SO(1,2) Grubunun Açılımlarına Göre Üreteçlerin ve Laplace-Beltrami Operatörünün Elde Edilmesi

Özcan TEKÇE

MATEMATİK ANA BİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SO(1,2) Grubunun Açılımlarına Göre Üreteçlerin ve Laplace-Beltrami Operatörünün Elde Edilmesi

Özcan TEKÇE

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Mehmet SEZGİN

EDİRNE
2007

T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SO(1,2) Grubunun Açılımlarına Göre Üreteçlerin ve Laplace-Beltrami Operatörünün Elde Edilmesi

Özcan TEKÇE

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Bu tez 09/01/2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından kabul edilmiştir.

Prof.Dr.Hülya İŞCAN …….
Üye

Yrd.Doç.Dr.Mehmet SEZGİN ……..
Danışman

Yrd.Doç.Dr.Mustafa ÇALIŞKAN ……..
Üye

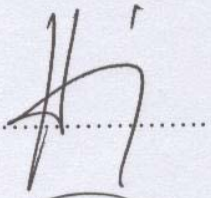
T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SO(1,2) Grubunun Açılımlarına Göre Üreteçlerin ve Laplace-Beltrami Operatörünün Elde Edilmesi

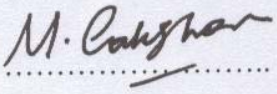
Özcan TEKÇE

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Bu tez 09/01/2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından kabul edilmiştir.

Prof.Dr.Hülya İŞCAN
Üye ..... 

Yrd.Doç.Dr.Mehmet SEZGİN
Danışman .....

Yrd.Doç.Dr.Mustafa ÇALIŞKAN
Üye ..... 

SUMMARY

In the first section of this study the group SO(1,2) and the various decompositions of it are explained. In the second section , the information about the infinitesimal operators of the group and Laplace-Beltrami operator is given. In the third section, according to various decompositions of the elements of SO(1,2) group, the infinitesimal operators and Laplace-Beltrami operators are obtained.

Key Words: Group, Laplace–Beltrami Operator, Infinitesimal Generators of the Group.

ÖZET

Bu çalışmanın birinci bölümünde SO(1,2) grubu ve grubun açılımları anlatıldı. İkinci bölümde grubun sonsuz küçük operatörleri ve Laplace-Beltrami Operatörü hakkında bilgi verildi. Üçüncü bölümde de SO(1,2) grubunun elemanlarının çeşitli açılımlarına göre sonsuz küçük operatörleri ve Laplace-Beltrami Operatörleri elde edildi.

Anahtar Kelimeler: Grup, Laplace-Beltrami Operatörü, Sonsuz küçük operatörler

ÖNSÖZ

Bilgi ve teknolojinin hızla değişip gelişmekte olduğu günümüzde bu gelişime ayak uydurabilmek, öğrencilerimin ufuklarını biraz daha geliştirebilmek adına başlamış ve bitirmekte olduğum tez çalışmamın tamamlanmasında büyük yardım ve rehberliğini esirgemeyen değerli hocam Yrd.Doç.Dr.Mehmet SEZGİN'e teşekkür eder en derin sevgi ve şükranlarımı sunarım.

Lisans ve lisansüstü eğitimim süresince bilgilerinden yararlandığım, görüş ve önerileriyle çalışmalarımı destekleyen değerli hocalarım Prof.Dr.Hülya İŞCAN'a ve Yrd.Doç.Dr.Cengiz DANE'ye teşekkür eder sevgi ve saygılarımı sunarım.

Her türlü zorluğa katlanarak bana yardımcı olan, manevi desteğini esirgemeyen sevgili eşime, biricik kızıma ve değerli arkadaşlarıma sonsuz teşekkürler.

İÇİNDEKİLER

1.BÖLÜM

1.1. Giriş……..……1
1.2. SO(1,2) Grubu……..……5
1.3. SO(1,2) Grubun Açılımları……...……...……..8

2.BÖLÜM

2.1. Sonsuz Küçük Operatörler……....…… …….13
2.2. Laplace-Beltrami Operatörü……16

3.BÖLÜM

3.1. Laplace-Beltrami Operatörünün Elde Edilmesi…….….20

KAYNAKLAR……..…..…40

ÖZGEÇMİŞ……..…..….41

1. BÖLÜM

1.1. GİRİŞ

$SO(p)$, $SU(p)$, $SO(p,q)$, $U(p,q)$, $p,q \geq 1$ gruplarıyla bağlantılı simetrik uzaylarda bir boyutlu kuantum sistemler, Laplace-Beltrami operatörünün çözümleri, düzlem dalgalar, grubun temsilleri gibi çeşitli çalışmalar yapılmıştır $[1,2,3,4,5,6]$. Çalışmalarda ortaya çıkan denklemler lineer, lineer olmayan, diferansiyel, integral denklemler veya daha genel operatör denklemler olabilir. Grup teori yaklaşımı denklemlerin çözümünü kolaylaştırır. Cebirsel denklemlerin çözümünde grup kavramını ilk kullananlardan biri Galois olmuştur. Daha sonra Sophus Lie sürekli dönüşüm gruplarıyla diferansiyel denklemler için benzer bir teoriyi oluşturmuştur.

Grubun elemanları reel parametrelerin bir kümesi ile belirtilebilir. Örneğin üç boyutlu Euclidean uzayda g dönme matrisi $(x' = gx), (\varphi, \theta, \psi)$ gibi üç parametreyle verilebilir. Bu aynı zamanda dönme grubunun parametrizasyonu olur. Grubun parametrelerinin verildiği bölge grubun parametrik uzayı olarak tanımlanır. Bu uzayda gruba uygun birçok koordinat sistemi verilebilir. Bunların her biri grubun bir parametrizasyonu olarak tanımlanır. Çoğu zaman grubun tamamını parametrize etmek mümkün olmayabilir.

R^n uzayında $x' = Ax$ lineer dönüşümlerini ele alalım. A bu dönüşümün $n \times n$ lik matrisi olmak üzere bu türden lineer dönüşümler çarpma işlemine göre grup oluşturur ve bu grup genel lineer grup olarak adlandırılıp $GL(n,R)$ ile gösterilir.

$$GL(n,R) = \left\{ A = \left(a_{i,j}\right)_{n\times n} \middle| a_{i,j} \in R,\ i,j = 1,2,..n \right\}$$

$n \times n$ ortogonal matrislerin kümesi de $GL(n,R)$ grubunun bir alt grubunu oluşturur ve bunlar ortogonal grup olarak tanımlanıp ,

$$O(n,R) = \left\{ A = \left(a_{i,j}\right)_{n\times n} \in GL(n,R) \middle| AA^t = I \right\}$$

şeklinde gösterilir.

$$det\left(AA^t\right) = \left(det\ A\right)^2 = det\left(I\right)\ ,\ det\ A = \pm 1$$

$O(n,R)$ grubunun elemanlarından $det\,A=1$ olanlar bu grubun bir alt grubunu oluşturur ve bu yeni grupta özel ortogonal gruplar olarak adlandırılıp $SO(n,R)$ şeklinde gösterilir.

$$SO(n,R)=\left\{A\in O(n,R)\middle|\det A=1\right\}$$

$$SO(n,R)\subseteq O(n,R)\subseteq GL(n,R)$$

Ortogonal matrislerle verilen dönüşümler metriği yani skaler çarpımı, uzunluğu korur.

C^n kompleks vektör uzayında $x'=ux$ biçiminde tanımlanan dönüşümlerin u matrisleri grup oluşturur ve $GL(n,C)$ şeklinde gösterilir. u , $n\times n$'lik kompleks bir matris olmak üzere $uu^{-t}=I$ ise u üniter matris olarak tanımlanır ve üniter dönüşümler de uzunluğu korur. $n\times n$' lik üniter matrisler $GL(n,C)$ grubunun bir alt grubunu oluşturur ve bu grup $U(n,C)$ ile gösterilir.

$$det\left(uu^{-t}\right)=\left(det\,u\right)^2=1,\quad det\,u=\pm 1$$

$det\,u=1$ olan uniter matrislerde $U(n,C)$'nin bir alt grubunu oluşturur ve bu grupta özel üniter grup olarak adlandırılıp

$$SU(n,C)=\left\{u=\left(a_{i,j}\right)_{n\times n}\middle|uu^t=I,\det u=1,a_{i,j}\in C^n,\ i,j=1,2,..n\right\}$$

şeklinde gösterilir.

$R^n_{p,q}$, uzaydaki Pseudo-Ortogonal dönüşümler ile belirlenen $n\times n$ tipinden ortagonal matrisler bir grup oluşturur ve $O(p,q)$ ile gösterilir.

Grubun bir $A\in O(p,q)$ elemanı ;

$$AIA^t=I$$

$$I=diag\left(1,...,1,-1,...,-1\right)\ ,\ x\in R^n_{p,q}\ ,x=\left(x^1,...,x^n\right),\quad n=p+q$$

$$det\left(AIA^t\right)=\left(det\,A\right)^2=det\left(I\right),\quad det\,A=\pm 1$$

Pseudo-Ortogonallik koşulunu sağlar.

Pseudo-Euclidean uzayda skaler çarpım ;

$$<x,x>=\left(x^1\right)^2+...+\left(x^p\right)^2-\left(x^{p+1}\right)^2-...-\left(x^{p+q}\right)^2$$

şeklinde tanımlanır.

$det\,A = 1$ olan matrislerin kümesi $O(p,q)$ grubunun bir alt grubunu oluşturur ve bu grup özel Pseudo-Ortogonal grup olarak adlandırılıp $SO(p,q)$ şeklinde gösterilir.

Benzer şekilde $C^n_{p,q}$, $n = p+q$ boyutlu Pseudo-Kompleks uzayda lineer dönüşümlerin belirttiği matrisler grup oluşturur. Bu grup $U(p,q)$ şeklinde gösterilir.

Grubun bir $A \in U(p,q)$ elemanı $AIA^{-t} = I$ Pseudo-Üniterlik koşulunu sağlar.

$$det\left(AIA^{-t}\right) = \left(det\,A\right)^2 = det\left(I\right), \quad det\,A = \pm 1$$

$$\zeta_1 = \left(z_1^1,...,z_1^n\right), \quad \zeta_2 = \left(z_2^1,...,z_2^n\right), \quad \zeta_1,\zeta_2 \in C^n$$

$$<\zeta_1,\zeta_2> = \sum_{k=1}^{p} z_1^k \overline{z}_2^{\,k} - \sum_{p+1}^{n} z_1^k \overline{z}_2^{\,k}$$

Kompleks uzayda skaler çarpımı koruyan dönüşümler üniter dönüşümlerdir.

$det\,A = 1$ olan kompleks matrisler kümesi $U(p,q)$ grubunun bir alt grubunu oluşturur ve bu grup özel Pseudo-Üniter grup olarak adlandırılıp $SU(p,q)$ şeklinde gösterilir.

Grup teori Kuantum Mekaniğinde önemli rol oynar. Tam çözülebilen kuantum sistemlerin pek çoğu çeşitli grup yapıları içinde incelenir. Ele alınan gruba karşılık bir homojen simetrik uzay verilir. Bu uzayda verilen farklı koordinat sistemlerine karşılık farklı kuantum sistemler bulunur. Gruba karşılık alınan simetrik uzayda Laplace-Beltrami Operatörünün elde edilmesi önemlidir. Ele alınan uzayda metrik matris bulunur ve bu metrik matristen istifade ederek Laplace-Beltrami operatörü oluşturulur. Bu operatör bir fonksiyona etki ettirilerek çözümleri araştırılır. Schrödinger denklemi çözülerek kuantum sistem incelenir. Laplace-Beltrami operatörü ikinci mertebeden bir diferansiyel operatörüdür. Kuantum sistemin "rank" bir ise operatör ikinci mertebeden, "rank" birden büyük ise daha yüksek mertebeden ve birden fazla Laplace-Beltrami (Casimir) operatörleri vardır. Laplace-Beltrami operatörü metrik matris kullanarak elde edildiği gibi grubun sonsuz küçük operatörleri kullanılarak da elde edilebilir. Bu çalışmada grubun sonsuz küçük operatörleri kullanılarak Laplace-Beltrami operatörü elde edilmiştir.

Grubun sonsuz küçük operatörleri incelenirken grubun bir parametreli alt grupları yazılır. Bu bir parametreli alt gruplarının elemanlarının parametreye göre türevlerinin sıfırdaki değeri alınarak grubun sonsuz küçük operatörleri bulunur.

Bu sonsuz küçük operatörlerden yararlanarak grubun Laplace-Beltrami operatörü oluşturulur. Sonsuz küçük operatörler aynı zamanda diferansiyel denklemlerin çözümlerinde, denklemin simetrilerinin bulmasında da kullanılır.

R^3 uzayında dönme grubu $\mathrm{SO}(3)$'ü ele alırsak, bu grubun sonsuz küçük operatörleri ;

$$X_1 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} \ , \ X_2 = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y} \ , \ X_3 = -z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z}$$

şeklinde verilir. Bu elemanlar komutatör özelliğini sağlar ve

$$[X_1, X_2] = X_3 \quad , \quad [X_2, X_3] = X_1 \quad , \quad [X_3, X_1] = X_2$$

dir. Casimir operatörü de

$$C = \sum_i^3 X_i X_i \, , \ \ [C, X_i] = 0$$

biçimindedir.

Gruplar teorisinde önemli problemlerden birisi verilen grubun temsilinin öğrenilmesidir. Özellikle kuantum teorinin ortaya çıkmasıyla grubun temsiller teorisi önem kazanmıştır. Grubun temsili kavramı üstel fonksiyon $\left(f(x) = e^{\alpha x}\right)$ kavramının bir anlamda genelleştirilmesidir. Farklı yapılarda temsiller,temsil modelleri oluşturulabilir.

G grubunun bir g elemanının bir parametreli alt gruplarına göre Cartan, Iwasawa, Gel'fand-Naimark-Burahat gibi açılımları verilebilir.Grubun bir g elemanının bir parametreli alt gruplara göre açılımı önemlidir. Çünkü işlemler çoğu zaman grubun bir parametreli elemanlarıyla yapılır. Bu açılımlar işlemleri kolaylaştırır. Bu açılımları kullanarak grubun temsilinden sonsuz küçük operatörler bulunabilir.

Bu çalışmada da $SO(1,2)$ grubunun bir g elemanının çeşitli açılımlarından yararlanarak grubun regüler temsilinin sonsuz küçük operatörleri ve Laplace-Beltrami operatörü elde edilmiştir.

1.2. SO(1,2) GRUBU

Reel üç boyutlu Pseudo-Euclidean vektör uzayında $R^3_{1,2}$ bir elemanı $x=(x_0,x_1,x_2)$ şeklinde verelim. Bu uzayda bir lineer dönüşüm $x'=gx$ veya $x_i'=\sum_{j=0}^{2} g_{ij}x_j$ şeklinde yazılabilir. Bu lineer dönüşüm ;

$$[x,x]=xIx^t=x_0^2-x_1^2-x_2^2$$

kuadratik formunu invaryant bırakır. Burada I ;

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

metrik matristir.

Bu lineer dönüşümlerin kümesi üç boyutlu genel Lorentz grubunu tanımlar ve bu grup $O(1,2)$ ile gösterilir.

Reel 3×3 matrislerini $g=(g_{ij})$ ile gösterelim.

$x'=xg$ dönüşümü altında ,

$$[x,x]=xIx^t=xgIg^tx^t=x'Ix'^t=[x',x']$$

$$x_0^2-x_1^2-x_2^2=x_0'^2-x_1'^2-x_2'^2$$

kuadratik formu invaryant kalır. Buradan $O(1,2)$ grubunun elemanları $gIg^t=I$ koşulunu sağlayan reel 3×3 matrisler olur. g matrisinin determinantını verelim.

$$gIg^t=I\ ,\ det(gIg^t)=det(I)\quad ,\quad det\,g=det(g^t)$$

$$det(g).det(I).det(g^t)=1\quad ,\quad det\,I=1$$

$$det\,g.det\,g=1,\ (det\,g)^2=1\quad ,\quad det\,g=\pm 1$$

$gIg^t=I$ özelliğinden $g_{ij}I_{jk}g^t_{kl}=I^l_i$ $\qquad i,j,k,l=0,1,2$

$$\begin{pmatrix}g_{00}&g_{01}&g_{02}\\g_{10}&g_{11}&g_{12}\\g_{20}&g_{21}&g_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g_{00}&g_{10}&g_{20}\\g_{01}&g_{11}&g_{21}\\g_{02}&g_{12}&g_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$g_{00}^2=1+g_{01}^2+g_{02}^2$ buluruz.

g_{01}^2,g_{02}^2 pozitif olduğundan $g_{00}^2\geq 1$ olur.

$g_{00} \geq 1$ veya $g_{00} \leq -1$ olup iki kısma ayrılır. $g_{00} \geq 1$ durumunda genel dönüşüm Lorentz dönüşümü olarak tanımlanır.

$[x,x] = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0$ denklemi $R_{1,2}^3$ Pseudo-Euclidean uzayda x_0 ekseni yönünde x_0 konisini tanımlar. x_0 konisi $R_{1,2}^3$ uzayını iki kısma böler,

$[x,x] < 0$, koninin içi,

$[x,x] > 0$, koninin dışı.

Koninin üst kısmında $([x,x] = 0, \quad x_0 > 0)$ Lorentz dönüşümü korunur ve invaryant kalır. Bunu gösterelim ; yani $x_0 > 0$ ise dönüşüm zamanı yine $x_0' > 0$ olmalı.

$x' = gx$

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{00}x_0 + g_{10}x_1 + g_{20}x_2 \\ g_{01}x_0 + g_{11}x_1 + g_{21}x_2 \\ g_{02}x_0 + g_{12}x_1 + g_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

$x_0' = g_{00}x_0 + g_{10}x_1 + g_{20}x_2$ elemanını alalım.

$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0 \quad , \quad x_0^2 = x_1^2 + x_2^2$

$g_{00}{}^2 = 1 + g_{01}{}^2 + g_{02}{}^2 x_2 \ , \quad (g_{10}x_1 + g_{20}x_2)^2 \leq (x_1{}^2 + x_2{}^2)(g_{10}{}^2 + g_{20}{}^2) = x_0{}^2 (g_{00}{}^2 - 1)$

$(g_{10}x_1 + g_{20}x_2)^2 \leq x_0{}^2 (g_{00}{}^2 - 1)$

$x_0{}^2 (g_{00}{}^2 - 1) - (g_{10}x_1 + g_{20}x_2)^2 \geq 0$

$(x_0 g_{00} - x_1 g_{10} - x_2 g_{20})(x_0 g_{00} + x_1 g_{10} + x_2 g_{20}) \geq 0$

$x_0' (x_0 g_{00} - x_1 g_{10} - x_2 g_{20}) \geq 0$ olur. $\qquad x_0 g_{00} \rangle x_1 g_{10} \ , \ x_0 g_{00} \rangle x_2 g_{20}$

Böylece $g_{00} \rangle 1$ ise $x_0' \rangle 0$ olur ki koninin üst bölgesinde Lorentz dönüşümleri invaryant kalır. Bu Lorentz dönüşümlerinin oluşturduğu küme Lorentz grubu olarak tanımlanır ve $O^{\uparrow}(1,2)$ ile gösterilir. $det(g) = 1$ olan Lorentz dönüşümleri özel Lorentz dönüşümleri olarak tanımlanır.

Ve bu dönüşümlerin oluşturduğu grup da $SO^{\uparrow}(1,2)$ veya $SO_0(1,2)$ şeklinde gösterilir.

$g \in SO(1,2)$, g ' yi açık şekilde ifade edelim.

$$g_{00} \geq 1 \quad ise \quad det\, g = 1$$
$$g_{00} \geq 1 \quad ise \quad det\, g = -1$$

veya

$$g_{00} \leq -1 \quad ise \quad det\, g = 1$$
$$g_{00} \leq -1 \quad ise \quad det\, g = -1$$

olabilir.

(x_0, x_1) düzleminde dönüşüme bakarsak g elemanı ,

$$g = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad gIg^t = I \quad \text{koşulundan;}$$

$$a^2 - b^2 = 1 \quad , \quad c^2 - d^2 = -1 \quad , \quad ac - bd = 0$$

$$\begin{pmatrix} \cos h\alpha & \sin h\alpha & 0 \\ \sin h\alpha & \cos h\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \cos h\alpha & -\sin h\alpha & 0 \\ \sin h\alpha & -\cos h\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\cos h\alpha & -\sin h\alpha & 0 \\ -\sin h\alpha & -\cos h\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} -\cos h\alpha & \sin h\alpha & 0 \\ -\sin h\alpha & \cos h\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

formunda olur.

1.3. SO(1,2) GRUBUNUN AÇILIMLARI

SO(1,2) grubu ;

$$X_1^+ \ : \ [x,x]=1 \quad , \quad x_0>0 \quad \text{(iki oyuklu hiperboloid)}$$

$$X_{-1} \ : \ [x,x]=-1 \ , \quad x_0>0 \quad \text{(tek oyuklu hiperboloid)}$$

$$X_0^+ \ : \ [x,x]=0 \quad , \quad x_0>0 \quad \text{(koni)}$$

denklemleriyle verilen X_1^+, X_{-1}, X_0^+ yüzeyleri üzerinde geçişlidir, yani grubun bir elemanıyla yüzeyde bir noktadan diğerine gidilebilir. $x=(x_0,x_1,x_2)$ bir reel vektör olmak üzere keyfi $\overset{0}{x}$ noktasından $g_x \in SO(1,2)$, g_x matrisiyle $x=\overset{0}{x}g_x$ başka bir x elde edilir.

Şimdi g_x matrisinin açık şeklini elde edelim. İlk önce X_1^+ iki oyuklu hiperboloidi ele alalım. g_x matrisinin açık şekli X_1^+ üzerinde seçilen koordinat sistemine bağlıdır. Çok sayıda koordinat sistemi verilebilir. Bunlardan en uygunu küresel koordinat sistemidir. $SO(2)$ grubu $SO(1,2)$ bir alt grubudur ve $\overset{0}{x}=(1,0,0)\in X_1^+$ noktasını sabit bırakır. Bu gruba K diyelim ; $K=SO(2)$.

K grubunun elemanları ;

$$k(\varphi)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

(x_1,x_2) düzleminde dönme formundaki reel 3×3 matristen oluşur.

Bu durumda X_1^+ ' de küresel koordinat sistemi ;

$$\begin{aligned} x_0 &= \cosh\alpha \\ x_1 &= \sinh\alpha\sin\varphi \quad , \quad 0\le\varphi<2\pi \quad , \quad 0\le\alpha<\infty \\ x_2 &= \sinh\alpha\cos\varphi \\ x_0^{\,2}-x_1^{\,2}-x_2^{\,2} &= 1 \end{aligned}$$

şeklinde verilir.

$SO(1,2)$ grubunun başka bir alt grubu $A = SO(1,1) \subset SO(1,2)$ dir ve bu grubun bir elemanı ;

$$a(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos h\alpha & 0 & \sin h\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin h\alpha & 0 & \cos h\alpha \end{pmatrix}$$

olup (x_0, x_2) düzleminde dönme formunda reel 3×3 matristir. Kolayca görülebilir ki bir $x = (x_0, x_1, x_2) \in X_1^+$ reel vektörü $x = \overset{0}{x}\, g_x = \overset{0}{x}\, a(\alpha) k(\varphi)$ formunda temsil edilebilir.

$\overset{0}{x} = \overset{0}{x}\, k(\varphi)$ olduğundan $k(\varphi)$, $\overset{0}{x}$ noktasını sabit bırakır.

$$x = \overset{0}{x}\, g_x = \overset{0}{x}\, a(\alpha) k(\varphi)$$

$$g_x = g(\varphi', \alpha, \varphi) = k(\varphi') a(\alpha) k(\varphi)$$

Buradan her $g \in SO(1,2)$ elemanı $k, k' \in K$, $a \in A$ olmak üzere

$$g = k'ak \qquad (1)$$

biçiminde yazıldığı görülür. Böylece X_1^+ hiperboloidiyle bağlantılı keyfi bir $g \in SO(1,2)$ elemanının bir açılımı elde edilir. g elemanının bu açılımına Cartan açılımı denir . İşlemler her zaman bir parametreli altgruplarla yapılır. Örneğin grup üç parametreli ise üç parametreyle aynı anda işlem yapmak zordur. Bu yüzden grubun çeşitli bir parametreli altgruplara açılımları kullanılır.

Şimdi X_{-1} hiperboloidiyle bağlantılı grubun bir g elemanının başka bir açılımını verelim.

$SO(1,1)$ grubu $SO(1,2)$ grubunun bir alt grubudur ve $\overset{0}{x} = (0,0,1) \in X_{-1}$ noktasını sabit bırakır. Bu gruba H diyelim; $H = SO(1,1)$ dir. Bu grubun bir elemanı ;

$$h(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos h\alpha & \sin h\alpha & 0 \\ \sin h\alpha & \cos h\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

formunda reel 3×3 matristen oluşur. Bu durumda X_{-1} de hiperbolik koordinat sistemini seçmek uygun olur.

Hiperboloidin üst kısmında ,

$\left\| \left[x, \overset{0}{x} \right] \right\| = |x_2| \geq 1 \quad , \quad \overset{0}{x} = (0,0,1) \quad , \quad x = (x_0, x_1, x_2)$ dir , ve

hiperbolik koordinat sistemi de ;

$$x_0 = sinh\,\alpha \quad sinh\,\beta$$

$$x_1 = sinh\,\alpha \quad cosh\,\beta$$

$$x_2 = \varepsilon\, cosh\,\alpha \qquad , \quad \varepsilon \pm 1 \ , -\infty < \alpha < \infty \ , -\infty < \beta < \infty$$

$$x_0^{\,2} - x_1^{\,2} - x_2^{\,2} = -1$$

şeklinde verilir. Böylece $x = (x_0, x_1, x_2) \in X_{-1}$ vektörü

$\varepsilon' = 0,1 \quad , \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$x = \overset{0}{x}\, g_x = \overset{0}{x}\, I^{\varepsilon'} a(\alpha) h(\beta) \tag{2}$$

formunda yazılabilir. Tek oyuklu hiperboloidin tamamını koordinatla veremeyiz ancak parçalara ayrılarak verilebilir.

X_{-1} hiperboloidinde $\left\| \left[x, \overset{0}{x} \right] \right\| = |x_2| \leq 1$ ise küresel koordinatlar ;

$$x_0 = cosh\,\beta\, sin\,\theta$$
$$x_1 = sinh\,\beta\, sin\,\theta$$
$$x_2 = cos\,\theta$$

şeklinde verilir. Bu koordinatlar $\theta = 0$ için $\overset{0}{x} = (0,1,1)$ sabit noktasını verir. Nokta koordinatlarla ifade edilmiş olunur. Böylece bir reel $x \in X_{-1}$ vektörü

$$x = \overset{0}{x}\, I^{\varepsilon'} k(\theta) h(\beta) \quad , \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{\pi}{2} \tag{3}$$

formunda temsil edilebilir . Burada (2) ve (3) bağıntılarından her bir $g \in SO(1,2)$ elemanlarının

$$g = hI^{\varepsilon} \tilde{g} h \quad \text{veya} \quad g = I^{\varepsilon} h \tilde{g} h \tag{4}$$

biçiminde açılımı elde edilir. Burada $\varepsilon = 0,1$; $\tilde{g}$ ise $a(\alpha)$ ve $k(\theta)$ matrislerinden biridir.

Şimdi X_0^+ konisini ele alalım. Konide küresel koordinat sistemi ;

$$x_0 = e^{\alpha}$$
$$x_1 = e^{\alpha}\, sin\varphi$$
$$x_2 = e^{\alpha}\, cos\varphi \qquad -\infty < \alpha < \infty \;,\; 0 \le \varphi < 2\pi$$
$$x_0^{\,2} - x_1^{\,2} - x_2^{\,2} = 0$$

şeklinde verilir. Buradan herhangi bir $x = (x_0, x_1, x_2) \in X_0^+$ reel vektörü $\overset{0}{x} = (1,0,1)$ olmak üzere

$$x = \overset{0}{x}\, g_x = \overset{0}{x}\, a(\alpha) k(\varphi)$$

formunda temsil edilebilir.

$E(1)$ grubu $\overset{0}{x} = (1,0,1) \in X_0^+$ noktasını sabit bırakan $SO(1,2)$ grubunun bir alt grubu olmak üzere bu grubun bir elemanı ;

$$n(c) = \begin{pmatrix} 1+\dfrac{c^2}{2} & c & \dfrac{c^2}{2} \\ c & 1 & c \\ -\dfrac{c^2}{2} & -c & 1-\dfrac{c^2}{2} \end{pmatrix} \quad , \quad -\infty < c < \infty$$

biçimindedir. Bu alt gruba N diyelim , $N = E(1)$.

Böylece her bir $g \in SO(1,2)$ elemanı ;

$$g = nak \tag{5}$$

açılımıyla verilebilir. g elemanının bu açılımı Iwasawa açılımı olarak tanımlanır.

Şimdi X_0^+ konisinde parabolik koordinat sistemini verelim. Koniyi $x_0 + x_2 = 1$ düzlemiyle kesersek arakesit ;

$$(x_0 - x_2)\big|_{x_0+x_2=1} = y = b^2 \quad , \quad b = x_1\big|_{x_0+x_1=1}$$

parabolü olur. Bu bizi $x \in X_0^+$ de (b,d) parabolik koordinatlarına götürür.

$$x = d\left(\frac{1+b^2}{2}, b, \frac{1-b^2}{2}\right)$$

x vektörü ; $x = \overset{0}{x}\, g_x$, $g_x = a(\alpha) n^t(b)$ yazılabilir.

$d = 2e^{\alpha}$, $n^t(b)$ de $n(b)$ matrisinin transpozudur . $n^t(b)$ matrisiyle verilen dönüşüm $\overset{0}{x}$ noktasını sabit bırakmaz, $\overset{0}{x} = \overset{0}{x}\, n(b)$, $\overset{0}{x} \neq \overset{0}{x}\, n^t(b)$ ancak $x = (1+b^2, 2b, 1-b^2)$ noktasına dönüştürür. $gIg^t = I$ özelliğinden $n(b)In^t(b) = I$ alınır ve $n^t(-b) = In(b)I$ yazılabilir. Böylece grubun herhangi bir $g \in SO(1,2)$ elemanını bir parametreli altgruplara göre ;

$$g = nan^t \tag{6}$$

açılımı yazılabilir. Bu açılım Gel'fand-Naimark-Burahat açılımı olarak tanımlanır. Parabolik koordinatlar söz konusu ise bu açılım uygun gelir.

Son olarak X_0^+ konisinde hiperbolik koordinat sistemini verelim. X_0^+ konisini $x_2 = 1$, $x_2 = -1$ düzlemleriyle kesersek ;

$$x_0^2\big|_{x_2=\pm 1} - x_1^2\big|_{x_2=\pm 1} = 1$$

hiperbolünü elde ederiz. Bu durumda X_0^+ konisinde hiperbolik koordinat sistemi

$$\begin{aligned} x_0 &= e^{\alpha}\cosh\beta \\ x_1 &= e^{\alpha}\sinh\beta \qquad -\infty < \alpha < \infty\ ,\ -\infty < \beta < \infty \\ x_2 &= \varepsilon e^{\alpha}\ , \qquad\qquad \varepsilon = \pm 1 \end{aligned}$$

şeklinde verilebilir.

Buradan $g = I^{\varepsilon'}a(\alpha)h(\beta)$ bulunur. $\varepsilon = \pm 1$ göre $\varepsilon' = \pm 1$ değerlerini alır. Neticede grubun her bir $g \in SO(1,2)$ elemanı ;

$$g = nI^{\varepsilon}ah \text{ veya } g = I^{\varepsilon'}n^t ah \tag{7}$$

formunda açılıma sahip olur. Böylece X_0^+ konisiyle bağlantılı olarak her bir $g \in SO(1,2)$ elemanının $g = nak$, $g = nan^t$, $g = I^{\varepsilon'}n^t ah$ şeklinde üç farklı açılımı elde edilir $[4]$.

2. BÖLÜM

2.1. SONSUZ KÜÇÜK OPERATÖRLER

Sonsuz küçük operatörler grubun bir parametreli alt gruplarının elemanlarının verilen parametreye göre türevlerinin sıfırdaki değeri alınarak bulunur. Sonsuz küçük operatörleri anlatmak için örnek olarak üç boyutlu uzaydaki sabit bir eksen etrafındaki dönmeleri ele alalım.

x_1 ekseni etrafındaki dönme,

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= x_2\cos t - x_3 \sin t \\ x_3' &= x_2 \sin t + x_3 \cos t \end{aligned} \tag{1}$$

x_2 ekseni etrafındaki dönme,

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1\cos t + x_3 \sin t \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= -x_1 \sin t + x_3 \cos t \end{aligned} \tag{2}$$

x_3 ekseni etrafındaki dönme,

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1\cos t - x_2 \sin t \\ x_2' &= x_1 \sin t + x_2 \cos t \\ x_3' &= x_3 \end{aligned} \tag{3}$$

formunda ifade edilebilir. Bu dönmeleri matris formunda yazarsak dönme matrisleri ;

$$a_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad , \quad a_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t & 0 & \sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix} \quad , \quad a_3(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde olur. (1) , (2) , (3) denklemlerinin t ye göre türevleri alınarak $t=0$ da katsayılar matrisleri yazılırsa aşağıdaki matrisler

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bunlara sonsuz küçük matrisler denir.

Yukardaki $a_k(t)$ matrisleri ile a_k matrsileri arasında

$$a_k(t) = e^{ta_k} = I + ta_k + \frac{1}{2!}t^2 {a_k}^2 + \frac{1}{3!}t^3 {a_k}^3 + \ldots$$

bağıntısı vardır.

a_1 ve a_2 aynı mertebeden iki matris olmak üzere $a_1a_2 - a_2a_1$ matrisine a_1 ve a_2 matrislerinin komutatörü denir ve $[a_1, a_2]$ şeklinde gösterilir.

$$[a_1, a_2] = a_1a_2 - a_2a_1 = a_3$$
$$[a_2, a_3] = a_2a_3 - a_3a_2 = a_1$$
$$[a_3, a_1] = a_3a_1 - a_1a_3 = a_2$$

G dönme grubunun $g \to T(g)$ bir temsilini ele alalım ve

$$A_1(t) = T(a_1(t))$$
$$A_2(t) = T(a_2(t))$$
$$A_3(t) = T(a_3(t))$$

sağlansın. $A_k(t) = T(a_k(t))$, $k = 1,2,3$ için t 'nin sürekli fonksiyonlarıdır. $A_k(t)$ 'nin $t = 0$ için türevini alalım.

$$A_k = \left.\frac{dA_k(t)}{dt}\right|_{t=0} \quad , \quad k = 1,2,3$$

A_k ifadesi $g \to T(g)$ temsilinin sonsuz küçük operatörü olarak adlandırılır. Bu operatörler

$$[A_1, A_2] = A_3 \ , [A_2, A_3] = A_1 \ , [A_3, A_1] = A_2$$

sıra değişim bağıntısını sağlar.

$A_k(t)$ ile A_k arasında

$$A_k(t) = I + tA_k + \frac{t^2}{2!}{A_k}^2 + \ldots = e^{tA_k}$$

bağıntısı vardır [11].

Bu çalışmada $G = SO(1,2)$ grubunun çeşitli açılımlarına göre regüler temsilinin sonsuz küçük operatörleri araştırıldı.

Regüler temsil ;

$$T(g_0)F(g)=F(gg_0)\ ,\ g_0,g\in G$$

formunda ifade edilebilir. Örneğin $SO(1,2)$ grubunun $g=k'ak$ (Cartan) açılımı kullanılarak regüler temsilin sonsuz küçük operatörleri ;

$$A_1=\frac{\partial}{\partial\varphi_2}$$

$$A_2=Cos\varphi_2\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{Sin\varphi_2}{Sinh\alpha}\frac{\partial}{\partial\varphi_1}-Coth\alpha Sin\varphi_2\frac{\partial}{\partial\varphi_2}$$

$$A_3=-Sin\varphi_2\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{Cos\varphi_2}{Sinh\alpha}\frac{\partial}{\partial\varphi_1}-Coth\alpha Cos\varphi_2\frac{\partial}{\partial\varphi_2}$$

şeklinde bulunur $[4]$.

2.2. LAPLACE-BELTRAMİ OPERATÖRÜ

Yapılan çalışmalara göre farklı mertebelerden Laplace operatörleri yazılabilir. Verilen Laplace operatörü grupla bağlantılı olarak yazılırsa adına Casimir (Laplace-Beltrami) operatörü denir. Casimir daha geneldir. Laplace bunun içindedir. Grupla bağlantılı olarak yazılan Laplace operatörlerinin içinden bir tanesi Laplace-Beltramidir ve bu en sadesi olur. Laplace-Beltrami operatörünü metrik matristen veya grubun üreteçlerinden faydalanarak (bu yol genelde zordur) yazabiliriz. Grup kaç parametreyle verilirse operatörde o kadar parametre bulunur. Şimdi Laplace-Beltrami operatörünün ifadesini verelim.

Riemann uzayında $\left(g_{ij}\right)$ metrik matrisi ve Γ_{ij}^{k} (Christoffel sembolü) bağlantısı tanımlanmış olsun. Eğer $\left(g_{ij}\right)$ metrik matrisinin kovaryant türevi

$$\nabla_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^{l} g_{lj} - \Gamma_{jk}^{l} g_{il} = 0$$

sıfır ise bu bağlantıya metrik matrisle uzlaşan bağlantı denir. Metrik matrisle uzlaşan bağlantının ifadesi aşağıdaki formülle verilir.

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$$

$T^{\eta},(1,0)$ tipli tensörün diverjansını verelim. T^{η} tensörünün kovaryant türevi

$$\nabla_k T^{\eta} = \frac{\partial T^{\eta}}{\partial x^k} + \Gamma_{mk}^{i} T^{m}$$

formülü ile verildiğinden T^{η} tensörünün diverjansı için aşağıdaki formülü alırız.

$$divT^{\eta} = \nabla_i T^{\eta} = \frac{\partial T^{\eta}}{\partial x^i} + \Gamma_{mi}^{i} T^{m} \quad , \quad g = det\left(g_{ij}\right)$$

$$\Gamma_{mi}^{i} = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^l} \right) = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{x^m}$$

formülünden yararlanarak

$$divT^{\eta} = \nabla_i T^{\eta} = \frac{\partial T^{\eta}}{\partial x^i} + \Gamma_{mi}^{i} T^{m} \quad , \quad g = det\left(g_{ij}\right)$$

bağıntısından

$$divT^i = \nabla_i T^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} T^i \right)$$

alırız. Burada $T^\eta = g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}$ ifadesini yerine yazarsak ;

$$\Delta_{LB} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$$

buluruz ki buna Riemann uzayında verilmiş Laplace-Beltrami operatörü denir.

$x = (x_1, x_2, ...x_n)$ kartezyen koordinatlar, $g_{ij} = \delta_{ij}$ metrik matris olmak üzere E_n, n boyutlu Euclidean uzayda Laplace operatörü ;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

olarak verilir. $E_{p,q}$ pseudo-Euclidean uzayda metrik matris

$$\left(g_{ij} \right) = diag \left(\underbrace{1,...,1}_{p\ tane}, \underbrace{-1,...,-1}_{q\ tane} \right)$$

şeklinde verilir. Bu durumda Laplace operatörü ;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - ... - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2}$$

olur.

Örneğin S^{n-1} küresinde verilmiş $(\theta_1, ..., \theta_{n-1})$ küresel koordinat sistemi için Laplace-Beltrami operatörünü verelim. $x = (x_1, ..., x_n) \in S^{n-1}$ de küresel koordinatlar

$$\begin{aligned}
x_1 &= r \sin\theta_{n-1} \sin\theta_{n-2} ... \sin\theta_2 \sin\theta_1 \\
x_2 &= r \sin\theta_{n-1} \sin\theta_{n-2} ... \sin\theta_2 \cos\theta_1 \\
&..... \\
&..... \\
x_{n-1} &= r \sin\theta_{n-1} \cos\theta_{n-2} \\
x_n &= r \cos\theta_{n-1}
\end{aligned}$$

şeklinde verilir. Burada

$$x_1^2 + ... + x_n^2 = r^2 \quad , \quad r \geq 0 \quad , \quad 0 \leq \theta_1 \leq 2\pi \quad , \quad 0 \leq \theta_k \leq \pi \quad , \quad 2 \leq k \leq n-1$$

dir.

Metrik matris,

$$\left(g_{ij} \right) = \left[\dot{x}_{\tau_i}, \dot{x}_{\tau_j} \right] \quad , \quad \tau_1 = r \quad , \quad \tau_2 = \theta_1 \quad , \ldots , \ \tau_n = \theta_{n-1}$$

bağıntısından ;

$$\left(g_{ij}\right) = diag\left(1, r^2, r^2\, sin^2\,\theta_{n-1}, ..., r^2\, sin^2\,\theta_2 ... sin^2\,\theta_{n-1}\right)$$

şeklinde bulunur. Buradan Laplace-Beltrami operatörü

$$\Delta_{LB}^{(n)} = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_0^{(n-1)}$$

olup birinci kısım operatörün radyal kısmını $\Delta_0^{(n-1)}$ da açısal kısmını oluşturur. Burada

$$\begin{aligned} \Delta_0^{(n-1)} &= \frac{1}{sin^{n-2}\,\theta_{n-1}} \frac{\partial}{\partial \theta_{n-1}} sin^{n-2}\,\theta_{n-1} \frac{\partial}{\partial \theta_{n-1}} + \frac{1}{sin^2\,\theta_{n-1}} \Delta_0^{(n-2)} \\ &= \frac{1}{sin^{n-2}\,\theta_{n-1}} \frac{\partial}{\partial \theta_{n-1}} sin^{n-2}\,\theta_{n-1} \frac{\partial}{\partial \theta_{n-1}} + ... + \frac{1}{sin^2\,\theta_{n-1} ... sin^2\,\theta_2} \frac{\partial^2}{\partial \theta_1^{\,2}} \end{aligned}$$

dir. $F\left(r, \theta_1, ..., \theta_n\right) = r^{\sigma} \Phi\left(\theta_1, ..., \theta_n\right)$, σ . dereceden homojen bir fonksiyon olmak üzere Laplace denklemini ele alalım.

$$\Delta_{LB}^{(n)} F = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} r^{n-1} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_0^{(n-1)} F = 0$$

Buradan

$$\Delta_0^{(n-1)} \Phi = \sigma\left(\sigma + n - 2\right) \Phi\left(\theta_1, ..., \theta_n\right)$$

denklemini yazabiliriz.

Burada Laplace-Beltrami operatörü metrik matristen faydalanarak oluşturuldu. Grubun sonsuz küçük operatörleri kullanılarak da bu operatör oluşturulabilir. Buna örnek verelim:

$SO(1,2)$ grubunun bir parametreli alt gruplara açılımlarından biri olan $g\left(\varphi_1, \alpha, \varphi_2\right) = k\left(\varphi_1\right) a\left(\alpha\right) k\left(\varphi_2\right)$, $\alpha \in [0, \infty), \varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi), k \in SO(2), a \in SO(1,1)$ açımını ele alalım. Grubun regüler temsilinin sonsuz küçük operatörleri

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \\ B_1 &= Cos\varphi_2 \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{Sin\varphi_2}{Sinh\alpha} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} - Coth\alpha Sin\varphi_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \\ B_2 &= -Sin\varphi_2 \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{Cos\varphi_2}{Sinh\alpha} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} - Coth\alpha Cos\varphi_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \end{aligned}$$

biçiminde verilir [4].

Buradan Laplace-Beltrami operatörü ;

$$\Delta_{LB} = B_1^2 + B_2^2 - B_0^2$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + Coth\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{1}{Sinh^2\alpha}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi_1^2} - Cosh\alpha\frac{\partial^2}{\partial\varphi_1\varphi_2} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi_2^2}\right)$$

şeklinde bulunur. Grubun matris temsillerinin elemanları Laplace-Beltrami operatörünün özfonksiyonlarıdır. Matris elemanları iki şekilde bulunabilir.

Birincisi temsillerin bir modeliyle bulunur. Bu modeli oluşturmak zordur. Örneğin ;

$$T(g)F(x) = F(xg)$$

bir temsil modelidir. Bunun için önce grup iyice araştırılır, sonra temsil kurulur ve daha sonra bunun temsil olduğu gösterilir. Farklı yapılarda farklı farklı temsiller, temsil modelleri kurulabilir.

İkincisi Casimir operatörünün belirli bir denkleme getirilip çözümünün bulunmasıdır. Buradan da görüleceği gibi temsil modelini kurmaktansa Casimir operatörünü (Laplace-Beltrami operatörünü) oluşturmak daha kolaydır.

3. BÖLÜM

3.1. LAPLACE-BELTRAMİ OPERATÖRÜNÜN ELDE EDİLMESİ

$T(g_0)F(g)=F(gg_0)$ regüler temsilin sonsuz küçük operatörleri, $SO(1,2)$ grubunun bir g elemanının,

$$g(\varphi_1,\alpha,\varphi_2)=k(\varphi_1)a(\alpha)k(\varphi_2)$$

açılımından ;

$$B_0=\frac{\partial}{\partial\varphi_2}$$

$$B_1=Cos\varphi_2\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{Sin\varphi_2}{Sinh\alpha}\frac{\partial}{\partial\varphi_1}-Coth\alpha Sin\varphi_2\frac{\partial}{\partial\varphi_2}$$

$$B_2=-Sin\varphi_2\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{Cos\varphi_2}{Sinh\alpha}\frac{\partial}{\partial\varphi_1}-Coth\alpha Cos\varphi_2\frac{\partial}{\partial\varphi_2}$$

şeklinde bulunup Laplace-Beltrami operatörünün ifadesi ;

$$\Delta_{LB}=B_1^2+B_2^2-B_0^2$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+Coth\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{1}{Sinh^2\alpha}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi_1^2}-Cosh\alpha\frac{\partial^2}{\partial\varphi_1\varphi_2}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi_2^2}\right)$$

şeklinde verilmişti $[4]$. Bu bölümde aynı işlemler farklı açılımlar için yapılmıştır.

(i). $SO(1,2)$ grubunun $g=kan$ (Iwasawa) açılımını ele alırsak grubun bir parametreli alt gruplarının elemanları ;

$$k(t)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&cost&sint\\0&-sint&cost\end{pmatrix},\quad a(t)=\begin{pmatrix}cosht&0&sinht\\0&1&0\\sinht&1&cosht\end{pmatrix}$$

$$h(t)=\begin{pmatrix}cosht&sinht&0\\sinht&cosht&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad n(t)=\begin{pmatrix}1+\frac{t^2}{2}&t&\frac{-t^2}{2}\\t&1&-t\\\frac{t^2}{2}&t&1-\frac{t^2}{2}\end{pmatrix}$$

şeklinde verilebilir.

$$a_0 = \left.\frac{dk(t)}{dt}\right|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad a_1 = \left.\frac{da(t)}{dt}\right|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad a_2 = \left.\frac{dh(t)}{dt}\right|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[a_0, a_1] = a_2 \quad , \quad [a_2, a_0] = a_1 \quad , \quad [a_1, a_2] = -a_0$$

$$a_1{}^2 + a_2{}^2 - a_0{}^2 = 2$$

Grubun sonsuz küçük operatörlerinden (üreteçlerinden) invaryant operatörün ifadesi ;

$$\Delta = B_1{}^2 + B_2{}^2 - B_0{}^2$$

şeklinde verilmişti $[4]$. Şimdi bunu başka bir formda ifade edelim.

$$n(t) = \begin{pmatrix} 1+\frac{t^2}{2} & t & \frac{-t^2}{2} \\ t & 1 & -t \\ \frac{t^2}{2} & t & 1-\frac{t^2}{2} \end{pmatrix} \quad , \quad n^t(t) = \begin{pmatrix} 1+\frac{t^2}{2} & t & \frac{t^2}{2} \\ t & 1 & t \\ -\frac{t^2}{2} & -t & 1-\frac{t^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$n_+ = \left.\frac{dn(t)}{dt}\right|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad n_- = \left.\frac{dn^t(t)}{dt}\right|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_0 + a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = n_-$$

$$n_- = a_0 + a_2$$

$$a_2 - a_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = n_+$$

$$n_+ = a_2 - a_0$$

$$a_1{}^2 + a_2{}^2 - a_0{}^2 = 2$$

$$a_1{}^2 + (a_2 - a_0)(a_2 + a_0) = 2$$

$$a_1{}^2 + \frac{1}{2}\{(a_2 - a_0)(a_2 + a_0) + (a_2 - a_0)(a_0 + a_2)\} = 2$$

$$a_1^{\,2} + \frac{1}{2}\{n_+ n_- + n_- n_+\} = 2$$

Buradan invaryant operatörümüz ;

$$\Delta = a_1^{\,2} + \frac{1}{2}\{n_+ n_- + n_- n_+\} = 2 \qquad (1)$$

formunda olacak demektir. Şimdi operatörün ifadesindeki sonsuz küçük operatörleri elde edelim.

$$T(g_0)F(g) = F(gg_0)$$

$$g(\varphi_1, \alpha, \varphi_2) = k(\varphi_1)a(\alpha)n(\varphi_2)$$

$$\varphi_1 \in [0, 2\pi) \quad , \quad -\infty < \alpha < \infty \quad , \quad -\infty < \varphi_2 < \infty$$

$$g(\varphi_1, \alpha, \varphi_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ 0 & -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos h\alpha & 0 & \sin h\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin h\alpha & 1 & \cos h\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\varphi_2^{\,2}}{2} & \varphi_2 & \frac{-\varphi_2^{\,2}}{2} \\ \varphi_2 & 1 & -\varphi_2 \\ \frac{\varphi_2^{\,2}}{2} & \varphi_2 & 1 - \frac{\varphi_2^{\,2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$g(\varphi_1, \alpha, \varphi_2) = \begin{pmatrix} \cos h\alpha & 0 & \sin h\alpha \\ \sin h\alpha \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & \cos h\alpha \sin\varphi_1 \\ \sin h\alpha \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & \cos h\alpha \cos\varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\varphi_2^{\,2}}{2} & \varphi_2 & \frac{-\varphi_2^{\,2}}{2} \\ \varphi_2 & 1 & -\varphi_2 \\ \frac{\varphi_2^{\,2}}{2} & \varphi_2 & 1 - \frac{\varphi_2^{\,2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$g(\varphi_1, \alpha, \varphi_2) = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\right)\cos h\alpha + \frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\sin h\alpha & \varphi_2 \cos h\alpha + \varphi_2 \sin h\alpha & \frac{-\varphi_2^{\,2}}{2}\cos h\alpha + \left(1 - \frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\right)\sin h\alpha \\ \left(1 + \frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\right)\sin h\alpha \sin\varphi_1 + \varphi_2 \cos\varphi_1 + \frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\cos h\alpha \sin\varphi_1 & \varphi_2 \sinh\alpha \sin\varphi_1 + \cos\varphi_1 + \varphi_2 \cosh\alpha \sin\varphi_1 & \frac{-\varphi_2^{\,2}}{2}\sin h\alpha \sin\varphi_1 - \varphi_2 \cos\varphi_1 + \left(1 - \frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\right)\cos h\alpha \sin\varphi_1 \\ \left(1 + \frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\right)\sin h\alpha \cos\varphi_1 - \varphi_2 \sin\varphi_1 + \frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\cos h\alpha \cos\varphi_1 & \varphi_2 \sinh\alpha \cos\varphi_1 - \sin\varphi_1 + \varphi_2 \cosh\alpha \cos\varphi_1 & \frac{-\varphi_2^{\,2}}{2}\sin h\alpha \cos\varphi_1 + \varphi_2 \sin\varphi_1 + \left(1 - \frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\right)\cos h\alpha \cos\varphi_1 \end{pmatrix}$$

$k(t)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos t & \sin t\\ 0 & -\sin t & \cos t\end{pmatrix}$ için sonsuz küçük operatörü bulalım.

$$gk(t)=g+t\left(\frac{\partial g}{\partial \varphi_1}.\frac{d\varphi_1'}{dt}\bigg|_{t=0}+\frac{\partial g}{\partial \alpha}.\frac{d\alpha'}{dt}\bigg|_{t=0}+\frac{\partial g}{\partial \varphi_2}.\frac{d\varphi_2'}{dt}\bigg|_{t=0}\right)+\ldots$$

$$g'=g\left(\varphi_1',\alpha',\varphi_2'\right)=gk=g\left(\varphi_1,\alpha,\varphi_2\right)k(t)=k\left(\varphi_1\right)a(\alpha)n\left(\varphi_2\right)k(t)$$

$g'=gk=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ olur ve matrisin içindeki elemanlar aşağıdaki gibi bulunur.

$$a_{11}=\left(1+\frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\right)\cos h\alpha+\frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\sin h\alpha$$

$$a_{12}=\left(\varphi_2\cos h\alpha+\varphi_2\sin h\alpha\right)\cos t+\left(\frac{-\varphi_2^{\,2}}{2}\cos h\alpha+\left(1-\frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\right)\sin h\alpha\right)\left(-\sin t\right)$$

$$a_{13}=\left(\varphi_2\cos h\alpha+\varphi_2\sin h\alpha\right)\sin t+\left(\frac{-\varphi_2^{\,2}}{2}\cos h\alpha+\left(1-\frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\right)\sin h\alpha\right)\cos t$$

$$a_{21}=\left(1+\frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\right)\sin h\alpha\sin\varphi_1+\varphi_2\cos\varphi_1+\frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\cos h\alpha\sin\varphi_1$$

$$a_{22}=\left(\varphi_2\sinh\alpha\sin\varphi_1+\cos\varphi_1+\varphi_2\cosh\alpha\sin\varphi_1\right)\cos t+\left(\frac{-\varphi_2^{\,2}}{2}\sinh\alpha\sin\varphi_1-\varphi_2\cos\varphi_1+\left(1-\frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\right)\cos h\alpha\sin\varphi_1\right)\left(-\sin t\right)$$

$$a_{23}=\left(\varphi_2\sinh\alpha\sin\varphi_1+\cos\varphi_1+\varphi_2\cosh\alpha\sin\varphi_1\right)\sin t+\left(\frac{-\varphi_2^{\,2}}{2}\sinh\alpha\sin\varphi_1-\varphi_2\cos\varphi_1+\left(1-\frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\right)\cos h\alpha\sin\varphi_1\right)\cos t$$

$$a_{31}=\left(1+\frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\right)\sin h\alpha\cos\varphi_1-\varphi_2\sin\varphi_1+\frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\cos h\alpha\cos\varphi_1$$

$$a_{32}=\left(\varphi_2\sinh\alpha\cos\varphi_1-\sin\varphi_1+\varphi_2\cosh\alpha\cos\varphi_1\right)\cos t+\left(\frac{-\varphi_2^{\,2}}{2}\sinh\alpha\cos\varphi_1+\varphi_2\sin\varphi_1+\left(1-\frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\right)\cos h\alpha\cos\varphi_1\right)\left(-\sin t\right)$$

$$a_{33}=\left(\varphi_2\sinh\alpha\cos\varphi_1-\sin\varphi_1+\varphi_2\cosh\alpha\cos\varphi_1\right)\sin t+\left(\frac{-\varphi_2^{\,2}}{2}\sinh\alpha\cos\varphi_1+\varphi_2\sin\varphi_1+\left(1-\frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\right)\cos h\alpha\cos\varphi_1\right)\cos t$$

g ' nin g_{11} elemanını ele alalım.

$$g_{11} = \left(1 + \frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\right)\cosh\alpha + \frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\sinh\alpha$$

$$\frac{\partial g}{\partial \varphi_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial \alpha} = \left(1 + \frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\right)\sinh\alpha + \frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\cosh\alpha \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial \varphi_2} = \varphi_2\cosh\alpha + \varphi_2\sinh\alpha$$

$$\frac{\partial g}{\partial \varphi_1}\frac{d\varphi_1'}{dt}\bigg|_{t=0} + \frac{\partial g}{\partial \alpha}\frac{d\alpha'}{dt}\bigg|_{t=0} + \frac{\partial g}{\partial \varphi_2}\frac{d\varphi_2'}{dt}\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\left(1 + \frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\right)\cosh\alpha + \frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\sinh\alpha\right|_{t=0}$$

$$\left[\left(1 + \frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\right)\sinh\alpha + \frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\cosh\alpha\right]\frac{d\alpha'}{dt} + \left[\varphi_2\cosh\alpha + \varphi_2\sinh\alpha\right]\frac{d\varphi_2'}{dt} = 0 \qquad (2)$$

g 'nin g_{13} elemanını ele alalım :

$$g_{13} = \frac{-\varphi_2^{\,2}}{2}\cos h\alpha + \left(1 - \frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\right)\sin h\alpha$$

$$\frac{\partial g}{\partial \varphi_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial \alpha} = \frac{-\varphi_2^{\,2}}{2}\sinh\alpha + \left(1 - \frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\right)\cosh\alpha \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial \varphi_2} = -\varphi_2\cosh\alpha - \varphi_2\sinh\alpha$$

$$\left[\frac{-\varphi_2^{\,2}}{2}\sinh\alpha + \left(1 - \frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\right)\cosh\alpha\right]\frac{d\alpha'}{dt} + \left[-\varphi_2\cosh\alpha - \varphi_2\sinh\alpha\right]\frac{d\varphi_2'}{dt} =$$

$$= \varphi_2\cosh\alpha + \varphi_2\sinh\alpha \qquad (3)$$

(2) ve (3) den ;

$$\left[\left(1 + \frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\right)\sinh\alpha + \frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\cosh\alpha\right]\frac{d\alpha'}{dt} + \varphi_2\left(\cosh\alpha + \sinh\alpha\right)\frac{d\varphi_2'}{dt} = 0$$

$$+\left[\frac{-\varphi_2^{\,2}}{2}\sinh\alpha + \left(1 - \frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\right)\cosh\alpha\right]\frac{d\alpha'}{dt} - \varphi_2\left[\cosh\alpha + \sinh\alpha\right]\frac{d\varphi_2'}{dt} = \varphi_2\cosh\alpha + \varphi_2\sinh\alpha$$

$$\left(\sinh\alpha + \cosh\alpha\right)\frac{d\alpha'}{dt} = \varphi_2\left(\cosh\alpha + \sinh\alpha\right)$$

$$\frac{d\alpha'}{dt} = \varphi_2$$

bulunur.

$$\left[\left(1+\frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\right)\sinh\alpha+\frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\cosh\alpha\right]\varphi_2+\varphi_2\left(\cosh\alpha+\sinh\alpha\right)\frac{d\varphi_2'}{dt}=0$$

$$\left(\cosh\alpha+\sinh\alpha\right)\frac{d\varphi_2'}{dt}=-\sinh\alpha-\frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\sinh\alpha-\frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\cosh\alpha$$

$$\frac{d\varphi_2'}{dt}=-\frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha+\sinh\alpha}-\frac{\varphi_2^{\,2}}{2}$$

şimdi g 'nin g_{21} elemanını ele alalım :

$$g_{21}=\left(1+\frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\right)\sin h\alpha\sin\varphi_1+\varphi_2\cos\varphi_1+\frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\cos h\alpha\sin\varphi_1$$

$$\left[\left(1+\frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\right)\sinh\alpha\cos\varphi_1-\varphi_2\sin\varphi_1+\frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\cos h\alpha\cos\varphi_1\right]\frac{d\varphi_1'}{dt}+$$
$$+\left[\left(1+\frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\right)\cos h\alpha\sin\varphi_1+\frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\sinh\alpha\sin\varphi_1\right]\varphi_2+$$
$$+\left(\varphi_2\sinh\alpha\sin\varphi_1+\cos\varphi_1+\varphi_2\cosh\alpha\sin\varphi_1\right).\left[-\frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha+\sinh\alpha}-\frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\right]=0$$

$$\left[\left(1+\frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\right)\sinh\alpha\cos\varphi_1-\varphi_2\sin\varphi_1+\frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\cos h\alpha\cos\varphi_1\right]\frac{d\varphi_1'}{dt}=$$
$$=-\varphi_2\cosh\alpha\sin\varphi_1-\frac{\varphi_2^{\,3}}{2}\cos h\alpha\sin\varphi_1-\frac{\varphi_2^{\,3}}{2}\sinh\alpha\sin\varphi_1$$
$$+\varphi_2\sinh\alpha\sin\varphi_1\frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha+\sinh\alpha}+\frac{\varphi_2^{\,3}}{2}\sinh\alpha\sin\varphi_1+\frac{\sinh\alpha.\cos\varphi_1}{\cosh\alpha+\sinh\alpha}$$
$$+\frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\cos\varphi_1+\varphi_2\cosh\alpha\sin\varphi_1\frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha+\sinh\alpha}+\frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\cos h\alpha\sin\varphi_1$$

$$\left[\left(1+\frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\right)sinh\alpha\cos\varphi_1-\varphi_2\sin\varphi_1+\frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\cosh\alpha\cos\varphi_1\right]\frac{d\varphi_1'}{dt}=$$

$$=-\varphi_2\cosh\alpha\sin\varphi_1+\varphi_2\sin\varphi_1\left(\cosh\alpha+\sinh\alpha\right).\frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha+\sinh\alpha}$$

$$+\frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\cos\varphi_1+\cos\varphi_1\frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha+\sinh\alpha}$$

$$=-\varphi_2\cosh\alpha\sin\varphi_1+\varphi_2\sinh\alpha\sin\varphi_1\frac{\sinh\alpha.\cos\varphi_1}{\cosh\alpha+\sinh\alpha}+\frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\cos\varphi_1$$

$$\left[\left(1+\frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\right)sinh\alpha\cos\varphi_1-\varphi_2\sin\varphi_1+\frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\cosh\alpha\cos\varphi_1\right]\frac{d\varphi_1'}{dt}=$$

$$=\frac{\left(1+\frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\right)sinh\alpha\cos\varphi_1-\varphi_2\sin\varphi_1+\frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\cosh\alpha\cos\varphi_1}{\cosh\alpha+\sinh\alpha}$$

$$\frac{d\varphi_1'}{dt}=\frac{1}{\cosh\alpha+\sinh\alpha}$$

Buradan a_0 sonsuz küçük operatörü (üreteci) ;

$$a_0=\frac{1}{\cosh\alpha+\sinh\alpha}\frac{\partial}{\partial\varphi_1}+\varphi_2\frac{\partial}{\partial\alpha}+\left(-\frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha+\sinh\alpha}-\frac{\varphi_2^{\,2}}{2}\right)\frac{\partial}{\partial\varphi_2} \qquad (4)$$

şeklinde bulunur.

Şimdi a_1 ve a_2 sonsuz küçük operatörlerini bulmamız gerekir ancak biz bunun yerine sadece bize gerekli olan a_1, n_+, n_- üreteçlerini bulmaya geçelim.

$T(g_0)F(g)=F(gg_0)$ regüler temsilinde parametreleri değiştirelim.

$g(\varphi_1,\alpha,\varphi_2)=k(\varphi_1)a(\alpha)n(\varphi_2)$ yerine

$g(\varphi,\alpha,\tau)=k(\varphi)a(\alpha)n(\tau)$ alalım.

$$g(\varphi,\alpha,\tau)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\varphi&\sin\varphi\\0&-\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cosh\alpha&0&\sinh\alpha\\0&1&0\\\sinh\alpha&1&\cosh\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+\frac{\tau^2}{2}&\tau&\frac{-\tau^2}{2}\\\tau&1&-\tau\\\frac{\tau^2}{2}&\tau&1-\frac{\tau^2}{2}\end{pmatrix}$$

$$g(\varphi,\alpha,\tau)=\begin{pmatrix} \cos h\alpha & 0 & \sin h\alpha \\ \sin h\alpha\sin\varphi & \cos\varphi & \cos h\alpha\sin\varphi \\ \sin h\alpha\cos\varphi & -\sin\varphi & \cos h\alpha\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\frac{\tau^2}{2} & \tau & \frac{-\tau^2}{2} \\ \tau & 1 & -\tau \\ \frac{\tau^2}{2} & \tau & 1-\frac{\tau^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$g=\begin{pmatrix} \left(1+\frac{\tau^2}{2}\right)\cos h\alpha+\frac{\tau^2}{2}\sin h\alpha & \tau\left(\cos h\alpha+\sin h\alpha\right) & \frac{-\tau^2}{2}\cos h\alpha+\left(1-\frac{\tau^2}{2}\right)\sin h\alpha \\ \left(1+\frac{\tau^2}{2}\right)\sin h\alpha\sin\varphi+\tau\cos\varphi+\frac{\tau^2}{2}\cos h\alpha\sin\varphi & \tau\sin\varphi\left(\cos h\alpha+\sin h\alpha\right)+\cos\varphi & \frac{-\tau^2}{2}\sin h\alpha\sin\varphi-\tau\cos\varphi+\left(1-\frac{\tau^2}{2}\right)\cos h\alpha\sin\varphi \\ \left(1+\frac{\tau^2}{2}\right)\sin h\alpha\cos\varphi-\tau\sin\varphi+\frac{\tau^2}{2}\cos h\alpha\cos\varphi & \tau\cos\varphi\left(\cos h\alpha+\sin h\alpha\right)-\sin\varphi & \frac{\tau^2}{2}\sin h\alpha\cos\varphi+\tau\sin\varphi+\left(1-\frac{\tau^2}{2}\right)\cos h\alpha\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$g=\begin{pmatrix} \frac{\tau^2}{2}e^{\alpha}+\cos h\alpha & \tau e^{\alpha} & \frac{-\tau^2}{2}e^{\alpha}+\sin h\alpha \\ \frac{\tau^2}{2}\sin\varphi e^{\alpha}+\sin h\alpha\sin\varphi+\tau\cos\varphi & \tau\sin\varphi e^{\alpha}+\cos\varphi & \frac{-\tau^2}{2}\sin\varphi e^{\alpha}+\cos h\alpha\sin\varphi-\tau\cos\varphi \\ \frac{\tau^2}{2}\cos\varphi e^{\alpha}+\sin h\alpha\cos\varphi-\tau\sin\varphi & \tau\cos\varphi e^{\alpha}-\sin\varphi & -\frac{\tau^2}{2}\cos\varphi e^{\alpha}+\cos h\alpha\cos\varphi+\tau\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$a(t)=\begin{pmatrix} \cos ht & 0 & \sin ht \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin ht & 1 & \cos ht \end{pmatrix}$ için a_1 sonsuz küçük operatörünü bulalım.

$$\left.\frac{da(t)}{dt}\right|_{t=0}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=a'(t) \qquad , \qquad g=\begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

$$ga'(t)=\begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g_{02} & 0 & g_{00} \\ g_{12} & 0 & g_{10} \\ g_{22} & 0 & g_{20} \end{pmatrix}$$

$$g_{00}=\frac{\tau^2}{2}e^{\alpha}+\cosh\alpha$$

$$\frac{\partial g}{\partial\varphi}=0 \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial\alpha}=\frac{\tau^2}{2}e^{\alpha}+\sinh\alpha \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial\tau}=\tau e^{\alpha}$$

$$\frac{\partial g}{\partial\varphi}\frac{d\varphi'}{dt}\bigg|_{t=0}+\frac{\partial g}{\partial\alpha}\frac{d\alpha'}{dt}\bigg|_{t=0}+\frac{\partial g}{\partial\tau}\frac{d\tau'}{dt}\bigg|_{t=0}$$

$$=\left[\frac{\tau^2}{2}e^{\alpha}+\sinh\alpha\right]\frac{d\alpha'}{dt}+\tau e^{\alpha}\frac{d\tau'}{dt}=-\frac{\tau^2}{2}e^{\alpha}+\sinh\alpha$$

$$g_{01}=\tau e^{\alpha}$$

$$\frac{\partial g}{\partial\varphi}=0 \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial\alpha}=\tau e^{\alpha} \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial\tau}=e^{\alpha}$$

$$\tau e^{\alpha}\frac{d\alpha'}{dt}+\tau e^{\alpha}\frac{d\tau'}{dt}=0$$

$$g_{11}=\tau\sin\alpha e^{\alpha}+\cos\varphi$$

$$\frac{\partial g}{\partial\varphi}=\tau\cos\varphi e^{\alpha}-\sin\varphi \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial\alpha}=\tau\sin\varphi e^{\alpha} \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial\tau}=\sin\varphi e^{\alpha}$$

$$\left[\tau\cos\varphi e^{\alpha}-\sin\varphi\right]\frac{d\varphi'}{dt}+\tau\sin\varphi e^{\alpha}-\tau\sin\varphi e^{\alpha}=0$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=0$$

Buradan a_1 sonsuz küçük operatörü ;

$$a_1=\frac{\partial}{\partial\alpha}-\tau\frac{\partial}{\partial\tau} \tag{5}$$

şeklinde bulunur.

Benzer şekilde n_- operatörü de ;

$$n(t)=\begin{pmatrix} 1+\frac{t^2}{2} & t & \frac{-t^2}{2} \\ t & 1 & -t \\ \frac{t^2}{2} & t & 1-\frac{t^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$n_- = \frac{\partial}{\partial \tau} \tag{6}$$

olarak bulunur.

n_+ sonsuz küçük operatörünü bulalım ;

$$n^t(t)=\begin{pmatrix} 1+\frac{t^2}{2} & t & \frac{t^2}{2} \\ t & 1 & t \\ -\frac{t^2}{2} & -t & 1-\frac{t^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left.\frac{dn^t(t)}{dt}\right|_{t=0}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g\left.\frac{dn^t(t)}{dt}\right|_{t=0}=\begin{pmatrix} g_{01} & g_{00}-g_{02} & g_{01} \\ g_{11} & g_{10}-g_{12} & g_{11} \\ g_{21} & g_{20}-g_{22} & g_{21} \end{pmatrix}$$

$$g_{00}=\frac{\tau^2}{2}e^{\alpha}+\cosh\alpha$$

$$\frac{\partial g_{00}}{\partial \varphi}=0 \quad , \quad \frac{\partial g_{00}}{\partial \alpha}=\frac{\tau^2}{2}e^{\alpha}+\sinh\alpha \quad , \quad \frac{\partial g_{00}}{\partial \tau}=\tau e^{\alpha}$$

$$\left[\frac{\tau^2}{2}e^{\alpha}+\sinh\alpha\right]\frac{d\alpha'}{dt}+\tau e^{\alpha}\frac{d\tau'}{dt}=\tau e^{\alpha}$$

$$g_{02}=-\frac{\tau^2}{2}e^{\alpha}+\sinh\alpha$$

$$\frac{\partial g_{02}}{\partial \varphi}=0 \quad , \quad \frac{\partial g_{02}}{\partial \alpha}=-\frac{\tau^2}{2}e^{\alpha}+\cosh\alpha \quad , \quad \frac{\partial g_{02}}{\partial \tau}=-\tau e^{\alpha}$$

$$\left[-\frac{\tau^2}{2}e^{\alpha}+\cosh\alpha\right]\frac{d\alpha'}{dt}-\tau e^{\alpha}\frac{d\tau'}{dt}=\tau e^{\alpha}$$

$$g_{11} = \tau \sin\alpha e^{\alpha} + \cos\varphi$$

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial \varphi} = \tau\cos\varphi e^{\alpha} - \sin\varphi \quad , \quad \frac{\partial g_{11}}{\partial \alpha} = \tau \sin\varphi e^{\alpha} \quad , \quad \frac{\partial g_{11}}{\partial \tau} = \sin\varphi e^{\alpha}$$

$$\left[\tau\cos\varphi e^{\alpha} - \sin\varphi\right]\frac{d\varphi'}{dt} + \tau\sin\varphi e^{\alpha}.2\tau + \sin\varphi e^{\alpha}.\left(e^{-2\alpha} - \tau^2\right) =$$

$$= \tau^2 \sin\varphi e^{\alpha} + \sin\varphi\left(\sinh\alpha - \cosh\alpha\right) + 2\tau\cos\varphi$$

$$\left[\tau\cos\varphi e^{\alpha} - \sin\varphi\right]\frac{d\varphi'}{dt} = -2\tau^2 \sin\varphi e^{\alpha} - \sin\varphi e^{-\alpha} + \tau^2 \sin\varphi e^{\alpha} + \tau^2 \sin\varphi e^{\alpha} - \sin\varphi e^{-\alpha} + 2\tau\cos\varphi =$$

$$= 2\left(-e^{-\alpha}\sin\varphi + \tau\cos\varphi\right)$$

$$\frac{d\varphi'}{dt} = \frac{2e^{-\alpha}\left(-\sin\varphi + \tau\cos\varphi e^{\alpha}\right)}{\left(\tau\cos\varphi e^{\alpha} - \sin\varphi\right)}, \quad \frac{d\varphi'}{dt} = 2e^{-\alpha}$$

olup n_+ üreteci de ;

$$n_+ = 2e^{-\alpha}\frac{\partial}{\partial\varphi} + 2\tau\frac{\partial}{\partial\alpha} + \left(e^{-2\alpha} - \tau^2\right)\frac{\partial}{\partial\tau} \tag{7}$$

olarak bulunur.

Böylece invaryant operatörü bulmamız için gerekli olan sonsuz küçük operatörler ;

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\partial}{\partial\alpha} - \tau\frac{\partial}{\partial\tau} \\ n_- &= \frac{\partial}{\partial\tau} \\ n_+ &= 2e^{-\alpha}\frac{\partial}{\partial\varphi} + 2\tau\frac{\partial}{\partial\alpha} + \left(e^{-2\alpha} - \tau^2\right)\frac{\partial}{\partial\tau} \end{aligned} \tag{8}$$

şeklinde bulunmuş olur. Bunları (1) ifadesinde yerine yazarsak invaryant (Laplace-Beltrami) operatörü ;

$$\Delta_{LB} = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial}{\partial\alpha} + e^{-2\alpha}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + 2e^{-\alpha}\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial\varphi} \tag{9}$$

şeklinde bulunur.

(ii). Şimdi $SO(1,2)$ grubunun $g = nan^t$ (Gel'fand-Naimark-Burahat) açılımını ele alalım.

$$n = \begin{pmatrix} 1+\frac{s^2}{2} & s & \frac{-s^2}{2} \\ s & 1 & -s \\ \frac{s^2}{2} & s & 1-\frac{s^2}{2} \end{pmatrix} \quad , \quad a(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos h\alpha & 0 & \sin h\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin h\alpha & 0 & \cos h\alpha \end{pmatrix}$$

$$n^t = \begin{pmatrix} 1+\frac{\tau^2}{2} & \tau & \frac{\tau^2}{2} \\ \tau & 1 & \tau \\ -\frac{\tau^2}{2} & -\tau & 1-\frac{\tau^2}{2} \end{pmatrix} \qquad -\infty < s, \tau, \alpha < \infty$$

$$g = nan^t = \begin{pmatrix} 1+\frac{s^2}{2} & s & \frac{-s^2}{2} \\ s & 1 & -s \\ \frac{s^2}{2} & s & 1-\frac{s^2}{2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos h\alpha & 0 & \sin h\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin h\alpha & 0 & \cos h\alpha \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1+\frac{\tau^2}{2} & \tau & \frac{\tau^2}{2} \\ \tau & 1 & \tau \\ -\frac{\tau^2}{2} & -\tau & 1-\frac{\tau^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} \left(1+\frac{s^2}{2}\right)\cosh\alpha - \frac{s^2}{2}\sinh\alpha & s & \left(1+\frac{s^2}{2}\right)\sinh\alpha - \frac{s^2}{2}\cosh\alpha \\ s\cosh\alpha - s\sinh\alpha & 1 & s\sinh\alpha - s\sinh\alpha \\ \frac{s^2}{2}\cosh\alpha + \left(1-\frac{s^2}{2}\right)\sinh\alpha & s & \frac{s^2}{2}\sinh\alpha + \left(1-\frac{s^2}{2}\right)\cosh\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\frac{\tau^2}{2} & \tau & \frac{\tau^2}{2} \\ \tau & 1 & \tau \\ -\frac{\tau^2}{2} & -\tau & 1-\frac{\tau^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} \cosh\alpha + \frac{s^2}{2}e^{-\alpha} & s & \sinh\alpha - \frac{s^2}{2}e^{-\alpha} \\ se^{-\alpha} & 1 & -se^{-\alpha} \\ \sinh\alpha + \frac{s^2}{2}e^{-\alpha} & s & \cosh\alpha - \frac{s^2}{2}e^{-\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\frac{\tau^2}{2} & \tau & \frac{\tau^2}{2} \\ \tau & 1 & \tau \\ -\frac{\tau^2}{2} & -\tau & 1-\frac{\tau^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$g=\begin{pmatrix}\left(1+\frac{\tau^2}{2}\right)\left(\cosh\alpha+\frac{s^2}{2}e^{-\alpha}\right)+s\tau-\frac{\tau^2}{2}\left(\sinh\alpha-\frac{s^2}{2}e^{-\alpha}\right) & \tau\left(\cosh\alpha+\frac{s^2}{2}e^{-\alpha}\right)+s-\tau\left(\sinh\alpha-\frac{s^2}{2}e^{-\alpha}\right) & \frac{\tau^2}{2}\left(\cosh\alpha+\frac{s^2}{2}e^{-\alpha}\right)+s\tau+\left(1-\frac{\tau^2}{2}\right)\left(\sinh\alpha-\frac{s^2}{2}e^{-\alpha}\right)\\ \left(1+\frac{\tau^2}{2}\right)se^{-\alpha}+\tau+s\frac{\tau^2}{2}e^{-\alpha} & s\tau e^{-\alpha}+1+s\tau e^{-\alpha} & s\frac{\tau^2}{2}e^{-\alpha}+\tau-se^{-\alpha}\left(1-\frac{\tau^2}{2}\right)\\ \left(1+\frac{\tau^2}{2}\right)\left(\sinh\alpha+\frac{s^2}{2}e^{-\alpha}\right)+s\tau-\frac{\tau^2}{2}\left(\cosh\alpha-\frac{s^2}{2}e^{-\alpha}\right) & \tau\left(\sinh\alpha+\frac{s^2}{2}e^{-\alpha}\right)+s-\tau\left(\cosh\alpha-\frac{s^2}{2}e^{-\alpha}\right) & \frac{\tau^2}{2}\left(\sinh\alpha+\frac{s^2}{2}e^{-\alpha}\right)+s\tau+\left(1-\frac{\tau^2}{2}\right)\left(\cosh\alpha-\frac{s^2}{2}e^{-\alpha}\right)\end{pmatrix}$$

$a(t)=\begin{pmatrix}\cosh t & 0 & \sinh t\\ 0 & 1 & 0\\ \sinh t & 0 & \cosh t\end{pmatrix}$ için a_1 sonsuz küçük operatörü bulalım.

$$\left.\frac{da(t)}{dt}\right|_{t=0}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$g\left.\frac{da(t)}{dt}\right|_{t=0}=\begin{pmatrix}g_{00}&g_{01}&g_{02}\\g_{10}&g_{11}&g_{12}\\g_{20}&g_{21}&g_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_{02}&0&g_{00}\\g_{12}&0&g_{10}\\g_{22}&0&g_{20}\end{pmatrix}$$

$g_{10}=\left(1+\frac{\tau^2}{2}\right)se^{-\alpha}+\tau+s\frac{\tau^2}{2}e^{-\alpha}$ elemanını alalım.

$$\frac{\partial g_{10}}{\partial s}=\left(1+\frac{\tau^2}{2}\right)e^{-\alpha}+\frac{\tau^2}{2}e^{-\alpha}=e^{-\alpha}+\tau^2e^{-\alpha}=\left(1+\tau^2\right)e^{-\alpha}$$

$$\frac{\partial g_{10}}{\partial\alpha}=-\left(1+\frac{\tau^2}{2}\right)se^{-\alpha}-\frac{\tau^2}{2}se^{-\alpha}=-se^{-\alpha}-\tau^2se^{-\alpha}=-\left(1+\tau^2\right)se^{-\alpha}$$

$$\frac{\partial g_{10}}{\partial\tau}=\tau se^{-\alpha}+1+\tau se^{-\alpha}=1+2\tau se^{-\alpha}$$

$$\left(1+\tau^2\right)e^{-\alpha}\frac{ds'}{dt}+\left(-1-\tau^2\right)se^{-\alpha}\frac{d\alpha'}{dt}+\left(1+2\tau se^{-\alpha}\right)\frac{d\tau'}{dt}=\frac{\tau^2}{2}se^{-\alpha}+\tau-\left(1-\frac{\tau^2}{2}\right)se^{-\alpha}$$

$g_{11} = 1 + 2s\tau e^{-\alpha}$ elemanını alalım.

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial s} = 2\tau e^{-\alpha} \quad , \quad \frac{\partial g_{11}}{\partial \alpha} = -2s\tau e^{-\alpha} \quad , \quad \frac{\partial g_{11}}{\partial \tau} = 2se^{-\alpha}$$

$$2\tau e^{-\alpha}\frac{ds'}{dt} + \left(-2s\tau e^{-\alpha}\right)\frac{d\alpha'}{dt} + 2se^{-\alpha}\frac{d\tau'}{dt} = 0$$

$g_{12} = \frac{\tau^2}{2}se^{-\alpha} + \tau - \left(1 - \frac{\tau^2}{2}\right)se^{-\alpha}$ elemanını alalım.

$$\frac{\partial g_{12}}{\partial s} = \frac{\tau^2}{2}e^{-\alpha} - \left(1 - \frac{\tau^2}{2}\right)e^{-\alpha} = \left(-1 + \tau^2\right)e^{-\alpha}$$

$$\frac{\partial g_{12}}{\partial \alpha} = -\frac{\tau^2}{2}se^{-\alpha} + \left(1 - \frac{\tau^2}{2}\right)se^{-\alpha} = \left(1 - \tau^2\right)se^{-\alpha}$$

$$\frac{\partial g_{12}}{\partial \tau} = \tau se^{-\alpha} + 1 + \tau se^{-\alpha} = 1 + 2\tau se^{-\alpha}$$

$$\left(-1+\tau^2\right)e^{-\alpha}\frac{ds'}{dt} + \left(1-\tau^2\right)se^{-\alpha}\frac{d\alpha'}{dt} + \left(1+2\tau se^{-\alpha}\right)\frac{d\tau'}{dt} = \left(1+\frac{\tau^2}{2}\right)se^{-\alpha} + \tau + \frac{\tau^2}{2}se^{-\alpha}$$

$$-1/\ \left(1+\tau^2\right)e^{-\alpha}\frac{ds'}{dt} + \left(-1-\tau^2\right)se^{-\alpha}\frac{d\alpha'}{dt} + \left(1+2\tau se^{-\alpha}\right)\frac{d\tau'}{dt} = \frac{\tau^2}{2}se^{-\alpha} + \tau - \left(1-\frac{\tau^2}{2}\right)se^{-\alpha}$$

$+$

$$-2e^{-\alpha}\frac{ds'}{dt} + 2se^{-\alpha}\frac{d\alpha'}{dt} = 2se^{-\alpha}$$

$$-\frac{ds'}{dt} + s\frac{d\alpha'}{dt} = s$$

$$\tau\frac{ds'}{dt} - s\tau\frac{d\alpha'}{dt} + s\frac{d\tau'}{dt} = 0$$

$$\tau\ /\ -\frac{ds'}{dt} + s\frac{d\alpha'}{dt} = s$$

$+$

$$s\frac{d\tau'}{dt} = s\tau, \ \frac{d\tau'}{dt} = \tau$$

$$\tau\frac{ds'}{dt}-s\tau\frac{d\alpha'}{dt}=-s\tau,\quad \frac{ds'}{dt}-s\frac{d\alpha'}{dt}=-s$$

$$-\frac{ds'}{dt}+s\frac{d\alpha'}{dt}=s$$

$g_{01}=\tau\left(\cosh\alpha+\frac{s^2}{2}e^{-\alpha}\right)+s-\tau\left(\sinh\alpha+\frac{s^2}{2}e^{-\alpha}\right)$ elemanını alalım.

$$\left(1+2\tau se^{-\alpha}\right)\frac{ds'}{dt}-\tau\left(1+s^2\right)e^{-\alpha}\frac{d\alpha'}{dt}+\left(1+s^2\right)e^{-\alpha}\frac{d\tau'}{dt}=0$$

$$\left(1+2\tau se^{-\alpha}\right)\frac{ds'}{dt}-\tau\left(1+s^2\right)e^{-\alpha}\frac{d\alpha'}{dt}=-\tau\left(1+s^2\right)e^{-\alpha}$$

$$\tau\left(1+s^2\right)\frac{ds'}{dt}+s\frac{d\alpha'}{dt}=s$$

$$\left[s+2\tau s^2e^{-\alpha}-\tau-\tau s^2e^{-\alpha}\right]\frac{ds'}{dt}=-s\tau e^{-\alpha}-\tau s^3e^{-\alpha}+-s\tau e^{-\alpha}-\tau s^3e^{-\alpha}=0$$

$$s-\tau+\tau s^2e^{-\alpha}\frac{ds'}{dt}=0,\quad \frac{ds'}{dt}=0$$

$$0+s\frac{d\alpha'}{dt}=s,\ \frac{d\alpha'}{dt}=1$$

$$\frac{ds'}{dt}=0\quad,\quad \frac{d\alpha'}{dt}=1\quad,\quad \frac{d\tau'}{dt}=\tau$$

Buradan a_1 sonsuz küçük operatörü ;

$$a_1=\frac{\partial}{\partial\alpha}+\tau\frac{\partial}{\partial\tau} \tag{10}$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde

$$n(t)=\begin{pmatrix}1+\frac{t^2}{2} & t & \frac{-t^2}{2}\\ t & 1 & -t\\ \frac{t^2}{2} & t & 1-\frac{t^2}{2}\end{pmatrix}$$

için n_- sonsuz küçük operatörü (üreteci) bulalım.

$$\left.\frac{dn(t)}{dt}\right|_{t=0}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\quad,\qquad g=\begin{pmatrix}g_{00} & g_{01} & g_{02}\\ g_{10} & g_{11} & g_{12}\\ g_{20} & g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}$$

$$g\frac{dn(t)}{dt}=\begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g_{01} & g_{00}+g_{02} & -g_{01} \\ g_{11} & g_{10}+g_{12} & -g_{11} \\ g_{21} & g_{20}+g_{22} & -g_{21} \end{pmatrix}$$

$g_{10}=\left(1+\frac{\tau^2}{2}\right)se^{-\alpha}+\tau+s\frac{\tau^2}{2}e^{-\alpha}$ elemanını alalım.

$$\frac{\partial g_{10}}{\partial s}=\left(1+\frac{\tau^2}{2}\right)e^{-\alpha}+\frac{\tau^2}{2}e^{-\alpha}=e^{-\alpha}+\tau^2e^{-\alpha}=\left(1+\tau^2\right)e^{-\alpha}$$

$$\frac{\partial g_{10}}{\partial \alpha}=-\left(1+\frac{\tau^2}{2}\right)se^{-\alpha}-\frac{\tau^2}{2}se^{-\alpha}=-se^{-\alpha}-\tau^2se^{-\alpha}=-\left(1+\tau^2\right)se^{-\alpha}$$

$$\frac{\partial g_{10}}{\partial \tau}=\tau se^{-\alpha}+1+\tau se^{-\alpha}=1+2\tau se^{-\alpha}$$

$$\left(1+\tau^2\right)e^{-\alpha}\frac{ds'}{dt}+\left(-1-\tau^2\right)se^{-\alpha}\frac{d\alpha'}{dt}+\left(1+2\tau se^{-\alpha}\right)\frac{d\tau'}{dt}=1+2\tau se^{-\alpha}$$

$g_{11}=1+2s\tau e^{-\alpha}$ elemanını alalım.

$$2\tau e^{-\alpha}\frac{ds'}{dt}+\left(-2s\tau e^{-\alpha}\right)\frac{d\alpha'}{dt}+2se^{-\alpha}\frac{d\tau'}{dt}=2\tau+s\tau^2e^{-\alpha}+\tau^2se^{-\alpha}$$

$$\tau e^{-\alpha}\frac{ds'}{dt}-\tau se^{-\alpha}\frac{d\alpha'}{dt}+se^{-\alpha}\frac{d\tau'}{dt}=\tau+s\tau^2e^{-\alpha}$$

$g_{12}=\frac{\tau^2}{2}se^{-\alpha}+\tau-\left(1-\frac{\tau^2}{2}\right)se^{-\alpha}$ elemanını alalım.

$$\left(-1+\tau^2\right)e^{-\alpha}\frac{ds'}{dt}+\left(1-\tau^2\right)se^{-\alpha}\frac{d\alpha'}{dt}+\left(1+2\tau se^{-\alpha}\right)\frac{d\tau'}{dt}=-1-2\tau se^{-\alpha}$$

$$\left(1+\tau^2\right)e^{-\alpha}\frac{ds'}{dt}+\left(-1-\tau^2\right)se^{-\alpha}\frac{d\alpha'}{dt}+\left(1+2\tau se^{-\alpha}\right)\frac{d\tau'}{dt}=1+2\tau se^{-\alpha}$$

$+$

$$2\tau^2e^{-\alpha}\frac{ds'}{dt}-2\tau^2se^{-\alpha}\frac{d\alpha'}{dt}+2\left(1+2\tau se^{-\alpha}\right)\frac{d\tau'}{dt}=0$$

$-2\tau\ /$ $\qquad \tau e^{-\alpha}\frac{ds'}{dt}-\tau se^{-\alpha}\frac{d\alpha'}{dt}+se^{-\alpha}\frac{d\tau'}{dt}=\tau+s\tau^2e^{-\alpha}$

$+$

$$\left(2+4\tau s e^{-\alpha}-2\tau s e^{-\alpha}\right)\frac{d\tau'}{dt}=-2\tau^2\left(1+s\tau e^{-\alpha}\right)$$

$$\left(2+2\tau s e^{-\alpha}\right)\frac{d\tau'}{dt}=-2\tau^2\left(1+s\tau e^{-\alpha}\right)$$

$$2\left(1+\tau s e^{-\alpha}\right)\frac{d\tau'}{dt}=-2\tau^2\left(1+s\tau e^{-\alpha}\right)$$

$$\frac{d\tau'}{dt}=-2\tau^2$$

$$\tau e^{-\alpha}\frac{ds'}{dt}-\tau s e^{-\alpha}\frac{d\alpha'}{dt}+s e^{-\alpha}\left(-\tau^2\right)=\tau+s\tau^2 e^{-\alpha}$$

$$\tau e^{-\alpha}\frac{ds'}{dt}-\tau s e^{-\alpha}\frac{d\alpha'}{dt}=\tau+2s\tau^2 e^{-\alpha}$$

$$\frac{ds'}{dt}-s\frac{d\alpha'}{dt}=e^{\alpha}+2s\tau$$

Diğer denklemlerden ve

$$\frac{ds'}{dt}=e^{\alpha},\ \frac{d\alpha'}{dt}=-2\tau,\ \frac{d\tau'}{dt}=-\tau^2$$

bu ifadelerden n_- üreteci de ;

$$n_-=e^{\alpha}\frac{\partial}{\partial s}-2\tau\frac{\partial}{\partial\alpha}-\tau^2\frac{\partial}{\partial\tau} \qquad (11)$$

şeklinde bulunmuş olur.

Şimdi de n_+ üretecini bulalım. Bunun için ;

$$n^t(t)=\begin{pmatrix}1+\frac{t^2}{2} & t & \frac{t^2}{2}\\ t & 1 & t\\ -\frac{t^2}{2} & -t & 1-\frac{t^2}{2}\end{pmatrix}$$ elemanını ele alalım.

$$\left.\frac{dn^t(t)}{dt}\right|_{t=0}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix},\qquad g=\begin{pmatrix}g_{00} & g_{01} & g_{02}\\ g_{10} & g_{11} & g_{12}\\ g_{20} & g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}$$

$$g\frac{dn^t(t)}{dt}=\begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g_{01} & g_{00}-g_{02} & g_{01} \\ g_{11} & g_{10}-g_{12} & g_{11} \\ g_{21} & g_{20}-g_{22} & g_{21} \end{pmatrix}$$

$g_{10}=\left(1+\frac{\tau^2}{2}\right)se^{-\alpha}+\tau+s\frac{\tau^2}{2}e^{-\alpha}$ elemanını alalım.

$$\frac{\partial g_{10}}{\partial s}=\left(1+\frac{\tau^2}{2}\right)e^{-\alpha}+\frac{\tau^2}{2}e^{-\alpha}=\left(1+\tau^2\right)e^{-\alpha}$$

$$\frac{\partial g_{10}}{\partial \alpha}=-\left(1+\frac{\tau^2}{2}\right)se^{-\alpha}-\frac{\tau^2}{2}se^{-\alpha}=-\left(1+\tau^2\right)se^{-\alpha}$$

$$\frac{\partial g_{10}}{\partial \tau}=1+2\tau se^{-\alpha}$$

$$\left(1+\tau^2\right)e^{-\alpha}\frac{ds'}{dt}-\left(1+\tau^2\right)se^{-\alpha}\frac{d\alpha'}{dt}+\left(1+2\tau se^{-\alpha}\right)\frac{d\tau'}{dt}=1+2\tau se^{-\alpha}$$

$g_{11}=1+2s\tau e^{-\alpha}$ elemanını alalım.

$$2\tau e^{-\alpha}\frac{ds'}{dt}-2\tau se^{-\alpha}\frac{d\alpha'}{dt}+2se^{-\alpha}\frac{d\tau'}{dt}=2se^{-\alpha}$$

$g_{12}=\frac{\tau^2}{2}se^{-\alpha}+\tau-\left(1-\frac{\tau^2}{2}\right)se^{-\alpha}$ elemanını alalım.

$$\left(-1+\tau^2\right)e^{-\alpha}\frac{ds'}{dt}+\left(1-\tau^2\right)se^{-\alpha}\frac{d\alpha'}{dt}+\left(1+2\tau se^{-\alpha}\right)\frac{d\tau'}{dt}=1+2\tau se^{-\alpha}$$

Bu denklem -1 ile çarpılıp yukarıdaki iki denklemle aralarında gerekli işlemler yapılırsa ;

$$2e^{-\alpha}\frac{ds'}{dt}-2se^{-\alpha}\frac{d\alpha'}{dt}=0,\ \frac{ds'}{dt}-s\frac{d\alpha'}{dt}=0$$

$$2\tau e^{-\alpha}\frac{ds'}{dt}-2s\tau e^{-\alpha}\frac{d\alpha'}{dt}+2se^{-\alpha}\frac{d\tau'}{dt}=2se^{-\alpha}$$

$$2\tau e^{-\alpha}\ /\qquad \frac{ds'}{dt}-s\frac{d\alpha'}{dt}=0$$

$$\frac{ds'}{dt}=s\frac{d\alpha'}{dt},\ 2se^{-\alpha}\frac{d\tau'}{dt}=2se^{-\alpha},\ \frac{d\tau'}{dt}=1$$

$$\left(2s\tau e^{-\alpha}-2s\tau s e^{-\alpha}\right)\frac{d\alpha'}{dt}=0$$

$$\frac{d\alpha'}{dt}=0$$

$$\frac{ds'}{dt}=0$$

olur. Buradan n_+ üreteci ;

$$n_+=\frac{\partial}{\partial\tau} \tag{12}$$

şeklinde bulunur.

Böylece $g=nan^t$ açılımı ele alınarak grubun regüler temsilinden Δ_{LB} operatörünü oluşturmak için gerekli olan sonsuz küçük operatörler

$$\begin{aligned} a_1&=\frac{\partial}{\partial\alpha}+\tau\frac{\partial}{\partial\tau}\\ n_-&=e^{\alpha}\frac{\partial}{\partial s}-2\tau\frac{\partial}{\partial\alpha}-\tau^2\frac{\partial}{\partial\tau}\\ n_+&=\frac{\partial}{\partial\tau}\end{aligned} \tag{13}$$

şeklinde bulunmuş olur. Buradan bu ifadeleri (1) denkleminde yerine yazarsak Laplace-Beltrami operatörü ;

$$\Delta_{LB}=\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial}{\partial\alpha}+e^{\alpha}\frac{\partial^2}{\partial s\partial\tau} \tag{14}$$

şeklinde olur.

Grubun bir g elemanının $g=k'ak$ açılımından ve regüler temsilin sonsuz küçük operatörlerinden invaryant (Laplace-Beltrami) operatörünün ifadesi aşağıdaki gibi verilmişti $[4]$.

$$\begin{aligned}\Delta_{LB}&=B_1^2+B_2^2-B_0^2\\&=\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+Coth\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{1}{Sinh^2\alpha}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi_1^2}-Cosh\alpha\frac{\partial^2}{\partial\varphi_1\varphi_2}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi_2^2}\right)\end{aligned}$$

Benzer şekilde $g=kan$ açılımı için ;

$$\Delta_{LB}=\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial}{\partial\alpha}+e^{-2\alpha}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+2e^{-\alpha}\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial\varphi}$$

ve $g = nan^t$ açılımı için ;

$$\Delta_{LB} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial}{\partial \alpha} + e^{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial s \partial \tau}$$

biçiminde bulunur.

KAYNAKLAR

[1]. ***Y.A. Verdiyev*****,** Plane Waves, Integrable Quantum Systems and the Group $SO(p,q), p \le q.$ J.Phys.A:Math.Gen.30 (1997) , 4089-4107.

[2]. ***M.A. Olshanetsky*** and ***A.M. Perelomov***, Quantum Integrable Systems Related to Lie Algebra, Phys.Rep.94 (1983), 31.

[3]. ***I.M. Gel'fand, R.A. Minlos*** and ***Z.Ya. Shapiro***, Represention of the Rotation and Lorentz Groups and their Applications,The Macmillan Company,New York, $[96]$.

[4]. ***Y.A. Verdiyev*** **,** Harmonic Analysis on Homogenous Spaces of $SO(1,2)$, Hadronic Press, Nonantum, Massachusetts, 1988, U.S.A.

[5]. ***M. Sezgin , A.Y. Verdiyev , Y.A. Verdiyev ,*** Various decomposition of the Group $SL(2,R)$ and Quantum Integrable systems, Hadronic Journal 22 (1999) , 135-144.

[6]. ***N.Ya.Vilenkin*** and ***A.U. Klimyk***, Represantation of Lie Groups and Special Functions, Vol.I-II, Kluwer Academic Publ., London, 1991.

[7]. ***S. Helgason***, Groups and Geometric Analysis, Academic Pres Inc. 1984.

[8]. ***A.O. Barut*** and ***R. Raczka***, Theory of Group Represantation and Applications, PWN-Polish Scientific Publishers,Warszawa, 1980.

[9]. ***M. Sezgin , F. Uysal , Y.A. Verdiyev***, The Casimir Operations of Group $SO(1,3)$ for Various Decompositions, Hadronic Journal , 24, (2001) , 567-574.

[10]. ***M.J. Englefield***, Group Theory and the Coulomb Problem, John Wiley & Sons, Inc. 1972.

[11]. ***M.A. Naimark***, Linear Representations of the Lorentz Group, The Macmillan Company, New York , 1964 .

[12]. ***R. Gilmore***, Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications, John Wiley and Sons.Inc., 1974.

[13]. ***E.G .Kalnins***, Mixed Basis Matrix Elements for the Subgroup Reductions of $SO(2,1)$, J.Math.Phys., Vol.14, No.5, May 1973, 654-

[14]. ***Brian G. Wybourne***, Classical Groups for Physicists, John Wiley & Sons Inc. 1974

ÖZGEÇMİŞ

2 Ocak 1967'de Edirne-Sarayakpınar'da doğdu. Edirne'de sırasıyla Yusuf Hoca İlkokulu, Mimar Sinan Orta Okulu, Edirne Teknik Lisesi Makina Bölümünü bitirdi. 1985 yılında kazandığı Trakya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden Nisan-1990'da mezun oldu. 1991-1992 yıllarında yedek subay olarak askerliğini yaptıktan sonra Ağustos 1992'de Şanlıurfa Lisesinde öğretmenlik mesleğine başladı. 1992-1994 yılları arasında Şanlıurfa Lisesinde, 1994-1996 yılları arasında Edirne-Havsa Melahat Kilimci Lisesinde Matematik Öğretmeni olarak görev yaptı. 1996 yılında Milli Eğitim Bakanlığının açmış olduğu sınavı kazanarak aynı yıl Edirne Fen Lisesi Matematik Öğretmenliğine atandı. Halen aynı okulda görevine devam eden Özcan TEKÇE bu yıllar içersinde 5 yıl Müdür yardımcılığı görevinde bulundu.

Öğrencilik yıllarında okul takımlarında ve amatör spor kulüplerinde futbol, voleybol, masa tenisi oynadı. Sporculuk yaşantısını 1989 yılından sonra futbol hakemi olarak devam ettirdi. Türkiye Profesyonel Futbol Liglerinde 6 yıl futbol hakemliği, 2000 yılı Genç Hakemler Kurultayı Edirne Delegeliği, Faal Futbol Hakemleri ve Gözlemcileri Derneği Edirne Şube Yönetim Kurulunda Yöneticilik yaptı.