T.C.

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ BOYUTLU KÜRESEL YÜZEYDEKİ SKALER ALANIN CASİMİR ENERJİ YOĞUNLUĞU

BİLGE GÜLFİLİZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FİZİK ANABİLİM DALI

Tez Danışmanı: Prof. Dr. MUSTAFA ÖZCAN

EDİRNE-2024

BİLGE GÜLFİLİZ'in hazırladığı "**İKİ BOYUTLU KÜRESEL YÜZEYDEKİ SKALER ALANIN CASİMİR ENERJİ YOĞUNLUĞU"** başlıklı bu tez, tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından **Fizik** Anabilim Dalında bir **Yüksek lisans tezi** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri: İmza

Prof. Dr. Mustafa ÖZCAN

Prof. Dr. Metin ÖZDEMİR

Doç. Dr. Mehmet Akif SABANER

Tez Savunma Tarihi: 7/02/2024

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Mustafa ÖZCAN İmza

Tez Danışmanı

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü onayı.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Özlem ÇETİN ERDOĞAN

T.Ü. FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİZİK ANABİLİM DALI YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

DOĞRULUK BEYANI

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında, tüm verilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini, kullanılan verilerde tahrifat yapılmadığını, tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını, kullanılan tüm literatür bilgilerinin bilimsel normlara uygun bir şekilde kaynak gösterilerek ilgili tezde yer aldığını ve bu tezin tamamı ya da herhangi bir bölümünün daha önceden Trakya Üniversitesi ya da farklı bir üniversitede tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

7/ 02 /2024

Bilge GÜLFİLİZ

Yüksek Lisans Tezi

İki Boyutlu Küresel Yüzeydeki Skaler Alanın Casimir Enerji Yoğunluğu

T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı

ÖZET

Bu tez çalışmasında iki boyutlu tam ve yarım küre yüzeyi üzerinde kütlesiz konformal skaler alan ve kütlesiz konformal olmayan skaler alanın Casimir enerjisi yeniden hesaplanmıştır. Öncelikle tam ve yarım küre yüzeyi üzerinde Dirichlet ve Neumann sınır değer koşulları göz önüne alınarak kütlesiz konformal skaler alanın Casimir enerjisi modların toplamı yöntemi ile hesaplanmıştır. Daha sonra nokta ayrıştırma yöntemi kullanılarak tam küre yüzeyi üzerinde kütlesiz konformal skaler alanın Casimir enerji yoğunluğu yeniden elde edilmiştir. Son olarak kütlesiz konformal olmayan skaler alanın tam ve yarım küre yüzeyleri üzerinde Dirichlet ve Neumann sınır değer koşullarına göre ürettiği modlar göz önüne alınarak konformal olmayan skalar alanın Casimir enerjisi zeta fonksiyonu regülarizasyonu ile elde edilmiştir.

Yıl **: 2024**

Sayfa Sayısı **: 62**

Anahtar Kelimeler : Casimir Enerji, Kütlesiz Konformal Skaler Alan, Kütlesiz Konformal Olmayan Skaler Alan, İki Boyutlu S^2 Yüzeyi, Yarım İki Boyutlu S^2 Yüzeyi, Dirichlet ve Neumann Sınır Koşulları, Renormalizasyon, Regülarizasyon, Kuantum Boşluk Enerjisi

Master Thesis

Casimir Energy Density of the Scalar Field on Two-Dimensional Spherical Surface

Trakya University Institute of Natural Sciences

Department of Physics

ABSTRACT

In this thesis, the Casimir energy of a massless conformal scalar field and a massless non-conformal scalar field on the surface of two-dimensional full and half spheres has been recalculated. Firstly, we have re-evaluated the Casimir energy of a massless conformal scalar field on the full and half surface S^2 with both the Dirichlet and the Neumann boundry condition of a 3-dimensional Riemann sphere by using the mode sum methods. Then, the Casimir energy density of a massless conformal scalar field on the surface of the full sphere has been recalculated by using the point-splitting method. Finally, the Casimir energy of a massles non-conformal scalar field on the full and half sphere S^2 with both the Dirichlet and Neumann boundry conditions has been obtained by using zeta function regularization.

Year : 2024

Pages : 62

Keywords : Casimir Energy, Massless Conformal Scalar Field; Non-conformal Massless Scalar Field, Two-Dimensional S^2 Surface, Half Two-Dimensional S^2 Surface, Dirichlet and Neumann Boundary Conditions, Renormalization, Regularization, Quantum Vacuum Energy

TEŞEKKÜR

Öncelikle bu araştırmanın gerçekleştirilmesinde bana yol gösteren, yüksek lisans eğitimim sırasında benden bilgi birikimlerini esirgemeyen danışmanım Prof. Dr. Mustafa ÖZCAN'a, bu süreçte gösterdikleri sabır ve destek ile birlikte; her zaman yanımda olan kız kardeşim Zeynep KABA'ya, eşim Meriç Utku GÜLFİLİZ'e ve aileme sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **İV**

ABSTRACT ..... **V**

TEŞEKKÜR ..... **Vİ**

İÇİNDEKİLER ..... **Vİİ**

SİMGELER DİZİNİ ..... **İX**

ÇİZELGELER DİZİNİ ..... **X**

BÖLÜM 1 ..... **1**

GİRİŞ **1**

BÖLÜM 2 ..... **8**

İKİ BOYUTLU S^2 KÜRE YÜZEYİNDEKİ KÜTLESİZ KONFORMAL SKALER ALANIN CASIMIR ENERJİSİ **8**

2.1 Modların Toplamı Yöntemi İle Enerji Hesabı **9**

2.2 Nokta Ayrıştırma Yöntemine Göre Enerji Yoğunluğu Hesabı **30**

BÖLÜM 3 ..... **37**

İKİ BOYUTLU KÜRE S^2 YÜZEYİNDEKİ KÜTLESİZ KONFORMAL OLMAYAN SKALER ALANIN CASIMIR ENERJİSİ **37**

SONUÇLAR **46**

KAYNAKLAR 49

ÖZGEÇMİŞ.....52

SİMGELER DİZİNİ

R :	Ricci Skaleri
$T_{\mu v}$:	Enerji- Momentum Tensörü
$g_{\mu v}$:	Metrik Tensörü
$\square$:	D'Alembert Operatörü
ξ:	Konformal Faktör
ω:	Enerji öz frekansı
E_c:	Casimir Enerjisi
$\Phi(x)$:	Kuantum Alan Operatörü
$\bar{E}_0$:	Kesilim Fonksiyonu ile Belirlenen Casimir Enerji
$\tilde{E}_0$:	Minkowski Uzay-zamandaki Kuantum Vakum Enerji
E_{ren}:	Renormalize Edilmiş Kuantum Vakum Enerji

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 1.1 n-boyutlu Einstein evrenleri için renormalize edilmiş kuantum boşluk enerjisi ve enerji yoğunluğu 4

Çizelge 2.1.1 Kütlesiz konformal skaler alanın tam küre yüzeyinde N değerleri 15

Çizelge 2.1.2 Kütlesiz konformal skaler alanın Neumann sınır koşullarına göre, l ve m'ye bağlı modların dağılımı 20

Çizelge 2.1.3 Kütlesiz konformal skaler alanın Dirichlet sınır koşullarına göre, l ve m'ye bağlı modların dağılımı 20

Çizelge 2.1.4 Sınır koşulları altında dejenere durum sayıları 21

Çizelge 3.1 Kütlesiz konformal olmayan skaler alanın tam küre yüzeyinde N değerleri 40

Çizelge 3.2 Kütlesiz konformal olmayan skaler alanın Neumann sınır koşullarına göre, l ve m'ye bağlı modların dağılımı 40

Çizelge 3.3 Kütlesiz konformal olmayan skaler alanın Dirichlet sınır koşullarına göre, l ve m'ye bağlı modların dağılımı 41

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Boşluğun boş olmadığı, kuantum alan teorisinin gözlem ile doğrulanmış öngörülerinden biridir. Klasik fiziğe göre boşluk, mutlak sıfır sıcaklığına kadar soğutulmuş bir ortam olarak tanımlanır ve hiçbir şeyi içermez. Fakat kuantum alan teorisi bize boşluğun boş olmadığını söyler. Yani boşluk, geri zemindeki uzay-zamanda kuantize edilmiş elektromanyetik alanların taban durumundaki sonsuz modlar ile doludur. Kuantum alan teorisine göre boşluk, kısa sürede var olan ve yok olan sanal parçacıkların geri zemindeki uzay-zamanda kuantum dalgalanmasından oluşur. Parçacıklar var olursa ortamdan enerji alır, yok olursa ortama enerji vererek bir dalgalanma oluştururlar. Bu dalgalanmalar kuantum dalgalanma olarak adlandırılır.

Heisenberg'in belirsizlik ilkesi kuantum mekaniğinin temel ilkelerinden biridir. Bu ilke, bir parçacığın konumunu ve o konuma ait momentumunu aynı anda ve tam kesinlikle ölçmenin mümkün olmadığını söyler (Heisenberg,1927). Eğer boşluk klasik mekaniğe göre boş ve hiçbir şey içermiyor ise elektromanyetik alan ve kütleçekim alanı da yer alamaz. Çünkü alan tıpkı noktasal parçacık gibi konum ve alanın zaman içindeki değişiminden oluşur. Eğer alan yoksa konum sıfır demektir ve beraberinde alanın değişim hızı da sıfır olacaktır. Bu durum belirsizlik ilkesini bozar çünkü $\Delta x = 0$ ve aynı anda $\Delta p = 0$ olacak demektir. Halbuki, belirsizlik ilkesi konum ve konuma ait alanın değişiminin çarpımının belirsizliğinin $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$.olması gerektiğini söyler. İşte bu

sebepten ötürü, belirsizlik ilkesinin öngördüğü gibi uzay boşluktan oluşmaz, geri planda var olan kuantize edilmiş alanın taban durum dalgalanması vardır.

Tarihsel olarak; ilk defa 1948 yılında Hendrick Casimir tarafından kuantum vakum enerjisi hesaplanmıştır. Casimir, $T = 0$ mutlak sıfır sıcaklığında paralel yüksüz iki metal levhanın birbirine doğru çekme kuvveti uygulayabileceğini hesaplamıştır (Casimir, 1948). Casimir, sanal parçacıkların sebep olduğu kuantum dalgalanmalarından oluşan boşluğa paralel plaka yerleştirildiğinde, geri zemindeki elektromanyetik alanın modlarının, boşluğa yerleştirilen plakalar aracılığıyla deforme olacağını ve bazı modların düzlemler arasında kalarak, bazı modların ise frekanslarının büyüklüğü sebebiyle düzlemleri delip geçerek salınımlarına devam edeceğini, plakaların arasında kalan modların plakaları birbirine doğru çeken çekici bir kuvvet üreteceğini söyledi. Casimir boşlukta iki levha arasındaki çekici kuvveti teorik olarak;

$$F = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4} \tag{1.1}$$

hesapladı. Burada $\hbar$ Planck sabiti, c ışık hızı ve a levhalar arasındaki uzaklıktır. Matematiksel olarak gösterilen bu kuvvetin deneysel sonucu ilk defa M. J. Sparnaay (1958) ve D. Tabor (1969) tarafından laboratuvarda gözlemlenmiştir. Deney şu şekilde gerçekleştirilir: tamamen bütün etkilerden yalıtılmış ve soğutulmuş bir ortama iki metal levha birbirine paralel olacak şekilde yerleştirilir. Klasik fiziğe göre beklenen davranış, boşluk ortamında levhaların hareketsiz kalmasıdır. Fakat deney sonucunda levhaların birbirine yaklaştığı gözlemlenmiştir. Levhalar arasındaki uzay sınırlı olduğundan içeride oluşan geri zemindeki alanın salınım modları dışarıdaki alanın modlarından farklı olur bu durumda plakaların içindeki ve dışındaki modların birbiri ile uyuma zorlanması, levhaların birbirine doğru itilmesine sebep olur (Sparnaay, 1958). Bu itmeye sebep olan şey hiçliğin enerjisi yani sıfır nokta enerjisidir. Bu olay Casimir etkisi olarak adlandırılır. Casimir etki kuantum alan teorisinin ölçülebilen bir sonucudur ve boşluğun boş olmadığının öngörüsüdür.

Daha sonraki yıllarda deneysel fizikçiler hassas ölçüm cihazları ile Casimir etkiyi gözlemiş ve bu kuvveti 1997 yılında S. K. Lamoreaux (1997) ölçüm değerini %5 hata ile 1cm^2 alan başına, $1\ \mu m$ aralıkta 1.3×10^{-7} N olarak ölçmüştür. Casimir bu çekici

kuvvetin değerinin sadece paralel plakalar için değil diğer geometrik yapılar içinde aynı olacağını düşünmüş ve bir elektron modeli kurabileceğini ümit etmiştir. Elektron modeli teorisini ileri sürerken küresel kabuktaki sonuçların aynı paralel plaka gibi negatif değerli enerji üreteceğini düşünmüştür. Fakat 1968 yılında Boyer küresel kabuk için Casimir enerjisini pozitif işaretli ve küre kabuğunun yarıçapına bağlı olarak hesaplamıştır. Enerjinin pozitif değeri; küre kabuğunun dışarı doğru itildiğini yani kabuk üzerinde itici bir kuvvet üretildiğini gösterir (Boyer, 1968). Yetmişli yılların ortasında küresel kabuk için Casimir enerjisi, Milton ve arkadaşları tarafından, Green's fonksiyon yöntemi kullanılarak yeniden hesaplanmış ve Boyer'in bulduğu sonuç ile tutarlı olduğu gösterilmiştir (Milton vd., 1978). Nesterenko ve Hagen tarafından, küresel kabuk için Casimir enerjisi kontur integrasyonu ve modların toplamı yöntemi ile yeniden ele alınmış ve elde edilen sonuçlar Boyer ve Milton'un sonuçlarını doğrulamıştır (Nesterenko ve Pirozhenko, 1998; Bowers ve Hagen, 1999). Böylelikle yapılan çalışmalarla, Casimir enerjisinin sürekli aynı işareti vermeyeceği, vakum enerjisinin işaretinin alandan alana, geometriden geometriye, aynı geometrik yapıda da olsa boyuttan boyuta ve sınır değer koşullarına bağlı olarak değişeceği gösterilmiştir (Mostepanenko, 1997; Özcan, 2006**).**

Casimir etkinin incelenmesi yalnızca paralel plakalar ve küre kabuğu ile sınırlı kalmamış, Ford (1975) tarafından geri zeminde bulunan eğrilmiş uzay-zamana yerleştirilen kütlesiz konformal skaler alanın kuantum vakum enerjisi hesaplanmıştır. Ford geri zemindeki eğri uzay-zamanı Einstein evreni (n = 4) olarak seçmiş ve kütlesiz konformal skaler alanın kuantum vakum enerji yoğunluğunu mod toplama yönteminde üstel kesilim fonksiyonunu kullanarak hesaplamıştır. Ford, kütlesiz konformal skaler alanda boşluğun enerji yoğunluğunun aşağıdaki şekilde ifade edilebileceğini göstermiştir.

$$\rho = \frac{\hbar c}{480\pi^2 R_0^4}. \tag{1.2}$$

Burada R_0 Einstein evreninin yarıçapı. Ford'un hesabında yeniden normalize edilmiş kuantum vakum enerji yoğunluğunun değeri pozitif yani "itici" bir kuvvet olarak ortaya çıkmıştır. Dowker ve Critchley nokta ayrıştırma metodu kullanarak enerji yoğunluğunu yeniden hesaplamış ve Ford'un sonucunu doğrulamıştır (Dowker, Critchley, 1976). Tıpkı paralel plaka ve küresel kabukta olduğu gibi kuantum boşluk enerjisinin hesaplamalarında sonsuzluklar karşımıza çıkmaktadır. Bu sonsuzlukların belirlenmesine

regülarizasyon, bu ifadelerden sonlu ifadeler çıkarmaya ise renormalizasyon denir (Mostepanenko, Trunov, 1997; Nesterenko, Pirozhenko, 1997; Bayın, 2004). Sıfır nokta enerjisi hesaplarında kullanılan regülarizasyon teknikleri, Green's fonksiyonu (Milton, 1983), modların toplama yöntemi (Ford, 1975), zeta fonksiyon regülarizasyonu (Elizalde, Romeo, 1989) ve nokta ayrıştırma yöntemi regülarizasyonu (Dowker ve Critchley, 1976; Özcan, 1993, 2006) gibi yöntemlerdir. İlerleyen yıllarda eğri uzayda *n* boyutlu Einstein evreninde kütlesiz konformal skaler alan için Casimir enerjisi ve Casimir enerji yoğunluğu, nokta ayrıştırma, mod toplama ve zeta fonksiyonu regülarizasyon yöntemleri ile yeniden ele alınmış sonuçlar (Özcan, 2006);

Çizelge 1.1 n-boyutlu Einstein evrenleri için renormalize edilmiş kuantum boşluk enerjisi ve enerji yoğunluğu,

n= uzay zaman boyutu	S^{n-1} yüzey boyutu	ρ_0^n vakum enerji yoğunluğu	$E_0^{(n)}$ vakum enerjisi
n=2	S^1	$-\frac{1}{24\pi R_0^2}$	$-\frac{1}{12R_0}$
n=3	S^2	0	0
n=4	S^3	$\frac{1}{480\pi^2 R_0^4}$	$\frac{1}{240R_0}$
n=5	S^4	0	0
n=6	S^5	$-\frac{31}{60\,480\pi^3 R_0^6}$	$-\frac{31}{60\,480R_0}$
n=7	S^6	0	0
n=8	S^7	$\frac{289}{1209\,600\pi^4 R_0^8}$	$\frac{289}{3628\,800R_0}$
n=9	S^8	0	0
n=10	S^9	$-\frac{317}{190\,800\pi^5 R_0^{10}}$	$-\frac{317}{22\,809\,600R_0}$
n=11	S^{10}	0	0
n=12	S^{11}	$\frac{6803\,477}{43\,589\,145\,600\pi^6 R_0^{12}}$	$\frac{6803\,477}{2615\,348\,736\,000R_0}$

Çizelge 1.1'de özetlenmiştir.

Çizelge 1.1'e bakıldığında Einstein evreninde tüm çift boyutlu yüzeylerde renormalize edilmiş kütlesiz koformal skaler alanın kuantum boşluk enerjisi ve enerji yoğunluğunun sıfır değerini ürettiği, tek boyutlu yüzeylerde ise "+" ve "-" değer alarak dalgalandığı görülür. Sonuç olarak *n*-boyutlu Einstein evreninde Casimir enerjisinin ve yoğunluğunun işareti uzay-zaman boyutuna bağlı olarak değişmektedir. Kütlesiz konformal skaler alanda, geometri aynı kalacak şekilde farklı boyutlarda farklı sonuçlar elde edilmiş ve çeşitli regülarizasyon yöntemleri kullanılarak aynı sonuçların bulunduğu görülmüştür (Özcan,2006).

Bu çalışmada iki boyutlu küre yüzeyinde kütlesiz konformal skaler alan ve kütlesiz konformal olmayan skaler alanın Casimir enerjisi çeşitli regülarizasyon yöntemleri kullanılarak incelenecektir. Burada konformal dönüşüm, sonsuz fiziksel bir uzay-zamanı temsil eden ds metriği ile belirlenmiş bir manifoldun, sonsuzdaki durumunun sınır koşulları koyularak sonlu hale getirildiği dönüşümdür. Bu dönüşümde, geometrik yapıdaki vektörler arasındaki açılar değişmez kalır. Metrik ise $ds = \Omega d\tilde{s}$ olarak dönüşür. Alanın modlarını üreten dalga denklemleri geri zemindeki geometrik yapının özelliklerini temsil eden metrik ile ifade edilir. Eğer metriğe bağlı manifold konformal dönüşüme tabii tutulursa dolayısıyla dalga denklemleri de dönüşüme tabi tutulmalıdır. Bu durumda alan konformal alan özelliğine sahip olur.

Elizalde konformal olmayan kütlesiz skaler alan için S^1, S^2, S^3, S^4 boyutlu yüzeylerde vakum enerji işaretinin negatif değer alacağını göstermiştir (Elizalde, 1994). Çizelge 1.1'de özetlendiği gibi kütlesiz konformal skaler alan için S^1, S^2, S^3, S^4 boyutlu yüzeylerde vakum enerji değerinin işaretleri değişiyor olmasına rağmen (Özcan, 2006), Elizalde kütlesiz konformal olmayan skaler alan için vakum enerjisi işaretinin S^1, S^2, S^3, S^4 boyutlu yüzeylerde aynı olacağını göstermiştir. O halde, Casimir enerjisinin işareti, alanın konformal olması ya da olmamasına bağlı olarak da değişmektedir. Bu çalışmada; S^2 yüzeyi göz önüne alınarak, kütlesiz konformal skaler alanda renormalize edilen enerjinin değeri "0" olarak yeniden üretileceği kütlesiz konformal olmayan skaler alanda ise negatif değerli enerji üreteceği yeniden gösterilecektir. Konformal alan ve konformal olmayan alanda kuantum vakum hesaplarının farklı ortaya çıkmasının sebebi, kuantum alan teorisi için anlaşılması gereken önemli bir olaydır.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde, iki boyutlu tam küre yüzeyine yerleştirilmiş kütlesiz konformal skaler alanın Casimir enerjisi, modların toplamı yöntemine göre hesaplanacaktır. Modların toplamı yöntemine göre Casimir enerjisi hesabının doğası gereği ortaya çıkan sonsuzluklar kesilim fonksiyonu aracılığıyla regülarize edilecektir. Benzer şekilde, yarım küre yüzeyine yerleştirilmiş kütlesiz konformal skaler alanın Casimir enerjisi, modların toplamı yöntemi ile Dirichlet ve Neumann sınır koşullarına bağlı olarak hesaplanacaktır. Yarım S^2 yüzeyinde Dirichlet ve Neumann sınır değer koşullarına göre yapılan hesaplamalarda ortaya çıkan sonsuzluklar tıpkı tam S^2 yüzeyindeki gibi $e^{-\alpha\omega}$ $(\alpha > 0)$ olarak tanımlanan bir kesilim fonksiyonu ile regülarize edilecektir. Fakat bu kesilim fonksiyonuna göre renormalize edilmiş Casimir enerjisinin içerisinde hala sonsuzluklar olduğundan, alternatif kesilim fonksiyonu aracılığıyla vakum enerji yeniden elde edilecektir. Daha sonra S^2 küre yüzeyine yerleştirilen kütlesiz konformal skaler alanın enerji yoğunluğu nokta ayrıştırma yöntemi gereğince elde edilecektir.

Son olarak üçüncü bölümde, üç boyutlu Riemann küresinin iki boyutlu yüzeyinde kütlesiz konformal olmayan skaler alan için modların tespiti yapılacak, Dirichlet ve Neumann sınır koşulları altında, zeta fonksiyonu regülarizasyonu yöntemi kullanılarak renormalize edilmiş Casimir enerjisi yeniden hesaplanacaktır. Konformal olmayan skaler alanda tam S^2 yüzeyi için Casimir enerjisi, yarım S^2 yüzeyleri için modların dağılımı hesaplanarak toplamlarından elde edilecektir. Bu sebeple önce zeta fonksiyonu regülarizasyonu yöntemi ile yarım S^2 yüzeyinde Dirichlet (S_D^2) ve Neumann (S_N^2) sınır koşullarına bağlı olarak modlar dağılımı elde edilecek ve yarım yüzeylerin toplamından tam S^2 yüzeyi için renormalize edilmiş Casimir enerjisi yeniden elde edilecektir.

Sonuçlar bölümünde, kütlesiz konformal skaler alan ve kütlesiz konformal olmayan skaler alan için elde edilen sonuçlar kullanılan regülarizasyon yöntemleri ile birlikte karşılaştırılacaktır.

Bu çalışmanın temeli “Casimir energy of the massless scalar field on S-2 by the point-splitting method” (Bayın & Özcan, 1997) ve “The Vacuum Energy Density For Spherical And Cylindrical Universes” (Elizalde, 1994) makalelerine dayanmaktadır.

Bu çalışmada $\hbar = c = 1$ olarak alınmıştır. Kullandığımız metrik ise $(+,-,-)$ şeklindedir.

BÖLÜM 2

İKİ BOYUTLU S^2 KÜRE YÜZEYİNDEKİ KÜTLESİZ KONFORMAL SKALER ALANIN CASIMIR ENERJİSİ

Bu bölümde S^2 küre yüzeyi üzerine yerleştirilmiş kütlesiz konformal skaler alanın modların toplamı yöntemine göre kuantum boşluk enerjisi hesaplanacaktır. Ayrıca Dirichlet ve Neumann sınır koşullarına göre yarım küre yüzeyi üzerine yerleştirilen kütlesiz konformal skaler alanın, modların toplamı yöntemi ile Casimir enerjisi yeniden elde edilecektir. Modların toplamı yönteminde uygulanan geleneksel kesici fonksiyon yerine, alternatif kesici fonksiyon uygulanarak Dirichlet ve Neumann sınır koşullarına uyan yarım küre yüzeyi üzerindeki kuantum vakum enerjisi yeniden hesaplanacaktır. Farklı regülarizasyon yöntemi olarak küre yüzeyi üzerine yerleştirilmiş kütlesiz konformal skaler alanın, nokta ayrıştırma yöntemine göre, Green's fonksiyonu aracılığıyla enerji momentum tensörü elde edilerek, enerji yoğunluğu yeniden üretilecektir.

2.1 Modların Toplamı Yöntemi İle Enerji Hesabı

Şimdi, S^2 yüzeyine yerleştirilen kütlesiz konformal skaler alanın Casimir enerjisini modların toplamı yöntemi ile hesaplayalım. Uzay-zamanda iki nokta arasındaki yay elemanının karesi

$$ds^2 = dt^2 - a^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) \qquad (2.1.1a)$$

olarak ifade edilir ve S^2 yüzeyinde metrik tensör ile yeniden ifade edersek

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \qquad (2.1.1b)$$

şeklinde yazılır. Burada g metrik tensörün determinantıdır ($g = \det\ g_{\mu\nu}$) ve $\mu, \nu = 0,1,2$ (t, θ, ϕ) olarak tanımlanır. $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 3$'dür. Kütlesiz konformal skaler alan,

$$\Phi = \sum_\lambda \left(a_\lambda^\dagger \psi_\lambda^* + a_\lambda \psi_\lambda\right), \qquad (2.1.2)$$

ile verilir. Burada Φ skaler alanı, ψ mod fonksiyonlarını, $a_\lambda^\dagger$ yaratıcı işlemciyi ve a_λ ise yokedici işlemciyi ifade eder. Kütlesiz konformal skaler alan için dalga denklemi (Birrell, Davies, 1982),

$$(\square + \xi R)\psi = 0 \qquad (2.1.3)$$

dır. Burada R Ricci sabiti, ξ konformal sabiti ve $\square$, D'Alembert operatörüdür. n uzay-zaman boyutuna göre konformal sabit (Birrell, Davies, 1982);

$$\xi(n) = \frac{1}{4}\frac{(n-2)}{(n-1)} \qquad (2.1.4)$$

ile verilir. n = 3 için konformal sabit $\xi = \frac{1}{8}$ olarak bulunur. $g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R$'dir. Denklem (2.1.1a) kullanılarak $R = \frac{2}{a^2}$ olarak bulunur. Bu durumda konformal alanın modlarını belirleyen dalga denklemi,

$$\left(\square + \frac{1}{4a^2}\right)\psi = 0 \tag{2.1.5}$$

olacaktır. Burada D'Alembert operatörü

$$\square\,\psi = \frac{1}{\sqrt{(g)}}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\sqrt{g}g^{\mu\nu}\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu}\right). \tag{2.1.6}$$

olarak tanımlanır. (2.1.1) metriğine göre D'Alembert operatörü;

$$\square\,\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{1}{a^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{a^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} \tag{2.1.7}$$

olarak yazılır. (2.1.7) denklemini, (2.1.5) denkleminde kullanıldığında

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{1}{a^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{a^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{1}{4a^2}\psi = 0 \tag{2.1.8}$$

elde edilir. Değişken ayırma yöntemi gereğince (2.1.8) denkleminin çözümü

$$\psi = T(t)Y(\theta,\phi). \tag{2.1.9}$$

Bu çözüm (2.1.8) deklemini sağlamalıdır. Böylece,

$$\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} - \frac{1}{a^2}\frac{1}{Y}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2Y}{\partial\phi^2}\right\} + \frac{1}{4a^2} = 0 \tag{2.1.10}$$

elde edilir. Burada $Y(\theta,\phi)$

$$\frac{1}{Y}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2Y}{\partial\phi^2}\right\} = -l(l+1) \tag{2.1.11}$$

denklemi sağladığından,

$$Y \to Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{2.1.12a}$$

standart bildiğimiz Küresel Harmoniklerdir (Bell, 2004). l ve m'ler:

$$l = 0,1,2,\ldots,\ m = -l,\ldots,+l \tag{2.1.12b}$$

değerini alır.

Böylece (2.1.10) denklemine dönecek olursak,

$$\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2}+\frac{1}{a^2}l(l+1)+\frac{1}{4a^2}=0 \qquad (2.1.13)$$

haline gelir. Bu denklem yeniden düzenlenirse

$$\frac{d^2T}{dt^2}+\frac{1}{a^2}\left[\,l(l+1)+\frac{1}{4}\right]=0 \qquad (2.1.14)$$

elde edilir. Burada $\omega^2=\frac{1}{a^2}\left[\,l(l+1)+\frac{1}{4}\right]$ tanımı yapılırsa zamana bağlı denklem

$$\frac{d^2T}{dt^2}+\omega^2T=0 \qquad (2.1.15)$$

olur. Yukarıda yapılan tanımdan görüleceği gibi modların salınım frekansı aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\omega_l=\frac{1}{a}\left(l+\frac{1}{2}\right) \qquad (2.1.16a)$$

Burada, $l=0,1,2,\dots\,,\ m=-l,\dots,+l$'dir. Modların dağılımı ise

$$\psi_{lm}=C_0e^{-i\omega_l t}Y_{lm}(\theta,\emptyset) \qquad (2.1.16b)$$

şeklindedir. C_0 boylandırma sabitini ifade eder. Modları düzenleyebilmek adına, $a\omega=N$ olarak tanımlayalım.

Modları belirlenmiş kütlesiz konformal skaler alanın kuantum boşluk enerjisini Lagrange yoğunluğu kullanarak varyasyon tekniği ile elde edelim (Birrell, Davies, 1982; Milton, 2001; Mostepanenko ve Trunov, 1997). Lagrange yoğunluğu

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\sqrt{g}\left(g^{\mu\nu}\Phi_{;\mu}\Phi_{;\nu}-\frac{1}{8}R^2\Phi^2\right) \qquad (2.1.17)$$

ve uzay-zaman üzerinden integrali alınırsa etki fonksiyonu,

$$\mathcal{S}=\int \mathcal{L}d^3x. \qquad (2.1.18)$$

dır (Birrell, Davies, 1982; Milton, 2001). Etki fonksiyonunun Φ varyasyonu,

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \Phi} = 0 \tag{2.1.19}$$

kuantize edilmiş skaler alanın denklemni verir.. Kütlesiz konformal skaler alan için enerji momentum tensörü ise

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{2.1.20}$$

etki integralinin metrik tensörüne göre varyasyonu ile elde edilir. Burada g metrik tensörün determinantı, δ varyasyonu ve $\mathcal{S}$ etki fonksiyonudur. Enerji momentum tensörünü bulmak için etki teriminin varyasyonuyla aşağıdaki tanımlar kullanılırsa,

$$\delta\sqrt{g} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g}}\, \delta g \tag{2.1.21}$$

$$g^{\mu\nu}\, \delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{2.1.22}$$

$$\delta g = g g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \tag{2.1.23}$$

$$\delta\sqrt{g} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g}}(-g) g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{2.1.24}$$

$$\delta\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\delta\sqrt{g} g^{\mu\nu}\Phi_{;\mu}\Phi_{;\nu} + \sqrt{g}\delta g^{\mu\nu}\Phi_{;\mu}\Phi_{;\nu} - \frac{1}{8}\delta\sqrt{g}R\Phi^2 - \frac{1}{8}\sqrt{g}\delta R\Phi^2\right] \tag{2.1.25}$$

$$\delta R = -R^{\mu\nu}\, \delta g_{\mu\nu} + g^{\rho\sigma} g^{\mu\nu}\left(\delta g_{\rho\sigma;\mu\nu} + \delta g_{\rho\mu;\sigma\nu}\right) \tag{2.1.26}$$

ve (2.1.20) denkleminde yerine yazıldığında enerji momentum tensörü,

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{8}[6\Phi_{;\mu}\Phi_{;\nu} - 2g_{\mu\nu}g^{\sigma\rho}\Phi_{;\rho}\Phi_{;\sigma} - 2\Phi\Phi_{;\mu\nu} + 2g_{\mu\nu}g^{\sigma\rho}\Phi\Phi_{;\rho\sigma}$$

$$-R_{\mu\nu}\Phi^2 - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\Phi^2] \tag{2.1.27}$$

elde edilir. Kanonik momentumu, Lagrange formülasyonu ile ifade edersek,

$$\Pi = \frac{\partial L}{\partial(\partial_t \Phi)} = \partial_t \Phi \tag{2.1.28}$$

şeklindedir Burada Π ifadesi kanonik momentumu temsil eder. Kanonik kuantizasyona göre Φ değişkenini düzenlersek operatör gibi davranır ve komütasyon kurallarına uyarlar.

$$[\Phi(t,\vec{x}), \Phi(t,\vec{x}')] = 0$$

$$[\Pi(t,\vec{x}), \Pi(t,\vec{x}')] = 0$$

$$[\Phi(t,\vec{x}'), \Pi(t,\vec{x}')] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \tag{2.1.29}$$

alan modları ve bunların kompleks eşleniği, tam ve ortonormal bir küme oluşturur. Bundan dolayıΦ yaratıcı ve yok edici işlemciler cinsinden,

$$\Phi(t,\vec{x}) = \sum_{\lambda} \left[a_{\vec{\lambda}} \psi_{\vec{\lambda}} + \alpha_{\vec{\lambda}}^{\dagger} \psi_{\vec{\lambda}}^{*} \right] \tag{2.1.30}$$

yazılır. Burada †, hermitsel eşlenik, * komplex eşlenik anlamına gelir. $(\psi_\lambda, \psi_{\lambda'}) = \delta_{\lambda\lambda'}$ olarak tanımlıdır. Φ ve Π için eşit zamanlı komütasyon bağıntıları,

$$\left[a_{\vec{\lambda}}, a_{\vec{\lambda'}} \right] = 0$$

$$\left[a_{\vec{\lambda}}^{\dagger}, a_{\vec{\lambda'}}^{\dagger} \right] = 0$$

$$\left[a_{\vec{\lambda}}, a_{\vec{\lambda'}}^{\dagger} \right] = \delta_{\vec{\lambda}\vec{\lambda'}} \tag{2.1.31}$$

sağlanır. Burada $a_{\vec{\lambda}}$ yokedici operatör ve $a_{\vec{\lambda'}}^{\dagger}$ ise yaratıcı operatördür. $\mu, \nu = 0$ olursa enerji momentum tensörü

$$T_0^0 = \frac{1}{2}\left(\Phi_{,0}^2 - \Phi\Phi_{,00}\right) \tag{2.1.32}$$

olur. Burada $\Phi_{,0}^2$ ve $\Phi\Phi_{,00}$ terimleri zamana göre türevleri ifade eder. Şimdi skaler alan için Hamiltonyenleri tartışabiliriz. Enerji momentum tensörünün uzay üzerinden integrali alınırsa,

$$H = \int T_0^0 \sqrt{h} d^2x \tag{2.1.33}$$

dır. Denklem (2.31)'deki diklik bağıntıları kullanılarak denklem (2.1.33),

$$H = \frac{1}{2}\sum_{\vec{\lambda}} \left[a_{\vec{\lambda}}^{\dagger} a_{\vec{\lambda}} + a_{\vec{\lambda}} a_{\vec{\lambda}}^{\dagger}\right] \omega_{\vec{\lambda}} \tag{2.1.34}$$

ifadesine dönüşür. Hamilton işlemcisinin taban durumunda beklenen değeri (Plunien, Muller ve Greiner, 1986)

$$a_{\lambda}^{\dagger}|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

$$a_{\lambda}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

$$a_{\lambda}|0\rangle = 0 \tag{2.1.35}$$

(2.1.35) denklemi göz önüne alınarak yaratıcı ve yok edici işlemcilerinin özellikleri kullanıldığında

$$\langle 0|\mathrm{H}|0\rangle = \langle\, 0 \mid 0 \,\rangle \sum_{\vec{\lambda}} \frac{1}{2}\omega_{\vec{\lambda}} \tag{2.1.36}$$

elde edilir. Böylece kuantize edilmiş konformal skaler alanın kuantum vakum enerjisi modların frekansı ve dejenere değerleri cinsinden

$$E_c = \frac{1}{2}\sum_{l} w_l g_l \tag{2.1.37}$$

ifade edilir. Burada g_l dejenere değerlerdir. Casimir enerjisi;

$$E_c = \frac{1}{2\mathrm{a}} \sum_{l=0}^{\infty} \left(l + \frac{1}{2}\right) \sum_{m=-l}^{l} m^0 \tag{2.1.38}$$

burada, $\sum_{m=-l}^{l} m^0 = (2l+1)$ terimi, dejenere değerleri üretir. ω_l değerleri denklem (2.1.16)'da gösterilmiştir. Kütlesiz konformal skaler alanın S^2 boyutlu yüzeyde kuantum vakum enerjisi

$$E_c = \frac{1}{2a}\sum_{l=0}^{\infty}\left(l+\frac{1}{2}\right)(2l+1) \tag{2.1.39}$$

olacaktır. Yeniden düzenlenirse,

$$E_c = \frac{1}{a}\sum_{l=0}^{\infty}\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 \tag{2.1.40}$$

toplamı elde edilir. $a\omega = N$ alındığında modların dağılımını tablo haline getirebiliriz. Çizelge 2.1.1'de okunan değerler N sabitinin l ve m'ye göre dağılımını gösterir.

Çizelge 2.1.1 Kütlesiz konformal skaler alanın tam küre yüzeyinde N değerleri

m \ l	0	1	2	3	4	5	.
0	1/2	3/2	5/2	7/2	9/2	11/2	.
±1		3/2	5/2	7/2	9/2	11/2	.
±2			5/2	7/2	9/2	11/2	.
±3				7/2	9/2	11/2	.
±4					9/2	11/2	.
±5						11/2	.
							. . .

Çizelge (2.1.1)'den anlaşılacağı gibi l değerleri sonsuza giderken (2.1.40) denklemi de sonsuza gitmektedir. Casimir enerjisindeki toplam ifadesine, modların toplamı yöntemi gereğince, $e^{-\alpha\omega}$ $(\alpha > 0)$ gibi bir kesilim fonksiyonu uygulayarak bu toplamı sonsuza

götüren terimlerin kesilim fonksiyonu aracılığı ile belirlenmesi gerekmektedir. Renormalize edilmiş Casimir enerjisini elde edebilmek için denklem (2.1.40) kesilim parametresine bağlı olarak yeniden yazılırsa

$$\bar{E}_0 = \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{a} \sum_{l=0}^{\infty} e^{-\alpha\omega} \left(l + \frac{1}{2}\right)^2 \tag{2.1.41}$$

elde edilir $(\alpha > 0)$. Denlem (2.1.41) ifadesi Euler-Maclaurin toplam formülü ile hesaplanacaktır. Euler-Maclaurin toplam formülü, sürekli ve türevlenebilir bir fonksiyonun integralinin belirli bir toplamını ve bazı düzeltme terimlerini hesaplamak için kullanılabilir. Euler-Maclaurin toplam formülü göz önüne alınırsa, (Abramowitz, Stegun, 1964; Arfken, Weber, 1966; Bayın, 2004)

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{n} F(j) = \int_0^n F(x)dx + \frac{1}{2}F(0) + \frac{1}{2}F(n) \\ &+ \sum_{s=1}^{m-1} \frac{B_{2s}}{(2s)!}\left(F^{(2s-1)}(n) - F^{(2s-1)}(0)\right) \\ &+ \int_0^n [B_{2m} - B_{2m}(x - |x|)]F^{(2m)}(x)dx \\ &= F(0) + F(1) + \cdots \ldots + F(n). \end{aligned} \tag{2.1.42}$$

Burada *m* ve *n m>0, n>0* şeklinde olan tam sayılardır ve türevlerin tanımı

$$F^{(2m)}(x) = \frac{d^{2m}F(x)}{dx^{2m}} \tag{2.1.43}$$

şeklindedir. (2.1.42) denklemindeki ifade (0, *n*) aralığında integrallenebilir. B_{2m} Bernoulli sayılarıdır. Burada hesaplanması gereken F fonksiyonu (2.1.41) denklemine göre,

$$F(l) = e^{-\alpha/a(l+1/2)} \left(l + \frac{1}{2}\right)^2 \tag{2.1.44}$$

dır.

Gerekli düzenlemeler yapıldığında Euler-Maclaurin toplam formülünün $n \longrightarrow \infty$ limitinde son hali

$$\sum_{l=0}^{\infty} F(l) = \int_0^{\infty} F(x)dx + \frac{1}{2}F(0) + \frac{1}{2}F(\infty)$$

$$+\frac{B_2}{2!}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x\to\infty} - \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x\to 0}\right)$$

$$+\frac{B_4}{4!}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\Big|_{x\to\infty} - \frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\Big|_{x\to 0}\right)$$

$$+\frac{B_6}{6!}\left(\frac{\partial^5 F}{\partial x^5}\Big|_{x\to\infty} - \frac{\partial^{5F}}{\partial x^5}\Big|_{x\to 0}\right) \ldots\cdots + \cdots .. \qquad (2.1.45)$$

olur. (2.1.42) denklemindeki son terim $n \longrightarrow \infty$ llimitinde katkısı sıfır olur. İlk terim göz önüne alınırsa

$$\int_0^{\infty} F(x)dx = e^{\alpha/2a}\left[\frac{2a^3}{\alpha^3} + \frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{a}{4\alpha}\right] \qquad (2.1.46)$$

elde edilir. Fonksiyonun 1., 3. ve 5. mertebeden türevlerinin sonsuzdaki ve sıfırdaki değerlerinin toplam formülünde hesaplanması gerekmektedir. Bu sebeple türevleri ve değerleri yazılırsa,

$$F(0) = e^{-\alpha/2a}\frac{1}{4}, \qquad ; F(\infty) = 0$$

$$F^{(1)}(0) = e^{-\alpha/2a}\left[-\frac{\alpha}{4a} + 1\right], \qquad ; F^{(1)}(\infty) = 0$$

$$F^{(3)}(0) = e^{-\alpha/2a}\left[\frac{\alpha^3}{a^3}\frac{1}{4} + \frac{2\alpha^2}{a^2} + \frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{6\alpha}{a}\right], \quad ; F^{(3)}(\infty) = 0 \qquad (2.1.47)$$

. .
. .
. .

elde edilir. Bu ifadeler denklem (2.1.41) ve (2.1.45)'de yerine yazılırsa

$$\bar{E}_0 = \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{a}\left[\frac{2a^2}{\alpha^3} - \frac{1}{24} + \frac{1}{8}\left(1 - \frac{\alpha}{2a} + \frac{\alpha^2}{8a^2} - \cdots\right)\right.$$

$$+ \frac{B_2}{2!}(-1)\left(1 - \frac{\alpha}{2\alpha} + \frac{\alpha^2}{8a^2} - \cdots\right)\left(1 - \frac{\alpha}{4a}\right)$$

$$\left. + \vartheta(\alpha^k; k \geqslant 1)\right] \qquad (2.1.48)$$

Düzenlemeler yapılırsa,

$$\bar{E}_0 = \lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{2a^2}{\alpha^3} - \frac{\alpha}{192a^2} - \frac{\alpha^2}{172a^3} + \frac{\alpha^2}{192a^3} + \frac{\alpha^3}{384a^3}\right.$$

$$\left. + \text{bütün } terimler\ \alpha'nın\ pozitif\ çapımlarından\ oluşur\right] \qquad (2.1.49)$$

elde edilir. Daha sonra

$$\bar{E}_0 = \lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{2a^2}{\alpha^3} + \alpha' nın\ pozitif\ kuvvetlerini\ içeren\ terimler\right] \qquad (2.1.50)$$

şeklinde yazılır. $\vartheta(\alpha^k; k \geq 5)$ olduğundan, 3. mertebeden türevden sonra çarpan terimler α'ya bağlı olarak gelecektir. Burada α kesilim parametresidir. (2.1.48) denklemini düzenlersek, kesilim fonksiyonuna göre regülarize edilmiş boşluğun enerjisi

$$\bar{E}_0 = \lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{2a^2}{\alpha^3} + \vartheta(\alpha^k; k \geqslant 1)\right] \qquad (2.1.51)$$

olarak elde edilir. Burada a küre kabuğunun yarıçapıdır. Paralel plakalardaki fiziksel dayanağa bağlı kalarak kürenin yarıçapını sonsuza götürdüğümüzde geometri düzleşir. Buradan hareketle hesapladığımız $\bar{E}_0$ teriminin birim yüzeyini, tıpkı paralel plakalarda olduğu gibi aralarındaki uzaklık sonsuza götürüldüğünde, terim a'dan bağımsızlaşır. Bu durum Minkowski uzayını temsil eder. $\bar{E}_0$'ın ilk teriminde ortaya çıkar.

$$\lim_{a\to\infty} \frac{\bar{E}_0}{4\pi a^2} = \frac{2}{4\pi\alpha^3} \qquad (2.1.52)$$

a sonsuza götürüldüğünde renormalize edilmiş Casimir enerjisi ise;

$$E_{ren} = E_c = \lim_{\alpha \to 0} \left(\bar{E}_0 - \tilde{E}_0 \right) \tag{2.1.53}$$

olarak elde edilir. Yerine yazılırsa;

$$E_{ren} = \lim_{\alpha \to 0} \left[\frac{2a^2}{\alpha^3} - \frac{2a^2}{\alpha^3} + \theta(\alpha^n, n \geqslant 1) \right]. \tag{2.1.54}$$

α sıfıra giderken renormalize edilmiş Casimir enerjisi (Bayın & Özcan, 1997);

$$E_{ren} = \lim_{\alpha \to 0} \theta(\alpha^n; n \geqslant 1) = 0 \tag{2.1.55}$$

kalan α çarpan terimi olur ve tam S^2 yüzeyinde kütlesiz konformal skaler alandaki renormalize edilmiş Casimir enerjisinin değeri sıfır olarak elde edilir.

Şimdi S^2 yüzeyinde yarım küre üzerine yerleştirilmiş kütlesiz konformal skaler alanın Dirichlet ve Neumann sınır koşulları göz önüne alınarak renormalize edilmiş Casimir enerjisi hesaplanacaktır. Önce özdeğerlerin nasıl davranış gösterdiğini belirlememiz gerekmektedir. Modların dağılımını veren denklem, yarım S^2 yüzeyinin simetrisinden dolayı tam küre yüzeyi ile aynı dalga fonksiyonunu sağlar, fakat Dirichlet ve Neumann sınır değer koşullarına göre *l* kuantum sayıları aynı kalmak üzere *m* kuantum sayıları değişmektedir. Yani dalga fonksiyonu aynı formdadır fakat *l*'ye göre *m* değerleri farklılaşmaktadır. Şimdi Dirichlet sınır değer koşullarına göre *l*'ye göre *m* değerlerinin dağılımını bulalım. Dirichlet ve Neumann sınır koşulları

$$\psi\left(\theta = \frac{\pi}{2}, \phi\right) = 0, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial \theta}|_{\theta = \frac{\pi}{2}} = 0\,, \tag{2.1.56}$$

$$\psi_{lm}(t, \theta, \phi) = C_0 e^{-i\omega_l t} Y_{lm}(\theta, \emptyset), \tag{2.1.57}$$

dır ve tam küre yüzeyinde kuantum sayıları

$$l = 0, l, 2, \ldots\,, \qquad m = -l, \ldots., 0 \ldots., +l. \tag{2.1.58}$$

olur.

$$\omega_l = \frac{1}{a}\left(l + \frac{1}{2}\right) \tag{2.1.59}$$

$$a\omega_l = l + \frac{1}{2}. \qquad (2.1.60)$$

Dirichlet ve Neumann sınır değer koşullarına göre çözüm fonksiyonu denklem (2.1.16b) ile aynı çözüm fonksiyonudur fakat *m* değerleri faklılaşmaktadır. Bu şartları sağlayan fonksiyonları tablolaştırırsak Dirichlet ve Neumann sınır değer koşullarına göre yarım küre yüzeyindeki modların dağılımını Çizelge 2.1.2 ve Çizelge 2.1.3'te gösterildiği gibi olacaktır.

Çizelge 2.1.2 Kütlesiz konformal skaler alanın Neumann sınır koşullarına göre *l* ve *m*'ye bağlı modların dağılımı

l / *m*	0	1	2	3	4	5	.
0	1/2	-	5/2	-	5/2	-	.
±1		3/2	-	7/2	-	11/2	
±2			5/2	-	5/2	-	.
±3				7/2	-	11/2	
±4					5/2	-	.
±5						11/2	
							. . .

Çizelge 2.1.3 Kütlesiz konformal skaler alanın Dirichlet sınır koşullarına göre *l* ve *m*'ye bağlı modların dağılımı

l / *m*	0	1	2	3	4	5	.
0		3/2	-	7/2	-	11/2	
±1		-	5/2	-	5/2	-	.
±2			-	7/2	-	11/2	
±3				-	5/2	-	.
±4					-	11/2	
±5						-	.
							. . .

Buradan da anlaşılacağı üzere Çizelge 2.1.2 ve Çizelge 2.1.3'teki $a\omega = N$ değerlerinin toplamı tam küre yüzeyinde oluşturduğumuz Çizelge 2.1.1'i vermektedir. Dirichlet ve Neumann sınır koşulları için dejenere durumlar Çizelge 2.1.4'te gösterildiği gibi, farklı gelmektedir. g_D, Dirichlet sınır şartlarından gelen dejenere durum sayısını, g_N ise Neumann sınır şartlarına göre dejenere durum sayısını göstermektedir.

Çizelge 2.1.4 Sınır koşulları altında dejenere durum sayıları

l	0	1	2	3	…	…
g_D	-	1	2	3	…	…
g_N	1	2	3	4	…	…

g_D değerleri l gibi g_N değerleri ise l+1 dejenere değerlerine sahip olur. Böylece, Dirichlet sınır değer koşuluna göre yarım küre yüzeyi üzerine yerleştirilmiş olan kütlesiz konformal skaler alanın kuantum vakum enerjisi

$$E_D = \frac{1}{2a}\sum_{l=0}^{\infty} \omega g_D$$

$$E_D = \frac{1}{2a}\sum_{l=0}^{\infty} l\left(l+\frac{1}{2}\right) \tag{2.1.61}$$

olur ve Neumann sınır değer koşuluna göre yarım küre yüzeyi üzerine yerleştirilmiş olan kütlesiz konformal skaler alanın kuantum vakum enerjisi ise

$$E_N = \frac{1}{2a}\sum_{l=0}^{\infty} \omega g_N$$

$$E_N = \frac{1}{2a}\sum_{l=0}^{\infty} (l+1)\left(l+\frac{1}{2}\right) \tag{2.1.62}$$

ifadesi ile verilir. Burada l sonsuza giderken denklem (2.1.61) ve (2.1.62) sonsuza gitmektedir. Renormalize edilmiş kuantum vakum enerjisini elde etmek için tam S^2 yüzeyinde kullandığımız geleneksel kesilim fonksiyonu $e^{-\alpha\omega}$ $(\alpha > 0)$ ile denklem (2.1.61) ve (2.1.62) tekrar yazılırsa

$$\bar{E}_{O,D} = \frac{1}{2a}\sum_{l=1}^{\infty} e^{-\alpha w} l\left(l+\frac{1}{2}\right), \tag{2.1.63}$$

$$\bar{E}_{0,N} = \frac{1}{2a}\sum_{l=0} e^{-\alpha\omega}(l+1)\left(l+\frac{1}{2}\right) \tag{2.1.64}$$

elde edilir. Bu toplamları hesaplamak için Euler-Maclaurin toplam formülünü kullanırsak, Euler-Maclaurin toplam formülü

$$\sum_{l=0}^{\infty} F(l) = \int_0^{\infty} F(x)dx + \frac{1}{2}F(0) + \frac{1}{2}F(\infty)$$

$$+\frac{B_2}{2!}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x\to\infty} - \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x\to 0}\right)$$

$$+\frac{B_4}{4!}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\Big|_{x\to\infty} - \frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\Big|_{x\to 0}\right)$$

$$+\frac{B_6}{6!}\left(\frac{\partial^5 F}{\partial x^5}\Big|_{x\to\infty} - \frac{\partial^{5F}}{\partial x^5}\Big|_{x\to 0}\right)\ldots\cdots+\cdots.. \tag{2.1.65}$$

dır. İlk olarak Dirichlet için hesaplanacak olan Casimir enerjisi

$$\bar{E}_{\mathrm{D}} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{2a}\sum_{l=0}^{\infty} e^{-\frac{\alpha(2l+1)}{2a}} l(l+1) \tag{2.1.66}$$

ile verilir. Dirichlet sınır değer koşuluna göre renormalize edilen Casimir enerjisini elde edebilmek için Euler-Maclaurin toplam formülündeki F fonksiyonunu belirlersek

$$F_D(l) = e^{-\alpha(2l+1)/2a} l(l+1) \tag{2.1.67}$$

olur. Belirlediğimiz fonksiyonun türevleri, toplam formülündeki integraller ve Bernoulli sayıları denklem (2.1.65)'de yerine koyulursa

$$\bar{\mathrm{E}}_{0,D} = \frac{a^2}{\alpha^3} - \frac{a}{4\alpha^2} - \frac{1}{96a} + \{\alpha' nın\ pozitif\ terimleri\} \tag{2.1.68}$$

elde ederiz. Daha sonra Neumann için hesaplanacak olan Casimir enerjisi

$$\bar{E}_{\mathrm{N}} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{2a} \sum_{l=0}^{\infty} e^{-\alpha(2l+1)/2a}(l+1)\left(l+\frac{1}{2}\right) \tag{2.1.69}$$

şeklinde verilir. Benzer şekilde Neumann sınır koşuluna göre renormalize edilen Casimir enerjisini elde edebilmek için Euler-Maclaurin toplam formülündeki *F* fonksiyonunu belirlersek

$$F_N(l) = \frac{1}{2} e^{-\alpha(2l+1)/2a}(l+1)\left(l+\frac{1}{2}\right) \tag{2.1.70}$$

olacaktır. Yine benzer şekilde elde ettiğimiz sonuçlar denklem (2.1.65)'de yerine koyulursa

$$\bar{\mathrm{E}}_{0,N} = \frac{a^2}{\alpha^3} + \frac{a}{4\alpha^2} + \frac{1}{96a} + \{\alpha' nın\ pozitif\ terimleri\} \tag{2.1.71}$$

elde ederiz. Denklem (2.1.68) ve (2.1.71)'de elde ettiğimiz sonuçları sonsuza götürdüğümüzde, a'ya bağlı terimler ilk terimden gelmektedir. α'yı sıfıra götürdüğümüzde her iki terim sonsuza gitmektedir. Böylece renormalize edilmiş Casimir enerjisi

$$E_c = \lim_{\alpha\to 0}\left(\bar{E}_0 - \tilde{E}_0\right) \tag{2.1.72}$$

$$E_{ren} = \lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{2a^2}{\alpha^3} - \frac{2a^2}{\alpha^3} + \frac{a}{4\alpha^2} + \frac{1}{96a} + \{\alpha' nın\ pozitif\ terimleri\}\right] \tag{2.1.73}$$

elde edilir (Bayın & Özcan, 1997; Ford, 1975; Ford, 1976). Bu durumda α sıfıra giderken $\frac{a}{4\alpha^2}$ terimi sonsuza gitmektedir. Enerjide hâlâ sonsuzluk kalmaktadır. O halde $e^{-\alpha\omega}$ dışında yeni bir alternatif kesilim fonksiyonu kullanmamız gerekir. İlk olarak Dirichlet sınır değer koşuluna göre alternatif kesilim fonksiyonu ile hesaplanması gereken enerji,

$$E_D = \frac{1}{4a} \sum_{l=0}^{\infty} (2l^2+l) f\,(\alpha, \omega_l, a) \tag{2.1.74}$$

dır. Burada tanımladığımız kesilim fonksiyonu $f(\alpha, \omega_l, a)$, aşağıdaki şartları sağlayan genelleştirilmiş bir alternatif kesilim fonksiyonudur,

$$\lim_{\omega_l \to \infty} f(\alpha, \omega_l, a) \to 0$$

$$\lim_{\omega_l \to 0} f(\alpha, \omega_l, a) \to 1 \qquad (2.1.75)$$

ω_l'in bütün gerçek ve pozitif değerlerini $f(\alpha, \omega_l, a)$ teriminde tanımlıyoruz. Böylelikle limit koşullarımız daha anlamlı olacaktır. Ayrıca f değerini yalnızca ω_l ve a terimlerine bağlı olacak şekilde kısıtlayalım. Böylelikle

$$f = f\big(\alpha, \Omega(\omega_l, a)\big). \qquad (2.1.76)$$

Burada Ω, çıkarılacak ifadenin integralini oluşturan fonksiyondur. Sonuç olarak *f*'nin Ω'ya bağlı limiti

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\partial^k f}{\partial \Omega^{\boldsymbol{k}}} \to 0 \qquad k = 1,2,3, \dots \qquad (2.1.77)$$

şartıyla verilir. Dirichlet sınır koşulları altında enerji;

$$\bar{E}_{O,D} = a^2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{4a^3} l(2l+1) f(\alpha, \omega_l, a) \qquad (2.1.78)$$

dır. Bu toplamı hesaplamak için Euler-Maclaurin toplam formülü kullanalım.

$$\sum_{l=0}^{\infty} F(l) = \int_0^{\infty} F(x)dx + \frac{1}{2}F(0) + \frac{1}{2}F(\infty)$$

$$+ \frac{B_2}{2!}\big(F^1(\infty) - F^1(0)\big)$$

$$+ \frac{B_4}{4!}\big((F^3(\infty) - F^3(0)\big)$$

$$+ \frac{B_6}{6!}\Big((F^5(\infty) - F^5(0)\Big) \dots \cdots + \cdots .. \qquad (2.1.79)$$

Burada *F* teriminin türevlerine ihtiyacımız olduğundan *F* terimi,

$$F = \frac{d\Omega}{dl} f(\alpha, \Omega) \qquad (2.1.80)$$

şeklinde tanımlanır. Denklem (2.1.80) şartları altında enerji;

$$\bar{E}_{O,D} = a^2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d\Omega}{dl} f(\alpha, \Omega) \tag{2.1.81}$$

halini alır. Ω terimini l'ye bağlı türevlerini yazarsak;

$$\frac{d\Omega}{dl} = \frac{1}{4a^3}(2l^2 + l)$$

$$\frac{d^2\Omega}{dl^2} = \frac{1}{4a^3}(4l + 1)$$

$$\frac{d^3\Omega}{dl^3} = \frac{1}{4a^3}4$$

$$\frac{d^4\Omega}{dl^4} = 0$$

$$\frac{d^k\Omega}{dl^k} = 0, \qquad k \geq 4 \tag{2.1.82}$$

dır. Denklem (2.1.81)'deki a^2 ifadesini işlem rahatlığı açısından eşitliğin karşısına alalım,

$$\frac{1}{a^2}\bar{E}_{O,D} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d\Omega}{dl} f(\alpha, \Omega) \tag{2.1.83}$$

Denklem (2.1.82)'daki Ω teriminin integrali alınırsa

$$\Omega = \frac{1}{4a^3}\left(\frac{2l^3}{3} + \frac{l^2}{2}\right) \tag{2.1.84}$$

bulunur. Sonuç

$$\Omega = \frac{1}{24a^3}(4l^3 + 3l^2) \tag{2.1.85}$$

olacaktır. α ve Ω terimine bağlı fonksiyon

$$F(\alpha,\Omega)=\frac{d\Omega}{dl}f(\alpha,\Omega) \tag{2.1.86}$$

olarak tanımlanır. $\frac{\partial}{\partial l}=\frac{d\Omega}{dl}\frac{\partial}{\partial\Omega}$ eşitliği kullanarak türevleri alırsak,

1.türev;

$$F^{(1)}(l)=\frac{\partial^2\Omega}{\partial l^2}f+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial l}\right)^2\frac{\partial f}{\partial\Omega} \tag{2.1.87}$$

2.türev;

$$F^{(2)}(l)=\frac{\partial^3\Omega}{\partial l^3}f+3\frac{\partial\Omega}{\partial l}\frac{\partial^2\Omega}{\partial l^2}\frac{\partial f}{\partial\Omega}+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial l}\right)^3\frac{\partial^2 f}{\partial\Omega^2}, \tag{2.1.88}$$

3.türev;

$$F^{(3)}(l)=\frac{\partial^4\Omega}{\partial l^4}f+4\frac{\partial\Omega}{\partial l}\frac{\partial^3\Omega}{\partial l^3}\frac{\partial f}{\partial\Omega}+6\left(\frac{\partial\Omega}{\partial l}\right)^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial l^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\Omega^2}$$

$$+3\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial l^2}\right)^2\frac{\partial f}{\partial\Omega}+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial l}\right)^4\frac{\partial^3 f}{\partial\Omega^3}, \tag{2.1.89}$$

4.Türev;

$$F^{(4)}(l)=\frac{\partial^5\Omega}{\partial l^5}f+5\frac{\partial\Omega}{\partial l}\frac{\partial^4\Omega}{\partial l^4}\frac{\partial f}{\partial\Omega}+10\frac{\partial^2\Omega}{\partial l^2}\frac{\partial^3\Omega}{\partial l^3}\frac{\partial f}{\partial\Omega}+10\left(\frac{\partial\Omega}{\partial l}\right)^2\frac{\partial^3\Omega}{\partial l^3}\frac{\partial^2 f}{\partial\Omega^2}$$
$$+15\frac{\partial\Omega}{\partial l}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial l^2}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial\Omega^2}+10\left(\frac{\partial\Omega}{\partial l}\right)^3\frac{\partial^2\Omega}{\partial l^2}\frac{\partial^3 f}{\partial\Omega^3}+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial l}\right)^5\frac{\partial^4 f}{\partial\Omega^4} \tag{2.1.90}$$

5.Türev

$$F^{(5)}(l) = \frac{\partial^6\Omega}{\partial l^6}f + 6\frac{\partial\Omega}{\partial l}\frac{\partial^5\Omega}{\partial l^5}\frac{\partial f}{\partial\Omega} + 15\frac{\partial^2\Omega}{\partial l^2}\frac{\partial^4\Omega}{\partial l^4}\frac{\partial f}{\partial\Omega} + 5\frac{\partial\Omega}{\partial l}\frac{\partial^4\Omega}{\partial l^4}\frac{\partial^2 f}{\partial\Omega^2} + 10\frac{\partial^3\Omega}{\partial l^3}\frac{\partial^3\Omega}{\partial l^3}\frac{\partial f}{\partial\Omega}$$
$$+ 10\frac{\partial^2\Omega}{\partial l^2}\frac{\partial^3\Omega}{\partial l^3}\frac{\partial^2 f}{\partial\Omega^2} + 50\frac{\partial\Omega}{\partial l}\frac{\partial^2\Omega}{\partial l^2}\frac{\partial^3\Omega}{\partial l^3}\frac{\partial^2 f}{\partial\Omega^2} + 10\left(\frac{\partial\Omega}{\partial l}\right)^2\frac{\partial^4\Omega}{\partial l^4}\frac{\partial^2 f}{\partial\Omega^2}$$
$$+ 10\left(\frac{\partial\Omega}{\partial l}\right)^2\frac{\partial^3\Omega}{\partial l^3}\frac{\partial^3 f}{\partial\Omega^3} + 15\frac{\partial^2\Omega}{\partial l^2}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial l^2}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial\Omega^2} + 15\frac{\partial\Omega}{\partial l}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial l^2}\right)^2\frac{\partial^3 f}{\partial\Omega^3}$$
$$+ 30\left(\frac{\partial\Omega}{\partial l}\right)^2\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial l^2}\right)^2\frac{\partial^3 f}{\partial\Omega^3} + 10\left(\frac{\partial\Omega}{\partial l}\right)^3\frac{\partial^3\Omega}{\partial l^3}\frac{\partial^3 f}{\partial\Omega^3} + 10\left(\frac{\partial\Omega}{\partial l}\right)^3\frac{\partial^2\Omega}{\partial l^2}\frac{\partial^4 f}{\partial\Omega^4}$$
$$+ 5\left(\frac{\partial\Omega}{\partial l}\right)^4\frac{\partial^2\Omega}{\partial l^2}\frac{\partial^4 f}{\partial\Omega^4} + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial l}\right)^6\frac{\partial^5 f}{\partial\Omega^5} \qquad (2.1.91)$$

olarak elde edilir. l'nin $0\ ve\ \infty$ limitinde $f(\alpha,\Omega)$ değerlerine bakılacak olursa,

$$\lim_{\omega_l\to\infty} f(\alpha,\Omega) \to 0$$

$$\lim_{\omega_l\to 0} f(\alpha,\Omega) \to 1$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{\partial^n f}{\partial\Omega^n}\right) \longrightarrow 0 \qquad (2.1.92)$$

şeklindedir. Bu ifadeler kullanılarak $F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)}, F^{(4)}, F^{(5)}$ değerleri

$$F^{(1)}(0) = \frac{1}{4a^3}, \quad F^{(1)}(\infty) = 0$$

$$F^{(2)}(0) = 0, \qquad F^{(2)}(\infty) = 0$$

$$F^{(3)}(0) = 0, \qquad F^{(3)}(\infty) = 0$$

$$F^{(4)}(0) = 0, \qquad F^{(4)}(\infty) = 0 \qquad (2.1.93)$$

. .
. .
. .

Elde edilen çözümler Euler-Maclaurin toplam formülünde yerine yerleştirilirse denklem (2.1.74) toplamındaki sonsuzluk bu terimlerin içinde ortaya çıkar (Bayın & Özcan, 1997).

$$\int_0^\infty F(l)dl = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{d\Omega}{dl} f(\alpha,\Omega)dl\,. \tag{2.1.94}$$

Denklem (2.1.81)'da yerine yerleştirdiğimizde renormalize edilmiş Casimir enerjisi;

$$\bar{E} - \tilde{E} = \lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{d\Omega}{dl}\, f(\alpha,\Omega) - \frac{B_2}{2!}F^{(1)}(0) - \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{d\Omega}{dl} f(\alpha,\Omega)\right] \tag{2.1.95}$$

ile verilir. Sonuçlar yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa,

$$E_{ren} = \left[-\frac{B_2}{2!}\frac{1}{8a}\right] \tag{2.1.96}$$

elde edilir. Burada B_2 Bernoulli sayısıdır ve 1/6'ya eşittir. Dirichlet sınır değer koşuluna göre renormalize edilmiş boşluğun enerjisi;

$$E_{0,D} = -\frac{1}{96a} \tag{2.1.97}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde Neumann sınır değer koşuluna göre alternatif kesilim fonksiyonu ile hesaplanması gereken enerji,

$$E_{0,N} = a^2\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{4a^3}(l+1)(l+\frac{1}{2})f\,(\alpha,\omega_l,a) \tag{2.1.98}$$

dır. Burada tanımladığımız kesilim fonksiyonu $f(\alpha,\omega_l,a)$, daha önceden de tanımladığımız gibi (2.1.99) şartlarını sağlayan genelleştirilmiş bir alternatif kesilim fonksiyonudur,

$$\lim_{\omega_l\to\infty} f(\alpha,\omega_l,a) \to 0$$

$$\lim_{\omega_l\to 0} f(\alpha,\omega_l,a) \to 1 \tag{2.1.99}$$

Bu toplamı hesaplamak için Euler-Maclaurin toplam formülü kullanacağız. Tanımlarsak

$$\sum_{l=0}^{\infty} F(l) = \int_0^{\infty} F(x)dx + \frac{1}{2}F(0) + \frac{1}{2}F(\infty)$$

$$+\frac{B_2}{2!}\left(F^1(\infty) - F^1(0)\right)$$

$$+\frac{B_4}{4!}\left((F^3(\infty) - F^3(0)\right)$$

$$+\frac{B_6}{6!}\left((F^5(\infty) - F^5(0)\right) \dots\cdots + \cdots .. \quad (2.1.100)$$

şeklindedir. Burada *F* teriminin türevlerine ihtiyacımız olduğundan *F* terimi,

$$F = \frac{d\Omega}{dl} f(\alpha, \Omega) \quad (2.1.101)$$

şeklinde tanımlanır. Denklem (2.1.101) şartları altında enerji;

$$\bar{E}_{O,N} = a^2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d\Omega}{dl} f(\alpha, \Omega) \quad (2.1.102)$$

halini alır. Denklem (2.1.102)'de yerine yerleştirdiğimizde renormalize edilmiş Casimir enerjisi;

$$\bar{E} - \tilde{E} = \lim_{\alpha \to 0} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\Omega}{dl} f(\alpha, \Omega) + \frac{B_2}{2!} F^{(1)}(0) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\Omega}{dl} f(\alpha, \Omega) \right] \quad (2.1.103)$$

ile verilir. Sonuçlar yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa,

$$E_{ren} = \left[+ \frac{B_2}{2!} \frac{1}{8a} \right] \quad (2.1.104)$$

elde edilir. Burada B_2 Bernoulli sayısıdır ve 1/6'ya eşittir. Böylece Neumann sınır koşulları altında renormalize edilmiş boşluğun enerjisi;

$$E_{0,N} = +\frac{1}{96a} \tag{2.1.105}$$

olarak yeniden elde edilir.

Tam küre yüzeyinde kuantum vakum enerjisinin değeri denklem (2.1.55)'de görüleceği üzere sıfır olarak elde edilmişti. Yarım küre yüzeyinde ise Dirichlet sınır değer koşuluna göre vakum enerjisinin değeri "+", Neumann sınır değer koşuluna göre vakum enerjisinin değeri ise "-" işaretli olarak Dirichlet ile aynı değer elde edildi. Sonuç olarak, yarım S^2 yüzeyinin simetrisinden dolayı modların dağılımı benzerlik oluşturduğundan, yarım kürelerden elde edilen sonuçların toplamının, tam küre yüzeyindeki Casimir enerjisini verdiği görülmektedir.

$$E_D + E_N = E_F$$

$$-\frac{1}{96a} + \frac{1}{96a} = 0 \tag{2.1.106}$$

Burada E_D Dirichlet sınır koşulu altında renormalize edilmiş Casimir enerjisini, E_N Neumann sınır koşulu altında renormalize edilmiş Casimir enerjisini ve E_F ise tam küre yüzeyinde elde edilen renormalize edilmiş Casimir enerjisini ifade eder.

2.2 Nokta Ayrıştırma Yöntemine Göre Enerji Yoğunluğu Hesabı

Üç boyutlu Riemann küresinin iki boyutlu yüzeyinde kütlesiz konformal skaler alan için Casimir enerji yoğunluğunu nokta ayrıştırma yöntemi kullanarak yeniden göz önüne alacağız. Nokta ayrıştırma yöntemi; bir noktadan ayrılmış iki noktanın, birbirlerine olan etkilerinin toplamını tanımlayan fonksiyonlar ile tanımlanır (Birrell, Davies, 1982). Uygulamada karşımıza çıkacak olan $\Phi(x)$ skaler alanı, kanonik kuantizasyon şeması nedeniyle bir alan operatörü gibi davranmaktadır. Yeniden elde edeceğimiz enerji-momentum tensörünün beklenen değeri, aynı uzay-zaman noktasındaki alan operatörlerinin çarpımlarından ve bunların kovaryant türevlerinden oluşur. Başlangıçta

bir nokta, nokta ayrıştırma yöntemi gereğince x ve x'olarak ikiye ayrılır ve $\lim_{x'\to x}$iken iki nokta arasındaki uzay-zaman uzaklık sıfıra gider, dolayısıyla enerji momentum tensörünün kuantum boşluk durumunda beklenen değerinde ıraksamaya neden olur. Bu ıraksaklıkları regülarize etmek için, $\Phi(x)$ alan işlemcisini $\Phi(x')$ ile değiştirmemiz gerekmektedir. Burada x ve x' birbirine çok yakın iki nokta olarak seçilmiştir. O halde $\langle 0|\Phi(x)\Phi(x')|0\rangle$ fonsiyonunu x ve x' 'de olacak şekilde iki fonksiyonun çarpımı şeklinde değiştirebiliriz. Bu fonksiyon pozitif Wightmann fonksiyonu olarak adlandırılır ve;

$$G^{(+)}(x,x') = \langle 0|\Phi(x)\Phi(x')|0\rangle \tag{2.2.1}$$

şeklinde tanımlanır. Burada Φ ise

$$\Phi(x) = \sum_{\lambda}(\alpha_{\vec{\lambda}}^{\dagger}\psi_{\vec{\lambda}}^{*} + a_{\vec{\lambda}}\psi_{\vec{\lambda}}) \tag{2.2.1a}$$

dır. Buradan

$$\langle 0|\Phi(x)\Phi(x')|0\rangle = \sum_{\lambda}\psi_{\lambda}{}^{*}(x)\psi_{\lambda}(x') \tag{2.2.2}$$

modların dağılımını veren dalga fonksiyonlarının çarpımı haline gelir.

$$\psi(t,\theta,\phi) = C_0 e^{-i\omega_l t}Y_{lm}(\theta,\emptyset) \tag{2.2.3}$$

dır. C_0 boylandırma sabitidir ve $C_0 = \frac{1}{a\omega_l}$ olarak verilir. $\omega_l = \frac{1}{a}(l+\frac{1}{2})$ şeklinde tanımlanır ve $l = 0,1,2,\dots$, $m = -l,\dots l$ olarak verilen özfonksiyonlardır. Nokta ayrıştırma yöntemi gereğince Green fonksiyonunu yazarsak;

$$G^{(+)}(x,x') = \frac{e^{-i\Delta t/2a}}{a}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{e^{-il\Delta t/\alpha}}{(2l+1)}Y_{lm}(\theta,\phi)Y_{lm}^{*}(\theta',\phi') \tag{2.2.4}$$

elde edilir. Kuantize edilmiş alanın beklenen değeri anti komitasyon bağıntısı gereğince;

$$G^{(1)}(x,x') = \langle 0\{\phi(x)\phi(x') + \phi(x')\phi(x)\}0\rangle \tag{2.2.5}$$

şeklinde yazılır ve Hadamard Green fonksiyonu olarak tanımlanır (Birrel, Davies, 1984; Fulling, 1989). Hadamard Green fonksiyonu ile Wightmann fonksiyonu arasındaki ilişki,

$$G^{(1)}(x,x') = 2\,\mathrm{Re}\,G^{(+)}(x,x') \tag{2.2.6}$$

olarak tanımlanır. Renormalize edilmiş enerji momentum tensörünün beklenen değerini hesaplarken $x' \to x$ olarak tanımladığımız iki noktanın çakışma limitine (coincidence limit) bakacağız. Eğri uzayda kütlesiz konformal skaler alan için enerji-momentum tensörü, $g_{\mu\nu}$ metrik tensörü ile ifade edilirse;

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{2.2.7}$$

burada; $\delta S = \int \delta\mathcal{L} d^3\,x$ olarak tanımlanmıştır.

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{2.2.8}$$

bağıntısı kullanılarak $T_{\mu\nu}$ (Adler, Bazin, Schiffer, 1975; Bayın, Özcan, 1994; Birrell, Davies, 1982;)

$$\langle T_{\mu\nu}\rangle_{ren} = \frac{1}{8}\lim_{x'\to x}\big[6\nabla_\mu\nabla_{\nu'} - 2g_{\mu\nu'}g^{\lambda\sigma}\nabla_\lambda\nabla_{\sigma'} - g_{\mu\rho'}\nabla^{\rho'}\nabla_{\nu'}$$

$$-g_{\nu'\sigma}\nabla^\sigma\nabla_\mu + g_{\mu'}\big(\nabla_\rho\nabla^\rho + \nabla_{\rho'}\nabla^{\rho'}\big)$$

$$-\frac{1}{2}\Big(R^\sigma_\mu g_{\sigma\nu'} + g_{\mu\rho'}R^{\rho'}_{\nu'}\Big) + \frac{1}{2}g_{\mu\nu'}R\Big]D_{\mathrm{ren}}\,(x,x') \tag{2.2.9}$$

elde edilir. Denklem (2.2.9)'da ki renormalizasyonları elde etmemiz gerekmektedir. Limitte Green fonksiyonlarını $D(x,x')$ olarak göstereceğiz. O halde

$$D(x,x') = \frac{1}{2}G^{(1)}(x,x') = \mathrm{Re}\,G^{(+)}(x,x') \tag{2.2.10}$$

şeklinde tanımlarız. Buradan

$$D(x,x') = \frac{e^{-i\Delta t/2a}}{a}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{e^{-il\Delta t/\alpha}}{(2l+1)}Y_{lm}(\theta,\phi)Y_{lm}^{*}(\theta',\phi') \tag{2.2.11}$$

olarak elde edilir. Küresel Harmoniklerin toplam teoremini göz önüne alalım.

$$\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}(\theta'\phi')Y_{lm}(\theta,\phi) = \frac{2l+1}{4\pi}P_l(cos\alpha) \tag{2.2.12}$$

Denklem (2.2.11)'de küresel harmoniklerin toplam teoremini kullandığımızda;

$$G^{(+)}(x,x') = \frac{e^{-i\Delta t/2a}}{4\pi a}\sum_{l=0}^{\infty}\left[e^{-i\Delta t/a}\right]^{l}P_l(\cos\alpha) \tag{2.2.13}$$

elde ederiz. $\Delta t \to \Delta t - i\epsilon$ şeklinde yazarsak $\left|e^{-i\Delta t/a}\right| < 1$ ve işlemlerin sonunda $\epsilon \to 0$ alınabilir. Legendre polinomlarının üretici fonksiyonlarını kullanırsak (Bell, 2004);

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)\,t^l$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2e^{-i\Delta t/a}\cos\alpha+e^{-2i\Delta t/a}}} = \sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\alpha)\left[e^{-\frac{i\Delta t}{a}}\right]^{l} \tag{2.2.14}$$

elde edilir. Burada $|t| < 1$ ve $|x| \leq 1$ koşulu sağlamalıdır. Denklem (2.2.13)'de denklem (2.2.14)'ü kullanırsak

$$\langle 0|\phi(x)\phi(x')|0\rangle = \frac{1}{4\pi a\sqrt{2}}\frac{1}{(\cos\,\Delta t/a - \cos\,\Delta s/a)^{1/2}} \tag{2.2.15}$$

elde edilir. Burada

$$\cos\Delta s/\mathrm{a} = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi') \tag{2.2.16}$$

ifadesi $\lim_{x \to x'}$ giderken denklem (2.2.15)'i sonsuza götürecektir. Burada $\cos\alpha$ terimini, küre yüzeyinde seçilmiş iki noktayı $\vec{r}$ ve $\vec{r}'$ şeklinde ve aralarında açıyı ise α olacak şekilde geometrik olarak açarsak. $\vec{r}$ vektörünü;

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \tag{2.2.17}$$

olarak yazarız. Küre yüzeyinde yazarsak yarıçap a olacak şekilde,

$$\vec{r} = a\sin\theta\cos\phi\hat{\imath} + a\sin\theta\sin\phi\hat{\jmath} + a\cos\theta\hat{k}$$
$$\vec{r}' = a\sin\theta'\cos\phi'\hat{\imath} + a\sin\theta'\sin\phi'\hat{\jmath} + a\cos\theta'\hat{k} \tag{2.2.18}$$

gelir. İç çarpımlarını alırsak;

$$\vec{r}.\vec{r}' = |\vec{r}||\vec{r}'|\cos\alpha. \tag{2.2.19}$$

$\cos\alpha$'yı yalnız bırakırsak;

$$\cos\alpha = \frac{\vec{r}.\vec{r}'}{|\vec{r}||\vec{r}'|}.$$

$$\vec{r}.\vec{r}' = a^2[\sin\theta\sin\theta'\cos\phi\cos\phi' + \sin\theta\sin\phi'\sin\phi\sin\phi' + \cos\theta\cos\theta']$$

$$\vec{r}.\vec{r}' = a^2[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'(\cos\phi\cos\phi' + \sin\phi\sin\phi')]. \tag{2.2.20}$$

Burada $\cos\phi\cos\phi' + \sin\phi\sin\phi' = \cos(\phi - \phi')$ olarak yazarsak;

$$\vec{r}.\vec{r}' = a^2[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi - \phi')]. \tag{2.2.21}$$

Elde etiğimiz sonucu $|\vec{r}||\vec{r}'|$ terimine böldüğümüzde elimizde yine a^2 terimi kalacaktır. Böylelikle a^2 terimleri birbirini götürür. Sonuç olarak;

$$\cos\Delta s/a = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\phi - \phi \tag{2.2.22}$$

$(\Delta s/a = \alpha)$ elde edilir. (2.2.15) denklemi yeniden yazılırsa (burada $x = \Delta t; y = \Delta s/a$)

$$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2} \tag{2.2.23}$$

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \tag{2.2.24}$$

denklem (2.2.23) ve (2.2.24) bağıntılarını kullanarak aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$D_{ren}(x,x') == -\frac{1}{4\pi a}\exp\left[\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\right)\ln\frac{[(2n\pi a+\Delta s)^2-\Delta t^2]^{\frac{1}{2}}}{2n\pi a}\right] \tag{2.2.25}$$

$\Delta s \to 0$, $\Delta t \to 0$ çakışma limitinde ıraksamaya neden olan terim n = 0'dır. $n = 0$ terimi,

$$\lim_{x'\to x} D_{n=0}(x,x') = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{[\Delta s^2-\Delta t^2]^{\frac{1}{2}}} \tag{2.2.26}$$

olarak ifade edilir. Bu da $1+2$ boyutlu Minkowski uzay-zamanındaki bir Green's Fonksiyonunu temsil eder. Bu terim çıkarıldığında renormalize edilmiş Green's fonksiyonu

$$D_{ren}(x,x') == -\frac{1}{4\pi a}\exp\left[\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\right)\ln\frac{[(2n\pi a+\Delta s)^2-\Delta t^2]^{\frac{1}{2}}}{2n\pi a}\right] \tag{2.2.27}$$

elde edilir. Anlaşılacağı üzere bütün sonsuzluklar n'nin içerisindeki sıfırda kaldı. Böylelikle (2.2.27) denklemi tamamen sonlu bir terim haline gelmiştir. Şimdi çakışma limitinde boşluğun renormalize edilmiş enerji momentum tensörünü aşağıda verilen eşitlikteki gibi tekrar yazarsak;

$$\langle T_{\mu\nu}\rangle_{ren} = \frac{1}{8}\lim_{x'\to x}\big[6\nabla_\mu\nabla_{\nu'} - 2g_{\mu\nu'}g^{\lambda\sigma}\nabla_\lambda\nabla_{\sigma'} - g_{\mu\rho'}\nabla^{\rho'}\nabla_{\nu'}$$

$$-g_{\nu'\sigma}\nabla^\sigma\nabla_\mu + g_{\mu'}\left(\nabla_\rho\nabla^\rho + \nabla_{\rho'}\nabla^{\rho'}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(R^\sigma_\mu g_{\sigma\nu'} + g_{\mu\rho'}R^{\rho'}_{\nu'}\right) + \frac{1}{2}g_{\mu\nu'}R\Big]\, D_{\text{ren}}\,(x,x') \tag{2.2.28}$$

Burada $\mu = 0, \nu = 0$ seçilerek;

$$\mathrm{D_{ren}}(x, x') = -\frac{1}{4\pi a}\exp\left[\left(\sum_{n=-\infty}^{-1} + \sum_{n=l}^{\infty}\right)\ln\frac{[(2n\pi a + \Delta s)^2 - \Delta t^2]^{1/2}}{2n\pi a}\right]$$

$$\frac{[\Delta s^2 - \Delta t^2]^{1/2}}{\sin \Delta s/a} \times \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\right)\frac{(2n\pi a + \Delta s)}{[\Delta t^2 - (2n\pi a + \Delta s)^2]} \qquad (2.2.29)$$

etki ettirildiğinde renormalize edilmiş enerji momentum tensörünün beklenen değerini elde ederiz.

$$\lim_{x' \to x}\begin{cases} D_{\text{ren}}\,(x, x') = 0. \\ \nabla_0 \nabla_{0'} D_{\text{ren}}\,(x, x') = -\nabla_0 \nabla_0 D_{\text{ren}}\,(x, x') = 0 \\ \nabla_i \nabla_j, D_{\text{ren}}\,(x, x') = -\nabla_i \nabla_j\,\mathrm{Dren}(x, x') = 0. \end{cases} \qquad (2.2.30)$$

Sonuçlar (2.2.28) denkleminde yerine yazıldığında S-2 yüzeyinde kütlesiz konformal skaler alan için renormalize edilen ifade (Bayın & Özcan, 1997)

$$\langle T_0^0 \rangle_{ren} = 0 \qquad (2.2.31)$$

olarak elde edilir. Kütlesiz konformal skaler alanda tam küre yüzeyi için nokta ayrıştırma yöntemine göre enerji yoğunluğu "0" olarak yeniden elde edilmiştir.

BÖLÜM 3

İKİ BOYUTLU KÜRE S^2 YÜZEYİNDEKİ KÜTLESİZ KONFORMAL OLMAYAN SKALER ALANIN CASIMIR ENERJİSİ

Bu bölümde; geri zeminde S^2 yüzeyine yerleştirilen kütlesiz konformal olmayan skaler alanın Casimir enerjisi zeta fonksiyonu regülarizayonu ile göz önüne alınacaktır. Zeta fonksiyonu regülarizayonu yönteminin avantajı kesilim fonksiyonundan bağımsız olması dezavantajı ise hesaplama açısından zor olabilmesi ve sonsuzlukların fiziksel dayanağını içermemesidir.

Şimdi, kütlesiz konformal olmayan skaler alanın Casimir enerjisini hesaplayacağız. İlk olarak metriği tanımlarsak; uzay-zaman metriğimiz denklem (2.1.1*b*) ile verilen metriğimizle aynıdır. Uzay-zamanda iki nokta arasındaki uzaklığın karesi ve metrik tensör,

$ds^2 = dt^2 - a^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2)$,

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{3.1}$$

olarak verilir. S^2 yüzeyine yerleştirilen kütlesiz konformal olmayan skaler alanın modlarını, Klein-Gordon denklemi;

$$\square\, \psi = 0 \tag{3.2}$$

sağlayacaktır. Burada $\square$ D'Alembert operatörüdür ve şu şekilde ifade edilir,

$$\square \psi = \frac{1}{\sqrt{(g)}} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\sqrt{g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \phi \right). \tag{3.3}$$

Açıkça yazılırsa

$$\square \psi = \frac{1}{a^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial t} \left(a^2 \sin\ \theta \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \frac{1}{a^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(a^2 \sin\ \theta \left(-\frac{1}{a^2} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \psi \right)$$

$$+ \frac{1}{a^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(a^2 \sin\theta \left(-\frac{1}{a^2 \sin^2\theta} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \psi \right) \tag{3.4}$$

şeklindedir. Değişkenlere ayırma yöntemi gereğince çözüm;

$$\psi = T(t) Y(\theta, \varphi) \tag{3.5}$$

dır. (3.5) çözümü, denklem (3.4)'ü sağlamalıdır.

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} - \frac{1}{a^2} \frac{1}{Y} \left\{ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right\} = 0 \tag{3.6}$$

elde edilir.Bu durumda küresel harmoniklerden (Bell, 2004)

$$\frac{1}{Y} \left\{ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right\} = -l(l+1) \tag{3.7}$$

yazılır. T'nin sağladığı denklem

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} + \frac{1}{a^2} l(l+1) = 0 \tag{3.8}$$

dır. Düzenlenirse,

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \tag{3.9}$$

haline gelir. Burada kütlesiz konformal olmayan skaler alan için mod $\omega_l = \frac{1}{a}\sqrt{l(l+1)}$ olarak tanımlanır. Modları belirleyen fonksiyon;

$$\Phi = C_0 e^{-i\omega t} Y_{lm}(\theta, \varphi) \tag{3.10}$$

konformal skaler alanla aynı Küresel Harmonik fonksiyonlarına sahip fakat ω terimi farklı olarak bulumuştur. Burada $l = 0,1,2,\ldots$ ve $m = -l, \ldots, l$'dir. Tam küre yüzeyinde hesaplanması gereken kütlesiz konformal olmayan skaler alan için Casimir enerjisi

$$E_c^F = \frac{1}{2a}\sum_{l=0}^{\infty} \omega_l g_l \tag{3.11}$$

şeklinde yazılır. Burada g_l dejenere enerji değerleridir ve

$$g_l = \sum_{m=-l}^{l} m^0$$

$$g_l = 2l + 1 \tag{3.12}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda tam küre yüzeyinde hesaplanması gereken kütlesiz konformal olmayan skaler alan için Casimir enerjisi yukarıdaki g_l tanımına göre yeniden yazılırsa,

$$E_c^F = \frac{1}{2a}\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\sqrt{l(l+1)} \tag{3.13}$$

dır. Şimdi yarım küre yüzeyinde Dirichlet ve Neuman sınır koşullarına göre modları göz önüne alalım. Her iki sınır değer koşullarına göre yarım küre yüzeyinde de hesaplanması gereken denklem (3.10)'daki fonksiyon, aynı formda fakat farklı m değerlerine sahip özfonksiyonlar olacaktır. Sınır değer koşulları denklem (2.1.56) ile aynı olacak şekilde karşılaştırdığımızda Dirichlet sınır koşulundan gelen dejenere değer, $g_D \to l$, Neumann sınır koşulundan gelen dejenere değer, $g_N \to l + 1$ gelecektir. Modları düzenleyebilmek adına, $a\omega = \sqrt{l(l+1)} = N$ olarak tanımlanmıştır ve modların dağılımı tablo haline getirilebilir.

Çizelge 3.1 Kütlesiz konformal olmayan skaler alanın tam küre yüzeyinde N değerleri

l / m	0	1	2	3	4	5	.
0	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{20}$	$\sqrt{30}$	.
±1		$\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{20}$	$\sqrt{30}$	.
±2			$\sqrt{6}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{20}$	$\sqrt{30}$	.
±3				$\sqrt{12}$	$\sqrt{20}$	$\sqrt{30}$	.
±4					$\sqrt{20}$	$\sqrt{30}$	.
							. . .

Çizelge 3.2 Kütlesiz konformal olmayan skaler alanın Neumann sınır koşullarına göre, l ve m'ye bağlı modların dağılımı

l / m	0	1	2	3	4	5	.
0		-	$\sqrt{6}$	-	$\sqrt{20}$	-	.
±1		$\sqrt{2}$	-	$\sqrt{12}$	-	$\sqrt{30}$	
±2			$\sqrt{6}$	-	$\sqrt{20}$	-	.
±3				$\sqrt{12}$	-	$\sqrt{30}$	
±4					$\sqrt{20}$	-	.
±5						$\sqrt{30}$	
							. . .

Çizelge 3.3 Kütlesiz konformal olmayan skaler alanın Dirichlet sınır koşullarına göre, *l* ve *m*'ye bağlı modların dağılımı

l / m	0	1	2	3	4	5	.
0		$\sqrt{2}$	-	$\sqrt{12}$	-	$\sqrt{30}$	
±1		-	$\sqrt{6}$	-	$\sqrt{20}$	-	.
±2			-	$\sqrt{12}$	-	$\sqrt{30}$	
±3				-	$\sqrt{20}$	-	.
±4					-	$\sqrt{30}$	
±5						-	.
							. . .

Çizelge 3.3 ve Çizelge 3.2'nin toplamı bize Çizelge 3.1'i verecektir. Yarım küre yüzeyinde kütlesiz konformal skaler alan için sırasıyla Dirichlet ve Neumann sınır koşullarıyla Casimir enerjisi;

$$E_c^D = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty} l\frac{1}{a}\sqrt{l(l+1)},$$

$$E_c^D = \frac{1}{2a}\lim_{s\to -1/2}\zeta_2^D(s) \tag{3.14}$$

Burada ζ_2^D, iki boyutlu kütlesiz konformal olmayan skaler alanda Dirichlet sınır değer koşullarına göre üretilmiş modların toplamını veren Riemann-zeta fonksiyonudur.

$$E_c^N = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\infty} (l+1)\frac{1}{a}\sqrt{l(l+1)}$$

$$E_c^N = \frac{1}{2a}\lim_{s\to -\frac{1}{2}}\zeta_2^N(s) \tag{3.15}$$

Burada ζ_2^N, iki boyutlu kütlesiz konformal olmayan skaler alanda Neumann sınır değer koşullarına göre üretilmiş modların toplamını veren Riemann-zeta fonksiyonudur.

Modların simetrisinden de görüleceği gibi tam küre yüzeyinde Casimir enerjisi

$$E_c^F = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty} l\frac{1}{a}\sqrt{l(l+1)} + \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)\frac{1}{a}\sqrt{l(l+1)}$$

$$\zeta_2^F = \zeta_2^D + \zeta_2^N \tag{3.16}$$

toplamından oluşur. Ayrı ayrı yarım küre yüzeylerindeki enerjiyi hesaplayıp toplayarak tam küre yüzeyindeki enerjinin elde edileceği görülmektedir. Denklem (3.14) ve (3.15) sonsuzluklar içerdiği için zeta fonksiyonu ile genel bir tanımlama yapılır. Dirichlet sınır koşulu için zeta fonksiyonu ile ifade

$$\zeta_2^D(s) = \sum_{l=1}^{\infty} l[l(l+1)]^{-s}, \tag{3.17}$$

olarak tanımlanır. Burada $s = -\frac{1}{2}$ seçersek Denklem (3.14) elde edilir. Neumann sınır koşulu için zeta fonksiyonu ile ifade ise

$$\zeta_2^N(s) = \sum_{l=1}^{\infty}(l+1)[l(l+1)]^{-s}\,, \tag{3.18}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $s = -\frac{1}{2}$ seçersek Denklem (3.15) elde edilir. $s = 0$ özel durumlarını ise şu şekilde ifade edersek;

$$\zeta_D(0) = 2\zeta'(-1) + \frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{4}\,, \tag{3.19}$$

$$\zeta_N(0) = 2\zeta'(-1) - \frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{4}. \tag{3.20}$$

Zeta fonksiyonu regülarizasyonu ile denklem (3.14) ve (3.15)'in çözümlerine bakacağız. Bunun için önce genel tanımı yazalım. Zeta fonksiyonu (Elizalde, Odintsov, Romeo;1994)

$$F(s;\alpha,b) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} [(n+\alpha)^2+b]^{-s} \equiv \frac{b^{-s}}{\Gamma(s)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n+s)}{n!} b^{-n} \zeta(-2n,\alpha)$$
$$+ \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(s)} b^{\frac{1}{2}-s} + \frac{2\pi^s}{\Gamma(s)} \cos(2\pi\alpha)\, b^{\frac{1}{4}-\frac{s}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{2}-s} K_{s-\frac{1}{2}}\left(2\pi n\sqrt{b}\right) \quad (3.21)$$

şeklindedir. Regularize edilen genel formu ise (Elizalde, Odintsov, Romeo;1994)

$$f(s;a,b,c) \equiv \sum_{l=1}^{\infty} l^{-s+b}(l+\alpha)^{-s+c} \quad (3.22)$$

biçimindedir. Eşitliğin her iki tarafı *l* terimine bölünür ve daha sonra binom açılımı uygulanırsa bu seriden Riemann Zeta fonksiyonu elde edilir. O halde d=2 için Dirichlet ve Neumann sınır koşulları ile zeta fonksiyonu,

$$\zeta_2^D(s) = 2^{-s} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1-s)}{k!\,\Gamma(1-s-k)} [\zeta(2s+k-1)-1] \quad (3.23)$$

$$\zeta_2^N(s) = 2^{1-s} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2-s)}{k!\,\Gamma(2-s-k)} [\zeta(2s+k-1)-1] \quad (3.24)$$

olarak yazılır. Denklem (3.14) ve (3.15) yukarıdaki açılımlar kullanılarak yazılırsa

$$\zeta_2^D(s) = 2^{-s} + \frac{\Gamma(1-s)}{0!\,\Gamma(1-s)} [\zeta(2s-1)-1]$$

$$+ \frac{\Gamma(1-s)}{1!\,\Gamma(-s)} [\zeta(2s)-1] + \frac{\Gamma(1-s)}{2!\,\Gamma(-s-1)} [\zeta(2s+1)-1]$$

$$+ \frac{\Gamma(1-s)}{3!\,\Gamma(-s-2)} [\zeta(2s+2)-1] + \vartheta(k^{\gamma};\, \gamma \geq 4) \quad (3.25)$$

$$\zeta_2^N(s) = 2^{1-s} + \frac{\Gamma(2-s)}{0!\,\Gamma(2-s)}[\zeta(2s-1)-1]$$

$$+\frac{\Gamma(2-s)}{1!\,\Gamma(1-s)}[\zeta(2s)-1] + \frac{\Gamma(2-s)}{2!\,\Gamma(-s)}[\zeta(2s+1)-1]$$

$$+\frac{\Gamma(2-s)}{3!\,\Gamma(-s-1)}[\zeta(2s+2)-1] + \vartheta(k^{\gamma};\ \gamma \geq 4) \tag{3.26}$$

şeklinde devam eder. (3.23) ve (3.24) denklemlerinde *k* terimine göre seri açılım yapılırsa $k = 3$'de $s = -\frac{1}{2}$ alındığında $\zeta(1)$ terimi elde edilir ($\lim_{s\to-\frac{1}{2}} \zeta(2s+2)$).

Zeta fonksiyonunun genel tanımı yazılırsa

$$\zeta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^z} \qquad z > 1 \tag{3.27}$$

şeklindedir. $z = 1$'de

$$\lim_{z\to1} \zeta(z) = \frac{1}{z-1} + \gamma + \gamma_1(z-1) + \gamma_2(z-1)^2 + \cdots \tag{3.28}$$

sonsuza giden terim sonsuz+sonlu terimlerle ifade edilir. Burada γ Euler-Mascheroni sabitidir (Elizalde, Odintsov, Romeo;1994). Aynı zamanda

$$\Gamma(x)\Gamma(-x) = \frac{-\pi}{x\sin\pi x} \tag{3.29}$$

bağıntısını (Bell, 2004), denklem (3.25) ve (3.26)'da kullanarak yarım küre yüzeyi üzerinde Dirichlet sınır değer koşuluna bağlı zeta fonksiyonu ifadesi

$$\zeta_2^D\left(-\frac{1}{2}\right) = \lim_{s\to-\frac{1}{2}} \frac{1}{32\left(s+\frac{1}{2}\right)} + 0.033532 \tag{3.30}$$

olarak elde edilir ve benzer süreçler Neumann sınır değer koşulu için de yapıldığında;

$$\zeta_2^N\left(-\frac{1}{2}\right) = \lim_{s\to-\frac{1}{2}} \frac{-1}{32\left(s+\frac{1}{2}\right)} - 0.298630 \tag{3.31}$$

olarak bulunur. Denklem (3.21)'i hesaplarken s terimlerini $s = -\frac{1}{2}$ olarak aldığımızda, Denklem (3.30) ve (3.31)'de de *s* terimi yerine $-\frac{1}{2}$ yazarsak iki denklemin de ilk terimi sonsuza gidecektir. Fakat işaretlerinin farklı gelmesi tam küre yüzeyindeki konformal olmayan skaler alanın Casimir enerjisinde sonsuzlukların yok olmasına olanak verir. Bu durumda terimler ters işaretli geldiği için birbirini götürecektir. Bölüm 2'de kesilim ve alternatif kesilim yöntemi ile regülarizasyon yapılırken sonsuzluklar fiziksel bir karşılığı alınarak regülarize etmiştik fakat burada zeta fonksiyonu regülarizayonu ile ortaya çıkan sonsuzlukları fiziksel bir karşılığı olmadan yalnızca matematiksel olarak regülarize edilmektedir. Kütlesiz konformal skaler alan için yarım küre yüzeylerinde karşılaşılan sonsuzluklar alternatif kesilim fonksiyonu aracılığıyla renormalize edilirken, kütlesiz konformal olmayan skaler alan için yarım küre yüzeylerinde elde edilen sonuçlar hala sonsuz ifadeler barındırmaktadır. Yine Bölüm 2'de yarım küre yüzeyinde elde edilen modlarının toplamının tam küre yüzeyinde kütlesiz konformal skaler alanın modlarını verdiğini görmüştük. Aynı düşünceyi burada uyguladığımızda, yarım küre yüzeyi için yapılan hesapların toplamı, tam küre yüzeyinde kütlesiz konformal olmayan skaler alanın Casimir enerjisini verecektir (Elizalde, 1994). Denklem (3.16)'dan

$$E_c^D = \frac{1}{2a}\zeta_2^D(s)$$

$$E_c^N = \frac{1}{2a}\zeta_2^N(s)$$

$$E_c^F = \frac{1}{2a}\lim_{s\to-\frac{1}{2}}(\zeta_2^D(s) + \zeta_2^N(s))$$

$$\zeta_2^F\left(-\frac{1}{2}\right) = \sum_{l=1}^{\infty}(2l+1)[l(l+1)]^{-s} = \zeta_2^D(-1/2) + \zeta_2^N(-1/2) = -0.265098 \quad (3.32)$$

elde edilir.

Kütlesiz konformal olmayan skaler alanın tam S^2 yüzeyinde elde edilen değeri ile, kütlesiz konformal skaler alanın tam S^2 yüzeyindeki değeri farklı çıkmaktadır. Fakat sınır değer koşulları söz konusu olduğunda konformal alanda sonsuz terim kalmamasına rağmen konformal olmayan alanda sonsuz terimlerin kalması ilgi çekici bir noktadır.

SONUÇLAR

Bu çalışmamızda ilk olarak iki boyutlu tam küre yüzeyine yerleştirilmiş kütlesiz konformal skaler alanın Casimir enerjisi, modların toplamı yöntemi ile hesaplanmıştır. Casimir enerjisinin doğasında var olan sonsuzluklar, kesilim fonksiyonu ile regülarize edilmiş ve tam küre yüzeyinde kütlesiz konformal skaler alandaki renormalize edilmiş Casimir enerjisi,

$$E_{ren} = \lim_{\alpha \to 0} \theta(\alpha^n; n \geqslant 1) = 0$$

sıfır olarak yeniden elde edilmiştir.

Benzer şekilde yarım küre yüzeyinde kütlesiz konformal skaler alanın Dirichlet ve Neumann sınır koşulları altında Casimir enerjisi, $e^{-\alpha\omega}$ gibi bir kesilim fonksiyonu aracılığıyla regularize edilmiş fakat hesaplamalarımız sonucunda ,

$$E_{ren} = \lim_{\alpha \to 0} \left[\frac{2a^2}{\alpha^3} - \frac{2a^2}{\alpha^3} + \frac{a}{4\alpha^2} + \frac{1}{96a} + \{\alpha' nın\ pozitif\ kuvvet\ terimleri\} \right]$$

görüldüğü üzere renormalize edilmiş Casimir enerjisinin sonsuzluklar içerdiği tespit edilmiştir. Bu sonsuzlukları yeniden regularize etmek için alternatif bir kesilim fonksiyonu belirlenerek yarım küre yüzeyinde Dirichlet ve Neumann sınır koşullarına bağlı kütlesiz konformal skaler alanın Casimir enerjisi

$$E_{0,D} = -\frac{1}{96a}$$

$$E_{0,N} = +\frac{1}{96a}$$

olarak yeniden elde edilmiş ve renormalize edilmiş Casmir enerjisi modların toplamından dolayı

$$E_D + E_N = E_F$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$-\frac{1}{96a} + \frac{1}{96a} = 0$$

sonlu bir terim olarak ifade edilmiştir.

Sonrasında iki boyutlu tam küre yüzeyine yerleştirilmiş kütlesiz konformal skaler alanın Casimir enerji yoğunluğu nokta ayrıştırma yöntemi gereğince yeniden göz önüne alınmıştır. Nokta ayrıştırma yöntemi ile hesaplama yapılırken Green's fonksiyonlarından yararlanılmış ve ortaya çıkan sonsuzluklar $x' \to x$ limitinde n = 0 terimi olarak ortaya çıkmıştır bu da 3 boyutlu Minkowski uzayının kuantum vakum enerjisidir. Sonuç olarak iki boyutlu tam küre yüzeyine yerleştirilmiş kütlesiz konformal skaler alanın renormalize edilmiş enerji-momentum tensörünün beklenen değeri,

$$\langle T_0^0 \rangle_{ren} = 0$$

olarak yeniden elde edilmiştir.

Daha sonra iki boyutlu tam küre yüzeyine yerleştirilmiş kütlesiz konformal olmayan skaler alanın Casimir enerjisi Riemann-zeta fonksiyonu regülarizayonu ile yeniden hesaplanmıştır. Tam küre yüzeyinde Casimir enerjisi hesabı için öncelikle yarım küre yüzeyinde Dirichlet ve Neumann sınır koşulları altında zeta fonksiyonu yardımı ile Casimir enerjisi hesabı yapılmış daha sonra bulunan terimler toplanarak tam küre yüzeyinde Casimir enerjisi

$$\zeta_2^F\left(-\frac{1}{2}\right) = \zeta_2^D(-1/2) + \zeta_2^N(-1/2) = -0.265098$$

olarak yeniden elde edilmiştir.

Sonuç olarak; tam küre yüzeyine yerleştirilmiş kütlesiz konformal skaler alanın Casimir enerjisi sıfır olurken, tam küre yüzeyine yerleştirilmiş kütlesiz konformal

olmayan skaler alanın Casimir enerjisi, sıfırdan faklı ve eksi değer almıştır. Yarım küre yüzeyine yerleştirilen kütlesiz konformal skaler alanın Casimir enerjisi Dirichlet sınır koşulu için eksi değer, Neumann sınır koşulu için artı değer almış fakat yarım küre yüzeyine yerleştirilen kütlesiz konformal olmayan skaler alanın Casimir enerjisi hesabı yapıldığında, fiziksel gerekçelendirilmemiş sonsuzluklar içerdiği görülmüştür.

$$E_c^D = \frac{1}{2a} \lim_{s \to -\frac{1}{2}} \frac{1}{32\left(s + \frac{1}{2}\right)} + 0.033532$$

$$E_c^N = \frac{1}{2a} \lim_{s \to -\frac{1}{2}} \frac{-1}{32\left(s + \frac{1}{2}\right)} - 0.298630$$

Seçilen geometri ve boyut aynı kalarak alanın konformal ve konformal olmayan olarak değişmesi hem tam küre hem de yarım küre üzerinde farklı sonuçlar üretilmiştir. Burada hala iki boyutlu yarım küre üzerine yerleştirilen kütlesiz konformal olmayan skaler alanın Dirichlet ve Neumann sınır değer koşullarına göre renormalize edilmiş kuantum vakum enerjisi hesaplanamamıştır.

KAYNAKLAR

Abramowitz, M. & Stegun, I. A. (1964). *Handbook of Mathematical Functions*, Washington DC: Dover

Adler, R., Bazin, M. & Schiffer, M. (1975). Introduction to General Relativity. New York, NY: McGraw-Hill, Second Edition.

Arfken, G. B., Weber H. J., (1967). *Mathematical Methods for Physicists*, USA: Academic Press

Bayın, S. Ş. & Özcan, M. (1997). Casimir energy of the massless scalar field on S^2 by the point-splitting method. *Journal of Mathematical Physics*. 38(8), 5240-5255.

Bayın, S. Ş. ve Özcan, M. (1993). Casimir Effect in a 'Half Einstein Universe': An Exactly Solvable Case in Curved Background and with a Spherical Boundary. *Class. Quantum Grav*. 10 L115.

Bayın, S. Ş. ve Özcan, M. (1993). Casimir Energy in a Curved Background With a Spherical Boundary: An Exactly Solvable Case. *Physical Review*. D 48 2806.

Bayın, S.Ş. (2004). *Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler*, İstanbul: Ders kitapları A.Ş.

Bayın, S.Ş., & Özcan, M. (1994). Casimir energy in a curved background with a spherical boundary and arbitrary radius: An exact solution via the point-splitting method. *Physical Review*, D 49, 5313-5318.

Bell W. W., (2004). *Special Function for Sciencist and Engineers*, London: Dover Publications.

Birrel, N. D., Davies, P. C. W. (1982). *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge: University Press.

Bowers, M. E., Hagen, C. H. (1999). Casimir Energy of a Spherical Shell. *Physics Review*, 59(2), 2-7.

Boyer, T.H. (1968). Quantum electromagnetic zero-point energy of a conducting spherical shell and the casimir model for a charged particle**.** *Physical Review*, 174: 1764-76.

Casimir, H. B. G. (1948). On the Attraction Between Two Perfectly Conducting Plates. *Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences*. 51, 793.

Dowker, J. S. ve Critchley, R. (1976). Covariant Casimir Calculations. *J. Phys*. A 9, 535.

E. Elizalde, S. D. Odintsov, A. Romeo, A. A. Bytsenko and S. Zerbini, "*Zeta Regularization Techniques with Aplications*" (World Scientific, Singapore, 1994.

Elizalde, E. (1994). The vacuum energy density for spherical and cylindrical universes, *Journal of Mathematical Physics*. 35:3308-3321.

Elizalde, E., Romeo, A. (1989). Rigorous extension of the proof of zeta-function regularization. *Physical Review*. D. vol. 40, 436.

Ford, L. H. (1975). Quantum Vacuum Energy in General Relativity. *Physical Review*. D 11, 3370.

Ford, L. H. (1976). Quantum Vacuum Energy in a Closed Universe. *Physical Review*. D 14, 3304.

Fulling, S. A. (1989). *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time*, Cambridge: University Press.

Heisenberg, W. (1927). Über den anschaulichen ınhalt der quantentheoretischen kinematic und mechanik. *Zeitschrift fur Physik*. 43, 172-198.

Lamoreaux, S.K., (1997). Demonstration of The Casimir Force in the 0.6 to 6 μm Range. *Physical Review Letters*. 78, 5.

Milton, K. A. (1983). Fermionic Casimir stress on a spherical bag. *Annals of Physics*. Volume 150.

Milton, K. A. (2001). Physical Manifestations of Zero Point Energy The Casimir Effect. Singapore, SGP: *World Scientific*.

Milton, K. A., L.L. DeRaad,, Jr., and J. Schwinger, (1978). Casimir self-stress on a perfectly conducting spherical Shell. *Annals of Physics*. 115, 388.

Mostepanenko, V. M., Trunov, N. N. (1997). *The Casimir Effect and Applications*. New York, NY: Oxford.

Nesterenko, V. V., Pirozhenko, I. G. (1997). Justification of the Zeta function renormalization in rigid string model. *Journal of Mathematical Physics*, 38(12), 2-4.

Nesterenko, V. V., Pirozhenko, I. G. (1998). Simple method for calculating Casimir effect for a sphere. *Physical Review*. D 57, 1284.

Özcan, M. (2006). Casimir Energy density for spherical universes in n- dimensional spacetime. Classical and Quantum Gravity , 23(18), 5-14.

Sparnaay, M. J., (1958). Measurements of attractive forces between flat plates**.** *Physica* 24, 751-764.

Tabor, D. & Winterton, R.H.S. (1969). The direct measurement of normal and retarded van der Waals forces. *Proceedings of the Royal Society of London*, A312, 435-450.

ÖZGEÇMİŞ

İlk ve ortaöğretimi İstanbul'da, lise eğitimini Kastamonu'da tamamladım. 2016 yılında yerleştiğim Trakya Üniversitesi Fizik Bölümünden, 2021 yılında mezun oldum. Aynı yıl, Fizik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başlayarak 2024 yılında tamamladım. Hedefim, Matematiksel Fizik alanında kendimi geliştirmek ve Kuantum Alan Teorisine katkı sağlamaktır.