T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$SU(3)$ GRUBUNUN HOMOJEN UZAYINDA DİFERANSİYEL OPERATÖRLER

FERDİ ÖZDEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HESAPLAMALI BİLİMLER ANABİLİM DALI

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet SEZGİN

EDİRNE-2021

FERDİ ÖZDEMİR'in hazırladığı "$\boldsymbol{SU(3)}$ **GRUBUNUN HOMOJEN UZAYINDA DİFERANSİYEL OPERATÖRLER**" başlıklı bu tez, tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından **Hesaplamalı Bilimler** Anabilim Dalında bir **Yüksek lisans tezi** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri :	İmza
Prof. Dr. Mahmut ERGÜT	……
Prof. Dr. Mehmet SEZGİN	……
Prof. Dr. Metin AYDOĞDU	……

Tez Savunma Tarihi: 24/06/2021

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

	İmza
Prof. Dr. Mehmet SEZGİN Tez Danışmanı	……

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

……

Prof. Dr. Hüseyin Rıza Ferhat KARABULUT
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

T.Ü. FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HESAPLAMALI BİLİMLER ANABİLİM DALI YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

DOĞRULUK BEYANI

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında, tüm verilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini, kullanılan verilerde tahrifat yapılmadığını, tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını, kullanılan tüm literatür bilgilerinin bilimsel normlara uygun bir şekilde kaynak gösterilerek ilgili tezde yer aldığını ve bu tezin tamamı ya da herhangi bir bölümünün daha önceden Trakya Üniversitesi ya da farklı bir üniversitede tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

24/06/2021

Ferdi ÖZDEMİR

Yüksek Lisans Tezi

SU(3) Grubunun Homojen Uzayında Diferansiyel Operatörler

T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü

Hesaplamalı Bilimler Anabilim Dalı

ÖZET

Bu tez çalışmasının birinci bölümünde grup, homojen uzay, metrik matris ve diferansiyel operatörler hakkında temel bilgiler verildi. İkinci bölümde $SU(3)$ grubunun homojen uzayının parametrik bir ifadesine göre metrik matris ve Laplace-Beltrami operatörü ifade edildi. Daha sonra bu operatörle oluşturulan özdeğer-özfonksiyon probleminin çözümü verildi. Çözümde ortaya çıkan fiziksel sistemin dalga fonksiyonu elde edildi ve sistemin potansiyeli ile dalga fonksiyonunun grafikleri verildi. Daha sonra $SU(3)$ grubunun diğer diferansiyel operatörleri olan I^2 , I_3 , Y operatörleri ifade edildi. Benzer şekilde bu operatörlerle oluşturulan özdeğer-özfonksiyon problemlerinin çözümleri verildi.

Yıl : 2021

Sayfa Sayısı : 70

Anahtar Kelimeler : $\boldsymbol{SU(3)}$ grubu, homojen uzay, diferansiyel operatör

Master's Thesis

Differential Operators in the Homogeneous Space of the Group $SU(3)$

Trakya University Institute of Natural Sciences

Department of Computational Sciences

ABSTRACT

In the first part of this thesis, the basic information about group, homogeneous space, metric matrix and differential operators was given. In the second chapter, the metric matrix and Laplace-Beltrami operator is expressed according to a parametric expression of the homogeneous space of the group $SU(3)$. Then, the solution of the eigenvalue-eigenfunction problem obtained by the operator was given. The wave function of the physical system derived from the solution were obtained and, the potential function and the wave function of the system were drawn. Then, the other differential operators of the $SU(3)$ group such as I^2 , I_3 , Y operators were expressed. Similarly the solutions of the eigenvalue-eigenfunction problems induced by these operators were given.

Year : 2021

Number of Pages : 70

Keywords : The group $\boldsymbol{SU(3)}$, homogeneous space, differential operator

ÖNSÖZ

Tez çalışmam sırasında bilgi, birikim ve tecrübesi ile bana yol gösterici ve destek olan değerli danışmanım Prof. Dr. Mehmet SEZGİN'e ve bana her konuda yardımcı olan değerli bölüm hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tez çalışmama yaptığı katkılarından dolayı Arş. Gör. Yasemin IŞIK'a teşekkür ederim.

Ferdi ÖZDEMİR

İÇİNDEKİLER

ÖZET iv

ABSTRACT v

ÖNSÖZ vi

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ viii

ŞEKİLLER DİZİNİ ix

BÖLÜM 1 - GİRİŞ 1

1.1. Grup 3

1.2. Homojen Uzay 10

1.3. Metrik Matris 12

1.4. Diferansiyel Operatör 15

BÖLÜM 2 - $SU(3)$ GRUBUNUN HOMOJEN UZAYINDA DİFERANSİYEL OPERATÖRLER 24

BÖLÜM 3 - SONUÇLAR 52

KAYNAKLAR 56

ÖZGEÇMİŞ 60

TEZ İLE İLGİLİ BİLİMSEL FAALİYETLER 61

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Δ_{LB}	Laplace-Beltrami operatörü
$\psi(x)$	Dalga fonksiyonu
E	Enerji
H	Hamiltonyen operatörü
$F(a,b;c;z)$	Hipergeometrik fonksiyon
$[\cdot,\cdot]$	Komütatör
$V(x)$	Potansiyel fonsiyonu
$P_a^{(\alpha,\beta)}(x)$	Jacobi polinomu
(g_{ij})	Metrik matris
G, g	Lie grubu ve cebiri
$\mathbb{R}^n$	*n* boyutlu Öklid uzayı
$d(x,y)$	Noktalar arasındaki uzaklık
ds^2	Uzunluk elemanı
J	Jakobiyen matrisi
D, T, L, ∇	Diferansiyel operatörler
∇^2	Laplace operatörü
δ_{ij}	Kronecker delta fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. Üç boyutlu Öklid uzayında iki nokta arası uzaklık .....…….. 12

Şekil 2.1. $\ell = m = n = 1$ için (2.14) Pöschl-Teller potansiyeli ...….....….... 33

Şekil 2.2. Parçacığın t anında a ve b noktaları arasında bulunma olasılığı ……..... 37

Şekil 2.3. $\ell = m = n = 1$ ve $k = 0$ için birinci seviye (2.16) dalga fonksiyonu ... 41

Şekil 2.4. $\ell = m = n = 1$ ve $k = 1$ için ikinci seviye (2.16) dalga fonksiyonu 41

Şekil 2.5. $m = n = 1$ için (2.26) Pöschl-Teller potansiyeli ...….....….... 43

Şekil 2.6. $m = n = 1$ ve $k = 0$ için birinci seviye (2.29) dalga fonksiyonu 47

Şekil 2.7. $m = n = 1$ ve $k = 1$ için ikinci seviye (2.29) dalga fonksiyonu 47

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Sir Isaac Newton ve Gottfried Leibniz tarafından bilim dünyasına kazandırılan bazı diferansiyel denklemler günlük yaşantımızdaki birçok fiziksel olayı (güneş sistemi, artma ve azalma, sıcaklık, serbest düşme, elektrik devre problemleri ve bunun gibi) modellemek için kullanılır (Zill, 2018). Bu nedenle diferansiyel denklemlerin incelenmesi temel bilimlerde hayati bir rol oynar. Bu denklemleri çözmek benzersiz ve yaratıcı yöntemler gerektirir. Ortaya çıkan denklemleri çözmek için değişkenlerine ayırma, Frobenious metodu, Laplace dönüşümü, simetri metodu gibi yöntemler kullanılır. Fizikteki simetri kavramı matematiksel olarak grup teorisi ile ifade edilir. Grup teorisi gerçek dünyanın simetri özelliklerini keşfetmede önemli bir matematiksel araçtır ve özellikle fizik, kimya gibi temel bilimlerde önemli uygulama alanlarına sahiptir.

Joseph-Louis Lagrange 1770'de yaptığı bir çalışmada ilk kez yüksek dereceden polinomların köklerinin varlığı ve yapısı, köklerin nasıl elde edileceği gibi konularla ilgilenmiş ve bir $f(x)$ polinomunun köklerinin permütasyonlarının önemini keşfetmiştir. Daha sonra Evariste Galois ilk defa 1830'da grup yapısından bahsetmiş ve her polinomu, polinomun köklerinin bir permütasyon grubuyla eşleştirmiştir. Böylece grup teorisinin temelleri atılmış, sonraki yıllarda teori büyük gelişmeler göstererek, matematik ve diğer bilimlerde büyük bir uygulama alanı haline gelmiştir.

19. yüzyılın başlarında Galois'nın cebirsel denklemleri çözmek için grup teoriyi kullanması Norveçli bilim adamı Marius Sophus Lie'yi de kendi çalışması için benzer bir tekniğe yönlendirmiştir. Sonlu grupların, sonlu dereceden denklemlerin çözülebilirliğine karar vermede kullanılması, sonsuz grupların da (örneğin; bir veya birden fazla reel ya da kompleks değişkene bağlı gruplar) adi veya kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü ile

ilişkisi olabileceği görülmüştür. Bunun üzerine Lie, adi diferansiyel denklemleri çözmede kullanılan karmaşık teknikleri bir düzene koymak için simetri dönüşümlerinin sürekli bir grubu fikrini ortaya koymuş ve çalışmalarını bu fikir üzerine kurarak Lie teorisi olarak bilinen teoriyi geliştirmiştir.

Lie gruplarının bilim dünyasına tanıtılmasından bu yana teori büyük bir gelişme göstermiştir. Lie grupları üzerine yapılan önemli çalışmaların birisi temsil teorisidir. Grup temsili, soyut cebirsel yapıların, cebirsel işlemler yardımı ile somut yapılar haline getirilmesini sağlamaktadır. Bu nedenle özellikle fizikte birçok uygulama alanına sahiptir. Kuantum mekaniği bu uygulama alanlarının başında gelir. Örneğin, kuantum mekaniğinde simetrileri bilinen fiziksel bir sistemin ifade edilmesinde Lie grubu temsillerinin önemi büyüktür. Böyle bir kuantum sisteminin Hamiltoniyeni, sistemin simetri grubuyla ilişkili ikinci dereceden Casimir operatör veya Laplace-Beltrami operatörü cinsinden ifade edilir. Dolayısı ile bu bağlantı, Schrödinger denkleminin çözümüne dair herhangi bir işlem gerektirmeksizin dalga fonksiyonunu elde etmeye olanak sağlamaktadır.

Lie grubu alanındaki önemli çalışmalardan bir diğeri ise, özel fonksiyonlar ile grup temsilleri arasında kurulan ilişkidir. Bu alanda yapılan ilk çalışmalar Élie Cartan'a aittir. Daha sonra Eugene Wigner'in önemli çalışmaları olmuş ancak Vilenkin'in çalışmaları bu alanda dönüm noktası haline gelmiştir (Vilenkin & Klimyk, 1993). Bugün Lie grupları matematiğin birçok dalında, ayrıca fizik, kimya ve mühendislik gibi matematik temelli bilimler üzerinde oldukça büyük bir etkiye sahiptir. Lie teorisinin sürekli simetri gruplarının bu etkisi bugün cebirsel topoloji, diferansiyel geometri, özel fonksiyonlar, kontrol teori, klasik mekanik, kuantum mekaniği gibi çok geniş bir alana yayılmıştır. Özellikle son iki yüzyılda Lie grupları ve temsilleri alanında yapılan çalışmaların sayısında ciddi bir artış olmuştur (Belinfante, Kolman & Smith, 1966; Kalnins & Miller, 1977; Kirillov, 2008; Verdiyev, 1988; Wigner & Griffin, 1959).

Bu çalışma $SU(3)$ Lie grubu üzerine yapılmıştır. $SU(3)$ grubunun homojen uzayının ele alınan bir parametrik ifadesine göre Laplace-Beltrami operatörü elde edilmiştir (Akyeampong & Rashidi, 1972; Beg & Ruegg, 1965; Holland, 1969a; Liotta & Triolo, 1969; Nelson, 1967). Bu operatör bir f fonksiyonuna etki ettirilerek elde edilen özdeğer-özfonksiyon probleminin çözümleri araştırılmıştır. Ayrıca Laplace-Beltrami operatörün Schrödinger denklemi ile olan bağlantısı kullanılarak $SU(3)$ Lie

grubuna karşılık gelen fiziksel sistem verilerek sistemin çözümü olan dalga fonksiyonları elde edilmiştir. Ek olarak $SU(3)$ grubun diğer invaryant operatörleri olan I^2, I_3, Y operatörleri ifade edilmiştir (Liotta & Triolo, 1969). Bu operatörlerle oluşturulan özdeğer-özfonksiyon problemlerinin çözümleri verilmiştir.

1.1. Grup

$G \neq \emptyset$ bir küme, $* : G \times G \to G$ bir ikili işlem olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $(G,*)$ cebirsel yapısına grup denir.

i. $*$ işlemi birleşmelidir. Yani $\forall a,b,c \in G$ için $a*(b*c) = (a*b)*c$ dir.

ii. $*$ işlemine göre G 'de bir birim (etkisiz) eleman vardır. Yani $\exists e \in G$ öyle ki $\forall a \in G$ için $a*e = e*a = a$ dır.

iii. $*$ işlemine göre her $a \in G$ elemanının tersi vardır. Yani $\forall a \in G$ için $\exists a^{-1} \in G$ öyle ki $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$ dir.

Ayrıca,

iv. $\forall a,b \in G$ için $a*b = b*a$

koşulu sağlanıyorsa $(G,*)$ grubuna değişmeli grup denir. $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi toplama işlemine göre ve $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ reel sayılar kümesi çarpma işlemine göre birer değişmeli gruptur.

Bir grubun elemanlarının sayısına grubun mertebesi denir. Grubun elemanları sonlu sayıda ise bu gruba sonlu grup denir. Sonlu elemanlı grubun grup özellikleri çarpım tablosuyla uygun şekilde özetlenebilir. Örneğin $G_1 = \{1,-1\}$ ve $G_2 = \{1,-1,i,-i\}$ kümelerini ele alalım. Bu iki küme çarpma işlemi altında sonlu gruptur (McWeeny & Phil, 1963).

G_1:

.	1	−1
1	1	−1
−1	−1	1

G_2:

.	1	−1	i	$-i$
1	1	−1	i	$-i$
−1	−1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	−1	1
$-i$	$-i$	i	1	−1

Eğer

i. G bir grup,

ii. G bir manifold,

iii. $G \times G$ üzerinde tanımlanan grup işlemi

$$f : G \times G \to G, \quad f(g,h) = g * h, \quad g,h \in G$$

ve G üzerinde tanımlı ters işlemi

$$i : G \to G, \quad i(g) = g^{-1}, \quad g \in G$$

analitik (sonsuz kez türevlenebilir) dönüşümler ise G bir Lie grubudur denir. Tanımdan da anlaşılacağı üzere Lie grupları hem grup hem de manifold yapısına sahiptir. $G = \mathbb{R}^n$ olsun. $\mathbb{R}^n$ 'nin manifold yapısına sahip olduğu aşikardır. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere grup işlemi $(x,y) \mapsto x + y$ şeklinde vektör toplamı işlemi olsun. Ters işlemi ise $x \mapsto -x$ şeklinde tanımlansın. Tanımlanan her iki işlem de analitik olup $\mathbb{R}^n$, n parametreli değişmeli bir Lie grubudur. Şimdi Lie gruplarının önemli bir bölümünü oluşturan $n \times n$'lik matris gruplarının en çok bilinenlerini verelim.

$\mathbb{R}^n$ uzayında $x' = Ax$ lineer dönüşümlerini ele alalım. A, bu dönüşümün $n \times n$'lik matrisi olmak üzere bu türden matrisler, matris çarpımı işlemine göre bir grup oluşturur. Bu grup genel lineer grup olarak adlandırılır ve

$$GL(n,\mathbb{R}) = \left\{ A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n} \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{R}\,,\ \ i,j = 1,2,\dots,n,\ \ \det A \neq 0 \right\}$$

$GL(n,\mathbb{R})$ ile gösterilir. $GL(n,\mathbb{R})$ grubu, basitçe n^2 boyutlu $M_{nxn}(\mathbb{R})$ vektör uzayından determinantı sıfır olan matrisler kümesinin çıkartılmasıyla oluşan bir alt küme olarak düşünülebilir. Bu küme $M_{nxn}(\mathbb{R})$ Öklid uzayında bir alt manifold olup $GL(n,\mathbb{R})$ grubu n^2 boyutlu bir Lie grubu oluşturur.

Bir matrisin determinantı, matrisin ilgili olduğu lineer dönüşümün geometrik özellikleri hakkında önemli bilgiler vermektedir. Bu ise bizi $GL(n,\mathbb{R})$ grubunun determinantı bir olan matrislerden oluşan alt grubuna yönlendirir. Bu grup özel lineer grup olarak adlandırılır ve $SL(n,\mathbb{R})$ ile gösterilir:

$$SL(n,\mathbb{R}) = \{\, A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det A = 1 \,\}$$

$SL(n,\mathbb{R})$ ile gösterilir.

$n \times n$ ortogonal matrislerin kümesi, $GL(n,\mathbb{R})$ grubunun bir alt grubunu oluşturur. Bu grup ortogonal grup olarak adlandırılır ve A^t , A matrisinin transpozu olmak üzere

$$O(n,\mathbb{R}) = \{\, A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid AA^t = A^tA = I \,\}$$

şeklinde verilir. $A \in O(n,\mathbb{R})$ olmak üzere,

$$\det(AA^t) = (\det A)^2 = \det(I)$$

yani $\det A = \pm 1$ 'dir. $\det A = 1$ koşulunu sağlayan ortogonal matrisler, $O(n,\mathbb{R})$ grubunun bir alt grubunu oluşturur. Bu yeni grup ise özel ortogonal grup olarak adlandırılır ve

$$SO(n,\mathbb{R}) = \{\, A \in O(n,\mathbb{R}) \mid \det A = 1 \,\}$$

$SO(n,\mathbb{R})$ ile gösterilir. Ortogonal matrislerle verilen dönüşümler skaler çarpımı yani uzunluğu korur ve grubun parametre sayısı $n(n-1)/2$ ile verilir.

$\mathbb{C}^n$ kompleks vektör uzayında $z' = Uz$ biçiminde tanımlanan dönüşümlerin U matrisleri bir grup oluşturur ve $GL(n,\mathbb{C})$ ile ifade edilir. U $n \times n$'lik kompleks bir matris olmak üzere, $\bar{U}^tU = I$ koşulu sağlanıyor ise U matrisine üniter matris denir. $n \times n$'lik üniter matrisler $GL(n,\mathbb{C})$ grubunun bir alt grubunu oluşturur ve bu grup

$$U(n,\mathbb{C}) = \{\, U \in GL(n,\mathbb{C}) \mid \bar{U}^tU = U\bar{U}^t = I \,\}$$

$$\det(\bar{U}^tU) = (\det U)^2 = \det(I)\,, \quad \det U = \pm 1$$

$U(n,\mathbb{C})$ ile gösterilir.

$U(n,\mathbb{C})$ grubunun parametre sayısı n^2 'dir. Bu grup $z = (z_1, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ olmak üzere $\langle z, z \rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{z}_i z_i$ iç çarpımını koruyan n boyutlu kompleks bir vektör uzayının dönüşümler grubu olarak da tanımlanır. Determinantı bir olan üniter matrisler $U(n,\mathbb{C})$ grubunun bir alt grubunu oluşturur. Bu grup ise özel üniter grup olarak adlandırılır ve

$$SU(n,\mathbb{C}) = \{\, U \in U(n,\mathbb{C}) \mid \det U = 1 \,\}$$

ile ifade edilir. $SU(n,\mathbb{C})$ grubunun reel parametre sayısı $n^2 - 1$ 'dir.

$\mathbb{R}^n$, $n = p + q$ uzayında pseudo (yarı) ortogonal dönüşümler ile belirlenen $n \times n$ tipinde ortogonal matrisler pseudo ortogonal grubu oluşturur ve bu grup $O(p,q)$ ile gösterilir. Grubun bir $A \in O(p,q)$ elemanı yarı ortogonallik koşulunu sağlar ve

$$I_{pq} = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{p\ tane}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{q\ tane})\,,\ n = p + q \quad \text{olmak üzere}$$

$$O(p,q) = \{\ A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid AI_{pq}A^t = A^tI_{pq}A = I_{pq}\ \}$$

ile ifade edilir. Ayrıca $A \in O(p,q)$ olmak üzere

$$\det(\ AI_{pq}A^t\ ) = \det(I_{pq}) \quad \Rightarrow \quad (\det A\ )^2 = 1$$

yani $\det A = \pm 1$ dir. $\det A = 1$ olan matrislerin kümesi $O(p,q)$ grubunun bir alt grubunu oluşturur. Bu grup özel yarı ortogonal grup olarak adlandırılan $SO(p,q)$ grubudur ve

$$SO(p,q) = \{\ A \in\ O(p,q) \mid \det A = 1\ \}$$

şeklinde ifade edilir.

Benzer şekilde $\mathbb{C}^n$, $n = p + q$ boyutlu kompleks uzayındaki lineer dönüşümlerin belirttiği matrisler ise $U(p,q)$ grubunu oluşturur ve

$$U(p,q) = \{\ U \in GL(n,\mathbb{C}) \mid \overline{U}^t I_{pq} U = U I_{pq} \overline{U}^t = I_{pq}\ \}$$

şeklinde ifade edilir. Bu grubun bir elemanı $U \in U(p,q)$ olmak üzere

$$\det(\overline{U}^t I_{pq} U\ ) = \det(I_{pq}) \quad \Rightarrow \quad (\det U\ )^2 = 1$$

yani $\det U = \pm 1$ olur. $\det U = 1$ olan kompleks matrisler kümesi $U(p,q)$ grubunun bir alt grubunu oluşturur. Bu grup $SU(p,q)$ ile gösterilir ve

$$SU(p,q) = \{\ U \in\ U(p,q) \mid \det U = 1\ \}$$

şeklinde ifade edilir (Barut & Raczka, 1980; Gilmore, 2008; Hall, 2015; Iachello, 2015; Kirillov, 2008; Vilenkin & Klimyk,1993).

Düzlemde bir nokta bir reel sayı ikilisi (x_1, x_2) ile tanımlanabilir. Bu tür reel sayı ikililerinin kümesi $\mathbb{R}^2$ ile ifade edilir. Benzer şekilde, üç boyutlu uzayda bir nokta sıralı reel sayı üçlüsü olarak (x_1, x_2, x_3) tanımlanabilir ve bu tür üçlülerin kümesi de $\mathbb{R}^3$ ile verilir. Genelleştirilecek olursa n boyutlu uzay için bu $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $\mathbb{R}^n$ şeklinde yazılabilir. Aynı zamanda $\mathbb{R}^n$'nin bir elemanını bir vektör olarak düşünebiliriz. $\mathbb{R}^n$'de $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ noktaları arasındaki uzaklık veya metrik

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

ile tanımlanır. $n = 1$ için bu formül $d(x,y) = |x - y|$ olarak yazılır ki bu da reel sayı doğrusu üzerinde x ve y şeklindeki iki nokta arasındaki uzaklıktır. Öklid geometrisinde uzaklık bu şekilde tanımlandığından, $\mathbb{R}^n$ 'nin bu metrik üzerinde n boyutlu bir Öklid uzayı olduğunu söyleyebiliriz. Öklid uzayında bir dönüşüm veya izometri mesafeyi korumalıdır. Yani her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $d\big(T(x), T(y)\big) = d(x,y)$ olmak üzere T fonksiyonu bir izometridir. $\mathbb{R}^n$ 'nin tüm izometrilerinin kümesi

grup koşullarını sağlar ve bu grup Öklid dönüşümlerinin grubu olup $E(n)$ ile gösterilir. En basit Öklid grubu örnekleri öteleme, dönme ve yansıma gruplarıdır (Johnston & Richman, 1997).

Bir G grubunun birim eleman ve kendisinden başka normal alt grubu yoksa G'ye basit grup denir. Diğer bir deyişle, G grubunun normal öz alt grubu yoksa G basit bir gruptur. G grubunun normal alt gruplarının hiçbiri değişmeli değil ise G grubuna yarı basit grup denir. Örneğin $SL(n,\mathbb{R})$, $SO(n)$, $Sp(2n,\mathbb{R})$, $n \geq 2$ için $SU(2)$ grupları yarı basit gruplardır.

G bir grup olsun. $0 \leq i \leq n$ için, G_{i+1} , G_i 'nin bir normal alt grubu olsun ve $G = G_o > G_1 > \cdots > G_n$ sağlanacak şekilde G grubunun normal alt grupları zinciri yazılsın. $G_n =< e >$ ve G_{i+1}/G_i bölüm grupları değişmeli ise G grubuna çözülebilir grup denir.

Lie grupları sürekli parametrelere bağlıdır ve bu nedenle sonsuz (sayılamayan) sayıda elemana sahip sürekli gruplar olarak bilinirler. Grubun bir elemanı $g(t_1, t_2, \dots, t_n)$ şeklinde reel sürekli parametrelerin bir fonksiyonu olarak verilir. Bir sürekli grubun elemanlarının bağlı olduğu bu parametreler bir topolojik uzay tanımlar. Bu uzaya grubun parametrik uzayı veya manifoldu denir. Grup elemanları bu parametrelere bağlı olduğundan, grubun her elemanı ile parametrelerin bir noktası arasında birebir bir eşleme yapılabilir. Bu sayede sürekli gruplar, parametrelerin oluşturduğu topolojik uzayın topolojisine sahip olurlar. Örnek olarak tek boyutlu $U(1)$ üniter grubunu ele alalım. Grubun elemanları bir θ açısıyla yapılan dönmelerdir. Bu nedenle grubun her bir elemanı

$$U(\theta) = e^{i\theta}, \qquad 0 \leq \theta < 2\pi$$

ile ifade edilebilir. Bu ise $U(1)$ üniter grubunun manifoldunun bir çember olduğunu gösterir. Grubun her bir elemanı belirli bir θ açısı ile çemberin üzerindeki bir noktayı ifade eder. Bir diğer örnek ise $SO(3)$ üç boyutlu dönme grubunun parametrik uzayıdır. Grubun her bir elemanı $0 \leq r \leq \pi,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq \theta \leq \pi$ olmak üzere

$$(x, y, z) = (\, r\cos\varphi \sin\theta \,, r\sin\varphi \sin\theta \,, r\cos\theta \,)$$

olarak ifade edilir ki bu durumda grubun manifoldu bir küre olur.

Bir topolojik uzay, sınırlı ve kapalı bir topolojiye sahip ise böyle bir topolojik uzaya kompakt, böyle bir topolojiye sahip değil ise kompakt değildir denir. Lie grupları

ilgili oldukları grubun manifolduna (topolojik uzayına) bağlı olarak kompakt veya kompakt olmayan Lie grupları olarak sınıflandırılırlar. $U(n)$ üniter grubun manifoldu olan küre sınırlı ve kapalı olduğundan kompakttır. $SU(n)$, $SO(n)$, $O(n)$ grupları da manifold yapıları gereği kompakt Lie grupları iken $SL(n)$, $O(p,q)$ grupları kompakt olmayan Lie gruplarıdır (Arvanitoyeorgos, 2003).

Bir G grubunun a,b şeklindeki iki elemanına, grubun parametrik uzayında A,B noktaları karşılık gelsin. Eğer A,B noktaları verilen bölgede sürekli bir yolla bağlantılı ise a,b elemanları da G grubunda sürekli bir yolla bağlantılıdır denir. Eğer G grubunun her iki elemanı bu şekilde bağlantılı ise G grubuna bağlantılıdır denir. $GL(n,\mathbb{C})$, $SL(n,\mathbb{C})$, $SL(n,\mathbb{R})$, $SO(n,\mathbb{R})$, $SU(n,\mathbb{C})$ ve $U(n,\mathbb{C})$ grupları bağlantılı gruplara örnek iken $GL(n,\mathbb{R})$, $O(n,\mathbb{R})$, $SO(p,q-p)$, $O(p,q-p)$ grupları bağlantılı olmayan gruplara örneklerdir. Bağlantılı bir G grubunda, eğer herhangi kapalı bir eğri bir noktaya sürekli şekilde büzülebilirse bu gruba basit bağlantılı, büzülemiyorsa çok bağlantılıdır denir. G grubunda tüm kapalı yollar belirli türden sınıflara ayrılırsa her biri diğerine sürekli olarak deforme edilebilir. Farklı sınıfların sayısı m ise G grubu m defa bağlantılıdır denir. $SL(n,\mathbb{C})$ ve $SU(n)$ grupları basit bağlantılı, $SO(3)$ grubu iki defa bağlantılıdır.

A ve B iki kare matris olsun. $[A,B]=AB-BA$ ifadesi, A ve B 'nin komütatörü olarak adlandırılır. G bir Lie grubu ve g de grubun Lie cebirini göstersin. Lie cebiri, $[\,.,.\,]: g \times g \longrightarrow g$ bilineer işlemi altında aşağıdaki koşulları sağlayan bir vektör uzayıdır (Hall, 2015):

$\forall x,y,z \in G, \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ için

i. $[\,\alpha x+\beta y,\ z\,]=\alpha[\,x,z\,]+\beta[\,y,z\,]$ (Bilineerlik)
$[x,\ \alpha y+\beta z\,]=\alpha[\,x,y\,]+\beta[x,zC\,]$

ii. $[\,x,y\,]=-[\,y,x\,]$ (Anti simetrik)

iii. $[\,x,[y,z\,]\,]+[\,y,[\,z,x\,]\,]+[\,z,[\,x,y\,]\,]=0$ (Jacobi Özdeşliği)

Reel değerli tüm $n \times n$ 'lik matrislerden oluşan $gl(n,\mathbb{R})$ reel vektör uzayı $x,y \in gl(n,\mathbb{R})$ olmak üzere $[\,x,y\,]=xy-yx$ komütatörü ile reel bir Lie cebiridir.

$A,\ n \times n$ tipinde reel veya kompleks değerli bir matris olsun. $e^A \in gl(n,\mathbb{R})$ olmak üzere $e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$ ifadesine A matrisinin üstel ifadesi denir. Lie teorisinde bir matrisin üsteli, bir Lie cebiri ile ona karşılık gelen Lie grubu arasındaki ilişkiyi kurar.

Bilinen bazı klasik Lie gruplarına karşılık gelen Lie cebiri örnekleri verelim. $SL(n,\mathbb{R})$, $SO(n,\mathbb{R})$, $U(n,\mathbb{C})$, $SU(n,\mathbb{C})$, $SO(p,q)$, $SU(p,q)$ gruplarının cebirleri sırasıyla aşağıdaki gibi verilebilir.

$$sl(n,\mathbb{R}) = \{\, A \in gl(n,\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}\, A = 0 \,\}$$
$$so(n,\mathbb{R}) = \{\, A \in gl(n,\mathbb{R}) \mid A + A^T = 0 \,\}$$
$$u(n,\mathbb{C}) = \{\, A \in gl(n,\mathbb{C}) \mid A + (\bar{A})^T = 0 \,\}$$
$$su(n,\mathbb{C}) = \{\, A \in gl(n,\mathbb{C}) \mid A + (\bar{A})^T = 0,\ \mathrm{tr}\, A = 0 \,\}$$
$$so(p,q) = \left\{\, A \in gl(n,\mathbb{R}) \;\middle|\; I_{p,q}A + A^T I_{p,q} = 0 \right\},\ (p+q=n)$$
$$su(p,q) = \left\{\, A \in gl(n,\mathbb{C}) \;\middle|\; I_{p,q}A + (\bar{A})^T I_{p,q} = 0 \right\}$$

$X_i \in g$ ve r, g vektör uzayının rankı olmak üzere $\{X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_r\}$ elemanları kümesi g Lie cebirinin bir tabanını oluşturur. Cebirin iki elemanının kömütatörü cebir elemanlarının lineer bir kombinasyonudur, yani $[X_i, X_j] = \sum_k c_{ij}^k X_k$ dir. Burada c_{ij}^k katsayılarına Lie cebirinin yapı sabitleri denir.

Örneğin $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in sl(n,\mathbb{R})$ olmak üzere, $sl(n,\mathbb{R})$ Lie cebirini ele alalım. Bu cebir için

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

şeklindeki üç elemanlı tabanı seçebiliriz. Böylece

$$A = b\,X_1 + cX_2 + aX_3$$

yazılabilir. Bu taban için

$$[X_1, X_2] = X_3\,, \quad [X_2, X_3] = 2X_2\,, \quad [X_3, X_1] = 2X_1$$

olup

$$c_{12}^3 = 1 \quad c_{23}^2 = 2 \quad c_{31}^1 = 2$$

yapı sabitleridir.

Bir G Lie grubunun g Lie cebirine $[\,A, B\,] = AB - BA$ komütatör bağıntısıyla G 'deki birinci mertebeden diferansiyel operatörlerin Lie cebiri olarak da bakılabilir. Başka bir deyişle, Lie cebiri türevlenebilir fonksiyonlar uzayında değerler alan diferansiyel operatörlerle oluşturulabilir. Örneğin, $SO(3)$ grubunun Lie cebiri $so(3)$ olup eleman sayısı üçtür ve (x,y,z) kartezyen koordinatlarda $f(x,y,z)$ fonksiyonuna etki eden diferansiyel operatörler

$$X_1 = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\,, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\,, \quad X_3 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$$

olarak ifade edilir. Ayrıca bu operatörler

$$[X_1, X_2] = X_3\,,\ \ [X_2, X_3] = X_1\ ,\ \ [X_3, X_1] = X_2$$

komütasyon bağıntılarını sağlar. $SU(2)$ grubunun $su(2)$ Lie cebiri için bu diferansiyel operatörler

$$X_1 = \frac{1}{2}\left(x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial y}\,,\quad X_3 = y\frac{\partial}{\partial x}$$

olarak ifade edilir. Bu operatörler

$$[X_1, X_2] = X_2\,,\ \ [X_1, X_3] = X_3\ ,\ \ [X_3, X_1] = 2X_1$$

komütasyon bağıntılarını sağlar (Iachello, 2015).

Tanım: S bir Banach uzayı olsun. $0 \le t < \infty$ olmak üzere, S 'den S 'ye tanımlı, sınırlı lineer operatörlerin bir parametreli bir $T(t)$ ailesi

i. $T(0) = I$, (I, S üzerinde tanımlı birim operatör)

ii. Her $t, s \ge 0$ için $T(t+s) = T(t)T(s)$ (yarı grup olma özelliği)

koşullarını sağlıyorsa bu aileye S üzerinde tanımlı sınırlı lineer operatörlerin yarı grubu denir. Sınırlı lineer operatörlerin bir yarı grubu $T(t)$, eğer $\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - I\| = 0$ koşulunu sağlıyorsa düzgün süreklidir denir.

$$D(A) = \left\{ x \in X \;\middle|\; \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t}\ ,\ \text{limiti vardır} \right\}$$

ve

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+T(t)x}{dt}\bigg|_{t=0}\ ,\qquad x \in D(A)$$

ifadeleri ile tanımlanan A lineer operatörüne $T(t)$ yarı grubunun sonsuz küçük üreteci denir ve burada $D(A)$, A 'nın tanım kümesidir (Pazy, 1983).

1.2. Homojen Uzay

Matematikte, özellikle Lie grupları, cebirsel gruplar ve topolojik gruplar teorilerinde, bir X kümesinin (genellikle bazı geometrik uzaylar, örneğin $\mathbb{R}^3$ 'te küre, üst yarı düzlem vb) simetrileri çoğu zaman bir G grubunun X kümesi üzerindeki etkileri ile ifade edilir. Bir G grubu için homojen bir uzay, G 'nin üzerinde geçişli olarak etki ettiği boştan farklı böyle bir X manifoldu veya topolojik uzayıdır.

Öncelikle grup etkisinin tanımını verelim. X bir küme ve G bir grup olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlayan $\varphi : G \times X \to X$ fonksiyonuna G 'nin X kümesi üzerindeki etkisi denir.

i. Her $g, h \in G$ ve tüm $x \in X$ için

$$\varphi\big(g, \varphi(h, x)\big) = \varphi(gh, x),$$

ii. Her $x \in X$ için, $e \in G$ birim eleman olmak üzere

$$\varphi(e, x) = x.$$

Notasyonda kolaylık sağlamak için $\varphi(g, x)$ yerine genellikle $g.x$ veya gx yazılır. Bu durumda yukarıdaki aksiyomlar

i. tüm $g, h \in G$ ve tüm $x \in X$ için

$$g.(h.x) = gh.x,$$

ii. Tüm $x \in X$ için, $e \in G$ birim elemanı olmak üzere

$$e.x = x$$

halini alır.

V bir vektör uzayı, G bir Lie grubu olsun. Eğer her $x, y \in V$ nokta çifti için $y = gx$ koşulunu sağlayan bir $g \in G$ var ise G grubu V uzayında geçişlidir denir. G geçişli grubunun etki ettiği V uzayına G gruplu homojen uzay denir. H, G grubunun normal bir alt grubu olmak üzere homojen uzay genellikle G/H bölüm uzayı ile tanımlanır. G/H grubu her $g \in G$ için gH sol denklik sınıflarının kümesi olarak verilir, yani $G/H = \{\, gH \mid g \in G \,\}$. Eğer $e \in G$ birim eleman olmak üzere $H = \{\, e \,\}$ ise G grubunun kendisi homojen uzayı oluşturur. Birkaç homojen uzay örneği verelim (Das & Okubo, 2014; Gilmore, 2008; Hall, 2015; Vilenkin & Klimyk, 1993).

$G = SO(n+1)$ grubu, $\mathbb{R}^{n+1}$ uzayında $x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_{n+1}^2 = 1$ kuadratik formunu invaryant bırakan $\mathbb{R}^{n+1}$ uzayının özel ortogonal dönüşümler grubudur. Yukarıdaki denklemle verilen n boyutlu küre yüzeyi S^n, $SO(n+1)$ grubunun homojen uzayıdır.

$\mathbb{R}^{n+1}$ pseudo Öklid uzayının özel ortogonal dönüşümler grubu $G = SO(1, n)$ ve $H = SO(n)$ olmak üzere $X = G/H$ homojen uzayı $X :\ x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_n^2 = 1$, $x_o > 0$ denklemiyle verilen iki oyuklu hiperboloid olur (Helgason, 1972).

$SU(n)$ grubu için ise $H = SU(n-1)$ olmak üzere homojen uzayı $S_{\mathbb{C}}^{n-1} \cong SU(n)/SU(n-1)$ şeklinde verilen kompleks uzaydaki $n-1$ boyutlu küre yüzeyidir. Bu küre reel uzaydaki S^{2n-1} küresine izomorftur. Örneğin $SU(3)$ grubunun homojen uzayı, $\mathbb{C}^3$ kompleks uzayında

$$S_{\mathbb{C}}^2 = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 1\}$$

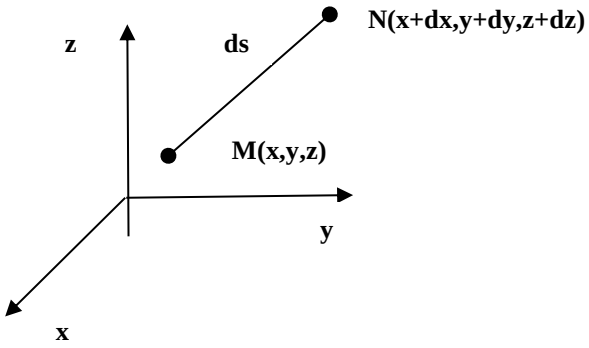
birim küresidir.

Grupların etkileri yardımıyla, grupların diğer matematiksel nesnelere nasıl etki ettiğini öğrenmedeki temel amaç, nesnenin iç simetrilerini bulmaktır. Belirli bir grupla çalışarak ve etki altında neyin değişmeden kaldığını gözlemleyerek, üzerinde çalıştığımız yapının iç özelliklerini anlarız. Homojen uzaylar, bazı grupların etkileri altında ilgilenilen yapı için simetrik davranan özel bir manifold sınıfıdır ve belirli etkiler altındaki davranışlarına bakılarak bu uzaylar yeniden yapılandırılabilir.

1.3. Metrik Matris

Metrik matris, temel olarak uzunluk hesaplamalarında kullanılır. Belirli bir uzayda iki nokta arasındaki uzaklığın nasıl hesaplanacağını belirten bir fonksiyondur. Bu sayede verilen keyfi bir koordinat sisteminde, üzerinde çalışılan uzayın özellikleri hakkında bilgi verir.

Herhangi iki nokta arasındaki uzaklık hesaplanırken genellikle geometrik gösterimden faydalanılır. Üç boyutlu Öklid uzayında, M noktası (x, y, z) koordinatı ile ifade edilen bir nokta ve N noktası ise $(x + dx, y + dy, z + dz)$ koordinatı ile ifade edilen M noktasına komşu başka bir nokta olsun.



Şekil 1.1. Üç boyutlu Öklid uzayında iki nokta arası uzaklık.

M ile N noktaları arasındaki uzaklık ds ile gösterilsin. Şekilden faydalanılarak kartezyen koordinat sisteminde $ds = \mathrm{i}.dx + \mathrm{j}.dy + \mathrm{k}.dz$ yazılabilir. Her iki tarafın karesin alınırsa ds^2 uzunluk elemanı, $ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$ şeklinde elde edilir. Uzunluk elemanının genel ifadesi, (g_{ij}) metrik matris olmak üzere

$$ds^2 = (g_{ij}).dx^i.dx^j, \qquad i,j = 1,2,\dots,n \tag{1.1}$$

formunda verilir. Üç boyutlu Öklid uzayında kartezyen koordinatlarda uzunluk elemanının

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \tag{1.2}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1, \qquad g_{ij} = 0, \qquad i \neq j, \;\; i,j = 1,2,3$$

olmak üzere metrik matris

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

Öklid uzayında (g_{ij}) metrik matrisi ayrıca J Jakobiyen matrisi olmak üzere $(g_{ij}) = J^tJ$ ile de ifade edilir. Örnek olarak Öklid uzayında, polar koordinat sistemi için metrik matrisi elde edelim. Polar koordinat sisteminde herhangi bir $p = (x,y)$ noktası, $0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta < 2\pi$ olmak üzere, $x = r.\cos\theta,\; y = r.\sin\theta$ bağıntıları ile verilir. Burada Jakobiyen matrisi

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r.\sin\theta \\ \sin\theta & r.\cos\theta \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Bu durumda (g_{ij}) metrik matrisi

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r.\sin\theta \\ \sin\theta & r.\cos\theta \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \cos\theta & -r.\sin\theta \\ \sin\theta & r.\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan uzunluk elemanı

$$ds^2 = (dr \quad d\theta)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix} = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

olarak elde edilir. Metrik matrisinin tersi, $(g_{ij})^{-1} = (g^{ij})$; $(g_{ij})(g^{ij}) = I$ ile gösterilir.

n boyutlu Öklid uzayında parametrik formda k boyutlu yüzey

$$F = (x^1, x^2, \dots, x^n)$$
$$x^i = x^i(z^1, z^2, \dots, z^k) \ ; \qquad i = 1, \dots n \, .$$

şeklinde verilsin. $(z^1, z^2, \dots, z^k)$, k boyutlu yüzeyin koordinatları olmak üzere,

$$f_1 = \left(\frac{\partial x^1}{\partial z^1}, \frac{\partial x^2}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial x^n}{\partial z^1}\right)$$
$$f_2 = \left(\frac{\partial x^1}{\partial z^2}, \frac{\partial x^2}{\partial z^2}, \dots, \frac{\partial x^n}{\partial z^2}\right)$$
$$\vdots$$
$$f_k = \left(\frac{\partial x^1}{\partial z^k}, \frac{\partial x^2}{\partial z^k}, \dots, \frac{\partial x^n}{\partial z^k}\right)$$

ifadeleri k boyutlu yüzeyin teğet vektörleridir. Buradan metrik matris (g_{ij}) 'nin elemanları,

$$g_{ij} = \langle f_i, f_j \rangle, \ i, j = 1,2, \dots, k \tag{1.3}$$

şeklinde bulunur. Benzer sonuca uzunluk elemanı yardımıyla da ulaşılabilir. Uzunluk elemanının,

$$ds^2 = \sum_{l=1}^{n} dx^l dx^l \tag{1.4}$$

ile ifade edildiğini biliyoruz. Burada $dx^l = \frac{\partial x^l}{\partial z^i} \, . dz^i$ dir. Dolayısıyla uzunluk elemanı

$$ds^2 = \left(\frac{\partial x^l}{\partial z^i} \, . dz^i\right)\left(\frac{\partial x^l}{\partial z^j} \, . dz^j\right) = dz^i \frac{\partial x^l}{\partial z^i}\frac{\partial x^l}{\partial z^j} dz^j \tag{1.5}$$

şeklinde yazılabilir. Sonuç olarak metrik matris (g_{ij}) 'nin elemanlarının genel ifadesi

$$g_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x^l}{\partial z^i}\frac{\partial x^l}{\partial z^i}, \ i, j = 1,2, \dots, k \tag{1.6}$$

şeklinde elde edilir.

$\mathbb{R}^n$, $n = p + q$ pseudo Riemann uzayında metrik matrisi verelim. Bu uzayda $x = (x^1, x^2, \dots x^n)$, $y = (y^1, y^2, \dots y^n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere skaler çarpım

$$\langle x, y \rangle_{p,q} = x^1 y^1 + x^2 y^2 + \cdots + x^p y^p - x^{p+1} y^{p+1} - \cdots - x^n y^n$$

şeklinde tanımlanır. Dolayısıyla pseudo Riemann uzayında kartezyen koordinatlarda metrik matris,

$$(g_{ij}) = \text{diag}\left(\underbrace{1,1, \dots, 1}_{p \ tane}, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{q \ tane}\right)$$

olarak ifade edilir. Örnek olarak $\mathbb{R}^4$ uzayını inceleyelim. $p=1, q=3$ olmak üzere metrik matris

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

olup uzunluk elemanı,

$$ds^2 = (dx^1 \quad dx^2 \quad dx^3 \quad dx^4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \\ dx^4 \end{pmatrix}$$

olup buradan

$$ds^2 = (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 - (dx^4)^2$$

şeklinde verilir.

Metrik matris matematiğin birçok alanında karşımıza çıkar. Örneğin $z = f(x,y)$ şeklinde verilen bir yüzeyin alanı

$$A = \iint_D \sqrt{g}dxdy = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}dxdy\,,\ g = \det(g_{ij}) \tag{1.7}$$

şeklinde bulunur.

Metrik matris yardımıyla yay uzunluğu da bulunabilir. $\mathbb{R}^n$ de bir C eğrisinin uzunluğu

$$C:\ x^i = x^i(t), \qquad t_1 \le t \le t_2$$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}dt\,,\ i,j = 1,2,\dots,n \tag{1.8}$$

şeklinde bulunur.

1.4. Diferansiyel Operatör

Matematikte birden çok operatör tanımı verilebilir. Fakat genel olarak elemanları fonksiyonlar olan bir uzaydan başka bir uzaya tanımlı $Lf(x) = g(x)$ bir dönüşüm olarak tanımlanmaktadır. Örneğin $\int_0^1[\ ]dx$ operatörü integrallenebilir fonksiyonlar uzayından $\mathbb{R}$ uzayına bir dönüşümdür. En sık karşılaşılan operatörler vektör uzaylarında tanımlı lineer operatörlerdir. U ve V, bir F cismi üzerinde tanımlı iki vektör uzayı, $x, y \in U$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere T lineer dönüşümü

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

koşulunu sağlar. Lineer dönüşüm yerine lineer operatör ifadesi kullanıldığında ilgilenilen vektör uzayları birer fonksiyonlar uzayıdır.

Diferansiyel operatörler ise türev operatörünün bir fonksiyonu olarak tanımlanan operatörlerdir. Uygulamalarda karşılaşılan diferansiyel operatörlerin birçoğu lineer operatörlerdir. En basit diferansiyel operatör örneği olan $\frac{d}{dx}[\ ]$ türev operatörü, sürekli türevlenebilir fonksiyonlar uzayından sürekli fonksiyonlar uzayına bir dönüşümdür. Bu operatör türevlenebilir bir fonksiyonu başka bir fonksiyona dönüştürür. Uygulamalarda çoğu zaman $\frac{d}{dx}$ diferansiyel operatörü D harfi ile gösterilir, yani $\frac{dy}{dx} = Dy$ dir. Doğal olarak yüksek mertebeden türevler de D ile

$$\frac{d^n y}{dx^n} = D^n y \tag{1.9}$$

şeklinde ifade edilebilir. $D-2$, D^2+D-2 gibi D'yi içeren polinom şeklinde diferansiyel operatörler de verilebilir. Genelde n. mertebeden lineer diferansiyel operatör

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots a_1(x)D + a_0(x) \tag{1.10}$$

şeklinde yazılır. $a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots, a_1(x), a_0(x)$ 'ler sabit katsayılar ise böyle operatörlere sabit katsayılı diferansiyel operatör, değişken katsayılar ise değişken katsayılı diferansiyel operatör denir. Örneğin

$$L = \frac{d}{dx}\left[a_1(x)\frac{d}{dx}\right] + a_0(x)$$

Sturm-Liouville operatörü bir lineer diferansiyel operatörüdür.

Belirli koşullar altında iki operatörün çarpımı da tanımlanabilir, yani

$$(T_1T_2)x = T_1(T_2x)$$

dir. Operatörler genellikle değişme özelliğini $T_1T_2 \neq T_2T_1$ sağlamaz. Matrisler teorisinden bu kolayca görülebilir. Operatörün tersi varsa $T^{-1}T = I$, $T\,T^{-1} = I$ olur. Burada I birim operatördür ve $Ix = x$ şeklinde tanımlanır. Eğer T_L^{-1}, T_R^{-1} operatörleri varsa yani

$$T_L^{-1}T = I, \quad T\,T_R^{-1} = I$$

ise bu operatörlere sırasıyla T operatörünün sol ve sağ ters operatörleri denir. Eğer T_L^{-1}, T_R^{-1} operatörlerinin ikisi de varsa $T_L^{-1} = T_R^{-1} = T^{-1}$ 'dir.

$T: V \to V$, $\|\ \|$, V 'de tanımlı norm ve $x_1, x_2 \in V$ olmak üzere

$$\|Tx_1 - Tx_2\| \leq c\|x_1 - x_2\|$$

olacak şekilde bir $c \in \mathbb{R}$ varsa T operatörünün sınırlı olduğu söylenir. Her bir sınırlı operatör aynı zamanda süreklidir fakat tersi doğru değildir.

Bir L lineer diferansiyel operatörü, her g fonksiyonu için

$$(f^*, g) = (f, Lg)$$

olacak şekilde bir f fonksiyonu varsa bu operatöre adjoint operatör denir ve $L^\dagger f = f^*$ şeklinde gösterilir. Eğer $L^\dagger = L$ ise yani her f, g için

$$(Lf, g) = (f, Lg)$$

ise bu operatöre self-adjoint operatör denir. Burada $(\cdot\,,\,\cdot)$ ikili işlemi operatörün etki ettiği uzayda tanımlı iç çarpımı ifade etmektedir. Örneğin $L_2(-\infty, \infty)$ üzerinde tanımlı

$$K = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$$

operatörü self-adjointtir (Hörmander, 1969; Nagle, Saff & Snider, 2018; Vaughn, 2007; Zill, 2018).

Bilimsel çalışmalarda önemli rol oynayan operatörler vardır. Hamiltonyen, Casimir, Laplace-Beltrami operatörleri, integral operatör (Laplace dönüşümü) ve grubun üreteçleri hepsi birer diferansiyel operatördür. Şimdi bu operatörleri ifade edelim.

Skaler ve vektör alanlarında bazı diferansiyel işlemler gerçekleştirilebilir ve bu işlemler temel bilimlerde geniş kapsamlı uygulamalara sahiptir. Bu işlemlerden en önemlileri bir skaler alanın gradyenti, bir vektör alanının diverjansı (sapma) ve rotasyonelini (kıvrılmasını, bukle) bulma işlemleridir. Tüm bu diferansiyel işlemlerin merkezinde del adı verilen ∇ vektör operatörü bulunur ve kartezyen koordinatlarda

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\mathrm{k} = \mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \mathrm{k}\,\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.11}$$

şeklinde tanımlanır. ∇ operatörü bazen nabla olarak da adlandırılır. Bu vektör operatörü bilinen vektör özelliklerine benzer özellikler gösterir. Şimdi fiziksel problemlerin çözümünde karşımıza çıkan gradyent, diverjans ve curl operatörlerini ifade edelim.

Gradyent

$F(x, y, z)$ skaler alanını tanımlayalım. Bu skaler alan, uzayın belirli bir bölgesindeki her (x, y, z) noktası için türevlenebilir olsun. Bu durumda F 'nin gradyenti ∇F veya $grad\, F$ ile gösterilir ve

$$\nabla F = grad\, F = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{k}\right) F(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\mathrm{k} \tag{1.12}$$

şeklinde ifade edilir. ∇F bir vektör alanı tanımlar.

Diverjans

$V(x,y,z) = V_1\,\mathrm{i} + V_2\,\mathrm{j} + V_3\,\mathrm{k}$ vektör alanını tanımlayalım. Bu vektör alanı, uzayın belirli bir bölgesindeki her (x,y,z) noktası için türevlenebilir olsun. Bu durumda V 'nin diverjansı $\nabla\,\mathrm{V}$ veya $\mathrm{div\,V}$ ile gösterilir ve

$$\nabla\,\mathrm{V} = \mathrm{div\,V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\mathrm{k}\right)\cdot(V_1\,\mathrm{i} + V_2\,\mathrm{j} + V_3\,\mathrm{k})$$

yani

$$\nabla\mathrm{V} = \mathrm{div\,V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_2}{\partial z} \tag{1.13}$$

şeklinde tanımlanır.

Rotasyonel (Curl)

Eğer $V(x,y,z)$ türevlenebilir bir vektör alanı olmak üzere V 'nin rotasyoneli $\nabla \times \mathrm{V}$, $\mathrm{curl\,V}$ ya da $\mathrm{rot\,V}$ ile gösterilir ve

$$\nabla \times \mathrm{V} = \mathrm{rot\,V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{k}\right)\times(V_1\mathrm{i} + V_2\mathrm{j} + V_3\mathrm{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_2 & V_3 \end{vmatrix}\mathrm{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_3 \end{vmatrix}\mathrm{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ V_1 & V_2 \end{vmatrix}\mathrm{k}$$

yani

$$\nabla \times \mathrm{V} = \mathrm{rot\,V} = \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\right)\mathrm{i} - \left(\frac{\partial V_3}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial z}\right)\mathrm{j} + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\mathrm{k} \tag{1.14}$$

şeklinde tanımlanır. Determinant açılımında $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ operatörlerinin V_1, V_2, V_3 'ten önce gelmesi gerektiğine dikkat ediniz.

$F(x,y,z)$ bir skaler alanı göstersin. Bu durumda

$$\nabla\cdot(\nabla\mathrm{F}) = \nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

olup

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.15}$$

elde edilir. $\nabla^2 F$ 'ye $F(x,y,z)$ skaler alanın Laplasyeni denir ve matematiksel fiziğin bazı önemli kısmi türevli diferansiyel denklemlerinde kullanılır (Spiegel, Lipschutz & Spellman, 2009).

Fiziksel uygulamalarda önemli bir yere sahip olan Hamiltonyen operatörü

$$H\psi(x) = \left[-\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]\psi(x) = E\psi(x) \tag{1.16}$$

lineer bir operatör olup fiziksel bir sistemin toplam enerji operatörü olarak tanımlanır.

(x,y) düzleminde

$$x_1 = f(x,y,\epsilon),\ y_1 = g(x,y,\epsilon) \tag{1.17}$$

dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu dönüşüme bir parametreli dönüşüm grubu denir.

i. $\epsilon = 0$ değeri için

$$x = f(x,y,0) = x_1, \qquad y = g(x,y,0) = y_1$$

birim dönüşümünü tanımlar (Birim eleman özelliği).

ii. $-\epsilon$ değeri için

$$x = f(x_1,y_1,-\epsilon), \qquad y = g(x_1,y_1,-\epsilon)$$

ters dönüşümünü tanımlar (Ters eleman özelliği).

iii. $x_2 = f(x_1,y_1,\delta),\ y_2 = g(x_1,y_1,\delta)$ elemanları (1.17) dönüşümlerinden oluşan kümenin iki elemanı olmak üzere, bu elemanların çarpımı da kümenin elemanıdır ve bu çarpım $\epsilon + \delta$ parametresi ile

$$x_2 = f(x,y,\epsilon + \delta), \qquad y_2 = g(x,y,\epsilon + \delta)$$

şeklinde tanımlanır (Kapalılık özelliği). Grubun birleşme özelliği kapalılık özelliğinden kolayca yazılabilir.

Bir parametreli grup örnekleri olarak

$$x_1 = x, \quad y_1 = y + \epsilon, \qquad \text{(öteleme grubu)}$$

$$x_1 = x\cos\epsilon - y\sin\epsilon, \quad y_1 = x\sin\epsilon + y\cos\epsilon \qquad \text{(dönme grubu)}$$

grupları verilebilir.

$f(x,y,\epsilon)$ ve $g(x,y,\epsilon)$ fonksiyonları grubun genel formu olarak adlandırılır. ϵ parametresinin küçük değerleri için (1.17) dönüşümünün seri açılımı yapılırsa serinin $\epsilon = 0$ değerindeki ifadesi

$$x_1 = x + \epsilon\left(\frac{dx_1}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=0} + \mathcal{O}(\epsilon^2),\ y_1 = y + \epsilon\left(\frac{dy_1}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=0} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{1.18}$$

şeklindedir. Burada $\mathcal{O}(\epsilon^2)$, ϵ^2 'yi ve ϵ 'un daha büyük kuvvetlerini içeren terimleri ifade eder. Eğer $\xi(x,y)$ ve $\eta(x,y)$ fonksiyonlarını

$$\left(\frac{dx_1}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=0} = \xi(x,y), \qquad \left(\frac{dy_1}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=0} = \eta(x,y)$$

şeklinde tanımlarsak (1.18) ifadesi

$$x_1 = x + \epsilon.\xi(x,y) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad y_1 = y + \epsilon.\eta(x,y) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{1.19}$$

halini alır. Bu ifadeye grubun sonsuz küçük formu denir. Geometrik olarak bu dönüşüm (x,y) noktasındaki $\big(\xi(x,y),\eta(x,y)\big)$ teğet vektörünü tanımlar. Böylece $\big(\xi(x,y),\eta(x,y)\big)$ ifadesi grubun teğet vektör alanı olarak tanımlanır ve bu birinci mertebede lineer diferansiyel operatör olarak

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \tag{1.20}$$

şeklinde yazılır. Bu aynı zamanda grubun sonsuz küçük operatörü olarak da bilinir.

Örneğin, $\epsilon \in R$ olmak üzere

$$x_1 = x\cos\epsilon - y\sin\epsilon, \qquad y_1 = x\sin\epsilon + y\cos\epsilon$$

dönmelerinden oluşan $SO(2)$ dönme grubunu ele alalım.

$$\left(\frac{dx_1}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=0} = \xi(x,y) = -y, \qquad \left(\frac{dy_1}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=0} = \eta(x,y) = x$$

olup grubun sonsuz küçük operatörü

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} \tag{1.21}$$

olarak bulunur.

Bir parametreli dönüşümler grubunun önemli bir özelliği ise

$$\frac{dx_1}{d\epsilon} = \xi(x_1,y_1),\ \frac{dy_1}{d\epsilon} = \eta(x_1,y_1) \tag{1.22}$$

şeklindeki diferansiyel denklemler sisteminin, $\epsilon = 0$ iken $x_1 = x$, $y_1 = y$ başlangıç koşullarına göre integralinin alınması yardımıyla, grubun verilen sonsuz küçük formundan genel yapısının elde edilebilmesidir.

a keyfi bir parametre olmak üzere, x ekseni boyunca $x' = ax$ dönüşümleri grubunu sonsuz küçük operatörü $X = x\frac{\partial}{\partial x}$ şeklindedir.

b keyfi bir parametre olmak üzere, (x,y) düzleminde

$$x' = \frac{x}{1-ax},\ y' = \frac{y}{1-ax}$$

projektif dönüşümler grubunun sonsuz küçük operatörü

$$X = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y}$$

olarak verilir.

Sürekli gruplarda sonsuz küçük operatör kavramı önemlidir. Bu operatör birim eleman komşuluğunda ele alınan grubun elemanından elde edilir. $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ sonsuz küçük operatörlerin kümesini bulunur ve bunlar ϵ parametresinden bağımsızdır. Grubun bir elemanı üreteçten yola çıkılarak da elde edilebilir. Sürekli gruplar üzerine yapılan çalışmalardaki problemler çoğu zaman bu grupların sonsuz küçük operatörlerine indirgenir.

Tek parametreli gruplar için iki önemli sonuç verilir. İlki grubun genel yapısının sonsuz küçük operatörlerden elde edilmesidir. İkincisi ise grup için kanonik koordinatların verilmesidir (Hill, 1992).

Lie grupların bir parametreli alt gruplarının teğet matrisleri bir lineer uzay oluşturur. X, Y bu uzayın herhangi iki matrisi olmak üzere, bu iki matrisin komütatörü $[X, Y] = XY - YX$ şeklinde tanımlanır ve $[X, Y]$ bu uzayın bir elemanıdır. Böyle lineer uzaylar ele alınan grubun Lie cebirini verir. Dolayısıyla her bir G Lie grubuna karşılık gelen bir g Lie cebiri bulunmaktadır. Örneğin, $SO(3)$ grubunun bir parametreli alt grupları

$$r_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad r_2(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}, \quad r_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olup bunlara karşılık gelen teğet matrisler de

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde verilir. Bunlar

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_3, X_1] = X_2$$

komütasyon bağıntıları ile $so(3)$ Lie cebirini oluşturur. X_1, X_2 şeklindeki iki operatörünü komütatörü de benzer şekilde $[X_1, X_2] = X_1X_2 - X_2X_1$ şeklinde tanımlanır ve sonuç yine bir diferansiyel operatördür. Örneğin, $f(x)$ türevlenebilir fonksiyonlarına etki eden x ile çarpımı ve $\frac{d}{dx}$ operatörünün komütasyonu

$$\left[x, \frac{d}{dx}\right] = x\frac{d}{dx} - \frac{d}{dx}x = -1$$

şeklinde elde edilir.

$g(t)$ bir G grubunun bir parametreli bir alt grubu, $T(g)$ ise bu alt gruba karşılık gelen temsil olmak üzere $J = \frac{d\,T(g(t))}{dt}\Big|_{t=0}$ ile tanımlı teğet matrisine $g(t)$ bir parametreli alt grubuna karşılık gelen T temsilinin sonsuz küçük operatörü denir.

Metrik matris Laplace-Beltrami operatörünün elde edilmesinde önemli bir rol oynar. Diferansiyel geometride, Pierre-Simon Laplace'ın çalışmalarından ismini alan Laplace operatörü, ikinci mertebeden bir operatördür ve Öklid uzayında yüzeylerde, Riemann ve pseudo-Riemann uzaylarında ise manifoldlarda tanımlanan fonksiyonlara uygulanmaktadır. Laplace ve daha sonra Eugenio Beltrami'nin çalışmalarıyla bu operatör geliştirmiş ve işlemleri eğri (Riemann) uzaya taşınarak daha kapsamlı bir operatör olan Laplace-Beltrami operatörüne geliştirilmiştir. Laplace operatörü gibi Laplace-Beltrami operatörü de gradyentin diverjansı $(\mathrm{div}\,.\,\mathrm{grad}\,f)$ olup bir fonksiyonu başka bir fonksiyona taşıyan lineer bir operatördür.

Kartezyen koordinatlarda, gradyent ve diverjans tanımları kullanılarak oluşturulan Laplace-Beltrami operatörü, $\bar{g} = \left|\det(g_{ij})\right|$ ve ∇ (del, nabla) diferansiyel operatör olmak üzere

$$\nabla.\nabla f = \nabla^2 f = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}}\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\sum_j \sqrt{\bar{g}}.g^{ij}.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right),\ i,j = 1,\dots,n \tag{1.23}$$

şeklinde tanımlanır. ∇^2 yerine Δ veya Δ_{LB} gösterimi de kullanılmaktadır. Bilinen Öklid uzayında, kartezyen koordinatlarda Laplace-Beltrami operatörünü inceleyecek olursak, bu koordinatlarda metrik matrisin determinantı $|g| = 1$ olacağından

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x_i}.\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1.24}$$

bilinen Laplace operatörü elde edilir. Örneğin $n = 3$ için Laplace operatörü

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \tag{1.25}$$

şeklindedir.

Örnek olarak $\mathbb{R}^3$'de birim kürede Laplace operatörünü elde edelim. $\mathbb{R}^3$ uzayında $S:\ {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 1$ denklemi birim küreyi ifade eder. (r,θ,ϕ) küresel polar koordinatlarda Laplace operatörü

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot\theta\,\frac{\partial}{\partial \theta} + (\sin\theta)^{-2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right) \tag{1.26}$$

formunda elde edilir. Bu ifadede parantez içerisindeki operatör

$$\Delta_{LB} = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta} + (\sin\theta)^{-2}\,\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{1.27}$$

Laplace operatörünün S üzerindeki izdüşümüdür ve Laplace-Beltrami operatörü olarak adlandırılır. Geriye kalan

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} \tag{1.28}$$

ifadesi ise Laplace operatörünün radyal kısmıdır. $n > 1$ için $\mathbb{R}^n$ 'de küresel polar koordinatlarda Laplace operatörünün genel hali

$$\Delta_{\mathbb{R}^n} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{2}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{LB} \tag{1.29}$$

şeklindedir. Burada Δ_{LB}, S^{n-1} üzerindeki Laplace-Beltrami operatörüdür.

Laplace-Beltrami operatörünün oluşturulmasından sonra grup ve grubun manifoldu üzerinde çalışılarak invaryant operatörler oluşturulmuş ve Casimir operatörü elde edilmiştir. Birçok Casimir operatörü oluşturulabilir ancak bunlardan sadece bir tanesi Laplace-Beltrami operatörüne eşdeğerdir. Casimir operatörü daha yüksek mertebeden olabilir fakat Laplace-Beltrami operatörü ise sadece ikinci mertebedendir (Helgason, 1959).

Bilimsel çalışmalarda ortaya çıkan denklemler lineer, lineer olmayan, diferansiyel denklem veya operatör denklemleri olabilir. Grup teorisi yaklaşımı bu tür denklemlerin çözümünü kolaylaştırır. Bugün grup teorisi matematiğin birçok dalında, fizik, mühendislik ve kontrol teori gibi bilimsel alanlarda da büyük bir etkiye sahiptir.

Bu tezde $SU(3)$ grubu ve grubun homojen uzayında Laplace-Beltrami operatörü ile I^2, I_3, Y operatörleri ifade edilecektir. Bu operatörlerle verilen özdeğer ve özfonksiyon problemi ele alınacaktır.

BÖLÜM 2

$SU(3)$ GRUBUNUN HOMOJEN UZAYINDA DİFERANSİYEL OPERATÖRLER

Lie gruplarında grubun kendisinde veya homojen uzayında çalışılabilir. Grubun kendisinde çalışırken grubun bir parametreli alt gruplarına göre sonsuz küçük diferansiyel operatörleri elde edilir. Bu operatörler yardımıyla Casimir diferansiyel operatörü oluşturulur. Casmir operatörü ile oluşturulacak bir özdeğer probleminden bir fiziksel sistemin çözümleri bulunabilir. Grubun homojen uzayında çalışırken uzay çeşitli parametrelerle ifade edilerek uzay üzerinde Laplace-Beltrami diferansiyel operatörü oluşturulabilir. Bu operatör yardımıyla da bir özdeğer problemi oluşturularak bir fiziksel sistemin çözümü bulunabilir. Bu çalışmada $SU(3)$ grubu ve grubun homojen uzayını ele alacağız.

$n \times n$'lik üniter matrisler, $GL(n,\mathbb{C})$ grubunun bir alt grubunu oluşturur ve bu grup

$$U(n,\mathbb{C}) = \{\ U \in GL(n,\mathbb{C}) \mid\ \overline{U}^t U = U\overline{U}^t = I\ \}$$

$$\det(\overline{U}^t U) = (\det U)^2 = \det(I)\ , \quad \det U = \pm 1$$

$U(n,\mathbb{C})$ ile gösterilir. Determinantı bir olan üniter matrisler, $U(n,\mathbb{C})$'nin bir alt grubunu oluşturur. Bu grup ise özel üniter grup olarak adlandırılır ve

$$SU(n,\mathbb{C}) = \{\ U \in\ U(n,\mathbb{C}) \mid \det U = 1\ \}$$

formunda ifade edilir. $SU(n,\mathbb{C})$ grubunun reel parametre sayısı $n^2 - 1$ sayısı ile verilir.

$n = 3$ için bu grup

$$SU(3,\mathbb{C}) = \{\ U \in\ U(3,\mathbb{C}) \mid \det U = 1\ \}$$

halini alır. Grubun parametre ve lineer bağımsız operatörlerinin (üreteçler) sayısı sekizdir ve bu üreteçler matris formunda

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad I_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad I_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad I_8 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}\left(I_i\, I_j\right) = 2\delta_{ij}$$

şeklinde ifade edilir. Bu üreteçler $su(3)$ Lie cebirini gerer ve genellikle Gell-Mann matrisleri olarak adlandırılırlar. (Grimus & Ludl, 2010; Holland, 1969a; Majumdar & Basu, 1970; Rosen, 1971).

$SU(3)$ grubunun $SU(3)/SU(2) \cong S^2_{\mathbb{C}}$ homojen uzayı, $\mathbb{C}^3$ kompleks uzayında

$$S^2_{\mathbb{C}} = \{(z_1\,, z_2\,, z_3) \in \mathbb{C}^3 : |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 1\}$$

birim küresidir. $S^2_{\mathbb{C}}$ küresi $\mathbb{R}^6$ reel uzayındaki S^5 birim küresine izomorftur, yani $S^2_{\mathbb{C}} \cong S^5$ [Gallier & Quaintance, 2020]. Bu ilişki göz önünde bulundurularak, $S^2_{\mathbb{C}}$ küresinin bir $(z_1\,, z_2\,, z_3)$ elemanı $\rho > 0,\ 0 \le \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi/2\,,\ 0 \le \xi \le \pi/2$ olmak üzere

$$z_1 = \rho^{1/2}\, e^{i\varphi_1} \cos\theta$$

$$z_2 = \rho^{1/2}\, e^{i\varphi_2} \sin\theta \cos\xi$$

$$z_3 = \rho^{1/2}\, e^{i\varphi_3} \sin\theta \sin\xi$$

şeklindeki küresel koordinatlarla parametrize edilebilir. (Beg & Ruegg, 1965; Liotta & Triolo, 1969).

$$\chi_k = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\, z^i (I_k)_{ij} z_j,\ i,j = 1,2,3,\ k = 1,2,\dots,8 \qquad (2.1)$$

dönüşümü yardımıyla grubun regüler temsilinin üreteçleri

$$\chi_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho \sin 2\theta \cos\xi \cos\alpha_1, \qquad \chi_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\rho \sin 2\theta \cos\xi \sin\alpha_1$$

$$\chi_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho(\cos^2\theta - \sin^2\theta \cos^2\xi), \qquad \chi_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho \sin 2\theta \sin\xi \cos\alpha_2$$

$$\chi_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\rho \sin 2\theta \sin\xi \sin\alpha_2, \qquad \chi_6 = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho \sin^2\theta \sin 2\xi \cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$\chi_7 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\rho \sin^2\theta \sin 2\xi \sin(\alpha_2 - \alpha_1), \qquad \chi_8 = -\frac{\sqrt{6}}{2}\rho\left(\sin^2\theta \sin^2\xi - \frac{1}{3}\right).$$

şeklinde verilir. Burada $z^i = z_i^*$ ve $\alpha_1 = \varphi_1 - \varphi_2$, $\alpha_2 = \varphi_1 - \varphi_3$ 'tür. Böylece üreteçleri

$$X = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5, \chi_6, \chi_7, \chi_8)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\rho \sin 2\theta \cos\xi \cos\alpha_1, \ -\frac{\sqrt{2}}{2}\rho \sin 2\theta \cos\xi \sin\alpha_1, \ \frac{\sqrt{2}}{2}\rho(\cos^2\theta - \sin^2\theta \cos^2\xi),\right.$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\rho \sin 2\theta \sin\xi \cos\alpha_2, \ -\frac{\sqrt{2}}{2}\rho \sin 2\theta \sin\xi \sin\alpha_2, \ \frac{\sqrt{2}}{2}\rho \sin^2\theta \sin 2\xi \cos(\alpha_2 -$$

$$\left.\alpha_1), -\frac{\sqrt{2}}{2}\rho \sin^2\theta \sin 2\xi \sin(\alpha_2 - \alpha_1), \ -\frac{\sqrt{6}}{2}\rho\left(\sin^2\theta \sin^2\xi - \frac{1}{3}\right)\right).$$

şeklinde yazabilirim. Öncelikle X 'in parametrelerine göre türevlerini bulalım.

$$X_\rho = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\theta \cos\xi \cos\alpha_1,\right.$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\theta \cos\xi \sin\alpha_1, \ \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos^2\theta - \sin^2\theta \cos^2\xi),$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\theta \sin\xi \cos\alpha_2, \ -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\theta \sin\xi \sin\alpha_2,$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin^2\theta \sin 2\xi \cos(\alpha_2 - \alpha_1), -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin^2\theta \sin 2\xi \sin(\alpha_2 - \alpha_1),$$

$$\left.-\frac{\sqrt{6}}{2}\left(\sin^2\theta \sin^2\xi - \frac{1}{3}\right)\right),$$

$$X_\theta = \Big(\sqrt{2}\rho\cos 2\theta\cos\xi\cos\alpha_1,$$
$$-\sqrt{2}\rho\cos 2\theta\cos\xi\sin\alpha_1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\rho(\sin 2\theta + \sin 2\theta\cos^2\xi),$$
$$\sqrt{2}\rho\cos 2\theta\sin\xi\cos\alpha_2, \quad -\sqrt{2}\rho\cos 2\theta\sin\xi\sin\alpha_2,$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\sin 2\theta\sin 2\xi\cos(\alpha_2-\alpha_1), -\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\sin 2\theta\sin 2\xi\sin(\alpha_2-\alpha_1),$$
$$-\frac{\sqrt{6}}{2}\rho\sin 2\theta\sin^2\xi\Big),$$

$$X_\xi = \Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\sin 2\theta\sin\xi\cos\alpha_1, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\rho\sin 2\theta\sin\xi\sin\alpha_1, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\rho\sin^2\theta\sin 2\xi,$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\sin 2\theta\cos\xi\cos\alpha_2, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\sin 2\theta\cos\xi\sin\alpha_2,$$
$$\sqrt{2}\rho\sin^2\theta\cos 2\xi\cos(\alpha_2-\alpha_1), -\sqrt{2}\rho\sin^2\theta\cos 2\xi\sin(\alpha_2-\alpha_1),$$
$$-\frac{\sqrt{6}}{2}\rho\sin^2\theta\sin 2\xi\Big),$$

$$X_{\alpha_1} = \Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\sin 2\theta\cos\xi\sin\alpha_1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\sin 2\theta\cos\xi\cos\alpha_1, \quad 0, \quad 0, \quad 0,$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\sin^2\theta\sin 2\xi\sin(\alpha_2-\alpha_1), \frac{\sqrt{2}}{2}\rho\sin^2\theta\sin 2\xi\cos(\alpha_2-\alpha_1), 0\Big),$$

$$X_{\alpha_2} = \Big(0, \quad 0, \quad 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\sin 2\theta\sin\xi\sin\alpha_2, -\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\sin 2\theta\sin\xi\cos\alpha_2,$$
$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\sin^2\theta\sin 2\xi\sin(\alpha_2-\alpha_1), -\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\sin^2\theta\sin 2\xi\cos(\alpha_2$$
$$-\alpha_1), 0\Big).$$

Bu türevler yardımıyla

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} & g_{15} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} & g_{25} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} & g_{35} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} & g_{45} \\ g_{51} & g_{52} & g_{53} & g_{54} & g_{55} \end{pmatrix}$$

metrik matrisinin elemanlarını elde edelim. Matris elemanları

$$g_{11} = [X_\rho, X_\rho] = \frac{2}{3}, \qquad g_{22} = [X_\theta, X_\theta] = 2\rho^2,$$

$$g_{33} = [X_\xi, X_\xi] = 2\rho^2 \sin^2\theta,$$

$$g_{44} = [X_{\alpha_1}, X_{\alpha_1}] = 2\rho^2 \sin^2\theta \cos^2\xi\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta \sin^2\xi),$$

$$g_{45} = [X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}] = -\frac{1}{2}\rho^2 \sin^4\theta \sin^2 2\xi,$$

$$g_{54} = [X_{\alpha_2}, X_{\alpha_1}] = [X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}] = g_{45},$$

$$g_{55} = [X_{\alpha_2}, X_{\alpha_2}] = 2\rho^2 \sin^2\theta \sin^2\xi\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta \cos^2\xi),$$

$$g_{ij} = 0\,, \qquad i \neq j, \quad i = 1,2,3, \;\; j = 1,2,3,4,5$$

$$g_{ij} = 0\,, \qquad i = 4,5, \quad j = 1,2,3$$

şeklinde verilebilir. Buradan metrik matris (g_{ij}) ve tersi $(g_{ij})^{-1}$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\rho^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\rho^2 \sin^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\rho^2 \sin^2\theta \cos^2\xi\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta \sin^2\xi) & -\frac{1}{2}\rho^2 \sin^4\theta \sin^2 2\xi \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\rho^2 \sin^4\theta \sin^2 2\xi & 2\rho^2 \sin^2\theta \sin^2\xi\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta \cos^2\xi) \end{pmatrix}$$

$$(g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\rho^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\rho^2 \sin^2\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta \cos^2\xi}{2\rho^2 \sin^2\theta \cos^2\theta \cos^2\xi} & \frac{1}{2\rho^2 \cos^2\theta} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\rho^2 \cos^2\theta} & \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta \sin^2\xi}{2\rho^2 \sin^2\theta \cos^2\theta \sin^2\xi} \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Ayrıca uzunluk elemanı

$$ds^2 = \begin{pmatrix} d\rho \\ d\theta \\ d\xi \\ d\alpha_1 \\ d\alpha_2 \end{pmatrix} (g_{ij}) \, (d\rho \; d\theta \; d\xi \; d\alpha_1 \; d\alpha_2)$$

$ds^2 = \frac{2}{3} d\rho^2 + 2\rho^2 d\theta^2 + 2\rho^2 \sin^2\theta \, d\xi^2 + 2\rho^2 \sin^2\theta \cos^2\xi \, (\cos^2\theta + \sin^2\theta \sin^2\xi) {d\alpha_1}^2 - \rho^2 \sin^4\theta \sin^2 2\xi \, d\alpha_1 d\alpha_2 + 2\rho^2 \sin^2\theta \sin^2\xi \, (\cos^2\theta + \sin^2\theta \cos^2\xi) {d\alpha_2}^2$ (2.2)

şeklinde yazılabilir. Yüzeyde eğrisel koordinatlarda Laplace-Beltrami operatörünün

$$\Delta f = \text{div grad } f$$

yani

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j \sqrt{\bar{g}} . g^{ij} . \frac{\partial}{\partial x_j} \right) f \, , \; \bar{g} = \left| \det(g_{ij}) \right| \qquad (2.3)$$

ile verildiğini biliyoruz. Ele alınan parametrizasyon için metrik matrisin determinantı

$$\bar{g} = \frac{8}{3} \rho^8 (\cos\theta)^2 (\sin\theta)^6 (\sin 2\xi)^2$$

olur ve $i = 1,2,3,4,5$ olmak üzere x_i'ler için

$$x_1 = \rho, \qquad x_2 = \theta, \qquad x_3 = \xi, \qquad x_4 = \alpha_1, \qquad x_5 = \alpha_2$$

yazabiliriz. Bu parametrizasyona göre Laplace-Beltrami operatörü

$\Delta_{LB} = \frac{3}{2\rho^4} \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\rho^4 \frac{\partial}{\partial\rho} \right) + \frac{1}{2\rho^2} \left[\frac{1}{(\sin\theta)^3 \cos\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left((\sin\theta)^3 \cos\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{(\sin\theta)^2 \sin 2\xi} \frac{\partial}{\partial\xi} \left(\sin 2\xi \frac{\partial}{\partial\xi} \right) + \frac{1}{(\sin\theta)^2} \left(\frac{1}{(\cos\xi)^2} \frac{\partial^2}{\partial {\alpha_1}^2} + \frac{1}{(\sin\xi)^2} \frac{\partial^2}{\partial {\alpha_2}^2} \right) + \frac{1}{(\cos\theta)^2} \left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial}{\partial\alpha_2} \right)^2 \right]$ (2.4)

olarak elde edilir. Şimdi ise

$$\Delta_{LB} = \frac{3}{2\rho^4} \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\rho^4 \frac{\partial}{\partial\rho} \right) + \frac{1}{2\rho^2} [\Delta'_{LB}]$$

olmak üzere

$$\Delta'_{LB} = \frac{1}{(\sin\theta)^3 \cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left((\sin\theta)^3\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{(\sin\theta)^2\sin 2\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sin 2\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right) + \frac{1}{(\sin\theta)^2}\left(\frac{1}{(\cos\xi)^2}\frac{\partial^2}{\partial{\alpha_1}^2} + \frac{1}{(\sin\xi)^2}\frac{\partial^2}{\partial{\alpha_2}^2}\right) + \frac{1}{(\cos\theta)^2}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right)^2 \quad (2.5)$$

operatörü yardımıyla

$$\Delta'_{LB} f(\theta,\xi,\alpha_1,\alpha_2) = -\sigma(\sigma+4) f(\theta,\xi,\alpha_1,\alpha_2) \quad (2.6)$$

özdeğer denklemini oluşturalım. Değişkenlerine ayırma yöntemine göre

$$f(\theta,\xi,\alpha_1,\alpha_2) = A(\theta)B(\xi)\, e^{im\alpha_1}\, e^{in\alpha_2}, \qquad m,n = 0,\pm1,\pm2,\ldots$$

şeklinde bir çözüm arayalım. $-\sigma(\sigma+4)$ ifadesi (2.6) denkleminin özdeğeri olmak üzere (Vilenkin & Klimyk, 1993) Laplace-Beltrami operatörü $f(\theta,\xi,\alpha_1,\alpha_2)$ fonksiyonuna uygulanırsa denklem

$$\frac{d^2A}{d\theta^2} + (3\cot\theta - \tan\theta)\frac{dA}{d\theta} - \left[\frac{\ell(\ell+2)}{(\sin\theta)^2} + \frac{(m+n)^2}{(\cos\theta)^2}\right]A = -\sigma(\sigma+4)A \quad (2.7)$$

$$\frac{d^2B}{d\xi^2} + 2\cot 2\xi\frac{dB}{d\xi} - \left(\frac{m^2}{(\cos\xi)^2} + \frac{n^2}{(\sin\xi)^2}\right)B = -l(l+2)B \quad (2.8)$$

şeklinde iki adi diferansiyel denkleme indirgenir. Burada $l(l+2)$ sabiti, (2.6) kısmi diferansiyel denklemi için ayırma sabitidir.

Şimdi bu denklemlerin çözümlerini araştıralım. İlk olarak (2.7) denklemini ele alalım. Bu denklemi bilinen bir denkleme indirgemek için öncelikle

$$A(\theta) = (\sin\theta)^l(\cos\theta)^{m+n}W(\theta)$$

dönüşümü yapılırsa

$$\frac{d^2W}{d\theta^2} + [(2l+3)\cot\theta - (2m+2n+1)\tan\theta\,]\frac{dW}{d\theta} - [(m+n)^2 + 2(l+2)(m+n) + l(l+4)]W = -\sigma(\sigma+4)W$$

denklemi elde edilir. Bu denklemi düzenleyelim.

$$\frac{d^2W}{d\theta^2} + [(2l+3)\cot\theta - (2m+2n+1)\tan\theta\,]\frac{dW}{d\theta} - [(m+n)^2 + 2(l+2)(m+n) + (l+2)^2 - (\sigma+2)^2]W = 0$$

$$\frac{d^2W}{d\theta^2} + [(2l+3)\cot\theta - (2m+2n+1)\tan\theta\,]\frac{dW}{d\theta} - \{[(m+n)+(l+2)]^2 - (\sigma+2)^2\}W = 0 \quad (2.9)$$

Bu denklemde

$$z = (\cos\theta)^2$$

dönüşümü yapılırsa denklem

$$z(1-z)\frac{d^2W}{dz^2} + [(m+n+1) - (m+n+l+3)z]\frac{dW}{dz} - \left[\left(\frac{l+m+n-\sigma}{2}\right)\left(\frac{l+m+n+\sigma+4}{2}\right)\right]W = 0 \qquad (2.10)$$

şeklinde bir denkleme dönüşür. (2.10) denklemi

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + [c-(a+b+1)z]\frac{du}{dz} - abu = 0$$

genel formuna sahip bir hipergeometrik denklemdir. Hipergeometrik denklemin çözümü hipergeometrik fonksiyonlar ile verilir. c_1, c_2 keyfi sabitler olmak üzere $z = 0$ civarındaki regüler çözüm

$$u(z) = c_1u_1(z) + c_2u_2(z)$$

$$u_1(z) = F(a,b;c;z)$$

$$u_2(z) = z^{1-c}F(a-c+1, b-c+1; 2-c; z)$$

şeklindedir (Bateman, 1953). (2.10) denkleminde

$$a = \frac{l+m+n-\sigma}{2}, \qquad b = \frac{l+m+n+\sigma+4}{2}, \qquad c = m+n+1$$

olmak üzere denklemin çözümü

$$\begin{aligned} W(z) &= c_1W_1(z) + c_2W_2(z) \\ &= c_1F\left(\frac{l+m+n-\sigma}{2}, \frac{l+m+n+\sigma+4}{2}; m+n+1; (\cos\theta)^2\right) \\ &+ c_2(\cos\theta)^{-2m-2n}F\left(\frac{l-m-n-\sigma}{2}, \frac{l-m-n+\sigma+4}{2}; -m-n+1; (\cos\theta)^2\right) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan (2.7) denkleminin genel çözümü

$$A(\theta) = c_1(\sin\theta)^l(\cos\theta)^{m+n}F\left(\frac{l+m+n-\sigma}{2}, \frac{l+m+n+\sigma+4}{2}; m+n+1; (\cos\theta)^2\right)$$

$$+ c_2(\sin\theta)^l(\cos\theta)^{-m-n}F\left(\frac{l-m-n-\sigma}{2}, \frac{l-m-n+\sigma+4}{2}; -m-n+1; (\cos\theta)^2\right) \qquad (2.11)$$

olarak elde edilir.

Birçok fiziksel sistem diferansiyel denklemlerle (Schrödinger, diğer dalga denklemleri gibi) ifade edilir. 1926 yılında Erwin Schrödinger günümüzde kendi adıyla anılan

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x,t)$$

Schrödinger denklemini bilim dünyasına kazandırmıştır (Schrödinger, 1926). Bu denklem ikinci mertebeden lineer kısmi türevli bir diferansiyel denklemdir. Burada $\psi(x)$ dalga fonksiyonu, $V(x)$ potansiyel enerjiyi temsil eden reel değerli bir fonksiyon, m parçacığın kütlesi, $\hbar$ ise Planck sabitidir ($\hbar = 1.06 \times 10^{-34}\,Js$). Schrödinger denklemi zamana bağlı ve zamandan bağımsız olmak üzere iki formda yazılabilir. Potansiyel enerji zamandan bağımsız ise değişkenlerine ayırma metodu kullanılarak

$$H\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

zamandan bağımsız Schrödinger denklemi elde edilir. Bu denklem de ikinci mertebeden lineer bir diferansiyel denklemdir. Denklemde H lineer operatörü, parçacığın toplam enerjisini temsil eder ve Hamiltonyen operatörü olarak adlandırılır. Bu denklemin çözümü, incelenen fiziksel sistemin dalga fonksiyonlarını ve enerji özdeğerlerini verir.

Bir atom içindeki her elektronun hareketini ve yörüngesini tam olarak tanımlamak için temel kuantum sayısı n, yörüngesel açısal momentum kuantum sayısı l, manyetik kuantum sayısı m_l , elektron spin kuantum sayısı m_s gibi bazı kuantum sayıları kullanılır. Bir atomdaki tüm elektronların tüm kuantum sayılarının kombinasyonu, Schrödinger denklemine uyan bir dalga fonksiyonu ile tanımlanır. Kuantum sayıları oldukça önemlidir, çünkü bu sayılar bir atomun elektron konfigürasyonunu ve atomun elektronlarının olası yerini belirlemek için kullanılabilirler. Kuantum sayıları, iyonlaşma enerjisi ve atom yarıçapı gibi atomların diğer özelliklerini anlamak için de kullanılır.

Schrödinger denklemi, Hamiltonyen ile verilen kuantum integrallenebilir sistem örneklerinden biridir ve zamandan bağımsız Schrödinger denklemi ile Δ_{LB} Laplace-Beltrami operatörü arasındaki ilişki ($\hbar = 2m = 1$) , $V(x)$ potansiyel enerji, E toplam enerji olmak üzere

$$H\psi \;=\; [-\Delta_{LB} \;+\; V(x)]\,\psi \;=\; E\psi$$

ile verilir (Weidmann,1987). Schrödinger denklemi mikroskobik boyuttaki fiziksel sistemlerin davranışları hakkında bilgi verir ve sistemin durumları bu denklemin çözümleri olan dalga fonksiyonları ile verilir. Çoğu zaman Schrödinger denkleminin

çözümü, belirli bir potansiyel fonksiyonuna bağlı olarak yapılır ve bu denklem kuantum teoride önemli bir yere sahiptir (Flügge, 1999).

Şimdi (2.7) denklemini Schrödinger denklemine getirerek ilgili sistemin potansiyel fonksiyonunu ve enerji özdeğerini belirtelim. (2.7) denkleminde

$$A(\theta) = (\sin\theta)^{-3/2}(\cos\theta)^{-1/2}\psi(\theta) \tag{2.12}$$

dönüşümü yapılırsa denklem

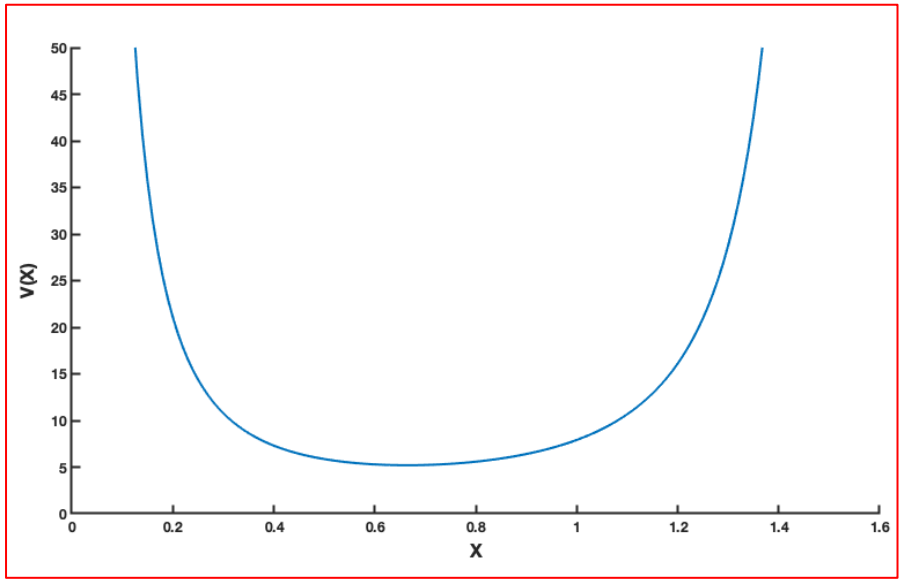
$$-\frac{d^2\psi}{d\theta^2} + \left[\frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)\left(l+\frac{3}{2}\right)}{(\sin\theta)^2} + \frac{\left(m+n-\frac{1}{2}\right)\left(m+n+\frac{1}{2}\right)}{(\cos\theta)^2} - (\sigma+2)^2\right]\psi = 0 \tag{2.13}$$

Schrödinger denklemi halini alır. Buradan fiziksel sistemin Pöschl-Teller potansiyel fonksiyonu ve enerjisi

$$V(\theta) = \frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)\left(l+\frac{3}{2}\right)}{(\sin\theta)^2} + \frac{\left(m+n-\frac{1}{2}\right)\left(m+n+\frac{1}{2}\right)}{(\cos\theta)^2}, \tag{2.14}$$

$$E = (\sigma+2)^2 \tag{2.15}$$

olarak elde edilir. Kuantum sayıları, bir kuantum sisteminin korunan niceliklerinin değerlerini tanımlar ve Hamiltonian ile komüte olan operatörlerin özdeğerlerine ve bunlara karşılık gelen özfonksiyonlarına karşılık gelir. Bu sistem için σ bir kuantum sayısıdır.



Şekil 2.1. $\ell = m = n = 1$ için (2.14) Pöschl-Teller potansiyeli (MATLAB).

Elde edilen potansiyel fonksiyonunu $l+3/2>1$, $m+n+1/2>1$ yani $l>-1/2$, $m+n>1/2$ durumları için inceleyelim. Potansiyel fonksiyonu periyodik olduğundan $\theta=0$ ve $\theta=\pi/2$, $0\leq\theta\leq\pi/2$ aralığında inceleme yapmak yeterlidir. Buradan Schrödinger denkleminin sınır koşulları $\psi(0)=0$, $\psi(\pi/2)=0$ şeklinde olduğu görülür. Schrödinger denkleminin çözümü (2.11) ve (2.12) ifadelerinden

$$\psi(\theta)=c_1(\sin\theta)^{l+3/2}(\cos\theta)^{m+n+1/2}F\left(\frac{l+m+n-\sigma}{2},\frac{l+m+n+\sigma+4}{2};m+n+1;(\cos\theta)^2\right)$$

$$+c_2(\sin\theta)^{l+3/2}(\cos\theta)^{-m-n+1/2}F\left(\frac{l-m-n-\sigma}{2},\frac{l-m-n+\sigma+4}{2};-m-n+1;(\cos\theta)^2\right)$$

olarak yazılabilir.

Şimdi sınır koşullarına bakalım. İlk olarak $\psi(\pi/2)=0$ koşulunu ele alalım. $\theta=\pi/2$ için $\cos^2\theta=0$ olduğundan çözümdeki hipergeometrik fonksiyonun değeri bir olur, yani

$$F\left(\frac{l+m+n-\sigma}{2},\frac{l+m+n+\sigma+4}{2};m+n+1;0\right)=F\left(\frac{l-m-n-\sigma}{2},\frac{l-m-n+\sigma+4}{2};-m-n+1;0\right)=1$$

dir. Buradan çözüm

$$\psi(\theta)=c_1\,(\cos\theta)^{m+n+1/2}+c_2\,(\cos\theta)^{-m-n+1/2}$$

olur. Çözümde $m+n>1/2$ için $(\cos\theta)^{-m-n+1/2}$ terimi sonsuza gideceğinden $c_2=0$ olmalıdır. Böylece Schrödinger denkleminin çözümü

$$\psi(\theta)=c_1(\sin\theta)^{l+3/2}(\cos\theta)^{m+n+1/2}F\left(\frac{l+m+n-\sigma}{2},\frac{l+m+n+\sigma+4}{2};m+n+1;(\cos\theta)^2\right)$$

halini alır.

Şimdi $\psi(0)=0$ sınır koşulunu ele alacağız. $\theta=0$ için $\sin\theta=0$ olacağından hipergeometrik fonksiyonun

$$F(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}F(a,b;a+b-c+1;1-z)+$$

$$+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b;c-a-b+1;1-z)\,,$$

$$(|\arg(1-z)|<\pi)$$

lineer dönüşüm formülünü kullanalım (Abramowitz & Stegun, 1972). Buradan çözümdeki hipergeometrik fonksiyonun yeni ifadesi

$$F\left(\frac{l+m+n-\sigma}{2},\frac{l+m+n+\sigma+4}{2};m+n+1;(\cos\theta)^2\right)$$

$$=\frac{\Gamma(m+n+1)\Gamma(-l-1)}{\Gamma\left(\frac{m+n-l+\sigma+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+n-l-\sigma-2}{2}\right)}F\left(\frac{l+m+n-\sigma}{2},\frac{l+m+n+\sigma+4}{2};l+2;(\sin\theta)^2\right)$$

$$+\frac{\Gamma(m+n+1)\Gamma(l+1)}{\Gamma\left(\frac{l+m+n-\sigma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l+m+n+\sigma+4}{2}\right)}(\sin\theta)^{-2l-2}F\left(\frac{m+n-l+\sigma+2}{2},\frac{m+n-l-\sigma-2}{2};-l;(\sin\theta)^2\right)$$

olur. Buradan

$$\psi(\theta)=c_1\frac{\Gamma(m+n+1)\Gamma(-l-1)}{\Gamma\left(\frac{m+n-l+\sigma+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+n-l-\sigma-2}{2}\right)}(\sin\theta)^{l+3/2}(\cos\theta)^{m+n+1/2}\times$$
$$F\left(\frac{l+m+n-\sigma}{2},\frac{l+m+n+\sigma+4}{2};l+2;(\sin\theta)^2\right)$$
$$+c_1\frac{\Gamma(m+n+1)\Gamma(l+1)}{\Gamma\left(\frac{l+m+n-\sigma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l+m+n+\sigma+4}{2}\right)}(\sin\theta)^{-l-1/2}(\cos\theta)^{m+n+1/2}\times$$
$$F\left(\frac{m+n-l+\sigma+2}{2},\frac{m+n-l-\sigma-2}{2};-l;(\sin\theta)^2\right)$$

olarak yazılabilir. $\theta=0$ için $\sin\theta=0$ olur ve çözümdeki hipergeometrik fonksiyonların değeri bir olur, yani

$$F\left(\frac{l+m+n-\sigma}{2},\frac{l+m+n+\sigma+4}{2};l+2;0\right)=F\left(\frac{m+n-l+\sigma+2}{2},\frac{m+n-l-\sigma-2}{2};-l;0\right)=1$$

olur. Bu durumda yukarıdaki çözüm

$$\psi(\theta)=c_1\frac{\Gamma(m+n+1)\Gamma(-l-1)}{\Gamma\left(\frac{m+n-l+\sigma+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+n-l-\sigma-2}{2}\right)}(\sin\theta)^{l+3/2}+$$
$$c_1\frac{\Gamma(m+n+1)\Gamma(l+1)}{\Gamma\left(\frac{l+m+n-\sigma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l+m+n+\sigma+4}{2}\right)}(\sin\theta)^{-l-1/2}$$

şeklinde yazılabilir. $l>-\frac{1}{2}$ için $-l-\frac{1}{2}<0$ olup $(\sin\theta)^{-l-1/2}$ terimi sonsuza gider. Aşikar olmayan bir çözüm bulunabilmesi için $c_1\neq 0$ olması gerektiğinden

$$\frac{\Gamma(m+n+1)\Gamma(l+1)}{\Gamma\left(\frac{l+m+n-\sigma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l+m+n+\sigma+4}{2}\right)}=0$$

olması gerekir. $a = 0, -1, -2, \ldots$ için $\frac{1}{\Gamma(a)} = 0$ olduğundan sınır değer koşulunun sağlanması için $\frac{l+m+n-\sigma}{2} = -k$ veya $\frac{l+m+n+\sigma+4}{2} = -k$, $k = 0,1,2, \ldots$ olmalıdır. $\frac{l+m+n-\sigma}{2} = -k$, $k = 0,1,2, \ldots$ alalım. Bu durumda $\sigma = l + m + n + 2k$ olup

$$\frac{l+m+n+\sigma+4}{2} = \frac{l+m+n+l+m+n+2k+4}{2} = l + m + n + k + 2$$

bulunur ve buradan çözümün yeni hali

$$\psi(\theta) = c_1 \, (\sin\theta)^{l+3/2} \, (\cos\theta)^{m+n+1/2} F(-k \, , l + m + n + k + 2; m + n + 1; (\cos\theta)^2)$$

olarak bulunur.

Şimdi ise $\frac{l+m+n+\sigma+4}{2} = -k, \quad k = 0,1,2, \ldots$ durumunu ele alalım. Bu durumda $\sigma = -l - m - n - 2k - 4$ olup

$$\frac{l+m+n-\sigma}{2} = \frac{l+m+n-(-l-m-n-2k-4)}{2} = l + m + n + k + 2$$

buluruz ki çözümün yeni hali

$$\psi(\theta) = c_1 (\sin\theta)^{l+3/2} \, (\cos\theta)^{m+n+1/2} F(l + m + n + k + 2 \, , -k; m + n + 1; (\cos\theta)^2)$$

olur. $F(a, b; c, z) = F(b, a; c; z)$ olduğundan her iki durumda da aynı çözüm elde edilir. Neticede sınır koşullarını sağlayan Schrödinger denkleminin çözümü, c_1 normalizasyon sabiti ve $k = 0,1,2, \ldots$ olmak üzere

$$\psi(\theta) = c_1 (\sin\theta)^{l+3/2} \, (\cos\theta)^{m+n+1/2} \quad \times$$

$$F(-k, l + m + n + k + 2; m + n + 1; (\cos\theta)^2) \qquad (2.16)$$

olarak bulunur.

$\sigma = l + m + n + 2k$, $k = 0,1,2, \ldots$ kuantum sayısı için sistemin (2.15) E enerji özdeğeri ise

$$E \; = \; (\sigma + 2)^2 = (l + m + n + 2k + 2)^2$$

halini alır. Bu durumda

$k = 0$ için birinci enerji seviyesi $E_1 = (l + m + n + 2)^2$,

$k = 1$ için ikinci enerji seviyesi $E_2 = (l + m + n + 4)^2$,

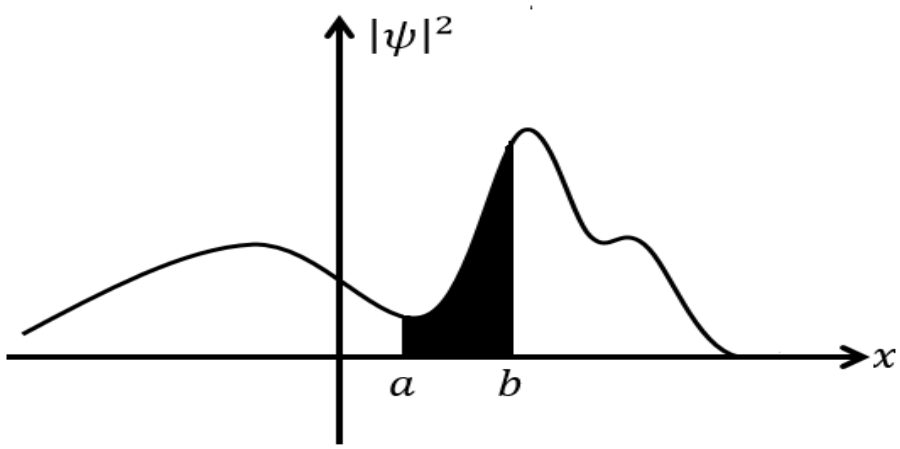
$\vdots$

olarak bulunur. $\sigma = -l - m - n - 2k - 4$ değeri için de aynı enerji seviyeleri elde edileceğine dikkat ediniz.

$\psi(x,t)$ fonksiyonu bir parçacığın dalga fonksiyonu olsun. Parçacık doğası gereği bir noktada bulunurken dalga fonksiyonu uzayda yayılmıştır. Born'un dalga fonksiyonun istatiksel yorumuna göre $|\psi(x,t)|^2$ fonksiyonu, daha net bir ifade ile

$$\int_a^b |\psi(x,t)|^2 dx \tag{2.17}$$

ifadesi parçacığın t anında a ve b noktaları arasında bulunma olasılığını verir. Yani bu olasılık $|\psi|^2$ grafiğinin altında kalan alandır.



Şekil 2.2. Parçacığın t anında a ve b noktaları arasında bulunma olasılığı.

Parçacık bir t anında uzayda herhangi bir yerde bulunmak zorunda olduğundan $|\psi|^2$ nin integrali bir olmalıdır, yani

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = 1$$

dir. Bu nedenle Schrödinger denklemi çözülerek elde edilen bir dalga fonksiyonun bu koşulu sağlaması gerekir. $\psi(x,t)$ bir çözüm ise, $A \in \mathbb{C}$ keyfi bir sabit olmak üzere $A\,\psi(x,t)$ fonksiyonu da çözüm olacaktır. Bu bilinmeyen A sabiti, $A\,\psi(x,t)$ fonksiyonun verilen koşulda yerine yazılması ile belirlenir. Bu işlem dalga fonksiyonunun normalize edilmesi olarak adlandırılır (Griffiths, 2013).

Örneğin,

$$\psi(x) = A \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \quad 0 \le x \le L$$

dalga fonksiyonunu normalize edelim.

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\overline{\psi(x)}dx = 1$$

normalizasyon şartından yararlanarak

$$\begin{aligned} A^2\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sin\frac{2\pi x}{L}\right)^2 dx &= A^2\left[\int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{L}\left(\sin\frac{2\pi x}{L}\right)^2 dx + \int_{L}^{\infty} 0\,dx\right] \\ &= A^2\int_{0}^{L}\left(\sin\frac{2\pi x}{L}\right)^2 dx \\ &= A^2\,\frac{L}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

olup $A = \sqrt{\frac{2}{L}}$ elde edilir. Dolayısıyla normalize edilmiş dalga fonksiyonu

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

olarak elde edilir (Holzner, 2013).

Ortogonal fonksiyonlar fen ve mühendislik alanlarında sıkça kullanılmaktadır. N_{nm} sabit değerler olmak üzere, tüm n, m 'ler için

$$\int_a^b {f_n}^*(x) f_m(x) w(x) dx = N_{nm}\delta_{nm} \qquad (2.18)$$

koşulunu sağlayan $f_1(x), f_2(x), \dots, f_i(x)$ fonksiyonlarına, $w(x)$ yoğunluk fonksiyonu ile $[a, b]$ aralığında ortogonal fonksiyonlardır denir. Burada ${f_n}^*(x)$, $f_n(x)$ 'nin kompleks eşleniğidir. Bazı kaynaklarda ise ortogonallik tanımı, $f_n(x)$ reel fonksiyonlar, $w(x) = 1$ ve $N_{nm} = 1,\ n, m = 1,2, \dots$ koşulları altında

$$\int_a^b f_n(x) f_m(x) dx = \delta_{nm} \qquad (2.19)$$

şeklinde verilmektedir. Örneğin, $e^{inx},\ n = 0,1, \dots$ fonksiyonları,

$$\int_0^{2\pi}\left(e^{inx}\right)^* e^{imx} dx = 2\pi\delta_{nm}$$

olduğundan $w(x) = 1$ ile $[0,2\pi]$ aralığında ortogonal fonksiyonlardır.

Legendre polinomları $w(x) = 1$ ile $[-1,1]$ aralığında, Laguerre polinomları $w(x) = e^{-x}$ ile $[0, \infty]$ aralığında, Hermite polinomları $w(x) = e^{-x^2}$ ile $[-\infty, \infty]$ aralığında, Jacobi polinomları ise $w(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ ile $[-1,1]$ aralığında ortogonal polinomlara örneklerdir.

(2.19) ortogonallik koşulunda $n = m$ alınırsa, $n = 1,2, \dots$ için

$$\int_a^b {f_n}^*(x) f_n(x) w(x) dx = N_{nn}\ ,\ \ \delta_{nn} = 1 \qquad (2.20)$$

olur. Eğer

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{N_{nn}}} f_n(x)$$

şeklinde yeni bir fonksiyon tanımlanırsa, ortogonallik koşulu

$$\int_a^b \varphi_n{}^*(x)\varphi_n(x)w(x)dx = \delta_{nn}$$

halini alır. $n = m$ için

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{N_{nn}}} f_n{}^*(x) \frac{1}{\sqrt{N_{nn}}} f_n(x)w(x)dx = \frac{1}{N_{nn}} . N_{nn} = 1$$

dir. Bu sayede, $f_n(x)$ ortogonal fonksiyonu normalize edilerek ortonormal $\varphi_n(x)$ fonksiyonu elde edilmiş olur. Yukarıdaki örnekte e^{inx}, $n = 0,1, \ldots$ fonksiyonu, normalize edilirse $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{inx}$ ortonormal fonksiyonu elde edilir (Abramowitz & Stegun, 1972; Bateman, 1953; Lebedev, 1965).

Şimdi (2.16) çözümündeki c_1 normalizasyon sabitini bulalım. Bu sabiti bulmak için Jacobi polinomlarının ortogonallik koşulunu kullanacağız. Hipergeometrik fonksiyonların Jacobi polinomları ile ifadesi

$$F\left(-a, a+\alpha+\beta+1\,, 1+\beta\,;\, \frac{1+x}{2}\right) = \frac{a!\Gamma(1+\beta)}{(-1)^a\Gamma(a+1+\beta)} P_a^{(\alpha,\beta)}(x) \qquad (2.21)$$

şeklindedir (Bateman, 1953).

$$-a = -k \quad \Longrightarrow \quad a = k,\ \beta + 1 = m + n + 1 \quad \Longrightarrow \quad \beta = m + n$$

$$a + \alpha + \beta + 1 = l + m + n + k + 2 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = l + 1$$

$$\frac{1+x}{2} = (\cos\theta)^2 \quad \Longrightarrow \quad x = 2(\cos\theta)^2 - 1 = \cos 2\theta$$

$$F(-k, l+m+n+k+2; m+n+1; (\cos\theta)^2) = \frac{k!\Gamma(m+n+1)}{(-1)^k\Gamma(k+m+n+1)} P_k^{(l+1,m+n)} \cos 2\theta$$

Buradan $\psi(\theta)$ fonksiyonunun Jacobi polinomları ile ifadesi

$$\psi(\theta) = c_1(\sin\theta)^{l+3/2}\,(\cos\theta)^{m+n+1/2} \frac{k!\Gamma(m+n+1)}{(-1)^k\Gamma(k+m+n+1)} P_k^{(l+1,m+n)}(\cos 2\theta)$$

olarak elde edilir. Dalga fonksiyonunun istatistiksel yorumuna göre parçacık, tanımlı olduğu bölgede herhangi bir yerde bulunması gerektiğinden fonksiyon

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\overline{\psi(x)}dx = 1$$

eşitliğini sağlamalıdır. Bu durumda $\psi(\theta)$ fonksiyonu için

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[c_1\,(\sin\theta)^{l+3/2}\,(\cos\theta)^{m+n+1/2} \frac{k!\,\Gamma(m+n+1)}{(-1)^k\Gamma(k+m+n+1)} P_k^{(l+1,m+n)}(\cos 2\theta) \right] \times$$

$$\left[c_1\,(\sin\theta)^{l+3/2}\,(\cos\theta)^{m+n+1/2}\,\frac{k!\,\Gamma(m+n+1)}{(-1)^k\Gamma(k+m+n+1)}\,P_k^{(l+1,m+n)}(\cos 2\theta)\right]d\theta = 1$$

yani,

$$c_1^2\left[\frac{k!\,\Gamma(m+n+1)}{(-1)^k\Gamma(k+m+n+1)}\right]^2\int_{-\infty}^{\infty}(\sin\theta)^{2l+3}\,(\cos\theta)^{2m+2n+1}\left[P_k^{(l+1,m+n)}(\cos 2\theta)\right]^2 d\theta = 1$$

integrali elde edilir. Bu integralde

$$x = \cos 2\theta\,, \qquad dx = -2sin2\theta d\theta$$

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \qquad -1 \le cos2\theta \le 1 \Longrightarrow -1 \le x \le 1$$

dönüşümü yapılırsa integral

$$-c_1^2\left[\frac{k!\,\Gamma(m+n+1)}{(-1)^k\Gamma(k+m+n+1)}\right]^2\frac{1}{2^{l+m+n+3}}\int_{-1}^{1}(1-x)^{l+1}(1+x)^{m+n}\left[P_k^{(l+1,m+n)}(x)\right]^2 dx = 1$$

halini alır. c_1 sabitini bulmak için Jacobi polinomlarının ortogonallik koşulu kullanılabilir. Jacobi polinomları için ortogonallik koşulu $Re\,\alpha > -1$ ve $Re\,\beta > -1$ olmak üzere

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,\left[P_k^{(\alpha,\beta)}(x)\right]^2\,dx = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+k+1)\Gamma(k+1+\beta)}{k!\Gamma(\alpha+\beta+2k+1)\Gamma(\alpha+k+1+\beta)}$$

şeklinde verilir. Buradan c_1 normalizasyon sabiti

$$-c_1^2\,\left[\frac{k!\Gamma(m+n+1)}{(-1)^k\Gamma(k+m+n+1)}\right]^2\frac{1}{2^{l+m+n+3}}\int_{-1}^{1}(1-x)^{l+1}\,(1+x)^{m+n}\left[P_k^{(l+1,m+n)}(x)\right]^2 dx\; = 1$$

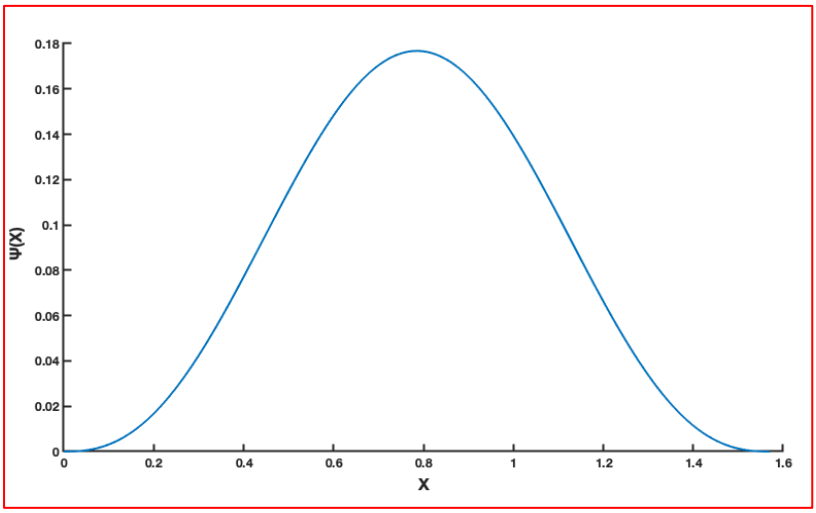
ifadesinden

$$-c_1^2\,\left[\frac{k!\Gamma(m+n+1)}{(-1)^k\Gamma(k+m+n+1)}\right]^2\frac{1}{2^{l+m+n+3}}\,\frac{2^{l+m+n+2}\Gamma(l+k+2)\Gamma(k+m+n+1)}{k!\Gamma(l+m+n+2k+2)\Gamma(l+m+n+k+2)} = 1$$

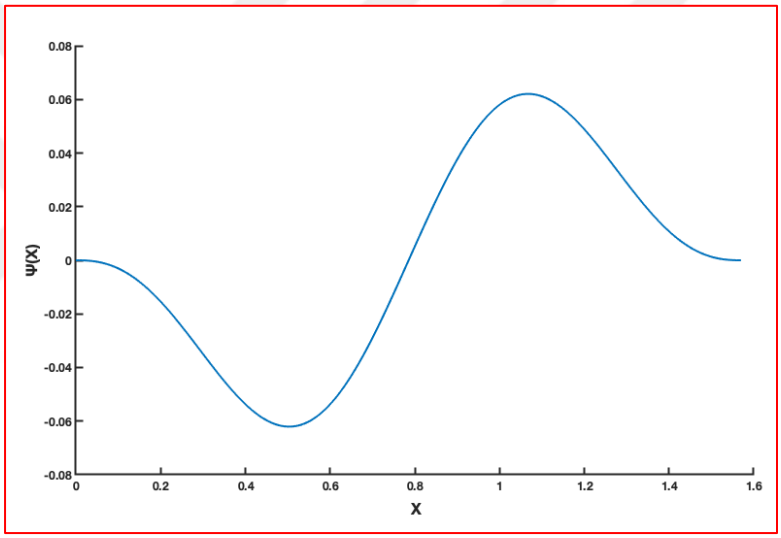
olup

$$c_1 = \sqrt{\frac{-2\Gamma(k+m+n+1)\Gamma(l+m+n+2k+2)\Gamma(l+m+n+k+2)}{k!\,[\Gamma(m+n+1)]^2\Gamma(l+k+2)}}$$

şeklinde bulunur.



Şekil 2.3. $\ell = m = n = 1$ ve $k = 0$ için birinci seviye (2.16) dalga fonksiyonu (MATLAB).



Şekil 2.4. $\ell = m = n = 1$ ve $k = 1$ için ikinci seviye (2.16) dalga fonksiyonu (MATLAB).

İkinci olarak (2.8) denkleminin çözümünü bulalım. Bu denklemi bilinen bir denkleme indirgemek için

$$B(\xi) = (\cos\xi)^m (\sin\xi)^n T(\xi)$$

dönüşümü yapılırsa

$$\frac{d^2T}{d\xi^2} + [(2m+1)\tan\xi - (2n+1)\cot\xi\,]\frac{dT}{d\xi} - [(m+n-l)(m+n+l+2)]T = \qquad (2.22)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde

$$z = (\cos\xi)^2$$

dönüşümü yapılırsa denklem

$$z(1-z)\frac{d^2T}{dz^2}+[(m+1)-(m+n+2)z]\frac{dT}{dz}-\left[\left(\frac{m+n-l}{2}\right)\left(\frac{m+n+l+2}{2}\right)\right]T=0 \qquad (2.23)$$

şeklinde bir hipergeometrik denkleme dönüşür. Burada

$$a=\frac{m+n-l}{2},\ b=\frac{m+n+l+2}{2},\ c=m+1$$

olup son dönüşüm göz önünde bulundurulursa (2.22) denklemin çözümü

$$T(\xi)=c_3T_1(\xi)+c_4T_2(\xi)=c_3F\left(\frac{m+n-l}{2},\frac{m+n+l+2}{2};m+1;(\cos\xi)^2\right)+$$
$$c_4\,(\cos\xi)^{-2m}\,\xi\,F\left(\frac{m-n-l}{2},\frac{n-m+l+2}{2};1-m;(\cos\xi)^2\right)$$

olarak bulunur. Buradan (2.8) denkleminin genel çözümü

$$B(\xi)=(\cos\xi)^m(\sin\xi)^nT(\xi)=(\cos\xi)^m(\sin\xi)^n[c_3T_1(\xi)+c_4T_2(\xi)]=$$
$$c_3(\cos\xi)^m(\sin\xi)^nF\left(\frac{m+n-l}{2},\frac{m+n+l+2}{2};m+1;(\cos\xi)^2\right)+$$
$$c_4(\cos\xi)^{-m}(\sin\xi)^nF\left(\frac{m-n-l}{2},\frac{n-m+l+2}{2};1-m;(\cos\xi)^2\right)$$

olarak elde edilir.

Şimdi (2.8) denklemini Schrödinger denklemine getirerek potansiyel fonksiyonunu ve enerji özdeğerini bulalım. Bu denklemde

$$B(\xi)=\ (\cos\xi)^{-1/2}(\sin\xi)^{-1/2}\psi(\xi) \qquad (2.24)$$

dönüşümü yapılırsa denklem

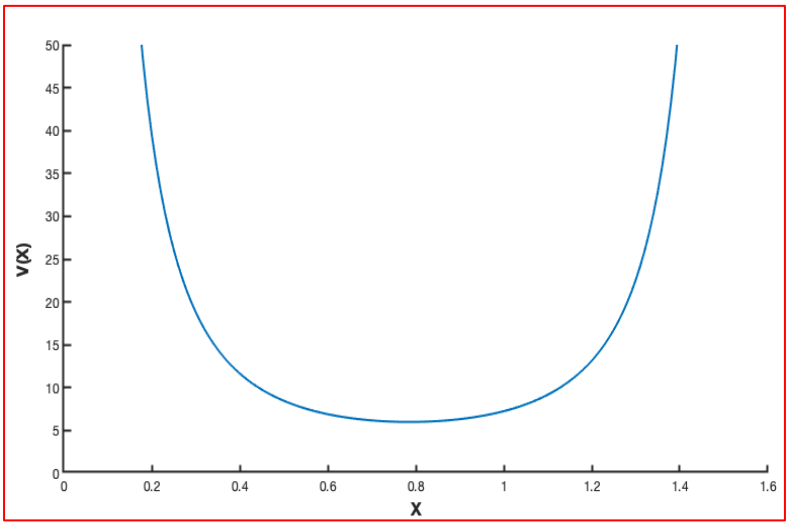
$$-\frac{d^2\psi}{d\xi^2}+\left[\frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)\left(m+\frac{1}{2}\right)}{(\cos\xi)^2}+\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}{(\sin\xi)^2}-(l+1)^2\right]\psi=0 \qquad (2.25)$$

Schrödinger denklemi elde edilir. Buradan fiziksel sistemin Pöschl-Teller potansiyel fonksiyonu ve enerjisi

$$V(\xi)=\frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)\left(m+\frac{1}{2}\right)}{(\cos\xi)^2}+\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}{(\sin\xi)^2} \qquad (2.26)$$

$$E\ =\ (l+1)^2 \qquad (2.27)$$

olarak elde edilir. l , bu sistem için bir kuantum sayısıdır.



Şekil 2.5. $m = n = 1$ için (2.26) Pöschl-Teller potansiyeli (MATLAB).

(2.24) denklemi yardımıyla Schrödinger denkleminin çözümü

$$\psi(\xi) = c_3(\cos\xi)^{m+1/2}(\sin\xi)^{n+1/2}\xi F\left(\frac{m+n-l}{2}, \frac{m+n+l+2}{2}; m+1; (\cos\xi)^2\right) + c_4(\cos\xi)^{-m+1/2}(\sin\xi)^{n+1/2}F\left(\frac{m-n-l}{2}, \frac{n-m+l+2}{2}; 1-m; (\cos\xi)^2\right)$$

şeklinde elde edilir. Sistemin (2.26) potansiyel fonksiyonunu $m+\frac{1}{2} > 1$, $n+\frac{1}{2} > 1$ veya $m > \frac{1}{2}$, $n > \frac{1}{2}$ durumları için inceleyelim. Bu potansiyel fonksiyonu da periyodik olduğundan $0 \le \xi \le \pi/2$ aralığında inceleme yapmak yeterlidir. Böylece Schrödinger denkleminin sınır koşulları $\psi(0) = 0$, $\psi(\pi/2) = 0$ şeklinde olduğu görülür. Şimdi sınır koşullarına bakalım. $\psi(\pi/2) = 0$ koşulu ele alındığında $\cos^2\xi = 0$ olacağından çözümdeki hipergeometrik fonksiyonların değeri de bir olur, yani

$$F\left(\frac{m+n-l}{2}, \frac{m+n+l+2}{2}; m+1; 0\right) = F\left(\frac{m-n-l}{2}, \frac{n-m+l+2}{2}; 1-m; 0\right) = 1$$

dir. Buradan çözüm

$$\psi(\xi) = c_3(\cos\xi)^{m+1/2} + c_4(\cos\xi)^{-m+1/2}$$

olur. Çözümde $m > 1/2$ değerleri için $\xi \to \pi/2$ iken $(\cos\xi)^{-m+1/2} \to \infty$ olacağından $c_4 = 0$ olmalıdır. Böylece Schrödinger denkleminin çözümü

$$\psi(\xi) = c_3\,(\cos\xi)^{m+1/2}(\sin\xi)^{n+1/2}F\left(\frac{m+n-l}{2}, \frac{m+n+l+2}{2}; m+1; (\cos\xi)^2\right) \qquad (2.28)$$

halini alır.

Şimdi ikinci sınır koşulluna bakalım. $\psi(0) = 0$ için $\sin(\xi) = 0$ olacaktır. Hipergeometrik fonksiyonun yukarıda verilen lineer dönüşüm formülünden çözümdeki hipergeometrik fonksiyonun yeni ifadesi

$$F\left(\ \frac{m+n-l}{2}, \frac{m+n+l+2}{2}\ ;\ m+1;\ \ (\cos\xi)^2\ \right) =$$

$$= \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(-n)}{\Gamma\left(\frac{m-n+l+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-n-l}{2}\right)} F\left(\frac{m+n-l}{2}, \frac{m+n+l+2}{2}; n+1; (\sin\xi)^2\right)$$

$$+ \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n)}{\Gamma\left(\frac{m+n-l}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+n+l+2}{2}\right)} (\sin\xi)^{-2n} F\left(\frac{m-n+l+2}{2}, \frac{m-n-l}{2}; 1-n; (\sin\xi)^2\right)$$

olur. Buradan (2.28) çözümü

$$\psi(\xi) = c_3 \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(-n)}{\Gamma\left(\frac{m-n+l+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-n-l}{2}\right)} (\cos\xi)^{m+1/2} (\sin\xi)^{n+1/2} F\left(\frac{m+n-l}{2}, \frac{m+n+l+2}{2}; n+1; (\sin\xi)^2\right) +$$

$$c_3 \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n)}{\Gamma\left(\frac{m+n-l}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+n+l+2}{2}\right)} (\cos\xi)^{m+1/2} (\sin\xi)^{-n+1/2} F\left(\frac{m-n+l+2}{2}, \frac{m-n-l}{2}; 1-n; (\sin\xi)^2\right)$$

olarak yazılabilir. Böylece çözüm

$$\psi(\xi) = c_3 \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(-n)}{\Gamma\left(\frac{m-n+l+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-n-l}{2}\right)} (\sin\xi)^{n+1/2} + c_3 \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n)}{\Gamma\left(\frac{m+n-l}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+n+l+2}{2}\right)} (\sin\xi)^{-n+1/2}$$

halini alır. $n > 1/2$ için $\xi \to 0$ iken $(\sin\xi)^{-n+1/2} \to \infty$ olur olur. Aşikar olmayan bir çözüm için $c_3 \neq 0$ olması gerektiğinden

$$\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n)}{\Gamma\left(\frac{m+n-l}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+n+l+2}{2}\right)} = 0$$

olması gerekir. $a = 0, -1, -2, \ldots$ için $\frac{1}{\Gamma(a)} = 0$ olduğundan sınır değer koşulunun sağlanması için $\frac{m+n-l}{2} = -k$ veya $\frac{m+n+l+2}{2} = -k \quad k = 0,1,2, \ldots$ olmalıdır. Öncelikle $\frac{m+n-l}{2} = -k \quad k = 0,1,2, \ldots$ durumunu ele alalım. Bu durumda $l = m + n + 2k$ olup

$$\frac{m+n+l+2}{2} = \frac{m+n+m+n+2k+2}{2} = m + n + k + 1$$

buluruz ve buradan çözümün yeni hali

$$\psi(\xi) = c_3 (\cos\xi)^{m+1/2} (\sin\xi)^{n+1/2} F(-k, m+n+k+1; m+1; (\cos\xi)^2)$$

olarak bulunur. Şimdi de $\frac{l+m+n+\sigma+4}{2} = -k \quad k = 0,1,2,\ldots$ durumunu ele alalım. Bu durumda $l = -m - n - 2k - 2$ olup

$$\frac{m+n-l}{2} = \frac{m+n+m+n+2k+2}{2} = m + n + k + 1$$

buluruz ki bu durumda çözümün yeni hali

$$\psi(\xi) = c_3(\cos\xi)^{m+1/2}(\sin\xi)^{n+1/2}F(m+n+k+1, -k; m+1; (\cos\xi)^2)$$

olur. $F(a,b;c,z) = F(b,a;c;z)$ olduğundan her iki durumda da aynı çözüm elde edilir. Sonuç olarak sınır koşullarını sağlayan Schrödinger denkleminin çözümü $k = 0,1,2,\ldots$ olmak üzere

$$\psi(\xi) = c_3(\cos\xi)^{m+1/2}(\sin\xi)^{n+1/2}F(-k, m+n+k+1; m+1; (\cos\xi)^2) \qquad (2.29)$$

olarak bulunur. Burada c_3 normalizasyon sabitidir.

$l = m + n + 2k$, $k = 0,1,2,\ldots$ kuantum sayısı için sistemin (2.27) E enerji özdeğeri ise

$$E = (l+1)^2 = (m+n+2k+1)^2$$

halini alır. Bu durumda

$$k = 0 \quad \text{için birinci enerji seviyesi} \quad E_1 = (m+n+1)^2,$$

$$k = 1 \quad \text{için ikinci enerji seviyesi} \quad E_2 = (m+n+3)^2,$$

$$\vdots$$

olarak bulunur. $l = -m - n - 2k - 2$ değeri için de aynı enerji seviyeleri elde edileceğine dikkat ediniz.

Şimdi c_3 normalizasyon sabitini bulalım.

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2dx = \int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\overline{\psi(x)}dx = 1 \quad \text{şartından}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[c_3(\cos\xi)^{m+1/2}(\sin\xi)^{n+1/2}F(-k, m+n+k+1; m+1; (\cos\xi)^2)\right] \times$$

$$\left[c_3(\cos\xi)^{m+1/2}(\sin\xi)^{n+1/2}F(-k, m+n+k+1; m+1; (\cos\xi)^2)\right]d\theta = 1$$

olmalıdır.

$$-a = -k \quad \Longrightarrow \quad a = k\,, \qquad \beta + 1 = m + 1 \quad \Longrightarrow \quad \beta = m$$

$$a + \alpha + \beta + 1 = m + n + k + 1 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = n$$

$$\frac{1+x}{2} = (\cos\xi)^2 \quad \Longrightarrow \quad x = 2(\cos\xi)^2 - 1 = \cos 2\xi$$

$$F(-k\,, m+n+k+1; m+1; (\cos\xi)^2) = \frac{k!\,\Gamma(m+1)}{(-1)^k\Gamma(k+m+1)}\,P_k^{(n,m)}(\cos 2\xi)$$

Bu ifadeyi integralde yerine yazarsak

$$c_3^2\left[\frac{k!\Gamma(m+1)}{(-1)^k\Gamma(k+m+1)}\right]^2 \int_{-\infty}^{\infty}(\cos\xi)^{2m+1}(\sin\xi)^{2n+1}\left[P_k^{(n,m)}(\cos 2\xi)\right]^2 d\xi = 1$$

integralini elde ederiz. Bu integralde

$$x = cos2\xi \quad \Longrightarrow \quad dx = -2\,sin2\xi d\xi = -4\,sin\xi\,cos\xi d\xi$$

dönüşümü yaparsak integral

$$-2^{-n-m-2}c_3^2\left[\frac{k!\Gamma(m+1)}{(-1)^k\Gamma(k+m+1)}\right]^2 \int_{-\infty}^{\infty}(1-x)^n\,(1+x)^m\left[P_k^{(n,m)}(x)\right]^2 dx = 1$$

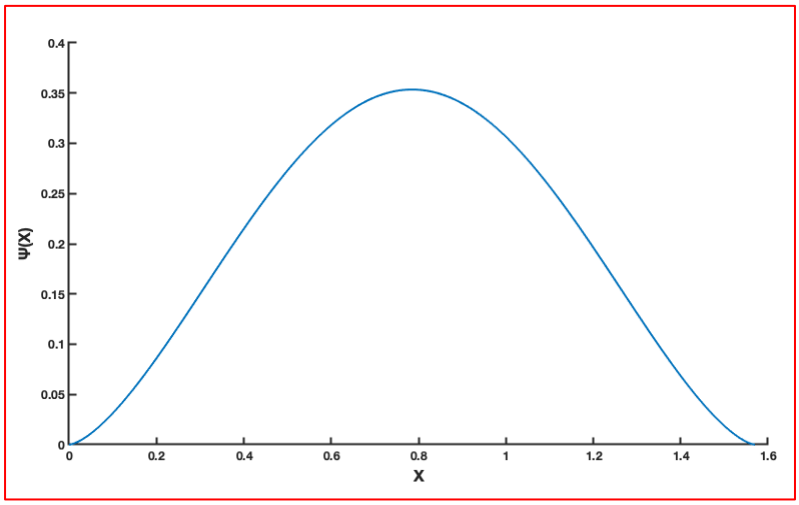
haline gelir. Jacobi polinomlarının ortogonallik koşulundan c_3 normalizasyon sabiti

$$-2^{-n-m-2}c_3^2\left[\frac{k!\Gamma(m+1)}{(-1)^k\Gamma(k+m+1)}\right]^2 \int_{-\infty}^{\infty}(1-x)^n\,(1+x)^m\left[P_k^{(n,m)}(x)\right]^2 dx = 1$$

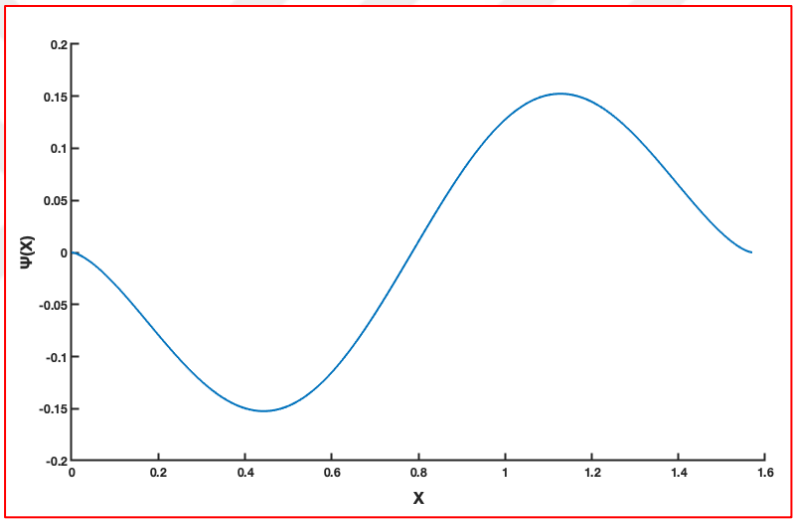
ifadesinden hareketle

$$c_3 = \sqrt{\frac{-2\,\Gamma(m+n+2k+1)\Gamma(m+n+k+1)}{k![\Gamma(m+1)]^2\Gamma(n+k+1)}}$$

şeklinde bulunur.



Şekil 2.6. $m = n = 1$ ve $k = 0$ için birinci seviye (2.29) dalga fonksiyonu (MATLAB).



Şekil 2.7. $m = n = 1$ ve $k = 1$ için ikinci seviye (2.29) dalga fonksiyonu (MATLAB).

Böylece (2.6) denkleminin genel çözümü, $k = 0,1,2,\ldots$ olmak üzere

$$f(\theta,\xi,\alpha_1,\alpha_2) = A(\theta)B(\xi)\, e^{im\alpha_1}\, e^{in\alpha_2}$$

$$f(\theta,\xi,\alpha_1,\alpha_2) = C\,(\sin\theta)^{l+3/2}\,(\cos\theta)^{m+n+1/2}(\sin\xi)^{n+1/2}(\cos\xi)^{m+1/2}\;\times$$
$$F(-k\,, l+m+n+k+2; m+n+1; (\cos\theta)^2)\;\times\; F(-k\,, m+n+k+1; m+1; (\cos\xi)^2)\, e^{im\alpha_1}\, e^{in\alpha_2} \qquad (2.30)$$

şeklinde bulunmuş olur. Burada $C = c_1 c_3$ 'tür.

$SU(3)$ grubunun homojen uzayında Laplace-Beltrami, I^2 , I_3 , Y diferansiyel operatörleri verilebilir. Yukarıda Laplace-Beltrami operatörü ile oluşturulan özdeğer-özfonksiyon problemi çözüldü. Şimdi ise I^2 diferansiyel operatörünü ele alalım.

$$\Delta'_{LB} = \frac{1}{(\sin\theta)^3 \cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left((\sin\theta)^3\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{(\sin\theta)^2\sin 2\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sin 2\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right) + \frac{1}{(\sin\theta)^2}\left(\frac{1}{(\cos\xi)^2}\frac{\partial^2}{\partial{\alpha_1}^2} + \frac{1}{(\sin\xi)^2}\frac{\partial^2}{\partial{\alpha_2}^2}\right) + \frac{1}{(\cos\theta)^2}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right)^2 \quad (2.31)$$

operatörünü

$$\Delta'_{LB} = \frac{1}{(\sin\theta)^2}\left\{\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left((\sin\theta)^3\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{(\sin\theta)^2}{(\cos\theta)^2}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right)^2 + \frac{1}{\sin\xi\cos\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sin\xi\cos\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right) + \frac{1}{(\cos\xi)^2}\frac{\partial^2}{\partial{\alpha_1}^2} + \frac{1}{(\sin\xi)^2}\frac{\partial^2}{\partial{\alpha_2}^2}\right\} \quad (2.32)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu operatör içindeki

$$\Delta''_{LB} = I^2 = \frac{1}{\sin\xi\cos\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sin\xi\cos\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right) + \frac{1}{(\cos\xi)^2}\frac{\partial^2}{\partial{\alpha_1}^2} + \frac{1}{(\sin\xi)^2}\frac{\partial^2}{\partial{\alpha_2}^2} \quad (2.33)$$

operatörü $SU(2)$ grubunun Laplace-Beltrami operatörüdür (Teodorescu ve Nicorovici, 2004). Bu operatör yardımı ile

$$\Delta''_{LB} f(\xi,\alpha_1,\alpha_2) = -l(l+2)f(\xi,\alpha_1,\alpha_2) \quad (2.34)$$

özdeğer-özfonksiyon problemini oluşturalım. Burada l sabiti, bu operatörün özdeğeridir ve pozitif tam değerler alır. Denklemin değişkenlerine ayırma metoduna göre

$$f(\xi,\alpha_1,\alpha_2) = B(\xi)e^{im\alpha_1}e^{in\alpha_2}$$

şeklinde bir çözümünü arayalım. Bu durumda denklem

$$\frac{d^2B}{d\xi^2} + 2\cot(2\xi)\frac{dB}{d\xi} - \left(\frac{m^2}{(\cos\xi)^2} + \frac{n^2}{(\sin\xi)^2}\right)B = -l(l+2)B \quad (2.35)$$

denklemine dönüşür ki bu denkleminde çözümü yukarıda verildi.

Son olarak I_3 , Y diferansiyel operatörlerini ele alalım. Bu operatörler

$$I_3 = \frac{1}{2i}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right),\ Y = i\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right) \quad (2.36)$$

şeklinde verilir. Bu operatörler aynı zamanda $U(2)$ grubunun üreteçleridir. Bu operatörlerle oluşturulan denklemleri çözelim.

$$I_3 H(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{1}{2i}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right)H(\alpha_1,\alpha_2) = (m-n)H(\alpha_1,\alpha_2) \quad (2.37)$$

$$YD(\alpha_1,\alpha_2) = i\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right)D(\alpha_1,\alpha_2) = (m+n)D(\alpha_1,\alpha_2) \qquad (2.38)$$

(2.37) denkleminin değişkenlerine ayırma metoduna göre bir çözümünü arayalım.

$$H(\alpha_1,\alpha_2) = P(\alpha_1)\,Q(\alpha_2)$$

çözümü denklemde yerine yazılırsa

$$\frac{1}{2i}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1}-\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right)P(\alpha_1)Q(\alpha_2) = (m-n)P(\alpha_1)Q(\alpha_2)$$

bulunur. Denklemin her tarafını $1/[P(\alpha_1)\,Q(\alpha_2)]$ ile çarpalım. Böylece

$$\frac{1}{2i}\frac{1}{P}\frac{dP}{d\alpha_1} = \frac{1}{2i}\frac{1}{Q}\frac{dQ}{d\alpha_2} + m - n = \lambda$$

elde edilir. $\lambda = m$ olsun. Buradan hareketle

$$\frac{1}{2i}\frac{1}{P}\frac{dP}{d\alpha_1} = m \quad\Longrightarrow\quad P(\alpha_1) = c_5 e^{2im\alpha_1},$$

$$\frac{1}{2i}\frac{1}{Q}\frac{dQ}{d\alpha_1} = n \quad\Longrightarrow\quad Q(\alpha_2) = c_6 e^{2in\alpha_2}$$

elde edilir. Böylece (2.37) denkleminin çözümü, $C_1 = c_5c_6$ olmak üzere

$$H(\alpha_1,\alpha_2) = C_1\, e^{2im\alpha_1}\, e^{2in\alpha_2}$$

olarak bulunur.

Şimdi (2.38) numaralı denklemin çözümünü bulalım. Denklem için

$$D(\alpha_1,\alpha_2) = P(\alpha_1)Q(\alpha_2)$$

şeklinde bir çözüm arayalım. Denklemde yerine yazılarak

$$i\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right)P(\alpha_1)Q(\alpha_2) = (m+n)P(\alpha_1)Q(\alpha_2)$$

bulunur. Denklemin her tarafı $1/[P(\alpha_1)\,Q(\alpha_2)]$ ile çarpılırsa

$$i\frac{1}{P}\frac{dP}{d\alpha_1} = -i\frac{1}{Q}\frac{dQ}{d\alpha_2} + m + n = \lambda$$

elde edilir. $\lambda = m$ olsun.

$$i\frac{1}{P}\frac{dP}{d\alpha_1} = m\,, \quad P(\alpha_1) = c_7 e^{-im\alpha_1},$$

$$i\frac{1}{Q}\frac{dQ}{d\alpha_1} = n\,, \quad Q(\alpha_2) = c_8 e^{-in\alpha_2}$$

olur. Böylece (2.38) denkleminin çözümü, $C_2 = c_7c_8$ olmak üzere

$$D(\alpha_1,\alpha_2) = C_2 e^{-im\alpha_1}\, e^{-in\alpha_2}$$

olarak bulunur.

Şimdi radyal denklemin çözümünü bulalım.

$$\Delta_{LB} = \frac{3}{2\rho^4}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^4\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{2\rho^2}[\,\Delta'_{LB}]$$

$$\Delta_{LB}U(\rho,\theta,\xi,\alpha_1,\alpha_2)=\left(\frac{3}{2\rho^4}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^4\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{2\rho^2}[\,\Delta'_{LB}]\right)U(\rho,\theta,\xi,\alpha_1,\alpha_2)$$

$$\Delta_{LB}U(\rho,\theta,\xi,\alpha_1,\alpha_2)=-k^2U(\rho,\theta,\xi,\alpha_1,\alpha_2) \tag{2.39}$$

Bu denklemin

$$U(\rho,\theta,\xi,\alpha_1,\alpha_2)=R(\rho)f(\theta,\xi,\alpha_1,\alpha_2)$$

şeklinde bir çözümünü arayalım. Denklemde yerine yazılırsa

$$\left(\frac{3}{2\rho^4}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^4\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{2\rho^2}[\,\Delta'_{LB}]\right)R(\rho)f(\theta,\xi,\alpha_1,\alpha_2)=-k^2R(\rho)f(\theta,\xi,\alpha_1,\alpha_2)$$

bulunur.

$$\Delta'_{LB}f(\theta,\xi,\alpha_1,\alpha_2)=-\sigma(\sigma+4)f(\theta,\xi,\alpha_1,\alpha_2)$$

olduğundan, gerekli işlemler yapılarak

$$\left(\frac{3}{2}\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{6}{\rho}\frac{dR}{d\rho}\right)f+\frac{1}{2\rho^2}[-\sigma(\sigma+4)]Rf=-k^2Rf$$

elde edilir. Denklemin her tarafını $1/(Rf)$ ile çarpıp düzenlenirse

$$\rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2}+4\rho\frac{dR}{d\rho}+\left[\frac{2}{3}k^2\rho^2-\frac{\sigma(\sigma+4)}{3}\right]R=0 \tag{2.40}$$

denklemini elde edilir. Denklemde

$$R(\rho)=\rho^{-3/2}w(\rho)$$

dönüşümü yapılarak

$$\rho^2\frac{d^2w}{d\rho^2}+4\rho\frac{dw}{d\rho}+\left[\frac{2}{3}k^2\rho^2-\frac{\sigma(\sigma+4)}{3}-\frac{9}{4}\right]w=0 \tag{2.41}$$

denklemi bulunur. Elde edilen bu denklemde

$$z=\sqrt{2/3}\,k\rho$$

değişken dönüşümü yapılırsa denklem

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2}+z\frac{dw}{dz}+\left[z^2-\frac{\sigma(\sigma+4)}{3}-\frac{9}{4}\right]w=0 \tag{2.42}$$

halini alır. Bu denklem

$$\mu^2=\frac{\sigma(\sigma+4)}{3}+\frac{9}{4}$$

olmak üzere

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2}+z\frac{dw}{dz}+[z^2-\mu^2]w=0 \tag{2.43}$$

denklemi Bessel denklemi olup çözümü

$$w(z)=c_9J_\mu(z)+c_{10}Y_\mu(z)$$

şeklinde verilir. Böylece (2.43) denkleminin çözümü

$$w(z)=c_9J_\mu\left(\sqrt{2/3}\,k\rho\right)+c_{10}Y_\mu\left(\sqrt{2/3}\,k\rho\right)$$

olur. Buradan (2.40) denkleminin çözümü

$$R(\rho) = c_9\rho^{-\frac{3}{2}}J_\mu\left(\sqrt{2/3}\,k\rho\right) + c_{10}\rho^{-\frac{3}{2}}Y_\mu\left(\sqrt{2/3}\,k\rho\right)$$

olarak bulunmuş olur.

Böylece $SU(3)$ grubunun homojen uzayında en genel çözüm

$$\begin{aligned} U(\rho,\theta,\xi,\alpha_1,\alpha_2) &= R(\rho)f(\theta,\xi,\alpha_1,\alpha_2) \\ &= C(\sin\theta)^{l+3/2}\,(\cos\theta)^{m+n+1/2}(\sin\xi)^{n+1/2}(\cos\xi)^{m+1/2} \\ &\times \left[c_9\rho^{-\frac{3}{2}}J_\mu\left(\sqrt{2/3}\,k\rho\right) + c_{10}\rho^{-\frac{3}{2}}Y_\mu\left(\sqrt{2/3}\,k\rho\right)\right] \\ &\times F(-k\,, l+m+n+k+2; m+n+1; (\cos\theta)^2) \\ &\times F(-k\,, m+n+k+1; m+1; (\cos\xi)^2)\; e^{im\alpha_1}\; e^{in\alpha_2} \end{aligned}$$

şeklinde bulunmuş olur.

BÖLÜM 3

SONUÇLAR

Bu çalışmada $SU(3)$ grubunun homojen uzayının

$$S^5 = (z_1, z_2, z_3)$$
$$= \left(\rho^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi_1}(\cos\theta), \rho^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi_2}(\cos\theta)(\sin\theta)(\cos\xi), \rho^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi_3}(\cos\theta)(\sin\theta)(\sin\xi)\right)$$

parametrik ifadesine göre

$$\Delta_{LB} = \frac{3}{2\rho^4}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^4\frac{\partial}{\partial\rho}\right)$$

$$+\frac{1}{2\rho^2}\left[\frac{1}{(\sin\theta)^3\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left((\sin\theta)^3\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{(\sin\theta)^2\sin 2\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sin 2\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(\sin\theta)^2}\left(\frac{1}{(\cos\xi)^2}\frac{\partial^2}{\partial{\alpha_1}^2}+\frac{1}{(\sin\xi)^2}\frac{\partial^2}{\partial{\alpha_2}^2}\right)+\frac{1}{(\cos\theta)^2}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right)^2\right]$$

Laplace-Beltrami operatörü elde edildi. Bu operatör ile oluşturulan özdeğer-özfonksiyon problemi ele alındı. Değişkenlerine ayırma yöntemine göre Laplace-Beltrami operatörü $f(\theta, \xi, \alpha_1, \alpha_2)$ fonksiyonuna uygulanarak

$$\frac{d^2A}{d\theta^2} + (3\cot\theta - \tan\theta)\frac{dA}{d\theta} - \left[\frac{\ell(\ell+2)}{(\sin\theta)^2} + \frac{(m+n)^2}{(\cos\theta)^2}\right]A = -\sigma(\sigma+4)A$$

$$\frac{d^2B}{d\xi^2} + 2\cot(2\xi)\frac{dB}{d\xi} - \left(\frac{m^2}{(\cos\xi)^2} + \frac{n^2}{(\sin\xi)^2}\right)B = -l(l+2)B$$

şeklinde iki adi diferansiyel denklem elde edildi. Bu denklemler çözüldü ve Laplace-Beltrami operatörünün Hamiltonyen ile verilen fiziksel sistemler ile ilişkisi göz önünde bulundurularak $SU(3)$ Lie grubuna karşılık gelen fiziksel sistemlerin $H\psi = E\psi$ Schrödinger denklemleri

$$-\frac{d^2\psi}{d\theta^2}+\left[\frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)\left(l+\frac{3}{2}\right)}{(\sin\theta)^2}+\frac{\left(m+n-\frac{1}{2}\right)\left(m+n+\frac{1}{2}\right)}{(\cos\theta)^2}-(\sigma+2)^2\right]\psi=0$$

$$-\frac{d^2\psi}{d\xi^2}+\left[\frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)\left(m+\frac{1}{2}\right)}{(\cos\xi)^2}+\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}{(\sin\xi)^2}-(l+1)^2\right]\psi=0$$

şeklinde bulundu. Bu sistemlerin potansiyel fonksiyonları ve enerji özdeğerleri sırasıyla

$$V(\theta)=\frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)\left(l+\frac{3}{2}\right)}{(\sin\theta)^2}+\frac{\left(m+n-\frac{1}{2}\right)\left(m+n+\frac{1}{2}\right)}{(\cos\theta)^2}$$

$$E=(\sigma+2)^2$$

ve

$$V(\xi)=\frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)\left(m+\frac{3}{2}\right)}{(\cos\xi)^2}+\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}{(\sin\xi)^2}$$

$$E=(l+1)^2$$

şeklindedir.

Schrödinger denkleminin çözümleri potansiyel fonksiyonu ile enerji özdeğeri arasındaki ilişkiye göre bağlı ve sürekli haller olmak üzere ikiye ayrılır. Eğer $x\to-\infty$ ve $x\to\infty$ iken $V(x)$ potansiyel enerjisi parçacığın E toplam enerjisinden büyük $(E<V(x))$ ise parçacık potansiyel kuyusunda kalır, yani parçacık dönüm noktaları arasında gider gelir ve potansiyel kuyusundan çıkamaz. Bu durum bağlı hal olarak adlandırılır. Diğer taraftan $x\to-\infty$ veya $x\to\infty$ iken E toplam enerji $V(x)$ potansiyel enerjiden büyük $(E>V(x))$ ise parçacık sonsuzdan gelir, potansiyelin etkisi altında yavaşlar veya hızlanarak sonsuza gider. Bu durum ise sürekli hal olarak adlandırılır. Bazı potansiyeller sadece bağlı hal çözümlerini (harmonik hareket) veya sürekli hal çözümlerini (çukur yer yoksa, serbest parçacık) içerir. Bazı potansiyeller ise her iki durumu da gösterebilir. Bağlı halden sürekli hale geçebilmek için ilave enerjiye ihtiyaç vardır. Enerji özdeğerleri bağlı hallerde kesikli, sürekli hallerde ise sürekli değerler alır. Aynı enerji değerine birden fazla özfonksiyon karşılık gelirse enerji seviyelerinin dejenere olduğu söylenir (Landau & Lifshitz, 1977). Dejenere enerji seviyelerine karşı gelen öz fonksiyonlar genelde ortagonal değildir.

İncelediğimiz sistemde elde edilen Pöschl-Teller potansiyel enerjileri hem $x\to-\infty$ iken hem de $x\to\infty$ iken parçacığın E toplam enerjisinden büyük olduğundan sadece bağlı halleri içerir yani potansiyel kuyusu vardır. Dolayısıyla bu fiziksel sistemin iki çözümü de bağlı hal çözümleridir. Bu bilgiler ışığında sistemlerin dalga fonksiyonları

$$\psi(\theta) = c_1(\sin\theta)^{l+3/2}\,(\cos\theta)^{m+n+1/2}F(-k\,, l+m+n+k+2; m+n+1; (\cos\theta)^2)$$

$$\psi(\xi) = \; c_3(\sin\xi)^{n+1/2}(\cos\xi)^{m+1/2}F(-k\,, m+n+k+1; m+1; (\cos\xi)^2)$$

olarak elde edildi. Aynı zamanda bu iki sistem için enerji özdeğerleri sırasıyla

$$\sigma = l+m+n+2k\,, \;\; k = 0,1,2,\ldots \text{ için } \;\; E \;=\; (l+m+n+2k+2)^2$$

ve

$$l = m+n+2k\,, \;\; k = 0,1,2,\ldots \text{ için } \;\; E \;=\; (m+n+2k+1)^2$$

olarak elde edildi.

$SU(3)$ grubun diğer invaryant operatörleri olan $I^2\,, I_3\,, Y$ operatörleri

$$I^2 = \frac{1}{\sin\xi\cos\xi}\,\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sin\xi\cos\xi\,\frac{\partial}{\partial\xi}\right) + \frac{1}{(\cos\xi)^2}\frac{\partial^2}{\partial{\alpha_1}^2} + \frac{1}{(\sin\xi)^2}\frac{\partial^2}{\partial{\alpha_2}^2}$$

$$I_3 \;= \frac{1}{2i}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right)\,, \qquad Y = i\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\right)$$

ifade edildi. Bu operatörlerle oluşturulan özdeğer-özfonksiyon problemlerinin çözümleri incelendi. Ayrıca (2.39) denkleminin radyal kısmının çözümü

$$R(\rho) = c_1\rho^{-\frac{3}{2}}J_\mu\left(\sqrt{2/3}k\rho\right) + c_2\rho^{-\frac{3}{2}}Y_\mu\left(\sqrt{2/3}k\rho\right)$$

olarak bulundu. Sonuç olarak $SU(3)$ grubunun homojen uzayında en genel çözüm

$$\begin{aligned} U(\rho,\theta,\xi,\alpha_1,\alpha_2) &= R(\rho)f(\theta,\xi,\alpha_1,\alpha_2) \\ &= C(\sin\theta)^{l+3/2}\,(\cos\theta)^{m+n+1/2}(\sin\xi)^{n+1/2}(\cos\xi)^{m+1/2} \\ &\times \left[c_9\rho^{-\frac{3}{2}}J_\mu\left(\sqrt{2/3}\,k\rho\right) + c_{10}\rho^{-\frac{3}{2}}Y_\mu\left(\sqrt{2/3}\,k\rho\right)\right] \\ &\times F(-k\,, l+m+n+k+2; m+n+1; (\cos\theta)^2) \\ &\times F(-k\,, m+n+k+1; m+1; (\cos\xi)^2)\; e^{im\alpha_1}\, e^{in\alpha_2} \end{aligned}$$

şeklinde elde edildi.

$SO(3)$ grubu temsilleri üç boyutta dönmeler altında invaryant kalmayı (simetri) ifade eder. Dolayısıyla dış dönmeler grubu olarak adlandırılır. Ayrıca kuantum teorisinde parçacıkların spinini ifade etmede kullanılır. Diğer yandan $SU(3)$ grubu ise iç dönmeler grubu olarak adlandırılır ve temel parçacık fiziğinde iç öğeleri diğer iç öğelere dönüştürmede $SU(3)$ grubu temsillerinden faydalanılır. $SU(3)$ grubunun, kuarkların $SU(3)$ renk simetrisi ve hafif kuarkların $SU(3)$ çeşni (flavor) simetrisi olarak adlandırılan iki önemli simetrisi vardır. Bu simetrilerin her biri, güçlü etkileşim fiziğinde

temelde yatan üç katlı bir simetriyi ifade eder. Bu nedenle grup modern kuantum alan teorisi ve sicim teorisinde merkezi bir rol oynamaktadır.

KAYNAKLAR

Abramowitz, M. & Stegun, I.A. (1972). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. Washington, USA: Dover Books.

Akyeampong, D. A. & Rashidi, M. A. (1972). On the Finite Transformations of SU(3). *Journal of Mathematical Physics*, *13*(8), 1218-24.

Arvanitoyeorgos, A. (2003). *An Introduction to Lie Groups and The Geometry of Homogeneous Spaces*. USA: American Mathematical Society.

Barut, A. O. & Raczka, R. (1980). *Theory of Group Representations and Applications*. Warszawa, Poland: Polish Scientific.

Bateman, H. (1953). *Higher Transcendental Functions* (Cilt I,II). USA: McGraw Hill.

Beg, M. A. B. & Ruegg, H. (1965). A Set of Harmonic Functions for the Group SU(3). *Journal of Mathematical Physics*, *6*(5), 677-82.

Belinfante, J. G., Kolman, B. & Smith, H. A. (1966). An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras with Applications. *SIAM Review*, *8*(1), 11-46.

Boyer, C. P., Kalnins, E. G. & Miller, W. Jr. (1976). Symmetry and Separation of Variables for The Helmholtz and Laplace Equations. *Nagoya Mathematical Journal*, *60*, 35-80.

Das, A. & Okubo, S. (2014). *Lie Groups and Lie Algebras for Physicists*. India: Hindustan Book.

Flügge, S. (1999). *Practical Quantum Mechanics*. Heidelberg, Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Gallier, J. & Quaintance J. (2020). *Differential Geometry and Lie Groups*. Cham, Switzerland: Springer.

Gilmore, R. (2008). *Lie Groups, Physics and Geometry*. New York, USA: Cambridge University Press.

Griffiths, D. J. (Çevirenler H. Özbek, S. D. Feyiz) (2013). *Kuantum Mekaniğine Giriş*. Ankara: Nobel.

Grimus, W. & Ludl, P. O. (2010). Principal series of finite subgroups of SU(3). *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 43*(44), 445209 (35sayfa).

Hall, B. C. (2015). *Lie Groups, Lie Algebras and Representations* (2. Baskı). Cham, Switzerland: Springer.

Helgason, S. (1984). *Groups and Geometric Analysis*. USA: American Mathematical Society.

Helgason, S. (1972). A Formula for the Radial Part of the Laplace-Beltrami Operator. *Journal of Differential Geometry, 6*, 411-19.

Helgason, S. (1959). Differential Operators on Homogeneous Spaces. *Acta Mathemtica, 102*, 239-99.

Hill, J. M. (1992). *Differential Equations and Group Methods for Scientists and Engineers*. USA: CRC Press.

Holland, D. F. (1969a). Finite Transformations of SU3. *Journal of Mathematical Physics, 10*(3), 531-35.

Holland, D. F. (1969b). Finite Transformations and Basis States of SU(n). *Journal of Mathematical Physics, 10*(10), 1903-05.

Holzner, S. (2013). *Quantum Physics for Dummies*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons.

Hörmander, L. (1969). *Linear Partial Differential Operators*. Heidelberg, Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Iachello, F. (2015). *Lie Algebras and Applications*. Heidelberg, Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Johnston, B. L., Richman, F. (1997). *Numbers and Symmetry: An Introduction to Algebra*. New York, USA: CRC Press.

Kalnins, E.G., Miller, W. Jr. (1977). Lie Theory and The Wave Equation In Space Time. I. The Lorentz Group. *Journal of Mathematical Physics, 18(1)*, 1-16.

Kirillov, A. Jr (2008). *An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*. New York, USA: Cambridge University Press.

Landau, L. D., Lifshitz, E. M. (1977). *Quantum Mechanics* (3. Baskı). Oxford, England: Pergamon Press.

Lebedev, N. N. (1965). *Special Functions and Their Applications*. USA: Prentice-Hall.
Linz, P. (1979). *Theoretical Numerical Analysis*. New York, USA: John Wiley & Sons.

Liotta, R. S., Triolo, L. (1969). Regular Representation of the Group SU_3: Eigenfunctions and Eigenvalues of the Beltrami-Laplace Operator Defined on the 4-Dimensional Manifold in the Euclidean Space R_8. *Nuovo Cimento A, 59*, 303-07.

Majumdar, S. D., Basu, B. K. (1970). The Finite Transformations of the Group SU(3). *Annals of Physics, 56*, 464-73.

McWeeny, R., Phil, D. (1963). *Symmetry. An Introduction to Group Theory And Its Applications*. USA: Pergamon Press.

Nagle, R. K., Saff, E. B., Snider, A. D. (2018). *Fundamentals of Differential Equations* (9. Baskı). Boston: Pearson.

Nelson, T. J. (1967). A Set of Harmonic Functions for the Group SU(3) as Specialized Matrix Elements of a General Finite Transformation. *Journal of Mathematical Physics, 8(4)*, 857-63.

Pazy, A. (1983). *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. New York, USA: Springer-Verlag.

Rosen, S. P. (1971). Finite Transformations in Various Representations of SU(3). *Journal of Mathematical Physics, 12(4)*, 673-81.

Schrödinger, E. (1926). An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules. *The Physical Review, 28(6)*, 1049-70.

Spiegel, M. R., Lipschutz, S., Spellman, D. (2009). *Vector Analysis and An Introduction to Tensor Analysis* (2. Baskı). New York, USA: McGraw-Hill.

Teodorescu, P. P., Nicorovici, N. A. P. (2004). *Applications of the Theory of Groups in Mechanics and Physics*. New York, USA: Kluwer Academic.

Vaughn, M. T. (2007). *Introduction to Mathematical Physics*. Weinheim, Germany: Wiley-VCH.

Verdiyev, Y. A. (1988). *Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces of* $SO(1,2)$. USA: Hadronic Press.

Vilenkin, N. Ja., Klimyk, A. U. (1991-1993). *Representation of Lie Groups and Special Functions* (Cilt I,II). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

Weidmann, J. (1987). *Spectral Theory of Ordinary Differential Operators*. Heidelberg, Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Wigner, E. P., Griffin, J. J. (1959). *Group Theory and Its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*. New York, USA: Academic.

Zill, D. G. (2018). *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications* (6. Baskı). Boston, USA: Cengage Learning.

ÖZGEÇMİŞ

Ferdi ÖZDEMİR

Eğitim ve Akademik Durumu

İlköğretim	**:** Mehmet Bilgili İ.Ö.O. – Suluova/AMASYA
Lise	**:** Karşıyaka Gümüşpala Anadolu Lisesi – Bayraklı/İZMİR
Lisans	**:** Trakya Üniversitesi Matematik Bölümü – EDİRNE
Yabancı Dil	**:** İngilizce
İş Tecrübesi	**:** Matematik Öğretmenliği, Edirne Beykent Koleji (2018-2019)

TEZ İLE İLGİLİ BİLİMSEL FAALİYETLER

Katıldığı Kongre **:** 5th International Conference On Computational Mathematics and Engineering Science (CMES-2021), 8-10 June 2021, Van, Turkey

Bildiri Adı **:** Differential Operators in the Homogeneous Space of the $SU(3)$ Group

Düzenleyen Kuruluş : Yüzüncü Yıl Üniversitesi