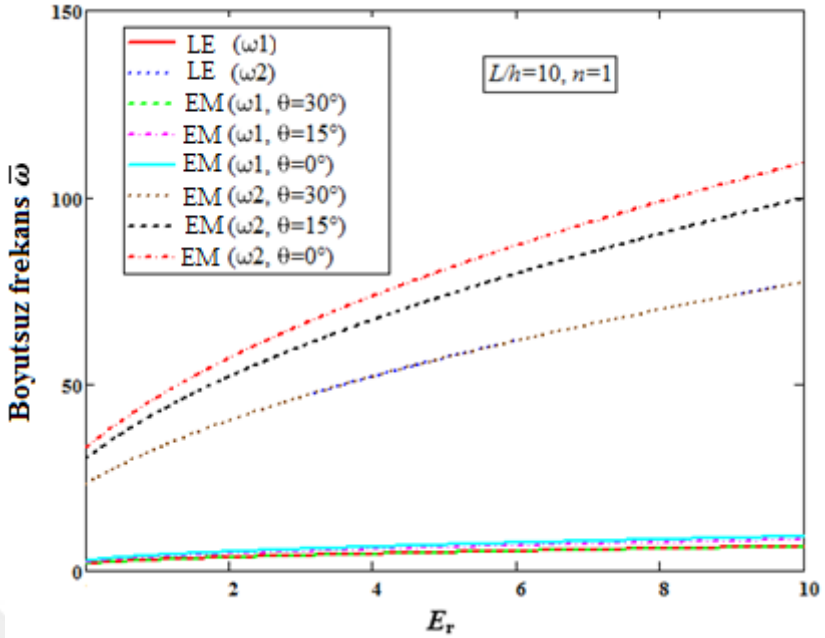


f)

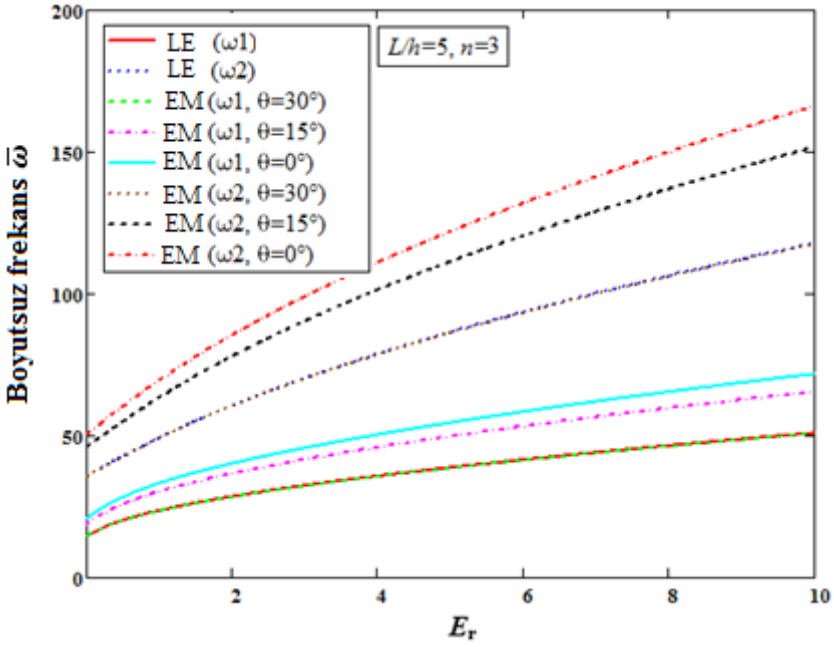
Şekil 5.71. Anti-simetrik durum için frekans parametrelerinin mod sayısı ile değişimi ($\beta_A/\beta_B = 1$).



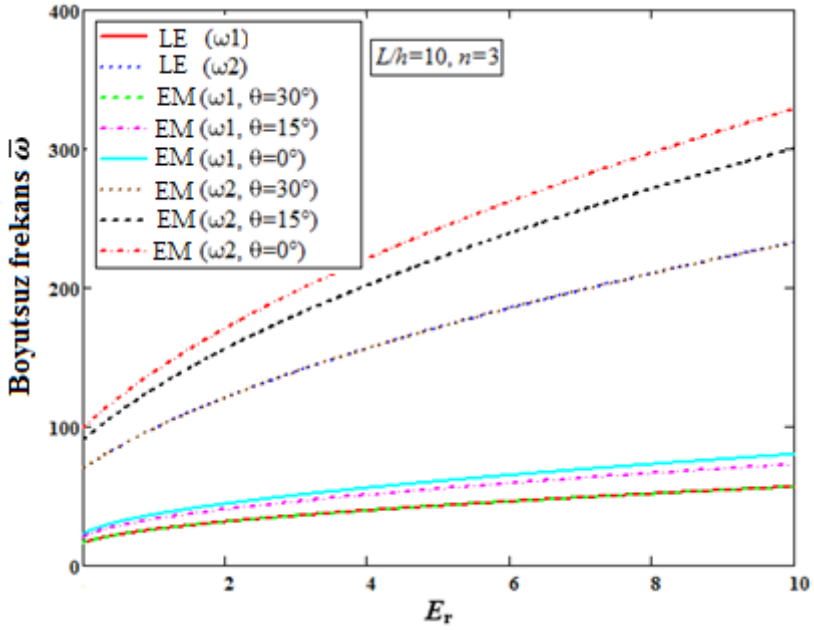
a)


LE (ω1)
LE (ω2)
EM (ω1, θ=30°)
EM (ω1, θ=15°)
EM (ω1, θ=0°)
EM (ω2, θ=30°)
EM (ω2, θ=15°)
EM (ω2, θ=0°)
L/h=10, n=1
Boyutsuz frekans ω̄
E_r

b)

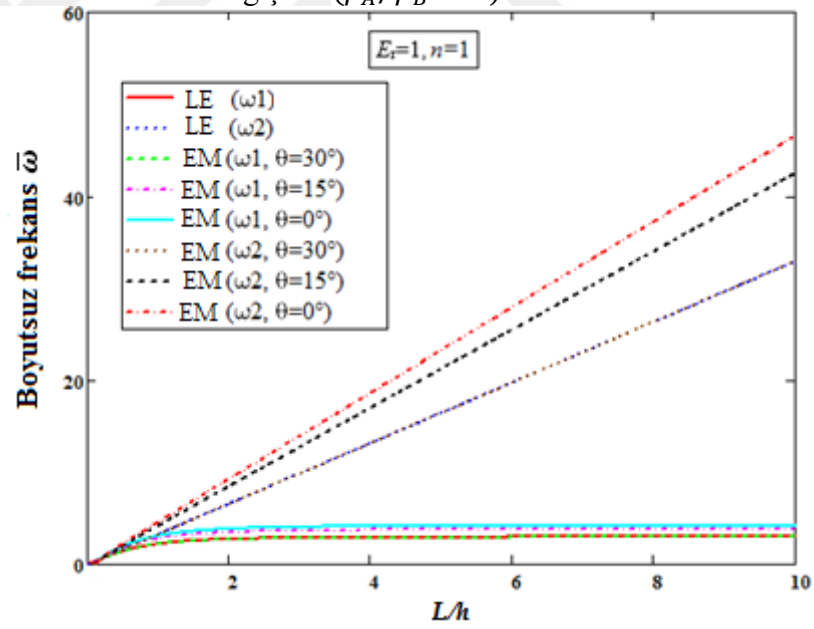

LE (ω1)
LE (ω2)
EM (ω1, θ=30°)
EM (ω1, θ=15°)
EM (ω1, θ=0°)
EM (ω2, θ=30°)
EM (ω2, θ=15°)
EM (ω2, θ=0°)
L/h=5, n=3
Boyutsuz frekans ω̄
E_r

c)

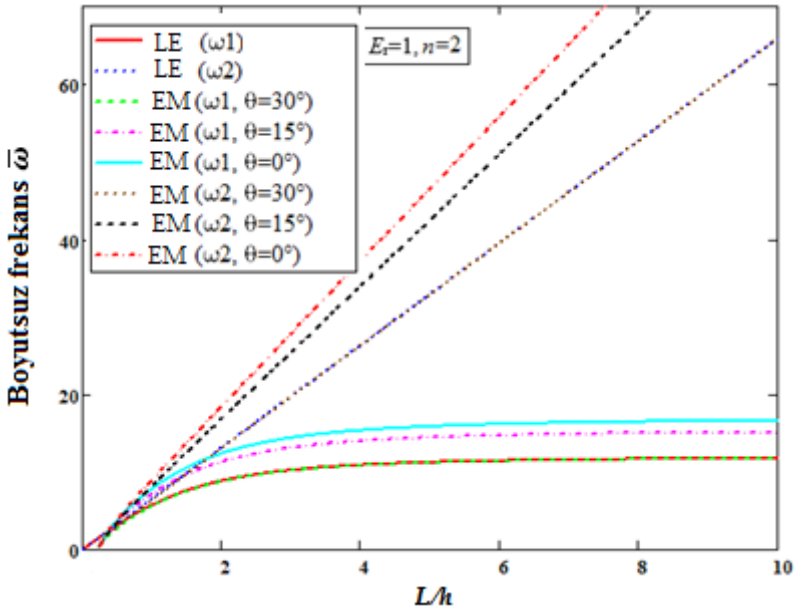


d)

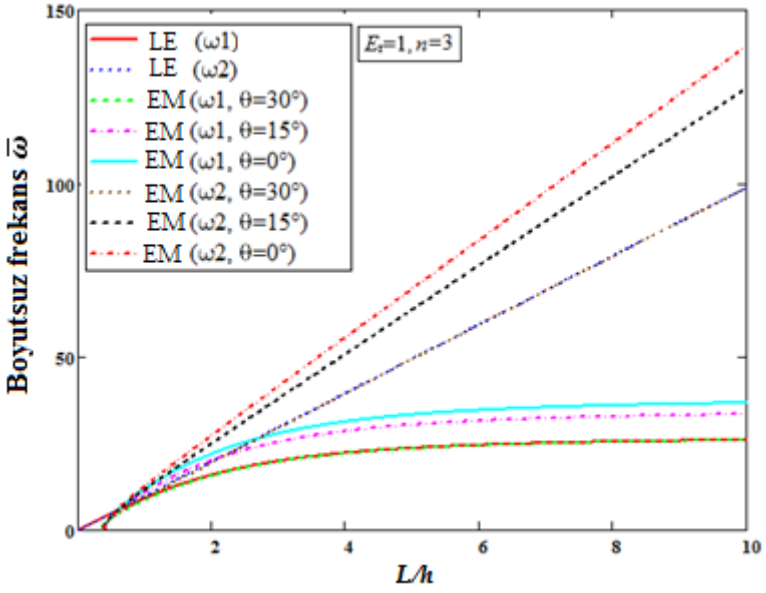
Şekil 5.72. Anti-simetrik durum için frekans parametrelerinin E_A/E_B=E_r ile değişimi ($\beta_A/\beta_B = 1$).



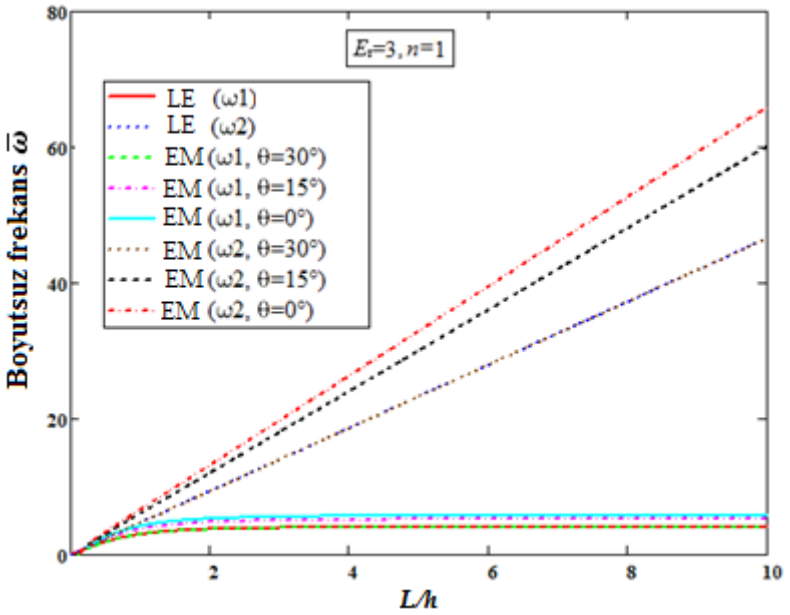
a)


LE (ω1)
LE (ω2)
EM (ω1, θ=30°)
EM (ω1, θ=15°)
EM (ω1, θ=0°)
EM (ω2, θ=30°)
EM (ω2, θ=15°)
EM (ω2, θ=0°)
E1=1, n=2
Boyutsuz frekans ω̄
L/h
0
20
40
60
2
4
6
8
10

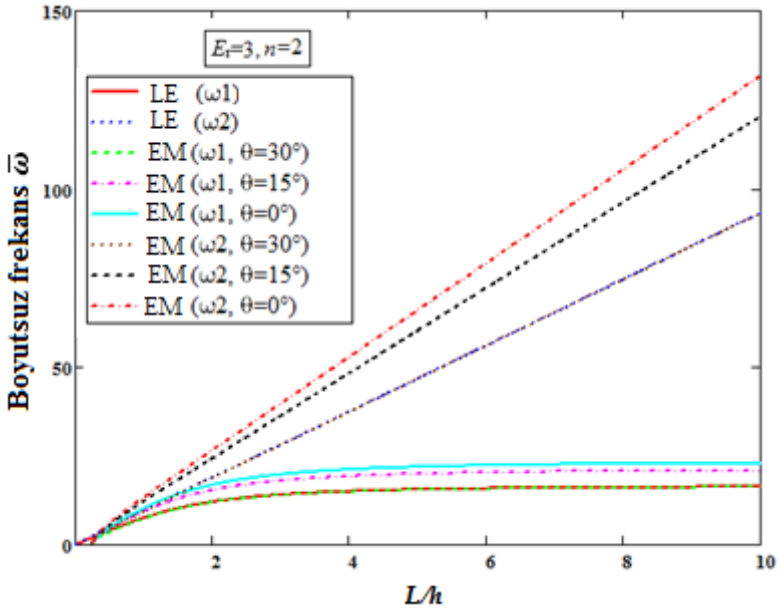
b)


LE (ω1)
LE (ω2)
EM (ω1, θ=30°)
EM (ω1, θ=15°)
EM (ω1, θ=0°)
EM (ω2, θ=30°)
EM (ω2, θ=15°)
EM (ω2, θ=0°)
E1=1, n=3
Boyutsuz frekans ω̄
L/h
0
50
100
150
2
4
6
8
10

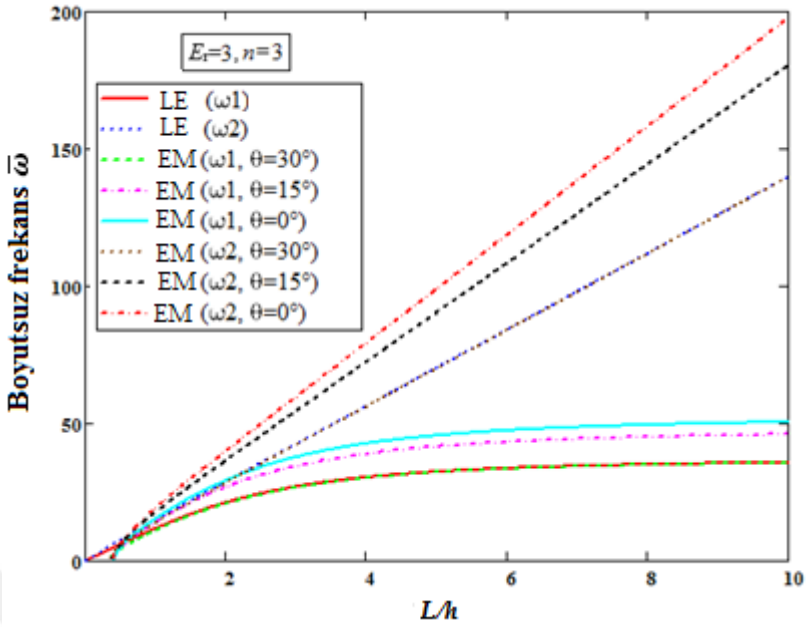
c)


E_r=3, n=1
LE (ω1)
LE (ω2)
EM (ω1, θ=30°)
EM (ω1, θ=15°)
EM (ω1, θ=0°)
EM (ω2, θ=30°)
EM (ω2, θ=15°)
EM (ω2, θ=0°)
Boyutsuz frekans $\bar{\omega}$
L/h
0
20
40
60
80
2
4
6
8
10

d)

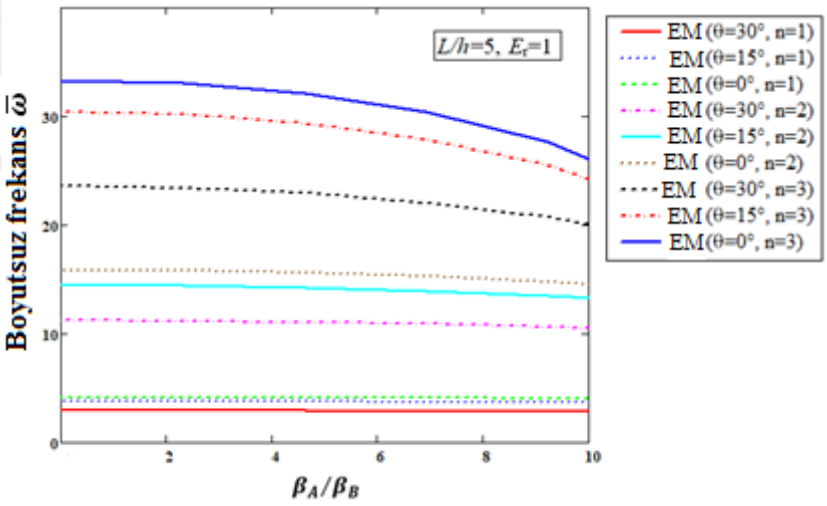

E_r=3, n=2
LE (ω1)
LE (ω2)
EM (ω1, θ=30°)
EM (ω1, θ=15°)
EM (ω1, θ=0°)
EM (ω2, θ=30°)
EM (ω2, θ=15°)
EM (ω2, θ=0°)
Boyutsuz frekans $\bar{\omega}$
L/h
0
50
100
150
2
4
6
8
10

e)

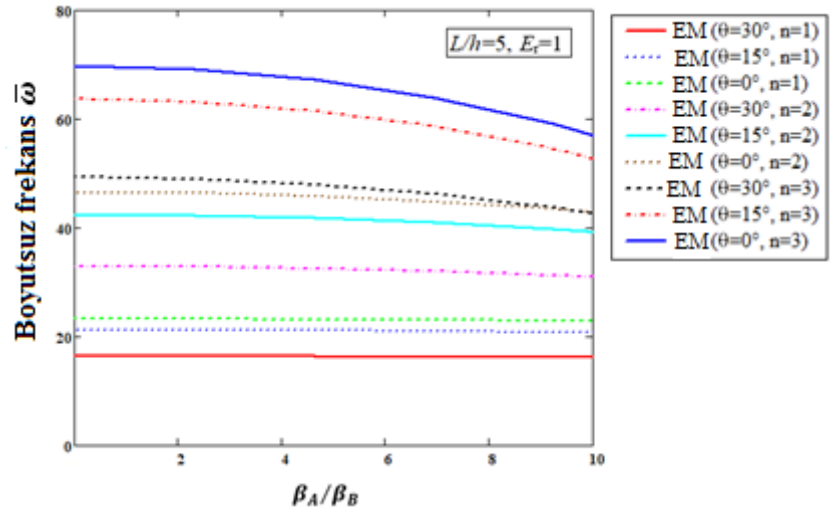


f)

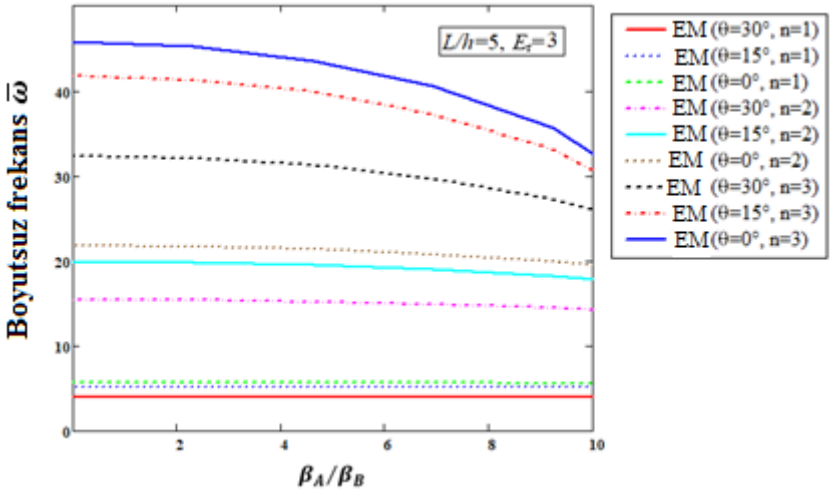
Şekil 5.73. Anti-simetrik durum için frekans parametrelerinin *L/h* ile değişimi ($\beta_A/\beta_B = 1$).



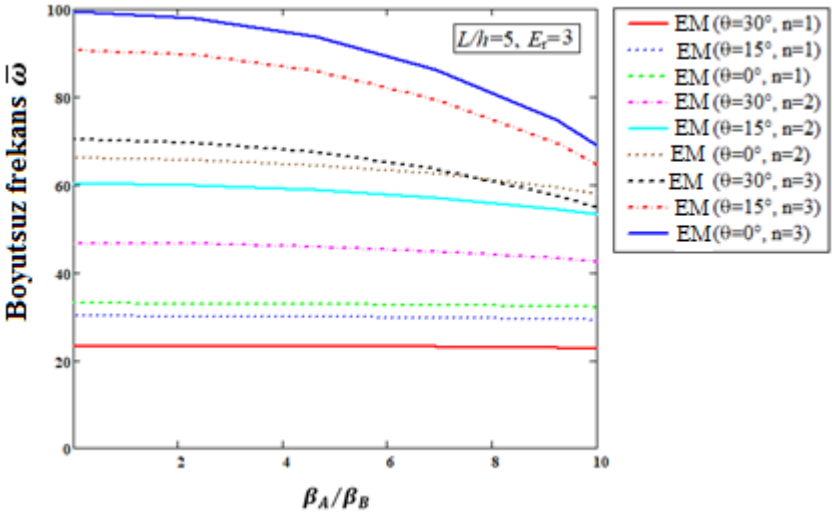
a) Birinci küme frekansı (ω_1)



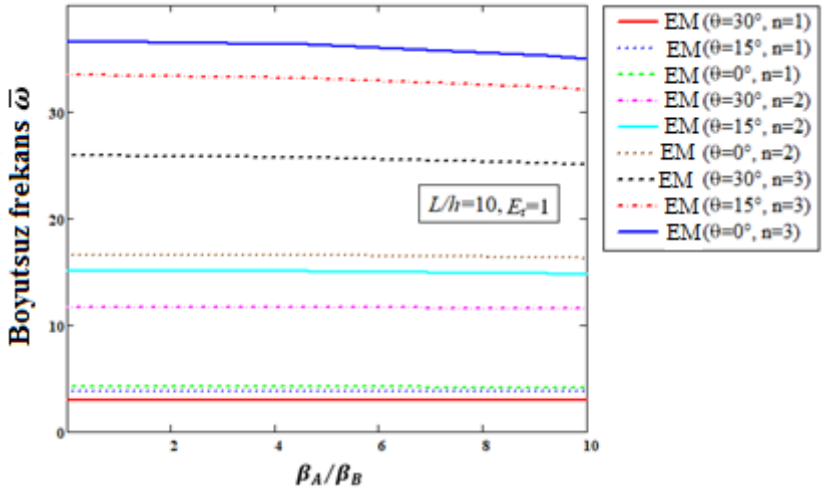
b) İkinci küme frekansı (ω_2)



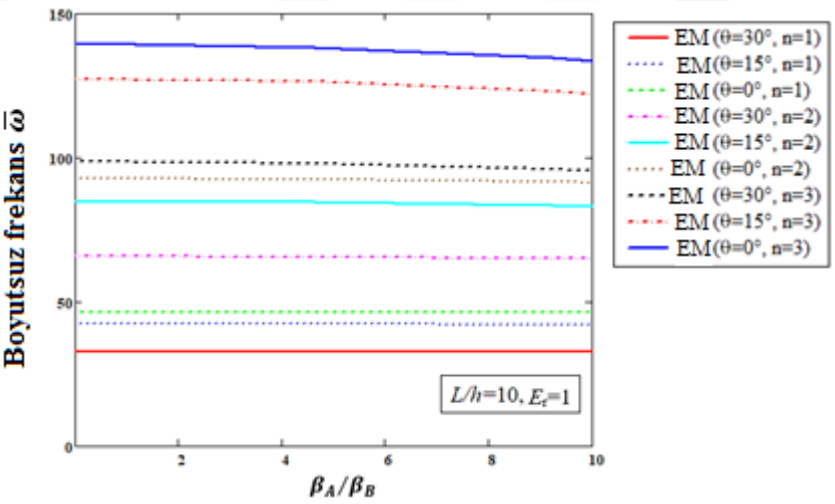
c) Birinci küme frekansı (ω_1)



d) İkinci küme frekansı (ω_2)



e) Birinci küme frekansı (ω_1)



f) İkinci küme frekansı (ω_2)

Şekil 5.74. Anti-simetrik durum için frekans parametrelerinin β_A/β_B ile değişimi.

5.12. Mikro/nano Ölçekli Timoshenko Kiriş Modelinde Statik ve Dinamik Analiz Sonuçları

Bu bölümde, EM teorisi çerçevesinde B-B sınır koşullarına sahip bir Timoshenko mikro-nano-kiriş modeline ait sonuçlar literatürdeki diğer mevcut çalışmalarla Çizelgeler (5.21-5.26)'da karşılaştırılmıştır. Çizelge 5.21'de, μ, η^2 ve c^2 sırasıyla yerel olmayan elastisite teorisinde, EM teorisinde ve genleme gradyan teorisinde uzunluk ölçeği parametrelerini temsil etmektedir. Çizelge 5.21'deki tüm hesaplamalar için, kayma düzeltme faktörü, elastisite modülü, kiriş uzunluğu ve Poisson oranı sırasıyla, κ=5/6, E=30x10^6, L=10 ve υ=0.3 olarak alınmıştır. Burada, boyutsuz maksimum çökme ifadeleri

($\overline{w} = 100w(EI/qL^4)$) Denklemler (4.308), (4.313)'te verilen serilerde 100 terim için hesaplanmıştır. Her iki modelin de (zigzag, koltuk) klasik TBT'ye göre daha yumuşak malzeme davranışı öngördüğü görülmektedir (η=0). Ancak, Ebrahimian vd. (2018) EM modelinde, klasik TBT'ye kıyasla daha yüksek çökme değerleri vermektedir. Bunun nedeni, Ref. (Ebrahimian vd., 2018)'de kullanılan EM formülasyonundan kaynaklanmaktadır. Bu makalede, tüm normal genlemeler ve bir kayma genlemesi hesaplamalara dahil edilmiştir. Bu tez çalışmasında ise sadece eksenel normal genlemesi ve bir enine kayma genlemesi dikkate alınmıştır. Aynı uzunluk ölçeği parametresi (μ, η) için EM sonuçlarının yerel olmayan elastisite teorisi sonuçlarından (Benguediab, Semmah, Chaht, Mouaz, & Tounsi, 2014; Thai, 2012) daha düşük olduğu görülmektedir. Bu durum, yerel olmayan elastisite durumunda basit bir uzun menzilli etkileşim modeli dikkate alınırken, EM formülasyonunda ise mikro yapının dikkate alınmasından kaynaklanabilir. Ayrıca, Çizelge 5.21'de verilen boyutsuz uzunluk (L/h) ve uzunluk ölçeği parametreleri için, Euler-Bernoulli teorisinin (EBT) mevcut EM teorisinden, genleme gradyan modelinden (de Sciarra & Barretta, 2014) ve diğer yerel olmayan Timoshenko kiriş teorilerinden (Benguediab vd., 2014; Pradhan, 2012; Reddy, 2007; Thai, 2012) daha yüksek değerler verdiği görülmektedir. EM teorisinde (η) uzunluk ölçeği parametresi sıfır alınırsa, klasik TBT sonuçları elde edilebilir. Ayrıca, L/h oranının arttırılması ile EM modelindeki boyutsuz çökme ifadeleri azalmakta ve bu sonuçlar klasik TBT ile neredeyse aynı değerleri vermektedir.

Çizelge 5.22'de, TBT'de yer değiştirme alanının daha yüksek serbestlik derecesine sahip olması nedeniyle EBT-EM modelindeki çökme ifadelerinin TBT-EM modelindeki sonuçlardan daha düşük olduğu görülmektedir. Zigzag tipi mikrokiriş modelleri için fark daha yüksektir. EM sonuçları, L/h oranının artmasıyla klasik Timoshenko sonuçlarına yakınsamaktadır ve bu durum, koltuk kiriş modelinde zigzag kiriş modeline kıyasla daha belirgin bir şekilde görülmektedir.

Farklı ölçeğe bağlı teorilere karşılık gelen noktasal yük altındaki kirişlere ait boyutsuz çökme ve dönme ifadeleri $x = L/4$'te, Çizelge 5.23'te sunulmuştur. Burada, boyutsuz çökme ve dönme ifadeleri sırasıyla, $\overline{w} = 100w(EI/PL^3)$, $\bar{\varphi} = 100\varphi(EI/PL^2)$ eşit olacak şekilde ifade edilmiştir. Çizelge 5.23'teki karşılaştırma, EM teorisi sonuçlarının genellikle genleme gradyanı teorisiyle tutarlı olduğunu göstermiştir (B.

Zhang vd., 2014). Bu küçük sapmalar, (B. Zhang vd., 2014) çalışmasındaki gerilmenin *y*-bileşeninin dikkate alınmasından kaynaklanabilir.

Farklı narinlik oranı ve uzunluk ölçeği parametreleri için farklı kiriş teorilerine karşılık gelen kritik burkulma yükleri ($\bar{P} = (P\,L^2/EI)$) Çizelge 5.24'te verilmektedir. Eğilme davranışının aksine, L/h oranını arttırmak, mevcut EM teorisindeki kritik burkulma yükünü arttırmaktadır. Uzunluk ölçeği parametresi sıfır olduğunda, klasik EBT ve EM teorileri arasındaki fark, küçük narinlik oranı için artmaktadır. Ancak EBT ve EM teorisinde uzunluk ölçeği parametresi dikkate alındığında bu eğilim geçerli değildir. Çünkü, kritik burkulma yükünün EBT ve EM teorisinde uzunluk ölçeği parametresi değeri ile değişimi çok farklıdır, kritik burkulma yüklerinin EM modelinde EBT'ye göre daha yavaş değiştiği gözlenmektedir. Ayrıca, zigzag ve koltuk kiriş modelleri için EM sonuçlarının Pradhan (2012) tarafından incelenen yerel olmayan Timoshenko mikrokiriş teorisi ile iyi bir uyum içerisinde olduğu gözlenmiştir. Ayrıca, yüksek narinlik oranı kayma deformasyon etkilerini azaltır ve EM ile klasik TBT arasındaki fark azalır. Böylece, kayma deformasyonu etkileri kısa-kalın kirişler için daha belirgin hale gelir. EM teorisi çerçevesinde incelenen koltuk ve zigzag kiriş modelleri $\mu^2 \neq \eta \neq 0$ için yerel olmayan Timoshenko ve EBT'den daha yüksek kritik burkulma yükleri vermektedir. Bu davranış, EM teorisine dayanan mikroyapıları tasarlarken sertleştirme veya yumuşatma malzeme davranışını ayarlamak için bir avantaj sağlayabilir. Kısa ve uzun tüpler için koltuk kiriş modelindeki kritik burkulma yükleri, zigzag kiriş modelinden daha yüksektir. Eğilme durumuna benzer şekilde, zigzag tüpler ölçek parametresinin artmasıyla daha yumuşak hale gelmektedir. Ayrıca, zigzag kiriş modellerinin koltuk kiriş modeline göre ölçek parametresine daha duyarlı olduğu da görülebilir.

Son olarak, EM modelinin doğruluğunu göstermek için yeni karşılaştırma sonuçları Çizelge 5.25 ve Çizelge 5.26'da titreşim problemi için verilmiştir. Çizelge 5.25'te doğal frekans parametresi $\bar{\omega} = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}$, kirişin malzeme ve geometrik özellikleri de $L = 10, E = 30x10^6, \nu = 0.3, \rho = 1$ olacak şekilde alınmıştır. EM teorisinde, zigzag ve koltuk modelleri için yumuşatıcı malzeme davranışı görülmektedir. Ayrıca, EM ve yerel olmayan teoriler için uzunluk ölçeği parametresinin artmasıyla doğal frekanslar azalmaktadır. Çizelge 5.25'te verilen uzunluk ölçeği parametreleri için, EM teorisi hem

zigzag hem de koltuk kiriş modelleri için yerel olmayan EBT ve TBT'den daha yüksek doğal frekans değerleri vermektedir.

Çizelge 5.26a ve Çizelge 5.26b'de, Timoshenko mikrokirişlerinin doğal frekansları ilk iki mod için TBT-EM ve EBT-EM teorileri için gösterilmektedir. Sonuçlar, farklı h/η=1,5 oranları ve farklı L/h=10,30 oranları için verilmiştir. TBT-EM modelinin, hem zigzag hem de koltuk kiriş modelleri için EBT-EM modelinden daha düşük frekanslar verdiği görülmektedir. İki teori arasındaki fark, zigzag modeli için koltuk kiriş modeline göre daha belirgindir. Beklendiği gibi, artan L/h oranı ile iki sonuç birbirine yakınsamaktadır.

Çizelge 5.21. Düzgün yayılı yük uygulanmış B-B kirişlerde maksimum çökme ($\overline{w}$) ifadeleri.

L/h	$\mu = \eta^2 = c^2$	EBT (Reddy, 2007)	TBT (Reddy, 2007)	TBT (Benguediab vd., 2014; Thai, 2012)	Genleme Gradyan Teorisi (de Sciarra & Barretta, 2014)	EM Zigzag (Ebrahimian vd., 2018)	EM Koltuk (Ebrahimian vd., 2018)	EM Zigzag	EM Koltuk
10	0	1.3130	1.3483	1.3346	1.3483	1.3354	1.3354	1.33458	1.33458
	0.1421	-	-	-	-	1.3356	1.3352	1.33479	1.33770
	0.5	1.3809	1.4210	-	1.2884	1.3979	1.2823	1.33719	1.33500
	1	1.4487	1.4937	1.4622	1.2563	1.4604	1.2292	1.34351	1.33605
	1.5	1.5165	1.5664	-	1.2321	1.5229	1.1760	1.35809	1.33898
	2	1.5844	1.6391	1.5898	1.2131	1.5854	1.1229	1.37392	1.34415
	3	1.7201	1.7845	1.7173	1.1850	-	-	1.42707	1.36087
100	0	1.3130	1.3134	1.3024	1.3024	1.3024	1.3024	1.30240	1.30240
	0.1421	-	-	-	-	1.3026	1.3022	1.30241	1.30240
	0.5	1.3809	1.3813	-	1.2575	1.3649	1.2493	1.30243	1.30241
	1	1.4487	1.4492	1.4274	1.2267	1.4274	1.1962	1.30251	1.30242
	1.5	1.5165	1.5170	-	1.2037	1.4899	1.1430	1.30264	1.30244
	2	1.5844	1.5849	1.5525	1.1858	1.5524	1.0899	1.30282	1.30250
	3	1.7201	1.7207	1.6775	1.1597	-	-	1.30334	1.30278

($\overline{w} = 100w(EI/qL^4), q_0 = 1, L = 10, E = 30x10^6, \nu = 0.3, \kappa = 5/6,$ 100 terimli seri).

Çizelge 5.22. Düzgün yayılı yük uygulanmış B-B Timoshenko mikrokirişlerinde maksimum çökme ($\overline{w}$) ifadeleri.

h/l or h/η	L=10h			
1	EM Zigzag	EM Koltuk	EBT EM-Zigzag	EBT EM-Koltuk
	1.3455	1.3380	1.3365	1.3365
	L=30h			
	1.3071	1.3060	1.3059	1.3059

$$\left(\bar{w} = 100w(EI/qL^4), q_0 = 10\ \mu\text{N}/\mu\text{m}, \eta = 17.6\ \mu\text{m}, E = 1.44\ \text{GPa}, \nu = 0.38, b = 2h, \kappa = \frac{5}{6},\right).$$

Çizelge 5.23. B-B noktasal yük P=100 μN etkisindeki Timoshenko mikrokirişlerinde boyutsuz çökme ($\bar{w} = 100w(EI/PL^3)$) ve dönme ($\bar{\varphi} = 100\varphi(EI/PL^2)$) ifadeleri ($x = L/4, L$=20$h$, h=l=η=17.6 μm, ν=0.38, b=2h, E=1.44 GPa, $\kappa = 5/6$).

Teori	$\bar{w}$	$\bar{\varphi}$
Genleme gradyan teorisi (B. Zhang vd., 2014) (20 elemanlı)	0.9177	3.0644
EM Zigzag	0.9782	2.8537
EM Koltuk	0.9762	2.8519

Çizelge 5.24. B-B nanokirişlerde kritik burkulma yükü değerleri ($\bar{P}$).

L/h	$\mu = \eta^2$	EBT (Reddy, 2007)	TBT (Reddy, 2007)	TBT (Thai, 2012)	TBT FEM (Pradhan, 2012)	EM Zigzag	EM Koltuk
10	0	9.8696	9.6227	9.6227	9.6227	9.6227	9.6227
	0.1421	-	-	-	-	9.6211	9.6225
	0.5	9.4055	9.1701	-	9.1810	9.6032	9.6205
	1	8.9830	8.7583	8.7583	8.7781	9.5450	9.6121
	1.5	8.5969	8.3818	-	8.4090	9.4479	9.5916
	2	8.2426	8.0364	8.0364	8.0697	9.3118	9.5483
20	0	9.8696	9.8067	9.8067	9.8067	9.8067	9.8067
	0.1421	-	-	-	-	9.8050	9.8065
	0.5	9.4055	9.3455	-	9.3483	9.7866	9.8042
	1	8.9830	8.9258	8.9258	8.9309	9.7264	9.7883
	1.5	8.5969	8.5421	-	8.5491	9.6260	9.7325
	2	8.2426	8.1900	8.1900	8.1987	9.4855	9.5905
100	0	9.8696	9.8671	9.8671	9.8671	9.8671	9.8671
	0.1421	-	-	-	-	9.8654	9.8670
	0.5	9.4055	9.4031	-	9.4032	9.8467	9.8670
	1	8.9830	8.9807	8.9807	8.9809	9.7859	9.8669
	1.5	8.5969	8.5947	-	8.5950	9.6845	9.8667
	2	8.2426	8.2405	8.2405	8.2408	9.5425	9.8663

$$\left(\bar{P} = (P\,L^2/EI), L = 10, E = 30x10^6, \nu = 0.3, \kappa = \frac{5}{6}\right).$$

Çizelge 5.25. B-B kirişlerde boyutsuz frekans parametresinin ($\bar{\omega}_1$) karşılaştırılması.

L/h	$\mu = \eta^2$	EBT (Reddy, 2007)	TBT (Reddy, 2007)	EM Zigzag	EM Koltuk
10	0	9.8696	9.7454	9.7074	9.7074
	0.1421	-	-	9.7067	9.7074
	0.5	9.6347	9.5135	9.6976	9.7063
	1	9.4159	9.2973	9.6682	9.7019
	1.5	9.2113	9.0953	9.6188	9.6913
	2	9.0195	8.9059	9.5493	9.6691
20	0	9.8696	9.8381	9.8281	9.8281
	0.1421	-	-	9.8279	9.8281
	0.5	9.6347	9.6040	9.8256	9.8278
	1	9.4159	9.3858	9.8180	9.8268
	1.5	9.2113	9.1819	9.8054	9.8243
	2	9.0195	8.9907	9.7878	9.8188
100	0	9.8696	9.8683	9.8679	9.8679
	0.1421	-	-	9.8679	9.8679
	0.5	9.6347	9.6335	9.8678	9.8679
	1	9.4159	9.4147	9.8675	9.8678
	1.5	9.2113	9.2101	9.8670	9.8677
	2	9.0195	9.0183	9.8663	9.8675

$\left(\bar{\omega} = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}, L = 10, E = 30x10^6, \nu = 0.3, \rho = 1\ \kappa = \frac{5}{6}\right)$.

Çizelge 5.26a. Farklı teoriler için B-B kirişlerde boyutsuz frekans parametresinin ($\bar{\omega}_1$) karşılaştırılması (Birinci spektrum).

h/l veya h/η	L=10h			
1	EM Zigzag	EM Koltuk	EBT EM-Zigzag	EBT EM-Koltuk
	9.6609	9.6947	9.7001	9.7001
	L=30h			
	9.8457	9.8496	9.8502	9.8502
5	L=10h			
	EM Zigzag	EM Koltuk	EBT EM-Zigzag	EBT EM-Koltuk
	9.6986	9.6999	9.7001	9.7001
	L=30h			
	9.8500	9.8502	9.8502	9.8502

$\left(\eta = 17.6\ \mu\text{m}, E = 1.44\ \text{GPa}, \nu = 0.38, \rho = 1220\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, b = 2h, \kappa = \frac{5}{6}\right)$.

Çizelge 5.26b. Farklı teoriler için B-B kirişlerde boyutsuz frekans parametresinin ($\bar{\omega}_2$) karşılaştırılması (İkinci spektrum).

h/l veya *h/η*	L=10h			
1	EM Zigzag	EM Koltuk	EBT EM-Zigzag	EBT EM-Koltuk
	36.4244	36.8823	36.9958	36.9958
	L=30h			
	39.1007	39.1627	39.1717	39.1717
5	L=10h			
	EM Zigzag	EM Koltuk	EBT EM-Zigzag	EBT EM-Koltuk
	36.9732	36.9918	36.9958	36.9958
	L=30h			
	39.1689	39.1715	39.1717	39.1717

$(\eta = 17.6\ \mu\text{m}, E = 1.44\ \text{GPa}, \nu = 0.38, \rho = 1220\ \text{kg/m}^3, b = 2h, \kappa = \frac{5}{6})$.

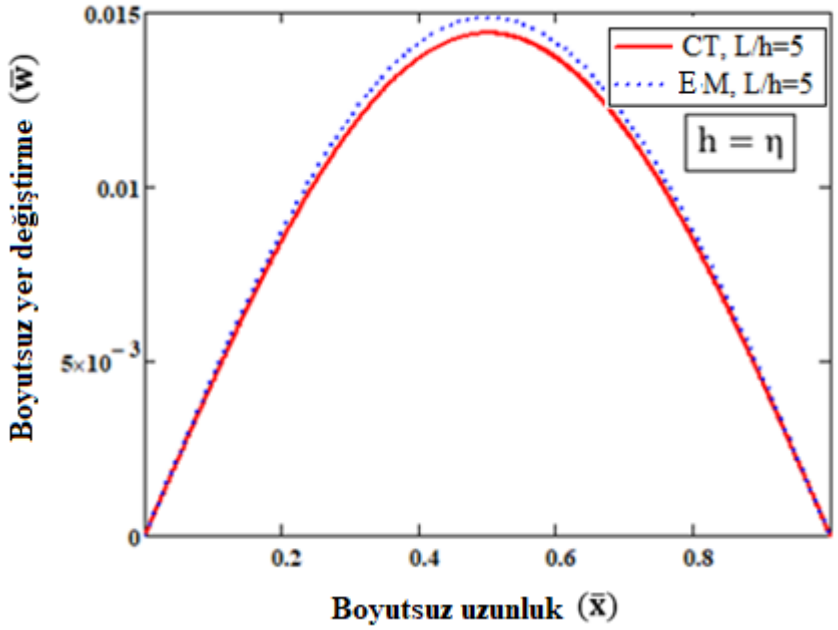
Şekil 5.75 ve Şekil 5.76'da, B-B sınır koşullarına sahip zigzag ve koltuk Timoshenko kiriş modellerinin sırasıyla boyutsuz yer değiştirmesi ve dönmesi gösterilmektedir. Bu şekillerde, kalınlık/uzunluk ölçeği parametresi oranı 1 olarak alınmış ve EM teorisi sonuçları ile klasik Timoshenko teorisi (CT) sonuçları karşılaştırılmıştır. EM teorisi ile elde edilen boyutsuz yer değiştirmelerin ve dönme ifadelerinin, hem zigzag hem de koltuk modelleri için CT modelinden daha yüksek değerler verdiği açıkça görülmektedir. Bu durum, EM teorisindeki eşil gradyan etkilerinden kaynaklanmaktadır. Eşil gradyan etkileri eğilme rijitliğini azaltır ve bunun sonucunda kirişin yer değiştirmeleri artar. İki teori arasındaki fark kirişin orta noktasında en büyük olur ve bu fark zigzag Timoshenko kiriş modelinde daha belirgindir.

Şekil 5.77'de kritik burkulma yükleri, η=h=1 için farklı L/h oranlarında karşılaştırılmaktadır. EM teorisinin CT modeline kıyasla daha küçük kritik burkulma yükleri verdiği ve iki teori arasındaki farkın kayma deformasyonu etkilerinin kısa-kalın kirişler için daha önemli hale gelmesi nedeniyle küçük L/h oranları için daha belirgin olduğu görülmektedir. Her iki teori arasındaki fark zigzag kiriş modeli için daha belirgindir. Bu durum, kirişin koltuk yapısının, kirişin zigzag yapısına kıyasla daha fazla rijitliğe sahip olmasından kaynaklanmaktadır. Ayrıca, narinlik oranının artması ile ölçek etkilerinin önemsiz hale geldiği ve bu durumda iki teori arasındaki farkın azaldığı da görülmektedir.

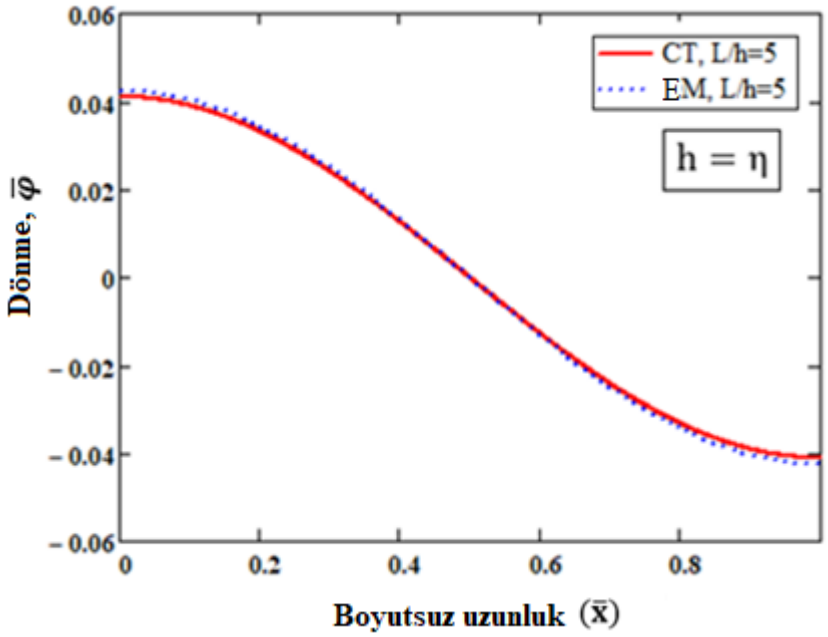
Şekil 5.78, zigzag ve koltuk kiriş modelleri için kritik burkulma yüklerinin uzunluk ölçeği parametresi/kalınlık oranı (η/h) ile değişimini göstermektedir. CT modelinde kritik burkulma yüklerinin beklendiği gibi η/h oranı ile değişmediği, hem zigzag hem de koltuk modelleri için EM teorisinde η/h oranının artmasıyla kritik burkulma yüklerinin azaldığı görülmektedir. Şekil 5.77'ye benzer şekilde EM teorisi, L/h=10 için CT modeline kıyasla yumuşatıcı malzeme davranışı göstermektedir.

Şekil 5.79 ve Şekil 5.80'de, B-B Timoshenko kirişlerinin titreşim frekansları, hem zigzag hem de koltuk modelleri için EM ve CT modellerine dayanarak gösterilmiştir. Klasik EBT'nin aksine TBT'de iki frekans spektrumunun oluştuğu bilinmektedir. Dolayısıyla, birinci spektrum frekansı ve ikinci spektrum frekansı bu şekillerde dikkate alınmıştır. EM teorisi ile elde edilen doğal frekanslar, L/h narinlik oranının artmasıyla artmakta ve daha sonra ölçek etkileri Şekil 5.79'da görüldüğü gibi önemsiz hale gelmektedir. Burkulma durumuna benzer şekilde, EM teorisinde zigzag ve koltuk modelleri için CT modeline kıyasla birinci ve ikinci spektrum doğal frekanslarının değeri daha küçük olmaktadır. Bir başka dikkat çekici sonuç, EM ve CT modeli arasındaki farkın daha yüksek titreşim modları için daha belirgin olmasıdır. Bununla birlikte, ilk mod için EM ve CT arasında küçük bir fark vardır (n = 1).

Şekil 5.80, EM ve CT modellerinin birinci ve ikinci spektrum Timoshenko frekanslarının mod sayısı ile değişimini göstermektedir. Mod sayısı arttıkça EM ve CT modelleri arasındaki farkın arttığı görülmektedir. CT'de mod sayısı ile doğal frekansların artışı sonsuzdur, ancak bu artış EM teorisinde belirli bir mod sayısı için sınırlıdır. Bu, EM teorisinin Van Hove tekilliğine sahip olduğunu kanıtlamaktadır (Van Hove, 1953). EM teorisinde, düşünülen malzemenin uzunluk ölçeği parametresine göre sınırlı bir anlamlı mod sayısı vardır. Bu kritik mod sayısının üstünde, doğal frekanslar fiziksel değildir. Zigzag ve koltuk modelleri için maksimum fiziksel mod sayısı, frekansların mod sayısına göre kısmi türevleri alınarak ($\frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial n} = 0, \frac{\partial \bar{\omega}_2}{\partial n} = 0$) tam olarak elde edilebilir. Bu durumda, $h=\eta$ ve L/h=10 olduğunda, zigzag modeli için maksimum mod sayısı, ilk spektrum için n=9 ve ikinci spektrum için n=8 olur. Bunun yanında, koltuk modeli için maksimum mod sayısı ilk spektrum için n=10 ve ikinci spektrum için n=7 olmaktadır. Bu nedenle, Şekil 5.80'de, eğrilerin maksimum mod sayısı noktasından sonraki kısımları dikkate alınmamalıdır.

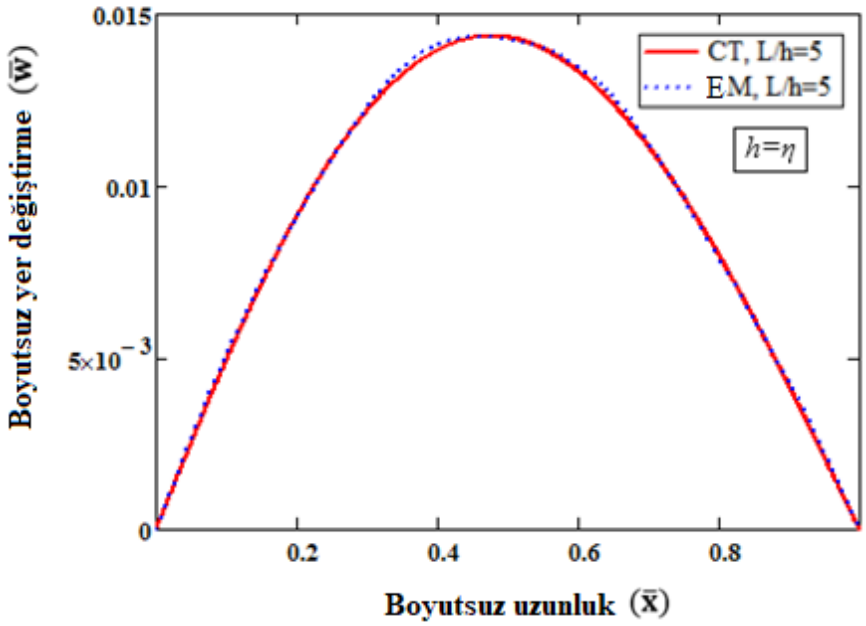


a)

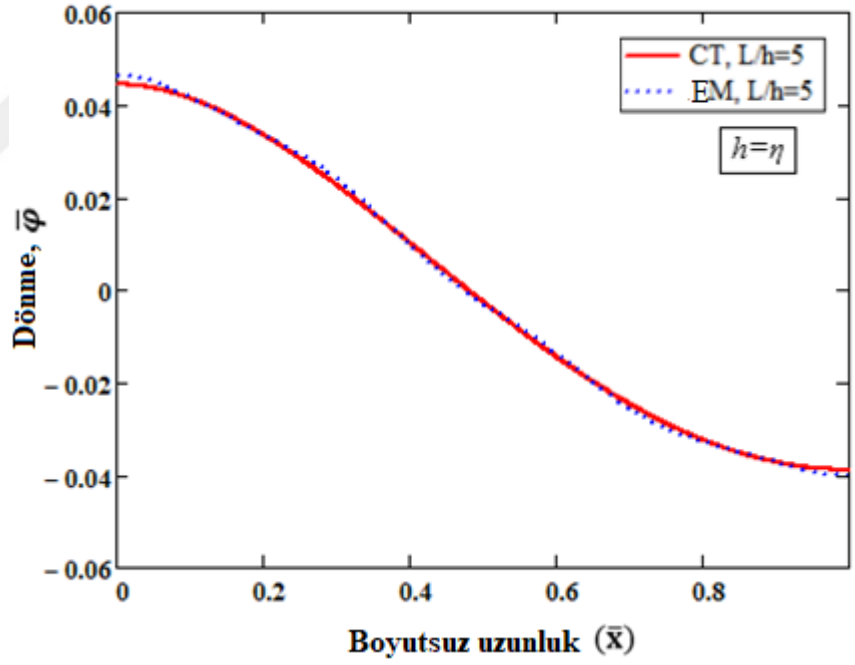


b)

Şekil 5.75. Zigzag modeline sahip Timoshenko nanokirişinin (a) boyutsuz yer değiştirmesi ve (b) dönmesi (κ=5/6, η=1 nm).

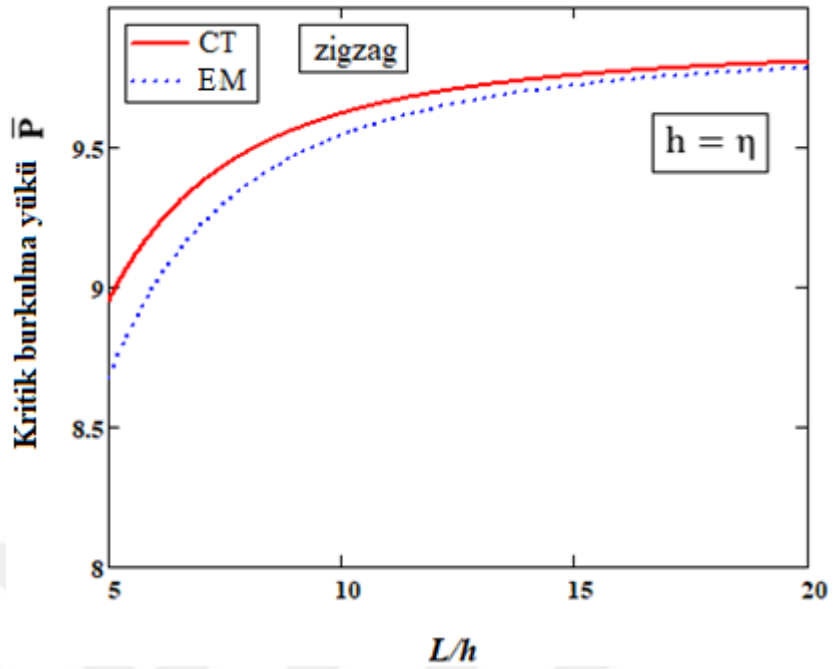


a)

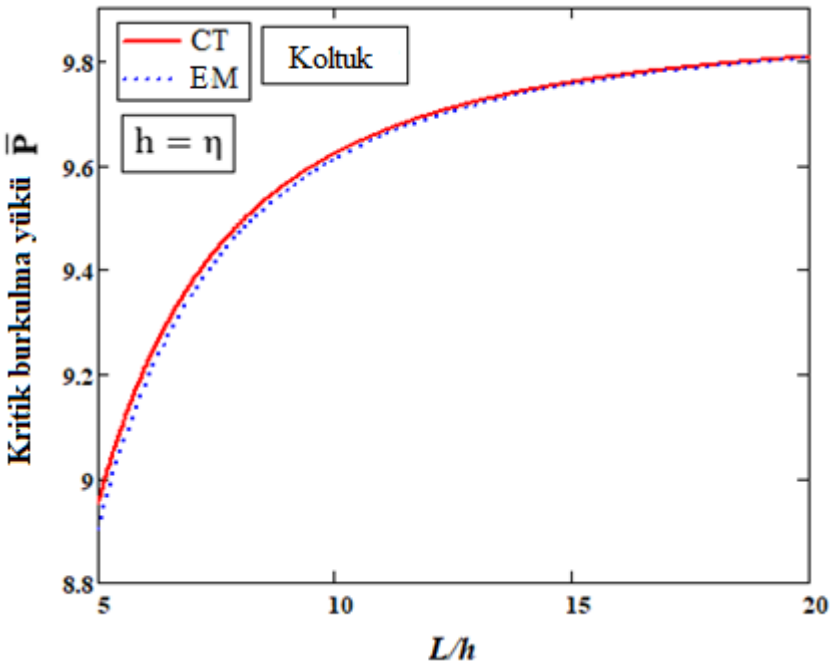


b)

Şekil 5.76. Koltuk modeline sahip Timoshenko nanokirişinin (a) boyutsuz yer değiştirmesi ve (b) dönmesi (κ=5/6, η=1 nm).

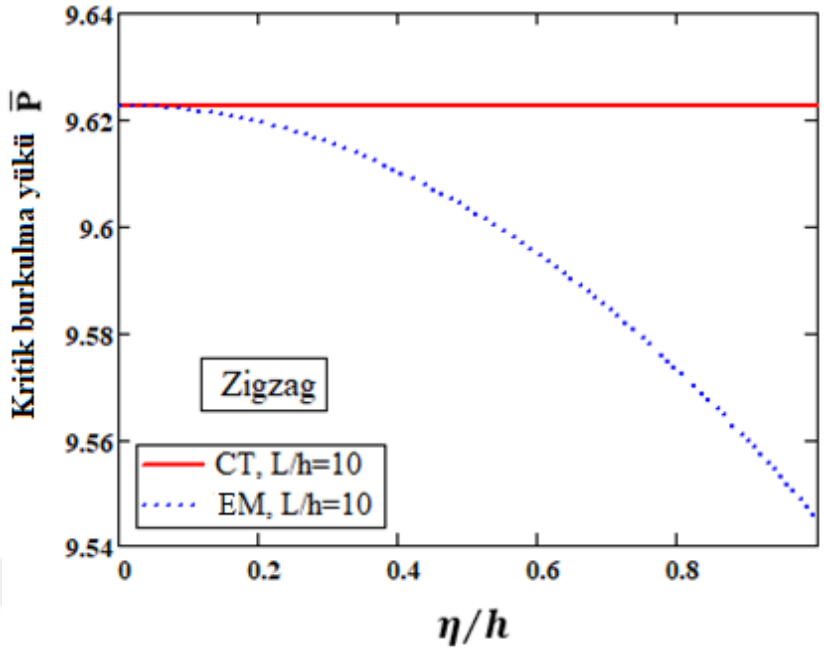


a)

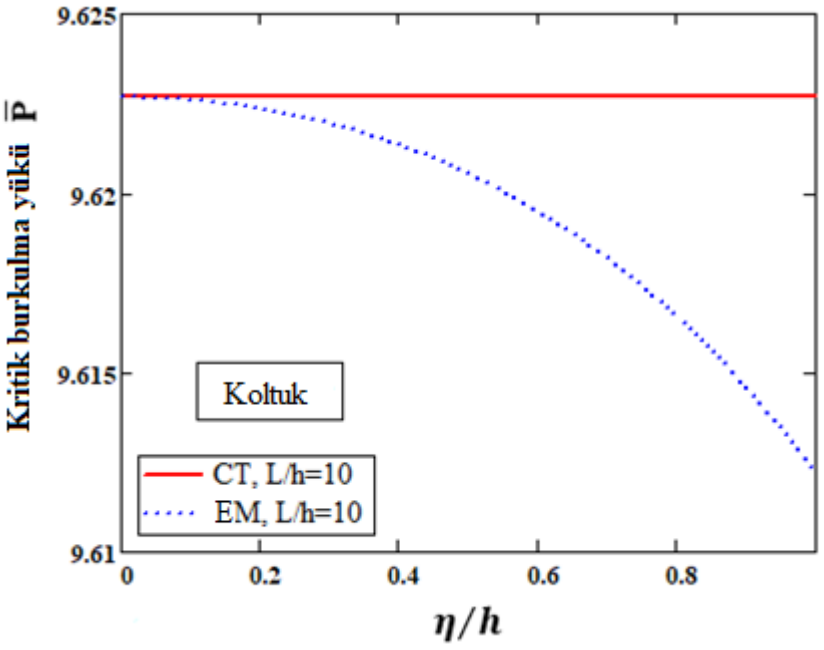


b)

Şekil 5.77. Farklı *L*/*h* değerlerinde Timoshenko nanokirişinin kritik burkulma yükü (κ=5/6, η=1 nm).

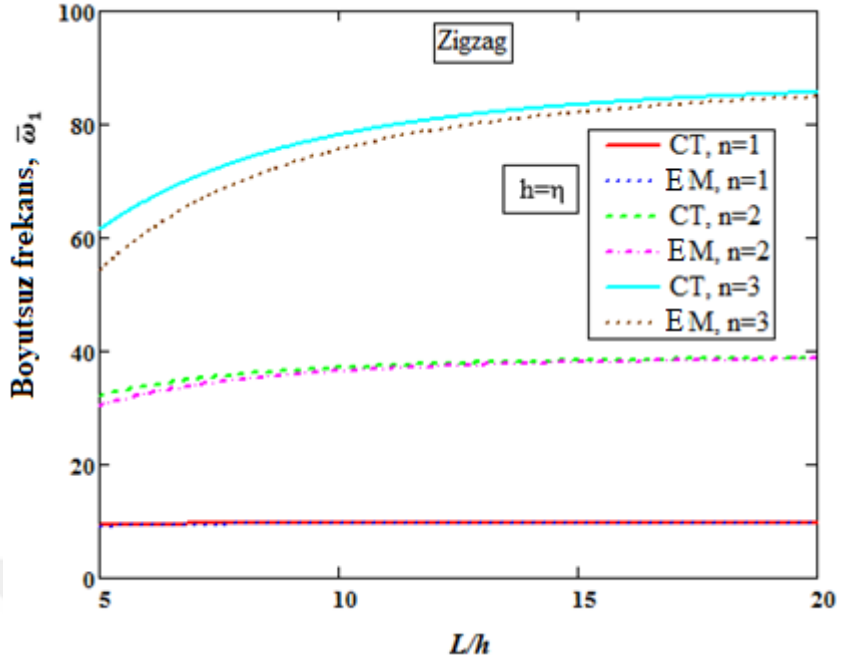


a)

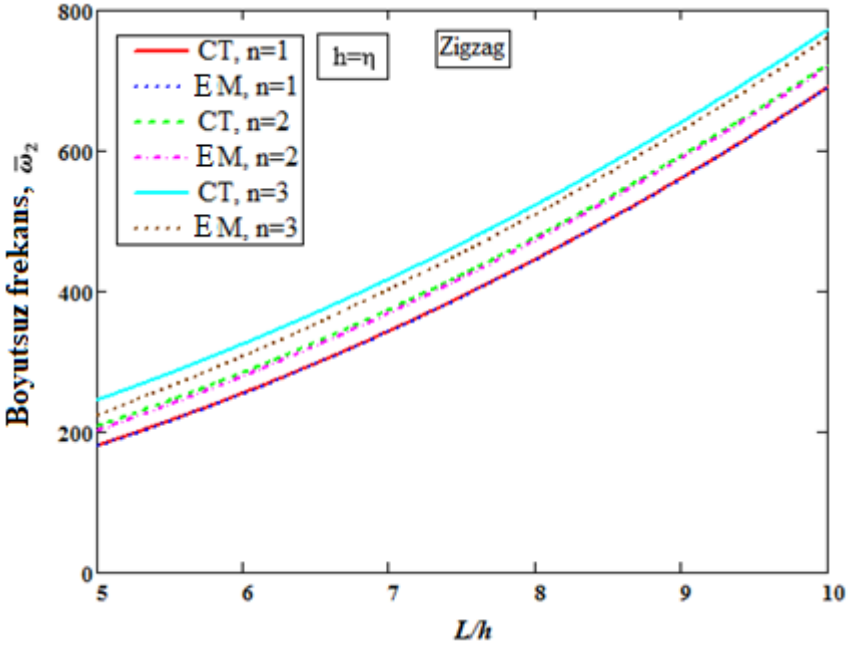


b)

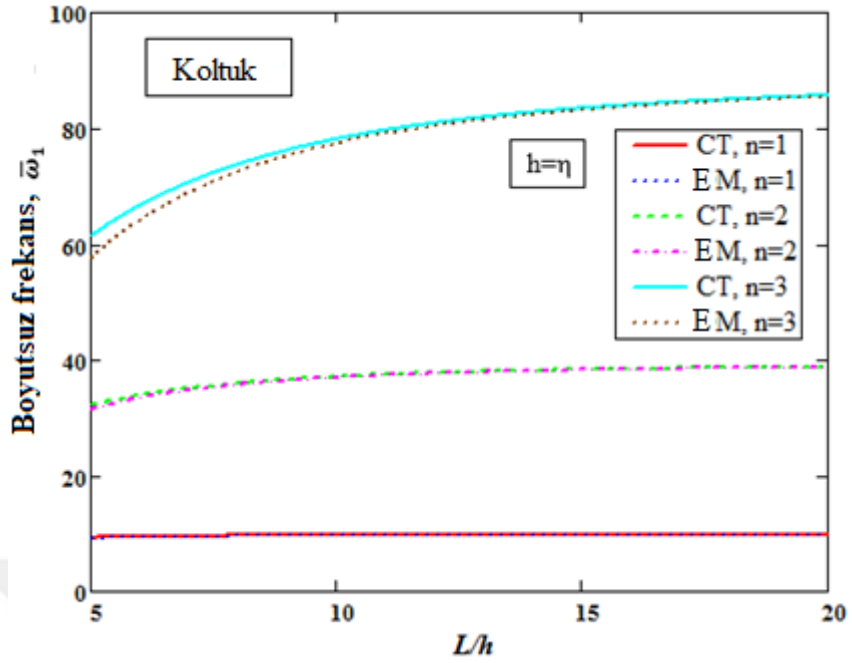
Şekil 5.78. Farklı η/h değerlerinde Timoshenko nanokirişinin kritik burkulma yükü (κ=5/6).


Zigzag
h=η
CT, n=1
EM, n=1
CT, n=2
EM, n=2
CT, n=3
EM, n=3
Boyutsuz frekans, $\bar{\omega}_1$
L/h
0
20
40
60
80
100
5
10
15
20

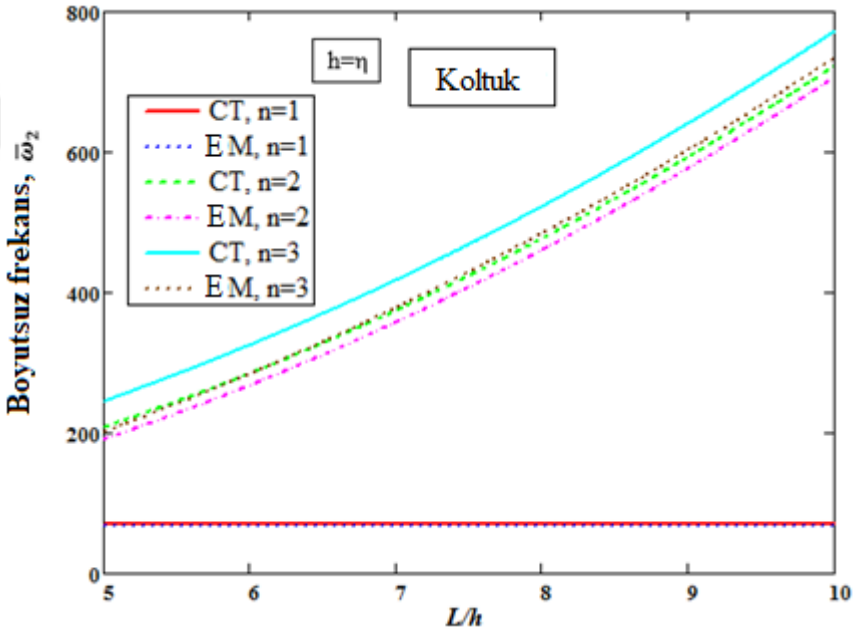
a)


Zigzag
h=η
CT, n=1
EM, n=1
CT, n=2
EM, n=2
CT, n=3
EM, n=3
Boyutsuz frekans, $\bar{\omega}_2$
L/h
0
200
400
600
800
5
6
7
8
9
10

b)

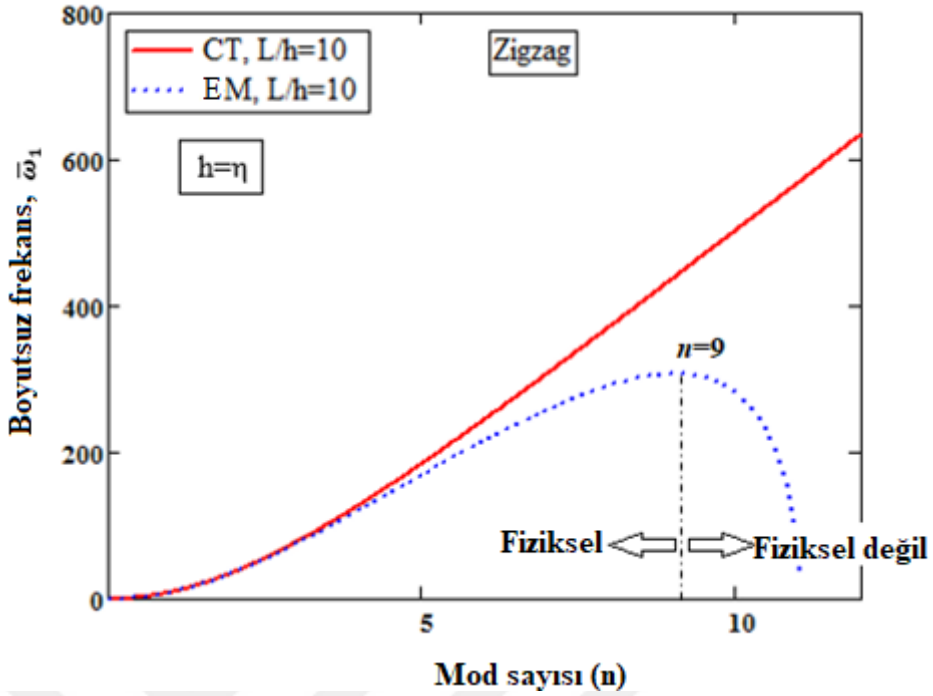


c)

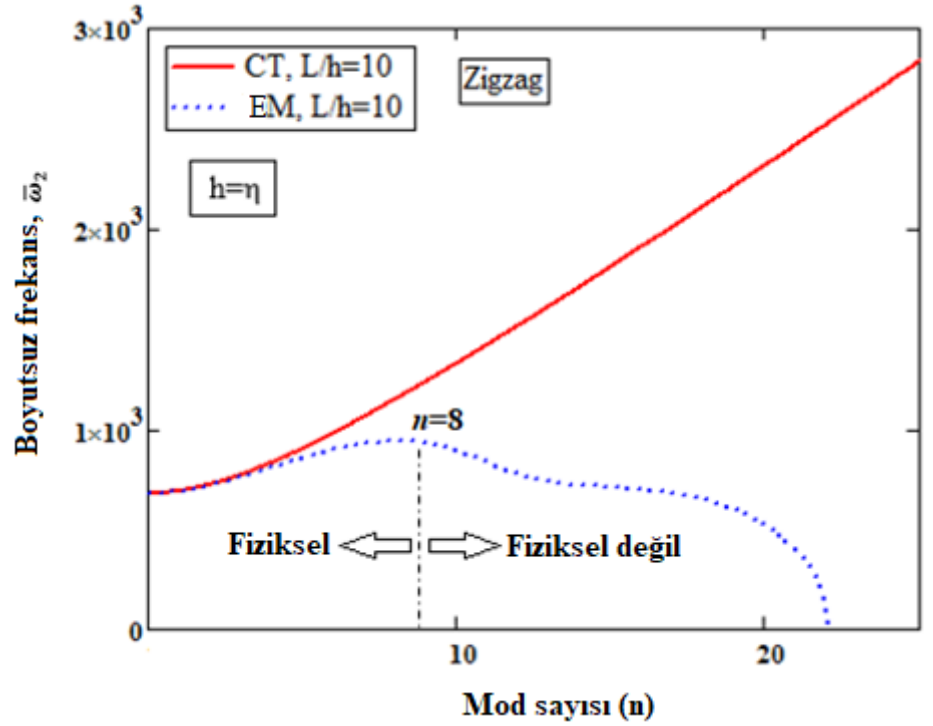


d)

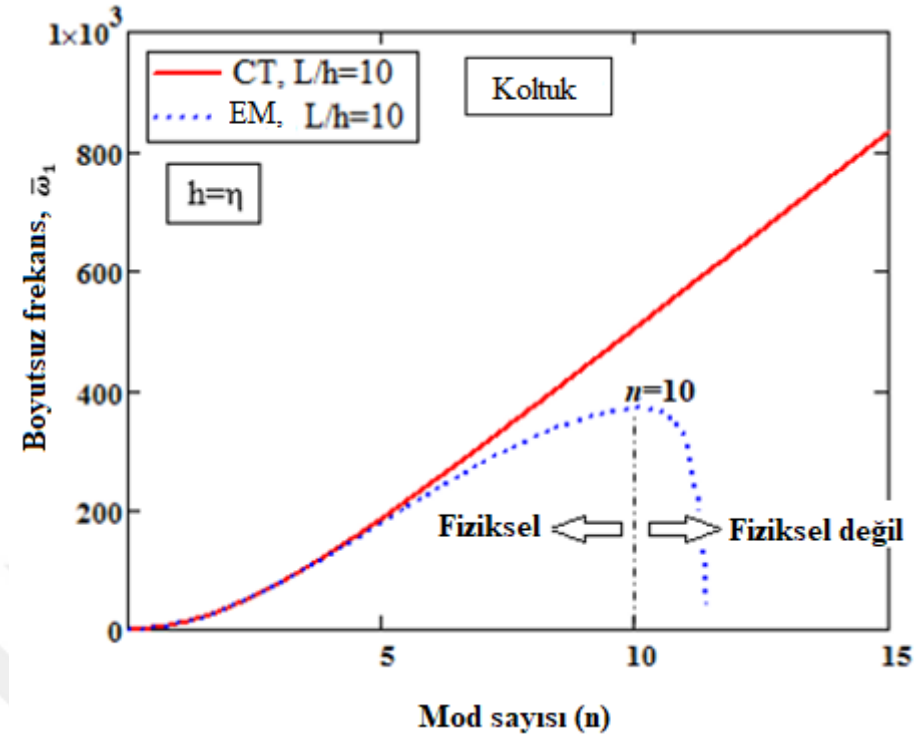
Şekil 5.79. Farklı *L*/*h* değerlerinde Timoshenko nanokirişinin boyutsuz frekans parametreleri (κ=5/6, η=1 nm).


CT, L/h=10
EM, L/h=10
Zigzag
h=η
Boyutsuz frekans, $\bar{\omega}_1$
800
600
400
200
0
5
10
n=9
Fiziksel
Fiziksel değil
Mod sayısı (n)

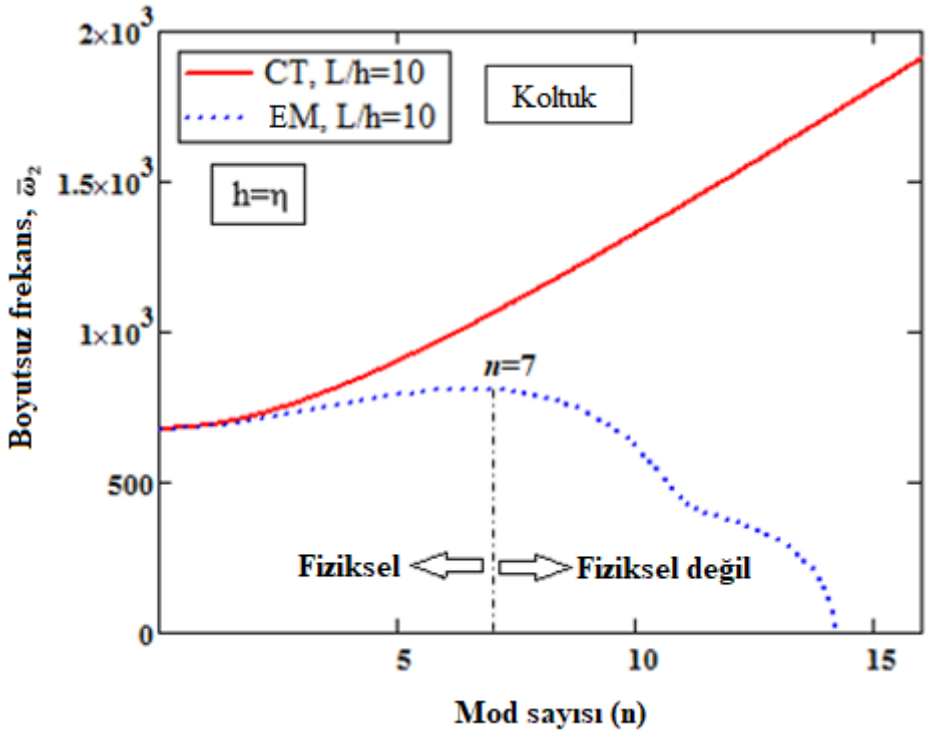
a)


CT, L/h=10
EM, L/h=10
Zigzag
h=η
Boyutsuz frekans, $\bar{\omega}_2$
3×10^3
2×10^3
1×10^3
0
10
20
n=8
Fiziksel
Fiziksel değil
Mod sayısı (n)

b)



c)



d)

Şekil 5.80. Timoshenko nanokirişinin boyutsuz frekans parametrelerinin mod sayısı ile değişimi (κ=5/6, η=1 nm).

BÖLÜM 6

GENEL SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, nano yapıların (nanoçubuk, nanokiriş) ölçek etkisini dikkate alan EM teorisi kullanılarak statik ve dinamik analizleri gerçekleştirilmiştir. EM teorisine ait yönetici denklemler ve genel sınır koşullarını veren ifadeler varyasyonel analiz yardımıyla elde edilmiştir. Bu nano yapılara ait statik yer değiştirmeler, titreşim frekansları, kritik burkulma yükü değerleri, dalga frekansları, faz ve grup hızları için açık ifadeler bulunmuştur. EM teorisi ile literatürdeki diğer ölçek etkisini dikkate alan sürekli ortam teorileri arasındaki fark gösterilmiştir. Ayrıca EM teorisinin doğruluğunu göstermek için deneysel çalışmalarla da karşılaştırma yapılmış ve EM teorisinin diğer sürekli ortam teorileri ile birlikte deneysel çalışmalarla da uyumlu sonuçlar verdiği gözlenmiştir. Ayrıca, periyodik yapılı nanoçubuk ve nanokirişlere ait EM formülasyonu geliştirilmiştir. Basit kare kristal kafes tipli periyodik nano yapıların yönetici diferansiyel denklemleri elde edildikten sonra, EM modeline ait analitik çözümler elde edilmiştir. EM teorisinde şiral açısı ve uzunluk ölçeği parametresinin değiştirilmesiyle, nanoçubuklarda ve nanokirişlerde klasik elastisite teorisine göre sertleşme veya yumuşama davranışlarının ortaya çıktığı görülmüştür. Bu durum boyuta bağlı EM teorisinde, nano-malzemelerin mekanik davranışının dikkate alınan malzemenin atomik yapısı ile doğrudan ilişkili olduğunu kanıtlar. Bu kanıt, yerel olmayan elastisite teorisi, genleme gradyan teorileri, peridinamik vb. diğer ölçek etkisini dikkate alan sürekli ortam teorilerinin aksine EM modelinin fenomenolojik olmadığını anlamayı kolaylaştırmıştır. Nano yapıların sertleştirici ve yumuşatıcı malzeme davranışlarını ayarlamak, mikro-nano-yapıların mekanik modellenmesinde avantajlı bir yaklaşım sağlayabilir.

Son olarak, hem zigzag hem de koltuk kiriş modelleri için EM teorisi kullanılarak bir Timoshenko kiriş modeline ait yönetici denklemler türetilmiştir. Mevcut EM

teorisinin geçerliliğini göstermek için Timoshenko kirişine ait elde edilen statik ve dinamik analiz sonuçları, literatürdeki diğer sürekli ortam teorileri ile kıyaslanmış ve iyi bir uyum gözlenmiştir. EBT-EM teorisine benzer şekilde, TBT-EM teorisinde de her zaman yumuşatıcı malzeme davranışı gözlenmiştir.

Bunlara ek olarak, EM teorisi ile yapılan analitik çözümler sonucunda elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- Ölçek etkileri daha küçük L değerleri için önemli olmaktadır.
- Özellikle küçük L değerleri için doğal frekanslar ve kritik burkulma yükleri, eşil mesafesinin artmasıyla azalır.
- EM modeli daha yumuşak malzeme davranışı öngörürken, SG teorisi sertleştirme etkisi nedeniyle daha sert malzeme davranışı öngörmektedir.
- Eşil mesafenin azalması ile, EM teorisi yaklaşımı ile öngörülen çubuğun uzaması, kirişlerin eğilmesi, titreşim frekansları, kritik burkulma yükleri ve dalga yayınım özellikleri, LE teorisi sonuçlarına yakınsamaktadır.
- EM teorisinin dalga yayınım frekansları LD sonuçları ile uyumludur.
- EM ile elde edilen doğal frekanslar MD simülasyonu ile mükemmel bir uyum içindedir.
- Van Hove tekilliğinin EM teorisi için yukarıdan frekansları sınırladığı elde edilmiştir. Bu önemli sonuç, literatürde kullanılan ölçeğe bağlı teoriler arasında ilk kez EM teorisinde gözlenmiştir.
- EM teorisi ile klasik teori arasındaki fark, daha yüksek titreşim modlarında ve daha kısa uzunluklarda (L<3 nm) daha belirgindir.
- Şiral açısının (θ) artmasıyla, EM teorisi tarafından öngörülen kritik burkulma yükü değerleri ve titreşim frekansı parametreleri artmaktadır.
- Ölçeğe bağlı EM teorisi nano uzunluk ölçeğinde kullanılabilir.

Bu sonuçlara ek olarak gelecekteki çalışmalarda, Taylor serisi açılımında daha fazla terim göz önüne alınarak EM teorisine ait daha doğru sonuçlar elde edilebilir. Ancak bu durumda, yönetici diferansiyel denklemlerin mertebesinin arttığı ve çözümün karmaşık bir hal aldığı da ayrıca not edilmelidir. Gelecekteki EM teorisi çalışmaları için eksenel mikro gerilmelere ek olarak, kayma ve burulma mikro gerilmeleri de (t_α,m_α) hesaplara dahil edilerek EM formülasyonu genişletilebilir. Ayrıca, bu tez çalışmasında statik ve dinamik analizleri yapılan nano yapılara (nanoçubuk, nanokiriş) ek olarak, plak,

kabuk gibi diğer yapı elemanları için de EM teorisi çerçevesinde mekanik analiz gerçekleştirilebilir.

EK 1

GENEL SINIR KOŞULLARI İÇİN NANOTÜPÜN TİTREŞİMİ

B-B sınır koşulu için Determinant (4.144)'ün terimleri aşağıdaki gibi olmaktadır:

$$S_{11}=1,\quad S_{12}=0,\quad S_{13}=0,\quad S_{14}=1,\quad S_{15}=0,\quad S_{16}=1. \qquad (E.1.1)$$

$$S_{21}={a_1}^2,\quad S_{21}=0,\quad S_{23}=4{c_3}^3d_3-4c_3{d_3}^3,\quad S_{24}={c_3}^4-6{c_3}^2{d_3}^2+{d_3}^4,$$

$$S_{25}=4{c_5}^3d_5-4c_5{d_5}^3,\quad S_{26}={c_5}^4-6{c_5}^2{d_5}^2+{d_5}^4. \qquad (E.1.2)$$

$$S_{31}={a_1}^2\beta^2+a_1,\quad S_{32}=0,\quad S_{33}=4\beta^2{c_3}^3d_3-4\beta^2c_3{d_3}^3+2c_3d_3,$$

$$S_{34}=\beta^2{c_3}^4-6\beta^2{c_3}^2{d_3}^2+\beta^2{d_3}^4+{c_3}^2-{d_3}^2, S_{35}$$

$$=4\beta^2{c_5}^3d_5-4\beta^2c_5{d_5}^3+2c_5d_5,$$

$$S_{36}=\beta^2{c_5}^4-6\beta^2{c_5}^2{d_5}^2+\beta^2{d_5}^4+{c_5}^2-{d_5}^2. \qquad (E.1.3)$$

$$S_{41}=Csh\left(\sqrt{a_1}\right),\quad S_{42}=Sh\left(\sqrt{a_1}\right),\quad S_{43}=e^{c_3}S(d_3),\quad S_{44}=e^{c_3}Cs(d_3),$$

$$S_{45}=e^{c_5}S(d_5),\quad S_{46}=e^{c_5}Cs(d_5). \qquad (E.1.4)$$

$$S_{51}={a_1}^2Csh\left(\sqrt{a_1}\right),\quad S_{52}={a_1}^2Sh\left(\sqrt{a_1}\right),$$

$$S_{53}={c_3}^4e^{c_3}S(d_3)+{d_3}^4e^{c_3}S(d_3)-6{c_3}^2{d_3}^2e^{c_3}S(d_3)-4c_3{d_3}^3e^{c_3}Cs(d_3)$$

$$+4{c_3}^3d_3e^{c_3}Cs(d_3),$$

$$S_{54}={c_3}^4e^{c_3}Cs(d_3)+{d_3}^4e^{c_3}Cs(d_3)-6{c_3}^2{d_3}^2e^{c_3}Cs(d_3)+4c_3{d_3}^3e^{c_3}S(d_3)$$

$$-4{c_3}^3d_3e^{c_3}S(d_3),$$

$$S_{55}={c_5}^4e^{c_5}S(d_5)+{d_5}^4e^{c_5}S(d_5)-6{c_5}^2{d_5}^2e^{c_5}S(d_5)-4c_5{d_5}^3e^{c_5}Cs(d_5)$$

$$+4{c_5}^3d_5e^{c_5}Cs(d_5),$$

$$S_{56}={c_5}^4e^{c_5}Cs(d_5)+{d_5}^4e^{c_5}Cs(d_5)-6{c_5}^2{d_5}^2e^{c_5}Cs(d_5)+4c_5{d_5}^3e^{c_5}S(d_5)$$

$$-4{c_5}^3d_5e^{c_5}S(d_5). \qquad (E.1.5)$$

$$S_{61}=a_1Csh\left(\sqrt{a_1}\right)+{a_1}^2\beta^2Csh\left(\sqrt{a_1}\right),\quad S_{62}=a_1Sh\left(\sqrt{a_1}\right)+{a_1}^2\beta^2Sh\left(\sqrt{a_1}\right),$$

$$S_{63} = {c_3}^2 e^{c_3} S(d_3) - {d_3}^2 e^{c_3} S(d_3) + \beta^2 {c_3}^4 e^{c_3} S(d_3) + \beta^2 {d_3}^4 e^{c_3} S(d_3)$$
$$+ 2c_3 d_3 e^{c_3} Cs(d_3) - 6\beta^2 {c_3}^2 {d_3}^2 e^{c_3} S(d_3) - 4\beta^2 c_3 {d_3}^3 e^{c_3} Cs(d_3)$$
$$+ 4\beta^2 {c_3}^3 d_3 e^{c_3} Cs(d_3),$$
$$\mathrm{S_{64}} = {\mathrm{c_3}}^2 \mathrm{e^{c_3} Cs(d_3)} - {\mathrm{d_3}}^2 \mathrm{e^{c_3} Cs(d_3)} + \beta^2 {\mathrm{c_3}}^4 \mathrm{e^{c_3} Cs(d_3)} + \beta^2 {\mathrm{d_3}}^4 \mathrm{e^{c_3} Cs(d_3)}$$
$$- 2\mathrm{c_3 d_3 e^{c_3} S(d_3)} - 6\beta^2 {\mathrm{c_3}}^2 {\mathrm{d_3}}^2 \mathrm{e^{c_3} Cs(d_3)} + 4\beta^2 \mathrm{c_3} {\mathrm{d_3}}^3 \mathrm{e^{c_3} S(d_3)}$$
$$- 4\beta^2 {\mathrm{c_3}}^3 \mathrm{d_3 e^{c_3} S(d_3)},$$
$$S_{65} = {c_5}^2 e^{c_5} S(d_5) - {d_5}^2 e^{c_5} S(d_5) + \beta^2 {c_5}^4 e^{c_5} S(d_5) + \beta^2 {d_5}^4 e^{c_5} S(d_5)$$
$$+ 2c_5 d_5 e^{c_5} Cs(d_5) - 6\beta^2 {c_5}^2 {d_5}^2 e^{c_5} S(d_5) - 4\beta^2 c_5 {d_5}^3 e^{c_5} Cs(d_5)$$
$$+ 4\beta^2 {c_5}^3 d_5 e^{c_5} Cs(d_5),$$
$$S_{66} = {c_5}^2 e^{c_5} Cs(d_5) - {d_5}^2 e^{c_5} Cs(d_5) + \beta^2 {c_5}^4 e^{c_5} Cs(d_5) + \beta^2 {d_5}^4 e^{c_5} Cs(d_5)$$
$$- 2c_5 d_5 e^{c_5} S(d_5) - 6\beta^2 {c_5}^2 {d_5}^2 e^{c_5} Cs(d_5) + 4\beta^2 c_5 {d_5}^3 e^{c_5} S(d_5)$$
$$- 4\beta^2 {c_5}^3 d_5 e^{c_5} S(d_5). \qquad (E.1.6)$$

A-A sınır koşulu için:

$$\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{vmatrix} = 0, \qquad (E.1.7)$$

$$C_{11} = 1, \quad C_{12} = 0, \quad C_{13} = 0, \quad C_{14} = 1, \quad C_{15} = 0, \quad C_{16} = 1. \quad (E.1.8)$$

$$C_{21} = 0, \quad C_{22} = \sqrt{a_1}, \quad C_{23} = d_3, \quad C_{24} = c_3, \quad C_{25} = d_5, \quad C_{26} = c_5. \quad (E.1.9)$$

$$C_{31} = a_1, C_{32} = 0, C_{33} = 2c_3 d_3, C_{34} = c_3^2 - d_3^2, C_{35} = 2c_5 d_5, C_{36} = c_5^2 - d_5^2. \quad (E.1.10)$$

$$C_{41} = Csh\left(\sqrt{a_1}\right), \quad C_{42} = Sh\left(\sqrt{a_1}\right), \quad C_{43} = e^{c_3} S(d_3), \quad C_{44} = e^{c_3} Cs(d_3),$$
$$C_{45} = e^{c_5} S(d_5), \quad C_{46} = e^{c_5} Cs(d_5). \qquad (E.1.11)$$

$$C_{51} = \sqrt{a_1} Sh\left(\sqrt{a_1}\right), \quad C_{52} = \sqrt{a_1} Csh\left(\sqrt{a_1}\right),$$
$$C_{53} = c_3 e^{c_3} S(d_3) + d_3 e^{c_3} Cs(d_3), \quad C_{54} = c_3 e^{c_3} Cs(d_3) - d_3 e^{c_3} S(d_3),$$
$$C_{55} = c_5 e^{c_5} S(d_5) + d_5 e^{c_5} Cs(d_5), \quad C_{56} = c_5 e^{c_5} Cs(d_5) - d_5 e^{c_5} S(d_5). \quad (E.1.12)$$

$$C_{61} = a_1 Csh\left(\sqrt{a_1}\right), \quad C_{62} = a_1 Sh\left(\sqrt{a_1}\right),$$
$$C_{63} = {c_3}^2 e^{c_3} S(d_3) - {d_3}^2 e^{c_3} S(d_3) + 2c_3 d_3 e^{c_3} Cs(d_3),$$
$$C_{64} = {c_3}^2 e^{c_3} Cs(d_3) - {d_3}^2 e^{c_3} Cs(d_3) - 2c_3 d_3 e^{c_3} S(d_3),$$
$$C_{65} = {c_5}^2 e^{c_5} S(d_5) - {d_5}^2 e^{c_5} S(d_5) + 2c_5 d_5 e^{c_5} Cs(d_5),$$
$$C_{66} = {c_5}^2 e^{c_5} Cs(d_5) - {d_5}^2 e^{c_5} Cs(d_5) - 2c_5 d_5 e^{c_5} S(d_5). \qquad (E.1.13)$$

A-B sınır koşulu için:

$$\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} & Z_{15} & Z_{16} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & Z_{24} & Z_{25} & Z_{26} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & Z_{34} & Z_{35} & Z_{36} \\ Z_{41} & Z_{42} & Z_{43} & Z_{44} & Z_{45} & Z_{46} \\ Z_{51} & Z_{52} & Z_{53} & Z_{54} & Z_{55} & Z_{56} \\ Z_{61} & Z_{62} & Z_{63} & Z_{64} & Z_{65} & Z_{66} \end{vmatrix} = 0, \qquad (E.1.14)$$

$$Z_{11} = 1, \quad Z_{12} = 0, \quad Z_{13} = 0, \quad Z_{14} = 1, \quad Z_{15} = 0, \quad Z_{16} = 1. \quad (E.1.15)$$

$$Z_{21} = 0, \quad Z_{22} = \sqrt{a_1}, \quad Z_{23} = d_3, \quad Z_{24} = c_3, \quad Z_{25} = d_5, \quad Z_{26} = c_5. (E.1.16)$$

$$Z_{31} = a_1, Z_{32} = 0, Z_{33} = 2c_3d_3, Z_{34} = c_3^2 - d_3^2, Z_{35} = 2c_5d_5, Z_{36} = c_5^2 - d_5^2. (E.1.17)$$

$$Z_{41} = Csh\left(\sqrt{a_1}\right), \quad Z_{42} = Sh\left(\sqrt{a_1}\right), \quad Z_{43} = e^{c_3}S(d_3), \quad Z_{44} = e^{c_3}Cs(d_3),$$

$$Z_{45} = e^{c_5}S(d_5), \quad Z_{46} = e^{c_5}Cs(d_5). \qquad (E.1.18)$$

$$Z_{51} = {a_1}^2 Csh\left(\sqrt{a_1}\right), \quad Z_{52} = {a_1}^2 Sh\left(\sqrt{a_1}\right),$$

$$Z_{53} = {c_3}^4 e^{c_3}S(d_3) + {d_3}^4 e^{c_3}S(d_3) - 6{c_3}^2{d_3}^2 e^{c_3}S(d_3) - 4c_3{d_3}^3 e^{c_3}Cs(d_3) + 4{c_3}^3 d_3 e^{c_3}Cs(d_3),$$

$$Z_{54} = {c_3}^4 e^{c_3}Cs(d_3) + {d_3}^4 e^{c_3}Cs(d_3) - 6{c_3}^2{d_3}^2 e^{c_3}Cs(d_3) + 4c_3{d_3}^3 e^{c_3}S(d_3) - 4{c_3}^3 d_3 e^{c_3}S(d_3),$$

$$Z_{55} = {c_5}^4 e^{c_5}S(d_5) + {d_5}^4 e^{c_5}S(d_5) - 6{c_5}^2{d_5}^2 e^{c_5}S(d_5) - 4c_5{d_5}^3 e^{c_5}Cs(d_5) + 4{c_5}^3 d_5 e^{c_5}Cs(d_5),$$

$$Z_{56} = {c_5}^4 e^{c_5}Cs(d_5) + {d_5}^4 e^{c_5}Cs(d_5) - 6{c_5}^2{d_5}^2 e^{c_5}Cs(d_5) + 4c_5{d_5}^3 e^{c_5}S(d_5) - 4{c_5}^3 d_5 e^{c_5}S(d_5). \qquad (E.1.19)$$

$$Z_{61} = a_1 Csh\left(\sqrt{a_1}\right) + {a_1}^2\beta^2 Csh\left(\sqrt{a_1}\right), \quad Z_{62} = a_1 Sh\left(\sqrt{a_1}\right) + {a_1}^2\beta^2 Sh\left(\sqrt{a_1}\right),$$

$$Z_{63} = {c_3}^2 e^{c_3}S(d_3) - {d_3}^2 e^{c_3}S(d_3) + \beta^2{c_3}^4 e^{c_3}S(d_3) + \beta^2{d_3}^4 e^{c_3}S(d_3) + 2c_3d_3 e^{c_3}Cs(d_3) - 6\beta^2{c_3}^2{d_3}^2 e^{c_3}S(d_3) - 4\beta^2 c_3{d_3}^3 e^{c_3}Cs(d_3) + 4\beta^2{c_3}^3 d_3 e^{c_3}Cs(d_3),$$

$$Z_{64} = {c_3}^2 e^{c_3}Cs(d_3) - {d_3}^2 e^{c_3}Cs(d_3) + \beta^2{c_3}^4 e^{c_3}Cs(d_3) + \beta^2{d_3}^4 e^{c_3}Cs(d_3) - 2c_3d_3 e^{c_3}S(d_3) - 6\beta^2{c_3}^2{d_3}^2 e^{c_3}Cs(d_3) + 4\beta^2 c_3{d_3}^3 e^{c_3}S(d_3) - 4\beta^2{c_3}^3 d_3 e^{c_3}S(d_3),$$

$$Z_{65} = {c_5}^2 e^{c_5}S(d_5) - {d_5}^2 e^{c_5}S(d_5) + \beta^2{c_5}^4 e^{c_5}S(d_5) + \beta^2{d_5}^4 e^{c_5}S(d_5) + 2c_5d_5 e^{c_5}Cs(d_5) - 6\beta^2{c_5}^2{d_5}^2 e^{c_5}S(d_5) - 4\beta^2 c_5{d_5}^3 e^{c_5}Cs(d_5) + 4\beta^2{c_5}^3 d_5 e^{c_5}Cs(d_5),$$

$$Z_{66} = {c_5}^2 e^{c_5} Cs(d_5) - {d_5}^2 e^{c_5} Cs(d_5) + \beta^2 {c_5}^4 e^{c_5} Cs(d_5) + \beta^2 {d_5}^4 e^{c_5} Cs(d_5)$$
$$- 2c_5 d_5 e^{c_5} S(d_5) - 6\beta^2 {c_5}^2 {d_5}^2 e^{c_5} Cs(d_5) + 4\beta^2 c_5 {d_5}^3 e^{c_5} S(d_5)$$
$$- 4\beta^2 {c_5}^3 d_5 e^{c_5} S(d_5). \qquad (E.1.20)$$

EK 2

GENEL SINIR KOŞULLARI İÇİN NANOTÜPÜN BURKULMA ANALİZİ

B-B sınır koşulu için:

$$\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} & R_{15} & R_{16} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} & R_{25} & R_{26} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} & R_{35} & R_{36} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} & R_{45} & R_{46} \\ R_{51} & R_{52} & R_{53} & R_{54} & R_{55} & R_{56} \\ R_{61} & R_{62} & R_{63} & R_{64} & R_{65} & R_{66} \end{vmatrix} = 0, \qquad (E.2.1)$$

$$R_{11} = 1, \quad R_{12} = 0, \quad R_{13} = 0, \quad R_{14} = 1, \quad R_{15} = 0, \quad R_{16} = 1. \quad (E.2.2)$$

$$R_{21} = {h_1}^2, \quad R_{21} = 0, \quad R_{23} = 4{c_2}^3 h_2 - 4c_2 {h_2}^3, \quad R_{24} = {c_2}^4 - 6{c_2}^2 {h_2}^3 + {h_2}^4,$$

$$R_{25} = 4{c_4}^3 h_3 - 4c_4 {h_3}^3, \quad R_{26} = {c_4}^4 - 6{c_4}^2 {h_3}^2 + {h_3}^4. \qquad (E.2.3)$$

$$R_{31} = {h_1}^2 \beta^2 - h_1, \quad R_{32} = 0, \quad R_{33} = 4\beta^2 {c_2}^3 h_2 - 4\beta^2 c_2 {h_2}^3 + 2c_2 h_2,$$

$$R_{34} = \beta^2 {c_2}^4 - 6\beta^2 {c_2}^2 {h_2}^2 + \beta^2 {h_2}^4 + {c_2}^2 - {h_2}^2, R_{35} = 4\beta^2 {c_2}^3 h_3 - 4\beta^2 c_4 {h_3}^3 + 2c_4 h_3,$$

$$R_{36} = \beta^2 {c_4}^4 - 6\beta^2 {c_4}^2 {h_3}^2 + \beta^2 {h_3}^4 + {c_4}^2 - {h_3}^2. \qquad (E.2.4)$$

$$R_{41} = Cs\left(\sqrt{h_1}\right), \quad R_{42} = S\left(\sqrt{h_1}\right), \quad R_{43} = e^{c_2} S(h_2), \quad R_{44} = e^{c_2} Cs(h_2),$$

$$R_{45} = e^{c_4} S(h_3), \quad R_{46} = e^{c_4} Cs(h_3). \qquad (E.2.5)$$

$$R_{51} = {h_1}^2 Cs\left(\sqrt{a_1}\right), \quad R_{52} = {h_1}^2 S\left(\sqrt{a_1}\right),$$

$$R_{53} = {c_2}^4 e^{c_2} S(h_2) + {h_2}^4 e^{c_2} S(h_2) - 6{c_2}^2 {h_2}^2 e^{c_2} S(h_2) - 4c_2 {h_2}^3 e^{c_2} Cs(h_2) + 4{c_2}^3 d_3 e^{c_2} Cs(h_2),$$

$$R_{54} = {c_2}^4 e^{c_2} Cs(h_2) + {h_2}^4 e^{c_2} Cs(h_2) - 6{c_2}^2 {h_2}^2 e^{c_2} Cs(h_2) + 4c_2 {h_2}^3 e^{c_2} S(h_2) - 4{c_2}^3 h_2 e^{c_2} S(h_2),$$

$$R_{55} = {c_4}^4 e^{c_4} S(h_3) + {h_3}^4 e^{c_4} S(h_3) - 6{c_4}^2 {h_3}^2 e^{c_4} S(h_3) - 4c_4 {h_3}^3 e^{c_4} Cs(h_3) + 4{c_4}^3 h_3 e^{c_4} Cs(h_3),$$

$$R_{56} = {c_4}^4 e^{c_4} Cs(h_3) + {h_3}^4 e^{c_4} Cs(h_3) - 6{c_4}^2 {h_3}^2 e^{c_4} Cs(h_3) + 4c_4 {h_3}^3 e^{c_4} S(h_3) - 4{c_4}^3 h_3 e^{c_4} S(h_3). \quad (E.2.6)$$

$$R_{61} = -h_1 Cs\left(\sqrt{h_1}\right) + {h_1}^2 \beta^2 Cs\left(\sqrt{h_1}\right), \qquad R_{62} = -h_1 S\left(\sqrt{h_1}\right) + {h_1}^2 \beta^2 S\left(\sqrt{h_1}\right),$$

$$R_{63} = {c_2}^2 e^{c_2} S(h_2) - {h_2}^2 e^{c_2} S(h_2) + \beta^2 {c_2}^4 e^{c_2} S(h_2) + \beta^2 {h_2}^4 e^{c_2} S(h_2) + 2c_2 h_2 e^{c_2} Cs(h_2) - 6\beta^2 {c_2}^2 {h_2}^2 e^{c_2} S(h_2) - 4\beta^2 c_2 {h_2}^3 e^{c_2} Cs(h_2) + 4\beta^2 {c_2}^3 h_2 e^{c_2} Cs(h_2),$$

$$R_{64} = {c_2}^2 e^{c_2} Cs(h_2) - {h_2}^2 e^{c_2} Cs(h_2) + \beta^2 {c_2}^4 e^{c_2} Cs(h_2) + \beta^2 {h_2}^4 e^{c_2} Cs(h_2) - 2c_2 d_3 e^{c_2} S(h_2) - 6\beta^2 {c_2}^2 {h_2}^2 e^{c_2} Cs(h_2) + 4\beta^2 c_2 {h_2}^3 e^{c_2} S(h_2) - 4\beta^2 {c_2}^3 h_2 e^{c_2} S(h_2),$$

$$R_{65} = {c_4}^2 e^{c_4} S(h_3) - {h_3}^2 e^{c_4} S(h_3) + \beta^2 {c_4}^4 e^{c_4} S(h_3) + \beta^2 {h_3}^4 e^{c_4} S(h_3) + 2c_4 h_3 e^{c_4} Cs(h_3) - 6\beta^2 {c_4}^2 {h_3}^2 e^{c_4} S(h_3) - 4\beta^2 c_4 {h_3}^3 e^{c_4} Cs(h_3) + 4\beta^2 {c_4}^3 h_3 e^{c_4} Cs(h_3),$$

$$R_{66} = {c_4}^2 e^{c_4} Cs(h_3) - {h_3}^2 e^{c_4} Cs(h_3) + \beta^2 {c_4}^4 e^{c_4} Cs(h_3) + \beta^2 {h_3}^4 e^{c_4} Cs(h_3) - 2c_4 h_3 e^{c_4} S(h_3) - 6\beta^2 {c_4}^2 {h_3}^2 e^{c_4} Cs(h_3) + 4\beta^2 c_4 {h_3}^3 e^{c_4} S(h_3) - 4\beta^2 {c_4}^3 h_3 e^{c_4} S(h_3). \quad (E.2.7)$$

A-A sınır koşulu için:

$$\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} & F_{15} & F_{16} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} & F_{25} & F_{26} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} & F_{35} & F_{36} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} & F_{45} & F_{46} \\ F_{51} & F_{52} & F_{53} & F_{54} & F_{55} & F_{56} \\ F_{61} & F_{62} & F_{63} & F_{64} & F_{65} & F_{66} \end{vmatrix} = 0, \quad (E.2.8)$$

$$F_{11} = 1, \quad F_{12} = 0, \quad F_{13} = 0, \quad F_{14} = 1, \quad F_{15} = 0, \quad F_{16} = 1. \quad (E.2.9)$$

$$F_{21} = 0, \quad F_{22} = \sqrt{h_1}, \quad F_{23} = h_2, \quad F_{24} = c_2, \quad F_{25} = h_3, \quad F_{26} = c_4. \quad (E.2.10)$$

$$F_{31} = -h_1, F_{32} = 0, F_{33} = 2c_2 h_2, F_{34} = c_2^2 - h_2^2, F_{35} = 2c_4 h_3, F_{36} = c_4^2 - h_3^2. \quad (E.2.11)$$

$$F_{41} = Cs\left(\sqrt{h_1}\right), \quad F_{42} = S\left(\sqrt{h_1}\right), \quad F_{43} = e^{c_2} S(h_2), \quad F_{44} = e^{c_2} Cs(h_2),$$
$$F_{45} = e^{c_4} S(h_3), \quad F_{46} = e^{c_4} Cs(h_3). \quad (E.2.12)$$

$$F_{51} = -\sqrt{h_1} S\left(\sqrt{h_1}\right), \quad F_{52} = \sqrt{h_1} Cs\left(\sqrt{h_1}\right),$$
$$F_{53} = c_2 e^{c_2} S(h_2) + h_2 e^{c_2} Cs(h_2), \quad F_{54} = c_2 e^{c_2} Cs(h_2) - h_2 e^{c_2} S(h_2),$$
$$F_{55} = c_4 e^{c_4} S(h_3) + h_3 e^{c_4} Cs(h_3), \quad F_{56} = c_4 e^{c_4} Cs(h_3) - h_3 e^{c_4} S(h_3). \quad (E.2.13)$$

$$F_{61} = -a_1 Cs\left(\sqrt{a_1}\right), \quad F_{62} = -a_1 S\left(\sqrt{a_1}\right),$$

$$F_{63} = {c_2}^2 e^{c_2} S(h_2) - {h_2}^2 e^{c_2} S(h_2) + 2c_2 h_2 e^{c_2} Cs(h_2),$$

$$F_{64} = {c_2}^2 e^{c_2} Cs(h_2) - {h_2}^2 e^{c_2} Cs(h_2) - 2c_2 h_2 e^{c_2} S(h_2),$$

$$F_{65} = {c_4}^2 e^{c_4} S(h_3) - {h_3}^2 e^{c_4} S(h_3) + 2c_4 h_3 e^{c_4} Cs(h_3),$$

$$F_{66} = {c_4}^2 e^{c_4} Cs(h_3) - {h_3}^2 e^{c_4} Cs(h_3) - 2c_4 h_3 e^{c_4} S(h_3). \qquad (E.2.14)$$

A-B sınır koşulu için:

$$\begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & Y_{15} & Y_{16} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} & Y_{25} & Y_{26} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} & Y_{35} & Y_{36} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} & Y_{45} & Y_{46} \\ Y_{51} & Y_{52} & Y_{53} & Y_{54} & Y_{55} & Y_{56} \\ Y_{61} & Y_{62} & Y_{63} & Y_{64} & Y_{65} & Y_{66} \end{vmatrix} = 0, \qquad (E.2.15)$$

$$Y_{11} = 1, \quad Y_{12} = 0, \quad Y_{13} = 0, \quad Y_{14} = 1, \quad Y_{15} = 0, \quad Y_{16} = 1. \quad (E.2.16)$$

$$Y_{21} = 0, \quad Y_{22} = \sqrt{h_1}, \quad Y_{23} = h_2, \quad Y_{24} = c_2, \quad Y_{25} = h_3, \quad Y_{26} = c_4. \quad (E.2.17)$$

$$Y_{31} = -h_1, Y_{32} = 0, Y_{33} = 2c_2 h_2, Y_{34} = c_2^2 - h_2^2, Y_{35} = 2c_4 h_3, Y_{36} = c_4^2 - h_3^2. \quad (E.2.18)$$

$$Y_{41} = Cs\left(\sqrt{h_1}\right), \quad Y_{42} = S\left(\sqrt{h_1}\right), \quad Y_{43} = e^{c_2} S(h_2), \quad Y_{44} = e^{c_2} Cs(h_2),$$

$$Y_{45} = e^{c_4} S(h_3), \quad Y_{46} = e^{c_4} Cs(h_3). \qquad (E.2.19)$$

$$Y_{51} = {h_1}^2 Cs\left(\sqrt{a_1}\right), \quad Y_{52} = {h_1}^2 S\left(\sqrt{a_1}\right),$$

$$Y_{53} = {c_2}^4 e^{c_2} S(h_2) + {h_2}^4 e^{c_2} S(h_2) - 6{c_2}^2 {h_2}^2 e^{c_2} S(h_2) - 4c_2 {h_2}^3 e^{c_2} Cs(h_2) + 4{c_2}^3 d_3 e^{c_2} Cs(h_2),$$

$$Y_{54} = {c_2}^4 e^{c_2} Cs(h_2) + {h_2}^4 e^{c_2} Cs(h_2) - 6{c_2}^2 {h_2}^2 e^{c_2} Cs(h_2) + 4c_2 {h_2}^3 e^{c_2} S(h_2) - 4{c_2}^3 h_2 e^{c_2} S(h_2),$$

$$Y_{55} = {c_4}^4 e^{c_4} S(h_3) + {h_3}^4 e^{c_4} S(h_3) - 6{c_4}^2 {h_3}^2 e^{c_4} S(h_3) - 4c_4 {h_3}^3 e^{c_4} Cs(h_3) + 4{c_4}^3 h_3 e^{c_4} Cs(h_3),$$

$$Y_{56} = {c_4}^4 e^{c_4} Cs(h_3) + {h_3}^4 e^{c_4} Cs(h_3) - 6{c_4}^2 {h_3}^2 e^{c_4} Cs(h_3) + 4c_4 {h_3}^3 e^{c_4} S(h_3) - 4{c_4}^3 h_3 e^{c_4} S(h_3). \qquad (E.2.20)$$

$$Y_{61} = -h_1 Cs\left(\sqrt{h_1}\right) + {h_1}^2 \beta^2 Cs\left(\sqrt{h_1}\right), \quad Y_{62} = -h_1 S\left(\sqrt{h_1}\right) + {h_1}^2 \beta^2 S\left(\sqrt{h_1}\right),$$

$$Y_{63} = {c_2}^2 e^{c_2} S(h_2) - {h_2}^2 e^{c_2} S(h_2) + \beta^2 {c_2}^4 e^{c_2} S(h_2) + \beta^2 {h_2}^4 e^{c_2} S(h_2) + 2c_2 h_2 e^{c_2} Cs(h_2) - 6\beta^2 {c_2}^2 {h_2}^2 e^{c_2} S(h_2) - 4\beta^2 c_2 {h_2}^3 e^{c_2} Cs(h_2) + 4\beta^2 {c_2}^3 h_2 e^{c_2} Cs(h_2),$$

$$Y_{64} = {c_2}^2 e^{c_2} Cs(h_2) - {h_2}^2 e^{c_2} Cs(h_2) + \beta^2 {c_2}^4 e^{c_2} Cs(h_2) + \beta^2 {h_2}^4 e^{c_2} Cs(h_2) - 2c_2 d_3 e^{c_2} S(h_2) - 6\beta^2 {c_2}^2 {h_2}^2 e^{c_2} Cs(h_2) + 4\beta^2 c_2 {h_2}^3 e^{c_2} S(h_2) - 4\beta^2 {c_2}^3 h_2 e^{c_2} S(h_2),$$

$$Y_{65} = {c_4}^2 e^{c_4} S(h_3) - {h_3}^2 e^{c_4} S(h_3) + \beta^2 {c_4}^4 e^{c_4} S(h_3) + \beta^2 {h_3}^4 e^{c_4} S(h_3)$$
$$+ 2c_4 h_3 e^{c_4} Cs(h_3) - 6\beta^2 {c_4}^2 {h_3}^2 e^{c_4} S(h_3) - 4\beta^2 c_4 {h_3}^3 e^{c_4} Cs(h_3)$$
$$+ 4\beta^2 {c_4}^3 h_3 e^{c_4} Cs(h_3),$$
$$Y_{66} = {c_4}^2 e^{c_4} Cs(h_3) - {h_3}^2 e^{c_4} Cs(h_3) + \beta^2 {c_4}^4 e^{c_4} Cs(h_3) + \beta^2 {h_3}^4 e^{c_4} Cs(h_3)$$
$$- 2c_4 h_3 e^{c_4} S(h_3) - 6\beta^2 {c_4}^2 {h_3}^2 e^{c_4} Cs(h_3) + 4\beta^2 c_4 {h_3}^3 e^{c_4} S(h_3)$$
$$- 4\beta^2 {c_4}^3 h_3 e^{c_4} S(h_3). \qquad (E.2.21)$$

KAYNAKLAR

Abbas, B., & Thomas, J. (1977). The second frequency spectrum of Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration, 51*(1), 123-137.

Adali, S. (2009). Variational principles for transversely vibrating multiwalled carbon nanotubes based on nonlocal Euler− Bernoulli beam model. *Nano letters, 9*(5), 1737-1741.

Adhikari, S., Murmu, T., & McCarthy, M. (2014). Frequency domain analysis of nonlocal rods embedded in an elastic medium. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, 59*, 33-40.

Aizawa, T., Souda, R., Otani, S., Ishizawa, Y., & Oshima, C. (1990). Bond softening in monolayer graphite formed on transition-metal carbide surfaces. *Physical Review B, 42*(18), 11469.

Akgöz, B., & Civalek, Ö. (2013). A size-dependent shear deformation beam model based on the strain gradient elasticity theory. *International Journal of Engineering Science, 70*, 1-14.

Akgöz, B., & Civalek, Ö. (2015). A novel microstructure-dependent shear deformable beam model. *International Journal of Mechanical Sciences, 99*, 10-20.

Altan, B., & Aifantis, E. (1997). On some aspects in the special theory of gradient elasticity. *Journal of the Mechanical Behavior of Materials, 8*(3), 231-282.

Ansari, R., Hemmatnezhad, M., & Ramezannezhad, H. (2010). Application of HPM to the nonlinear vibrations of multiwalled carbon nanotubes. *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal, 26*(2), 490-500.

Arani, A. G., Amir, S., Dashti, P., & Yousefi, M. (2014). Flow-induced vibration of double bonded visco-CNTs under magnetic fields considering surface effect. *Computational Materials Science, 86*, 144-154.

Arefi, M., & Zenkour, A. M. (2019). Influence of magneto-electric environments on size-dependent bending results of three-layer piezomagnetic curved nanobeam based on sinusoidal shear deformation theory. *Journal of Sandwich Structures & Materials, 21*(8), 2751-2778.

Askes, H., Suiker, A., & Sluys, L. (2002). A classification of higher-order strain-gradient models–linear analysis. *Archive of Applied Mechanics, 72*(2-3), 171-188.

Awrejcewicz, J., Krysko, A., Zhigalov, M., Saltykova, O., & Krysko, V. (2008). Chaotic vibrations in flexible multi-layered Bernoulli-Euler and Timoshenko type beams. *Latin American Journal of Solids and Structures, 5*(4), 319-363.

Aydogdu, M. (2009). A general nonlocal beam theory: its application to nanobeam bending, buckling and vibration. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, 41*(9), 1651-1655.

Aydogdu, M. (2012). Axial vibration analysis of nanorods (carbon nanotubes) embedded in an elastic medium using nonlocal elasticity. *Mechanics Research Communications, 43*, 34-40.

Aydogdu, M. (2014). Longitudinal wave propagation in multiwalled carbon nanotubes. *Composite Structures, 107*, 578-584.

Aydogdu, M., & Gul, U. (2018a). *Axial Wave Reflection and Transmission in Stepped Nanorods Using Doublet Mechanics Theory*. Paper presented at the MATEC Web of Conferences.

Aydogdu, M., & Gul, U. (2018b). Buckling analysis of double nanofibers embeded in an elastic medium using doublet mechanics theory. *Composite Structures, 202*, 355-363.

Aydogdu, M., & Gul, U. (2020). Longitudinal vibration of double nanorod systems using doublet mechanics theory. *Structural Engineering and Mechanics, 73*(1), 37.

Azimzadeh, Z., & Fatahi-Vajari, A. (2019). Coupled axial-radial vibration of single-walled carbon nanotubes via doublet mechanics. *Journal of Solid Mechanics, 11*(2), 323-340.

Benguediab, S., Semmah, A., Chaht, F. L., Mouaz, S., & Tounsi, A. (2014). An investigation on the characteristics of bending, buckling and vibration of nanobeams via nonlocal beam theory. *International Journal of Computational Methods, 11*(06), 1350085.

Bernoulli, D. (1753). Réflexions et éclaircissemens sur les nouvelles vibrations des cordes. *Hist. Mém Acad. R. Sci. Lett. Berlin, 9*, 147-172.

Brillouin, L. (1946). Wave Propagation in Periodic Structures, International Series in Physics. In: McGraw-Hill Book Company, Inc., New York.

Bruno, L., Decuzzi, P., & Gentile, F. (2016). Stress distribution retrieval in granular materials: a multi-scale model and digital image correlation measurements. *Optics and Lasers in Engineering, 76*, 17-26.

Cao, G., Chen, X., & Kysar, J. W. (2006). Thermal vibration and apparent thermal contraction of single-walled carbon nanotubes. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 54*(6), 1206-1236.

Cao, Q., Xia, M., Kocabas, C., Shim, M., Rogers, J. A., & Rotkin, S. V. (2007). Gate capacitance coupling of singled-walled carbon nanotube thin-film transistors. *Applied physics letters, 90*(2), 023516.

Cinefra, M., Carrera, E., & Brischetto, S. (2011). Refined shell models for the vibration analysis of multiwalled carbon nanotubes. *Mechanics of Advanced Materials and Structures, 18*(7), 476-483.

Cosserat, E., & Cosserat, F. (1909). Théorie des corps déformables.

De Rosa, M., & Lippiello, M. (2007). Non-classical boundary conditions and DQM for double-beams. *Mechanics Research Communications, 34*(7-8), 538-544.

de Sciarra, F. M., & Barretta, R. (2014). A gradient model for Timoshenko nanobeams. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, 62*, 1-9.

Dehrouyeh-Semnani, A. M., & Nikkhah-Bahrami, M. (2015). A discussion on incorporating the Poisson effect in microbeam models based on modified couple stress theory. *International Journal of Engineering Science, 86*, 20-25.

Deotare, P. B., McCutcheon, M. W., Frank, I. W., Khan, M., & Lončar, M. (2009). Coupled photonic crystal nanobeam cavities. *Applied physics letters, 95*(3), 031102.

Dong, K., & Wang, X. (2007). Wave propagation in carbon nanotubes embedded in an elastic matrix. *Archive of Applied Mechanics, 77*(8), 575-586.

Dong, K., Zhu, S., & Wang, X. (2008). Wave propagation in multiwall carbon nanotubes embedded in a matrix material. *Composite Structures, 82*(1), 1-9.

Dresselhaus, M., Dresselhaus, G., & Saito, R. (1995). Physics of carbon nanotubes. *Carbon, 33*(7), 883-891.

Ebrahimian, M., Imam, A., & Najafi, M. (2018). Doublet mechanical analysis of bending of Euler-Bernoulli and Timoshenko nanobeams. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 98*(9), 1642-1665.

Eringen, A. C. (1967). Theory of micropolar plates. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP, 18*(1), 12-30.

Eringen, A. C. (1976). Nonlocal polar field models. *New York: Academic*.

Eringen, A. C. (1983). On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Journal of applied physics, 54*(9), 4703-4710.

Erol, H., & Gürgöze, M. (2004). Longitudinal vibrations of a double-rod system coupled by springs and dampers. *Journal of Sound and Vibration, 1*(276), 419-430.

Fatahi-Vajari, A., & Imam, A. (2016a). Axial vibration of single-walled carbon nanotubes using doublet mechanics. *Indian Journal of Physics, 90*(4), 447-455.

Fatahi-Vajari, A., & Imam, A. (2016b). Torsional vibration of single-walled carbon nanotubes using doublet mechanics. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 67*(4), 81.

Fatahi-Vajari, A. (2018). A new method for evaluating the natural frequency in radial breathing like mode vibration of double-walled carbon nanotubes. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 98*(2), 255-269.

Fatahi-Vajari, A., & Imam, A. (2016). Analysis of radial breathing mode of vibration of single-walled carbon nanotubes via doublet mechanics. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 96*(9), 1020-1032.

Fernando, D., Wang, C., & Chowdhury, A. R. (2018). Vibration of laminated-beams based on reference-plane formulation: Effect of end supports at different heights of the beam. *Engineering Structures, 159*, 245-251.

Ferrari, M., & Granik, V. (1994). Doublet-based micromechanical approaches to yield and failure criteria. *Materials Science and Engineering: A, 175*(1-2), 21-29.

Ferrari, M., Granik, V., & Imam, A. (1997). Introduction to doublet mechanics. In *Advances in Doublet Mechanics* (pp. 1-26): Springer.

Feynman, R. P. (1960). There's plenty of room at the bottom. *California Institute of Technology, Engineering and Science magazine*.

Fleck, N., Muller, G., Ashby, M., & Hutchinson, J. (1994). Strain gradient plasticity: theory and experiment. *Acta Metallurgica et materialia, 42*(2), 475-487.

Gentile, F., Sakamoto, J., Righetti, R., Decuzzi, P., & Ferrari, M. (2011). A doublet mechanics model for the ultrasound characterization of malignant tissues. *Journal of Biomedical Science and Engineering, 4*(05), 362.

Granik, V. (1978). Microstructural mechanics of granular media, Technique Report IM/MGU 78-241, Institute of Mechanics of Moscow State University. In: Russian.

Granik, V., & Ferrari, M. (1993). Microstructural mechanics of granular media. *Mechanics of Materials, 15*(4), 301-322.

Gul, U., & Aydogdu, M. (2017). Wave propagation in double walled carbon nanotubes by using doublet mechanics theory. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, 93*, 345-357.

Gul, U., & Aydogdu, M. (2018a). Noncoaxial vibration and buckling analysis of embedded double-walled carbon nanotubes by using doublet mechanics. *Composites Part B: Engineering, 137*, 60-73.

Gul, U., & Aydogdu, M. (2018b). Structural modelling of nanorods and nanobeams using doublet mechanics theory. *International Journal of Mechanics and Materials in Design, 14*(2), 195-212.

Gul, U., & Aydogdu, M. (2019). Vibration analysis of Love nanorods using doublet mechanics theory. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 41*(8), 351.

Gul, U., Aydogdu, M., & Gaygusuzoglu, G. (2017). Axial dynamics of a nanorod embedded in an elastic medium using doublet mechanics. *Composite Structures, 160*, 1268-1278.

Gul, U., Aydogdu, M., & Gaygusuzoglu, G. (2018). Vibration and buckling analysis of nanotubes (nanofibers) embedded in an elastic medium using Doublet Mechanics. *Journal of Engineering Mathematics, 109*(1), 85-111.

Han, J.-B., Hong, S.-Y., Song, J.-H., & Kwon, H.-W. (2014). Vibrational energy flow models for the Rayleigh–Love and Rayleigh–Bishop rods. *Journal of Sound and Vibration, 333*(2), 520-540.

Hashemi, S. H., & Khaniki, H. B. (2017). Dynamic behavior of multi-layered viscoelastic nanobeam system embedded in a viscoelastic medium with a moving nanoparticle. *Journal of Mechanics, 33*(5), 559-575.

Hu, Y.-G., Liew, K. M., Wang, Q., He, X., & Yakobson, B. (2008). Nonlocal shell model for elastic wave propagation in single-and double-walled carbon nanotubes. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 56*(12), 3475-3485.

Hutchinson, J. W. (2000). Plasticity at the micron scale. *International Journal of Solids and Structures, 37*(1-2), 225-238.

Iijima, S. (1991). Helical microtubules of graphitic carbon. *nature, 354*(6348), 56.

Iijima, S., & Ichihashi, T. (1993). Single-shell carbon nanotubes of 1-nm diameter. *nature, 363*(6430), 603-605.

Kahrobaiyan, M., Asghari, M., & Ahmadian, M. (2014). A Timoshenko beam element based on the modified couple stress theory. *International Journal of Mechanical Sciences, 79*, 75-83.

Kammoun, N., Jrad, H., Bouaziz, S., Soula, M., & Haddar, M. (2017). Vibration analysis of three-layered nanobeams based on nonlocal elasticity theory. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 55*.

Karabalin, R., Cross, M., & Roukes, M. (2009). Nonlinear dynamics and chaos in two coupled nanomechanical resonators. *Physical Review B, 79*(16), 165309.

Karličić, D., Cajić, M., Murmu, T., & Adhikari, S. (2015). Nonlocal longitudinal vibration of viscoelastic coupled double-nanorod systems. *European Journal of Mechanics-A/Solids, 49*, 183-196.

Karličić, D., Kozić, P., & Pavlović, R. (2016). Nonlocal vibration and stability of a multiple-nanobeam system coupled by the Winkler elastic medium. *Applied Mathematical Modelling, 40*(2), 1599-1614.

Karličić, D., Murmu, T., Cajić, M., Kozić, P., & Adhikari, S. (2014). Dynamics of multiple viscoelastic carbon nanotube based nanocomposites with axial magnetic field. *Journal of applied physics, 115*(23), 234303.

Kiani, K. (2010). A meshless approach for free transverse vibration of embedded single-walled nanotubes with arbitrary boundary conditions accounting for nonlocal effect. *International Journal of Mechanical Sciences, 52*(10), 1343-1356.

Kitipornchai, S., He, X., & Liew, K. (2005). Buckling analysis of triple-walled carbon nanotubes embedded in an elastic matrix. *Journal of applied physics, 97*(11), 114318.

Kojic, M., Vlastelica, I., Decuzzi, P., Granik, V. T., & Ferrari, M. (2011). A finite element formulation for the doublet mechanics modeling of microstructural materials. *Computer Methods in Applied Mechanics, 200*(13-16), 1446-1454.

Kordkheili, S. H., & Moshrefzadeh-Sani, H. (2013). Mechanical properties of double-layered graphene sheets. *Computational Materials Science, 69*, 335-343.

Lam, D. C., Yang, F., Chong, A., Wang, J., & Tong, P. (2003). Experiments and theory in strain gradient elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 51*(8), 1477-1508.

Laurenzi, S., Pastore, R., Giannini, G., & Marchetti, M. (2013). Experimental study of impact resistance in multi-walled carbon nanotube reinforced epoxy. *Composite Structures, 99*, 62-68.

Layman, C., & Wu, J. (2004). Theoretical study in applications of doublet mechanics to detect tissue pathological changes in elastic properties using high frequency ultrasound. *The Journal of the Acoustical Society of America, 116*(2), 1244-1253.

Lazopoulos, K., & Lazopoulos, A. (2011). On a strain gradient elastic Timoshenko beam model. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 91*(11), 875-882.

Levinson, M. (1981). A new rectangular beam theory. *Journal of Sound and Vibration, 74*(1), 81-87.

Li, C., & Chou, T.-W. (2004). Vibrational behaviors of multiwalled-carbon-nanotube-based nanomechanical resonators. *Applied physics letters, 84*(1), 121-123.

Li, R., & Kardomateas, G. A. (2007). Vibration characteristics of multiwalled carbon nanotubes embedded in elastic media by a nonlocal elastic shell model. *Journal of Applied Mechanics, 74*(6), 1087-1094.

Li, X.-F., Tang, G.-J., Shen, Z.-B., & Lee, K. Y. (2017). Size-dependent resonance frequencies of longitudinal vibration of a nonlocal Love nanobar with a tip nanoparticle. *Mathematics and Mechanics of Solids, 22*(6), 1529-1542.

Li, X. F., Shen, Z. B., & Lee, K. Y. (2017). Axial wave propagation and vibration of nonlocal nanorods with radial deformation and inertia. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 97*(5), 602-616.

Lin, S.-S., & Shen, Y.-C. (2005). Stress fields of a half-plane caused by moving loads-resolved using doublet mechanics. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 25*(12), 893-904.

Ling, O., Xiao-Zhou, L., Jie-Hui, L., & Xiu-Fen, G. (2014). Ultrasonic tissue characterization of skin tissue using doublet mechanics method. *ACTA PHYSICA SINICA, 63*(10).

Liu, J., & Ferrari, M. (2002). Mechanical spectral signatures of malignant disease? A small-sample, comparative study of continuum vs. nano-biomechanical data analyses. *Disease markers, 18*(4), 175-183.

Liu, P., Gao, H., & Zhang, Y. (2008). Spontaneous generation and propagation of transverse coaxial traveling waves in multiwalled carbon nanotubes. *Applied Physics Letters, 93*(1), 013106.

Liu, X. H., Liu, Y., Kushima, A., Zhang, S., Zhu, T., Li, J., & Huang, J. Y. (2012). In situ TEM experiments of electrochemical lithiation and delithiation of individual nanostructures. *Advanced Energy Materials, 2*(7), 722-741.

Love, A. (1959). 1. A treatise on the mathematical theory of elasticity. In: Cambridge University Press.

Ma, H., Gao, X.-L., & Reddy, J. (2008). A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 56*(12), 3379-3391.

Mastorakos, I., Abdolrahim, N., & Zbib, H. (2010). Deformation mechanisms in composite nano-layered metallic and nanowire structures. *International Journal of Mechanical Sciences, 52*(2), 295-302.

Matsunaga, H. (2001). Vibration and buckling of multilayered composite beams according to higher order deformation theories. *Journal of Sound and Vibration, 246*(1), 47-62.

Mindlin, R. (1964). Micro− structure in Linear Elasticity Arch. *Rational Mech. Anal. VoL ユ, 6*, 51-781964.

Murmu, T., & Adhikari, S. (2010a). Nonlocal effects in the longitudinal vibration of double-nanorod systems. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, 43*(1), 415-422.

Murmu, T., & Adhikari, S. (2010b). Nonlocal transverse vibration of double-nanobeam-systems. *Journal of applied physics, 108*(8), 083514.

Murmu, T., & Adhikari, S. (2011). Axial instability of double-nanobeam-systems. *Physics Letters A, 375*(3), 601-608.

Murmu, T., & Pradhan, S. (2009). Thermo-mechanical vibration of a single-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium based on nonlocal elasticity theory. *Computational Materials Science, 46*(4), 854-859.

Narendar, S. (2011). Terahertz wave propagation in uniform nanorods: a nonlocal continuum mechanics formulation including the effect of lateral inertia. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, 43*(4), 1015-1020.

Narendar, S., & Gopalakrishnan, S. (2011). Axial wave propagation in coupled nanorod system with nonlocal small scale effects. *Composites Part B: Engineering, 42*(7), 2013-2023.

Natsuki, T., Hayashi, T., & Endo, M. (2005). Wave propagation of carbon nanotubes embedded in an elastic medium. *Journal of applied physics, 97*(4), 044307.

Ni, Z., & Hua, H. (2018). Axial-bending coupled vibration analysis of an axially-loaded stepped multi-layered beam with arbitrary boundary conditions. *International Journal of Mechanical Sciences, 138*, 187-198.

Oniszczuk, Z. (2000). Free transverse vibrations of elastically connected simply supported double-beam complex system. *Journal of Sound and Vibration, 232*(2), 387-403.

Papargyri-Beskou, S., Polyzos, D., & Beskos, D. (2003). Dynamic analysis of gradient elastic flexural beams. *Structural Engineering and Mechanics, 15*(6), 705-716.

Pavlović, I. R., Karličić, D., Pavlović, R., Janevski, G., & Ćirić, I. (2016). Stochastic stability of multi-nanobeam systems. *International Journal of Engineering Science, 109*, 88-105.

Pourasghar, A., & Kamarian, S. (2013). Three-dimensional solution for the vibration analysis of functionally graded multiwalled carbon nanotubes/phenolic nanocomposite cylindrical panels on elastic foundation. *Polymer Composites, 34*(12), 2040-2048.

Pradhan, S. (2012). Nonlocal finite element analysis and small scale effects of CNTs with Timoshenko beam theory. *Finite elements in analysis and design, 50*, 8-20.

Rahmani, O., Hosseini, S., & Parhizkari, M. (2017). Buckling of double functionally-graded nanobeam system under axial load based on nonlocal theory: an analytical approach. *Microsystem Technologies, 23*(7), 2739-2751.

Reddy, J. (1984). A simple higher-order theory for laminated composite plates.

Reddy, J. (2002). Energy principles and variational methods.

Reddy, J. (2007). Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams. *International Journal of Engineering Science, 45*(2-8), 288-307.

Rezouali, K., & Belkhir, M. (2008). An ab initio study of a model of single wall GaN nanotubes with oxygen and zinc as impurities: structural and electronic properties. *ACTA PHYSICA POLONICA SERIES A, 113*(2), 713.

Ru, C. (2001). Axially compressed buckling of a doublewalled carbon nanotube embedded in an elastic medium. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 49*(6), 1265-1279.

Ru, C. (2002). Intrinsic vibration of multiwalled carbon nanotubes. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 3*(3-4), 735-736.

Saadatnia, Z., & Esmailzadeh, E. (2017). Nonlinear harmonic vibration analysis of fluid-conveying piezoelectric-layered nanotubes. *Composites Part B: Engineering, 123*, 193-209.

Sadd, M. H., & Dai, Q. (2005). A comparison of micro-mechanical modeling of asphalt materials using finite elements and doublet mechanics. *Mechanics of Materials, 37*(6), 641-662.

Seelig, J., & Hoppmann, I. (1963). *Impact on an elastically connected double beam system*. Retrieved from

Seif, A., Aghaie, H., & Majlesi, K. (2007). Influences of Si and C-Doping on the Al-27 and N-14 Quardrupole Coupling Constants in AlN Nanotubes: A DFT Study. *International Journal of Chemical and Molecular Engineering, 1*(5), 54-58.

Silling, S. A. (2000). Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 48*(1), 175-209.

Soldatos, K. P., & Sophocleous, C. (2001). On shear deformable beam theories: the frequency and normal mode equations of the homogeneous orthotropic Bickford beam. *Journal of Sound and Vibration, 242*(2), 215-245.

Strutt, J. W., & Rayleigh, B. (1945). *The theory of sound*: Dover.

Thai, H.-T. (2012). A nonlocal beam theory for bending, buckling, and vibration of nanobeams. *International Journal of Engineering Science, 52*, 56-64.

Thostenson, E. T., Ren, Z., & Chou, T.-W. (2001). Advances in the science and technology of carbon nanotubes and their composites: a review. *Composites science and technology, 61*(13), 1899-1912.

Timoshenko, S. P. (1921). LXVI. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 41*(245), 744-746.

Tsepoura, K., Papargyri-Beskou, S., Polyzos, D., & Beskos, D. (2002). Static and dynamic analysis of a gradient-elastic bar in tension. *Archive of Applied Mechanics, 72*(6-7), 483-497.

Tu, Z.-c., & Ou-Yang, Z.-c. (2002). Single-walled and multiwalled carbon nanotubes viewed as elastic tubes with the effective Young's moduli dependent on layer number. *Physical Review B, 65*(23), 233407.

Van Hove, L. (1953). The occurrence of singularities in the elastic frequency distribution of a crystal. *Physical Review, 89*(6), 1189.

Vu, H., Ordonez, A., & Karnopp, B. (2000). Vibration of a double-beam system. *Journal of Sound and Vibration, 229*(4), 807-822.

Wang, B., & Wang, K. (2013). Vibration analysis of embedded nanotubes using nonlocal continuum theory. *Composites Part B: Engineering, 47*, 96-101.

Wang, B., Zhao, J., & Zhou, S. (2010). A micro scale Timoshenko beam model based on strain gradient elasticity theory. *European Journal of Mechanics-A/Solids, 29*(4), 591-599.

Wang, C., Tan, V., & Zhang, Y. (2006). Timoshenko beam model for vibration analysis of multi-walled carbon nanotubes. *Journal of Sound and Vibration, 294*(4-5), 1060-1072.

Wang, D.-H., & Wang, G.-F. (2011). Surface effects on the vibration and buckling of double-nanobeam-systems. *Journal of Nanomaterials, 2011*, 12.

Wang, H., Dong, K., Men, F., Yan, Y., & Wang, X. (2010). Influences of longitudinal magnetic field on wave propagation in carbon nanotubes embedded in elastic matrix. *Applied Mathematical Modelling, 34*(4), 878-889.

Wang, J., & Musameh, M. (2003). Carbon nanotube/teflon composite electrochemical sensors and biosensors. *Analytical chemistry, 75*(9), 2075-2079.

Wang, L., Guo, W., & Hu, H. (2008). Group velocity of wave propagation in carbon nanotubes. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 464*(2094), 1423-1438.

Wang, Q. (2005). Wave propagation in carbon nanotubes via nonlocal continuum mechanics. *Journal of applied physics, 98*(12), 124301.

Wang, Q., Zhou, G., & Lin, K. (2006). Scale effect on wave propagation of double-walled carbon nanotubes. *International Journal of Solids and Structures, 43*(20), 6071-6084.

Wu, J., Layman, C., & Liu, J. (2004). Wave equations, dispersion relations, and van Hove singularities for applications of doublet mechanics to ultrasound propagation in bio-and nanomaterials. *The Journal of the Acoustical Society of America, 115*(2), 893-900.

Wu, J., Li, X., & Cao, W. (2013). Flexural waves in multi-walled carbon nanotubes using gradient elasticity beam theory. *Computational Materials Science, 67*, 188-195.

Xin, J., Xiao-Zhou, L., & Jun-Ru, W. (2009). Ultrasound attenuation in biological tissue predicted by the modified doublet mechanics model. *Chinese Physics Letters, 26*(7), 074301.

Yan-Fang, J., Jue, Z., Jing, F., & Ferrari, M. (2004). Dispersion analysis of wave propagation in cubic–tetrahedral assembly by doublet mechanics. *Chinese Physics Letters, 21*(8), 1562.

Yoon, J., Ru, C., & Mioduchowski, A. (2003). Vibration of an embedded multiwall carbon nanotube. *Composites Science and Technology, 63*(11), 1533-1542.

Zhang, B., He, Y., Liu, D., Gan, Z., & Shen, L. (2014). Non-classical Timoshenko beam element based on the strain gradient elasticity theory. *Finite elements in analysis and design, 79*, 22-39.

Zhang, Y., Lu, Y., Wang, S., & Liu, X. (2008). Vibration and buckling of a double-beam system under compressive axial loading. *Journal of Sound and Vibration, 318*(1-2), 341-352.

Zhang, Z., Wang, C., Challamel, N., & Elishakoff, I. (2014). Obtaining Eringen′ s length scale coefficient for vibrating nonlocal beams via continualization method. *Journal of Sound and Vibration, 333*(20), 4977-4990.

ÖZGEÇMİŞ

Ufuk GÜL, 1990 yılında İstanbul'un Beykoz ilçesinde doğmuştur. 2008 yılında Üsküdar Anadolu Lisesi'nden, 2013 yılında Uludağ Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makine Mühendisliği Bölümü'nden mezun olmuştur. 2014 yılında Trakya Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makine Mühendisliği Bölümü Mekanik Ananbilim Dalı'na Araştırma Görevlisi olarak atanmıştır. Aynı yıl Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans eğitimine başlamış ve 2015 yılında mezun olmuştur. 2016 yılında, Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Doktora eğitimine başlamış olup, halen Trakya Üniversitesi Makine Mühendisliği Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.

TEZ ÖĞRENCİSİNE AİT TEZ İLE İLGİLİ BİLİMSEL FAALİYETLER

Aydogdu, M., & Gul, U. (2018a). *Axial Wave Reflection and Transmission in Stepped Nanorods Using Doublet Mechanics Theory.* Paper presented at the MATEC Web of Conferences.

Aydogdu, M., & Gul, U. (2018b). Buckling analysis of double nanofibers embeded in an elastic medium using doublet mechanics theory. *Composite Structures, 202*, 355-363.

Aydogdu, M., & Gul, U. (2020). Longitudinal vibration of double nanorod systems using doublet mechanics theory. *Structural Engineering and Mechanics, 73*(1), 37.

Gul, U., Aydogdu, M., & Gaygusuzoglu, G. (2017). Axial dynamics of a nanorod embedded in an elastic medium using doublet mechanics. *Composite Structures, 160*, 1268-1278.

Gul, U., & Aydogdu, M. (2017). Wave propagation in double walled carbon nanotubes by using doublet mechanics theory. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, 93*, 345-357.

Gul, U., Aydogdu, M., & Gaygusuzoglu, G. (2018). Vibration and buckling analysis of nanotubes (nanofibers) embedded in an elastic medium using Doublet Mechanics. *Journal of Engineering Mathematics, 109*(1), 85-111.

Gul, U., & Aydogdu, M. (2018a). Noncoaxial vibration and buckling analysis of embedded double-walled carbon nanotubes by using doublet mechanics. *Composites Part B: Engineering, 137*, 60-73.

Gul, U., & Aydogdu, M. (2018b). Structural modelling of nanorods and nanobeams using doublet mechanics theory. *International Journal of Mechanics and Materials in Design, 14*(2), 195-212.

Gul, U., & Aydogdu, M. (2019). Vibration analysis of Love nanorods using doublet mechanics theory. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 41*(8), 351.